

CAPITOLO OTTAVO

VERIFICHE A FLESSIONE, TORSIONE E TAGLIO

Premessa.

Si reputano scontate le verifiche a flessione retta ed a pressoflessione retta, già comunque esaurientemente trattate in qualsivoglia tipo di testo o manuale. Si daranno quindi in questo capitolo alcune verifiche a flessione deviata, con taglio e torsione eventualmente ad essa affiancati. A ciò fare si premettono alcuni semplici problemi in presenza di torsione pura.

Problema n. 1.

La trave ad asse rettilineo AB della fig. 1a ha rigidità torsionale C_t costante^(*). La trave è vincolata in A con i quattro pendoli numerati da

(*) Si ricordi che, con riferimento ad un tronco elementare di lunghezza dz , è (φ_z si usa chiamarlo anche ϑ)

$$d\varphi_z = d\vartheta = \frac{M_t}{C_t} dz$$

da cui

$$\vartheta' = \frac{d\vartheta}{dz} = \frac{M_t}{C_t} \quad (1)$$

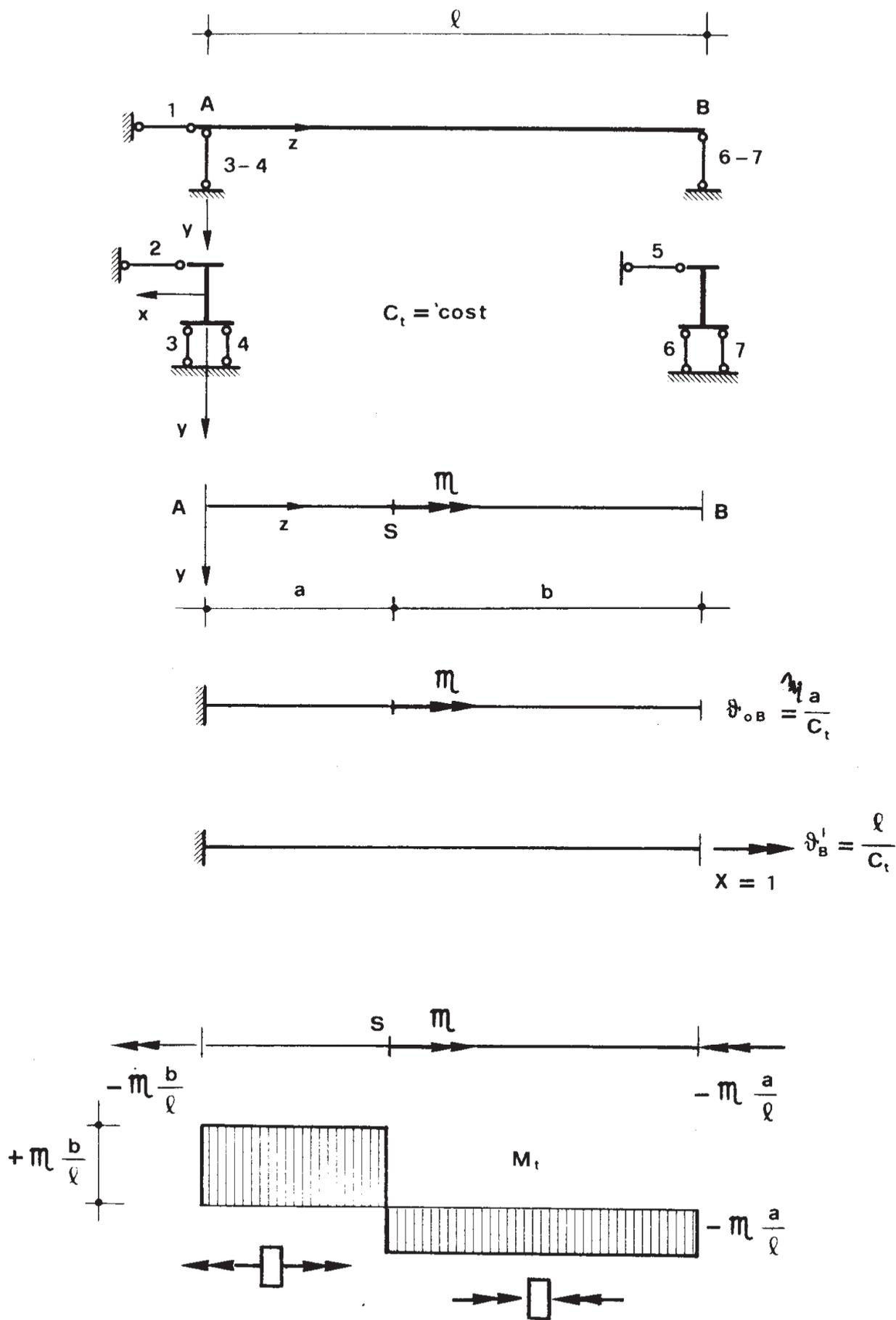


Figura 1a

1 a 4, in B con i tre pendoli numerati da 5 a 7. Tali pendoli si traducono nelle seguenti condizioni di vincolo(**)

$$z = 0 \quad : \quad u_A = v_A = w_A = 0 \quad ; \quad \vartheta_A = 0 \quad ;$$

$$z = l \quad : \quad u_B = v_B = 0 \quad ; \quad \vartheta_B = 0 \quad .$$

Le condizioni di vincolo, come i pendoli, sono sette; la struttura è quindi una volta iperstatica.

Si verifica subito che, utilizzando il procedimento di Lagrange, le reazioni R_{xA} R_{yA} R_{zA} R_{xB} R_{yB} si ottengono eliminando rispettivamente i pendoli

$$\begin{array}{ll} R_{xA} & 2 \\ R_{yA} & 3,4 \\ R_{zA} & 1 \\ R_{xB} & 5 \\ R_{yB} & 6,7 \quad ; \end{array}$$

quindi la struttura è isostatica per quanto attiene alle sollecitazioni di sforzo normale, flessione e taglio. Invece per ottenere le coppie \mathfrak{M}_{zA} o \mathfrak{M}_{zB} occorrerebbe eliminare uno dei pendoli 3 e 4, ed uno dei pendoli 6 e 7, e l'equazione di equilibrio del sistema reso così labile conterrebbe ambedue le coppie; quindi la struttura è iperstatica nei riguardi delle sollecitazioni di torsione.

Agisca una coppia \mathfrak{M} torcente all'ascissa $z = a$ (fig. 1 a). Il sistema è reso isostatico eliminando uno dei pendoli paralleli ad y , per esempio il 6; è così consentita la rotazione ϑ_B . Si ha

$$\vartheta_{0B} = \frac{\mathfrak{M}a}{C_t} \quad .$$

(**) Il pendolo 1 si suppone sia in asse con la trave, quindi A e B sono i due estremi dell'asse della trave.

In tutti i casi di sistemi non piani, in particolare di travi piane (struttura monodimensionale con asse contenuto in un piano) che non costituiscono però sistemi monodimensionali piani, è molto importante precisare i vincoli con pendoli; ciò almeno dal punto di vista teorico, ma sarebbe auspicabile anche nelle realizzazioni di un certo rilievo.

Una coppia \mathfrak{m}_{zB} unitaria provoca una rotazione in B data da

$$\vartheta_{1B} = \frac{1 \cdot l}{C_t}.$$

La condizione di congruenza si scrive

$$\vartheta_{0B} + X \vartheta_{1B} = 0$$

da cui si ottiene

$$\mathfrak{m}_{zB} = X = - \mathfrak{m} \frac{a}{l}. \quad (2)$$

Per l'equilibrio alla rotazione intorno all'asse z si ha poi

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m}_{zA} + \mathfrak{m}_{zB} = 0$$

da cui

$$\mathfrak{m}_{zA} = - \mathfrak{m} + \mathfrak{m} \frac{a}{l} = - \mathfrak{m} \frac{b}{l}. \quad (3)$$

Nella fig. 1a sono riportati sia le coppie reattive \mathfrak{m}_{zA} ed \mathfrak{m}_{zB} che il diagramma dei momenti torcenti; in A è

$$M_{tA} = - \mathfrak{m}_{zA} = \mathfrak{m} \frac{b}{l} \quad (4)$$

$$M_{tB} = \mathfrak{m}_{zB} = - \mathfrak{m} \frac{a}{l}.$$

Se la trave appoggiata AB si carica (fig. 1b) in S , all'ascissa $z = a$, con una forza fittizia verticale

$$F^* = \mathfrak{m}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} R_A^* &= \mathfrak{m}_{zA} \\ R_B^* &= \mathfrak{m}_{zB} \end{aligned} \quad (5)$$

$$T^* = M_t .$$

Si ha poi

$$\vartheta = \begin{cases} -\frac{m_{zA}}{C_t} z \\ \frac{m_{zB}}{C_t} z + \frac{m \cdot a}{C_t} = -\frac{m_{zB}}{C_t} (l - z) \end{cases}$$

$$C_t = \text{cost}$$

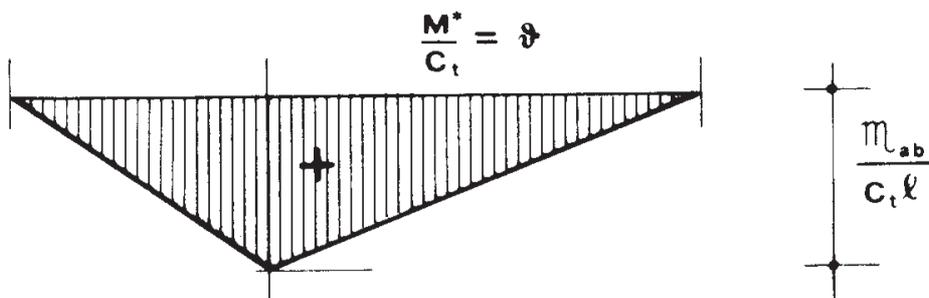
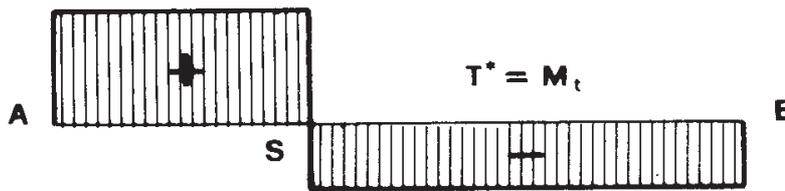
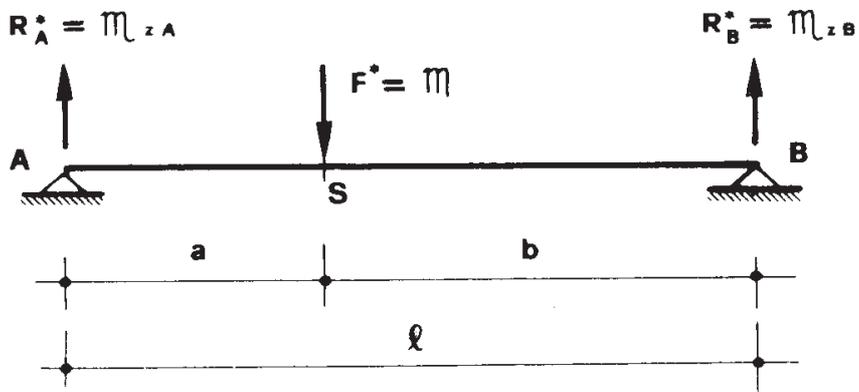


Figura 1b

nei due intervalli $[AS]$ ed $[SB]$; se ne trae

$$\frac{M^*}{C_t} = \vartheta . \quad (6)$$

I risultati (5) e (6) sono di carattere più generale, come si mostrerà nel seguito.

Problema n. 2.

La stessa trave del problema precedente sia caricata da un insieme di coppie torcenti m_t uniformemente distribuite (fig. 2a). Le condi-

$$C_t = \text{cost}$$

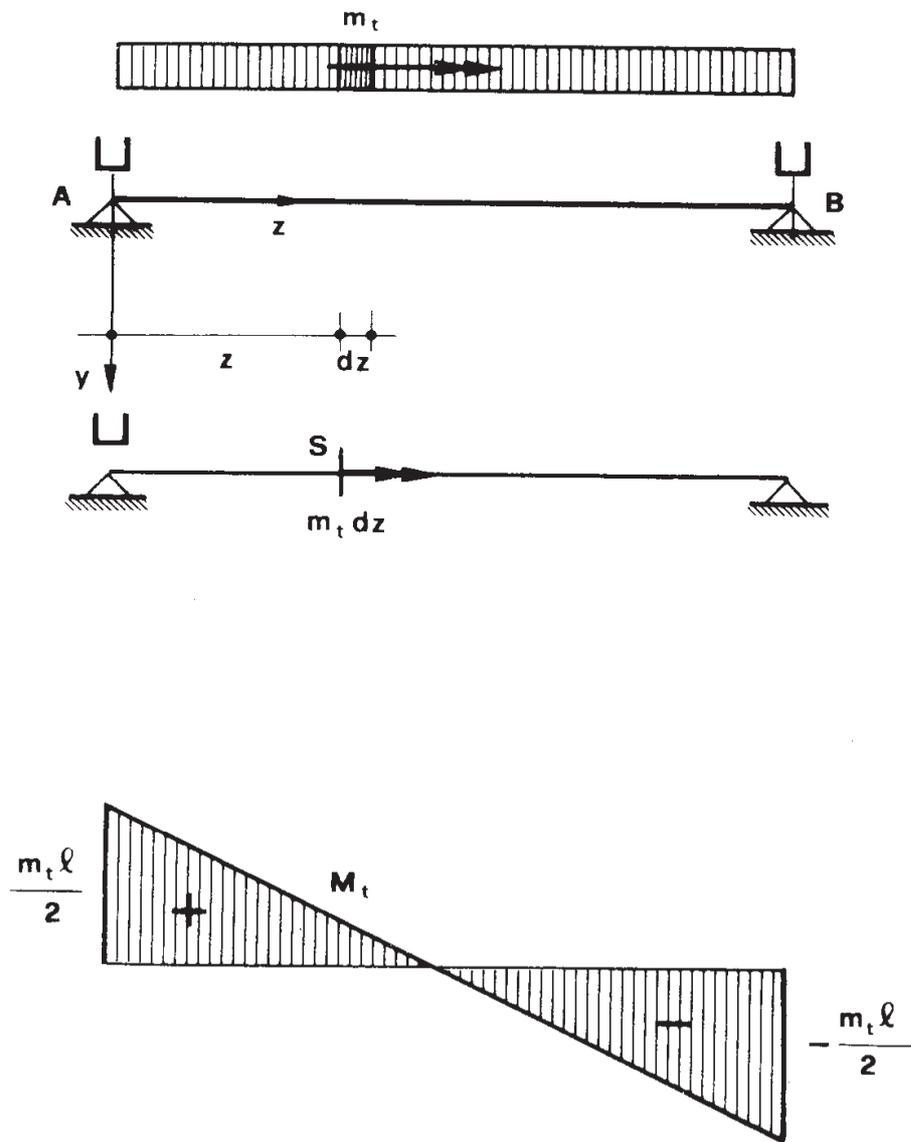


Figura 2a

zioni di vincolo $\vartheta_A = 0$ e $\vartheta_B = 0$ sono rappresentate graficamente con il

simbolo \sqcup sui due appoggi A e B : si può dire che in A , come in B , il vincolo è un *appoggio flessionale* ed un *appoggio torsionale*^(*).

Si opera sulla stessa struttura isostatica del problema precedente, e cioè eliminando il vincolo torsionale in B . Su tale struttura si ha :

$$M_{t0} = \int_z^l m_t dz = m_t (l - z)$$

e quindi

$$\vartheta_{0B} = \int_0^l \frac{M_{t0}}{C_t} dz = \frac{m_t l^2}{2 C_t} .$$

L'equazione di congruenza è

$$\frac{m_t l^2}{2 C_t} + \frac{X l}{C_t} = 0$$

da cui

$$\mathfrak{M}_{zB} = X = - \frac{m_t l}{2} . \quad (7)$$

L'equilibrio alla rotazione intorno all'asse z importa

$$\mathfrak{M}_{zA} = - \frac{m_t l}{2} . \quad (8)$$

Il momento torcente M_t all'ascissa generica z è

$$M_t = - \mathfrak{M}_{zA} - \int_0^z m_t dz = m_t \left(\frac{l}{2} - z \right) . \quad (9)$$

La rotazione ϑ all'ascissa generica z è

$$\vartheta = \frac{1}{C_t} \int_0^z M_t dz =$$

(*) Il vincolo che impone $\vartheta = 0$ è un *appoggio torsionale*; il vincolo che impone $\vartheta = \vartheta' = 0$ (e cioè $\vartheta = 0$ in due sezioni molto vicine) è un *incastro torsionale*.

$$= \frac{m_t}{2C_t} z (l - z).$$

Le (5) e (6) sono perciò verificate anche nel nostro caso (fig. 2b).

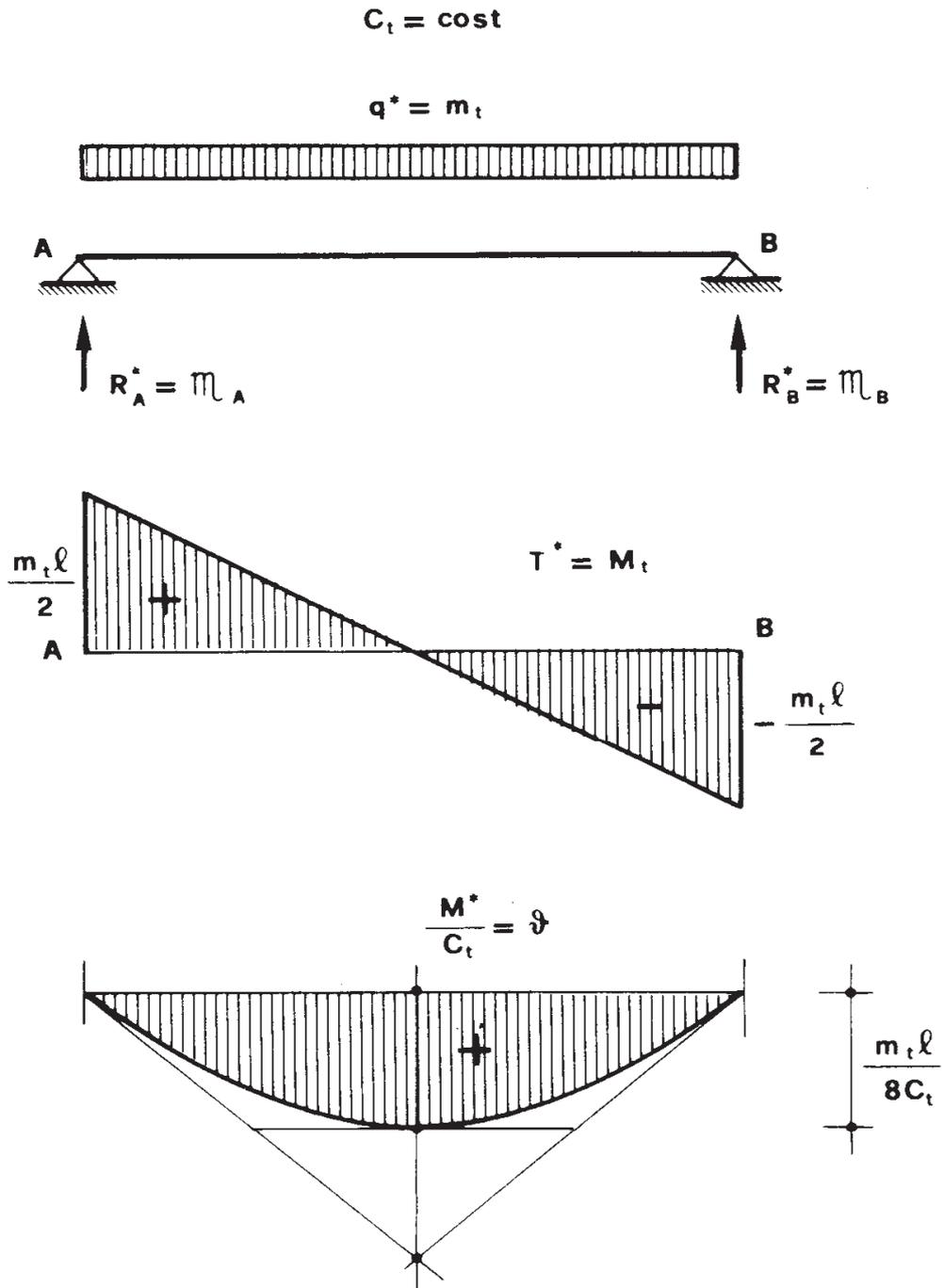


Figura 2b

Problema n. 3.

Si prende ancora in esame la trave del prob. 1; essa è soggetta alle coppie torcenti m_t distribuite con legge qualsiasi (fig. 3). Si ha così, eliminando l'incastro torsionale in B, e calcolando ϑ_{0B} come somma dei

contributi $\frac{m_t dz}{C_t} z$ delle coppie elementari $m_t dz$,

$$\vartheta_{0B} = \frac{1}{C_t} \int_0^l m_t z dz ; \quad (10)$$

quindi, per la

$$\vartheta_{0B} + X \vartheta_{1B} = 0 ,$$

si ha

$$\mathfrak{M}_{zA} = - \frac{1}{l} \int_0^l m_t (l - z) dz \quad (11)$$

$$\mathfrak{M}_{zB} = - \frac{1}{l} \int_0^l m_t z dz .$$

Si ricordi che data una trave appoggiata di luce l , soggetta ad un carico $q(z)$ distribuito, risulta

$$R_A = - \frac{1}{l} \int_0^l q (l - z) dz \quad (12)$$

$$R_B = - \frac{1}{l} \int_0^l q z dz ;$$

dal paragone tra le (11) e le (12) risulta che \mathfrak{M}_{zA} ed \mathfrak{M}_{zB} , per C_t costante, possono essere calcolate come le reazioni di un carico fittizio $q^*(z) = m_t(z)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{zA} &= R_A^* \\ \mathfrak{M}_{zB} &= R_B^* . \end{aligned} \quad (13)$$

Poichè poi è

$$M_t = - \mathfrak{M}_{zA} - \int_0^z m_t dz$$

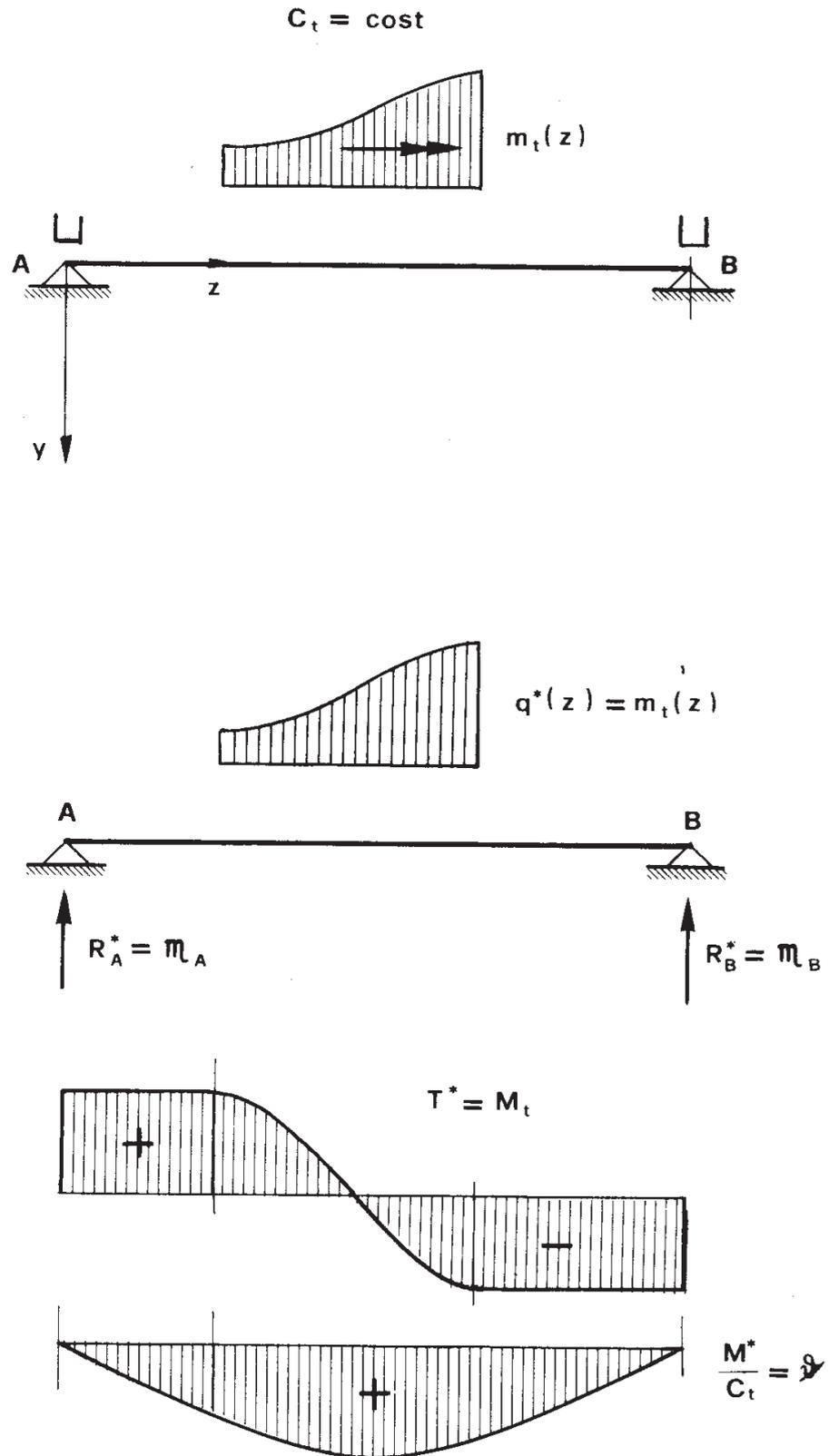


Figura 3

$$T = -R_A - \int_0^z q dz$$

può scriversi pure

$$M_t = T^* . \quad (14)$$

Per l'equilibrio alla rotazione intorno all'asse z del tronco elementare lungo dz si ha

$$m_t dz + \frac{dM_t}{dz} dz = 0$$

da cui

$$m_t = - \frac{dM_t}{dz} \quad (15)$$

Dalla (15) e dalla

$$q = - \frac{dT}{dz} ,$$

si ha conferma ulteriore della (14).

E' poi

$$\vartheta' = \frac{d\vartheta}{dz} = \frac{M_t}{C_t}$$

$$\frac{dM}{dz} = T ;$$

poichè il legame tra T^* ed M^* è uguale, a meno di C_t , a quello tra M_t e ϑ , può scriversi

$$\vartheta = \frac{M^*}{C_t} . \quad (16)$$

Le fondamentali dei due diagrammi T^* ed M^* si hanno sfruttando le condizioni ai limiti in M_t e ϑ .

Problema n. 4.

La trave della fig. 4 presenta C_t variabile con z . L'angolo ϑ_{0B} non

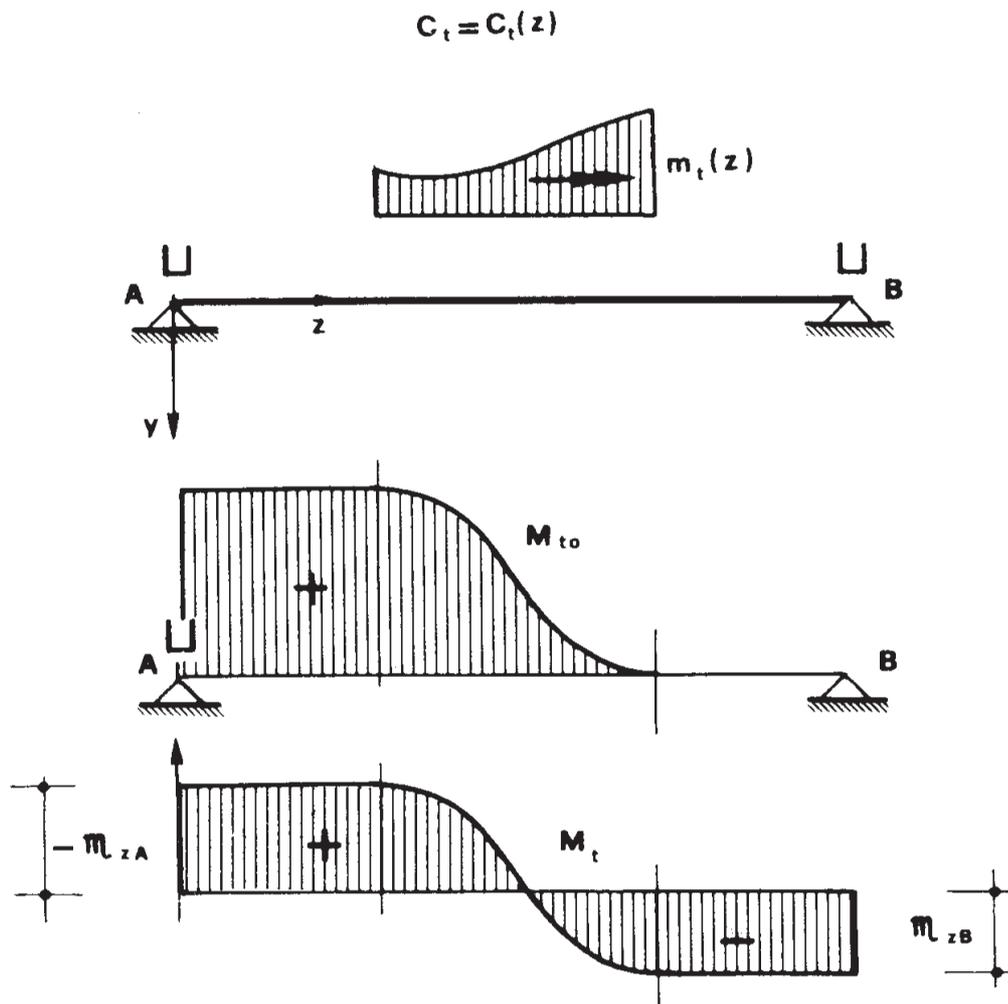


Figura 4

può essere calcolato più con la (10), ma occorre esprimerlo attraverso il momento M_{t0} ; si ha così

$$\vartheta_{0B} = \int_0^l \frac{M_{t0}}{C_t} dz, \quad (17)$$

e cioè si ottiene ϑ_{0B} sommando i contributi alla ϑ_{0B} inerenti alla deformazioni dei tronchi elementari. Poichè è pure

$$\vartheta_{1B} = \int_0^l \frac{1}{C_t} dz \quad (18)$$

se ne trae

$$\mathfrak{M}_{zB} = \frac{\int_0^l \frac{M_t^o}{C_t} dz}{\int_0^l \frac{1}{C_t} dz} \quad (19)$$

Il diagramma degli M_t si ottiene da quello degli M_{t0} disegnando dall'estremo di \mathfrak{M}_{zB} la parallela all'asse z (fig. 4).

Problema n. 5.

La trave AB della fig. 5 è vincolata sia in A che in B con appoggio flessionale e torsionale; è costituita da due parti AS ed SC , di luce $\frac{l}{2}$ ciascuna, e ciascuna di sezione costante; è soggetta in S ad una coppia torcente \mathfrak{M} .

La rigidità torsionale del tratto AS è (Bredt 2^a)

$$C_{t1} = \frac{4 A_m^2 G}{\int_m \frac{ds}{\delta}} = \frac{4 G a^4}{4 a} \delta = G a^3 \delta ; \quad (20)$$

la rigidità torsionale del tratto SB è

$$C_{t2} = \frac{G}{3} \sum s_i \delta_i^3 = \frac{G}{3} 3 a \delta^3 = G a \delta^3 . \quad (21)$$

Come struttura isostatica si adotta ancora quella che si ottiene concedendo alla sezione B facoltà di ruotare intorno all'asse z . E' così

$$\vartheta_{0B} = \frac{\mathfrak{M} \frac{l}{2}}{G a^3 \delta} = \frac{\mathfrak{M} l}{2 G a^3 \delta}$$

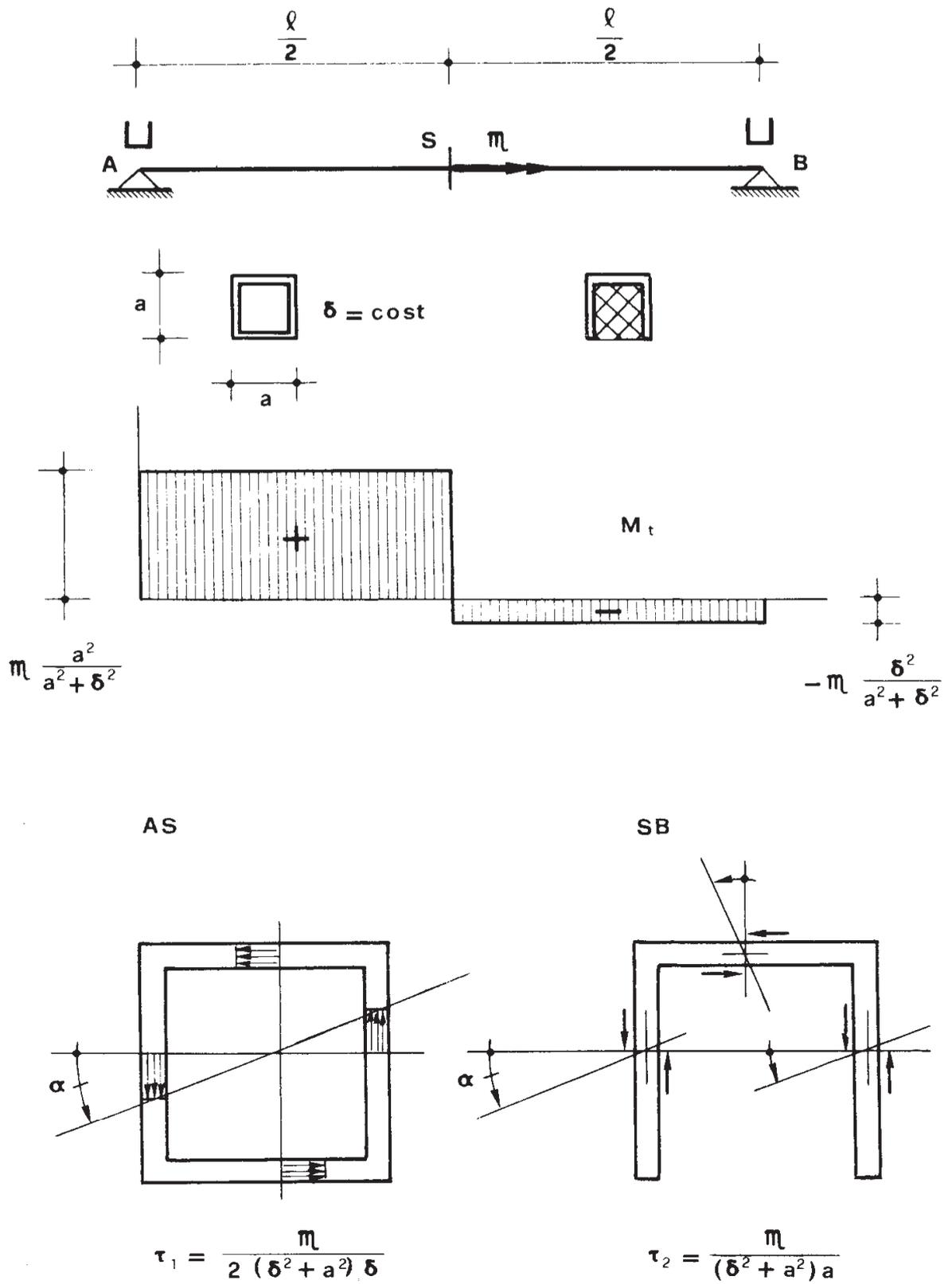


Figura 5

$$\vartheta_{1B} = \frac{\frac{l}{2}}{G a^3 \delta} + \frac{\frac{l}{2}}{G a \delta^3} =$$

$$= \frac{l}{2 G a^3 \delta} \left(1 + \frac{a^2}{\delta^2} \right);$$

l'equazione di congruenza

$$\vartheta_{0B} + X \vartheta_{1B} = 0$$

porge

$$X = \mathfrak{m}_{zB} = - \frac{\mathfrak{m}}{a^2 + \delta^2} \delta^2 . \quad (22)$$

La relazione di equilibrio globale

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m}_{zA} + \mathfrak{m}_{zB} = 0$$

porge poi

$$\mathfrak{m}_{zA} = - \frac{\mathfrak{m}}{a^2 + \delta^2} a^2 . \quad (23)$$

Il diagramma dei momenti torcenti è disegnato nella fig. 5; è interessante osservare come la parte più rigida della struttura assorba la maggiore aliquota della coppia applicata. E' immediato verificare che, per $\delta \rightarrow 0$, è

$$\mathfrak{m}_{zA} \rightarrow - \mathfrak{m}$$

$$\mathfrak{m}_{zB} \rightarrow 0 .$$

La tensione tangenziale nella sezione chiusa è (Bredt 1^a) costante, e pari a

$$\tau_1 = \frac{M_{t1}}{2 A_m \delta} = \frac{\mathfrak{m} a^2}{a^2 + \delta^2} \cdot \frac{1}{2 a^2 \delta} = \frac{\mathfrak{m}}{2 (a^2 + \delta^2) \delta} ; \quad (24)$$

nella sezione aperta la τ_{max} è invece

$$\tau_2 = \pm \frac{3M_{t2}}{s\delta^2} = \pm \frac{\delta^2}{a^2 + \delta^2} \frac{3}{3a\delta^2} = \pm \frac{\pi}{(a^2 + \delta^2)a} \quad (25)$$

Si osservi che risulta in modulo

$$\frac{M_{t2}}{M_{t1}} = \frac{\delta^2}{a^2} \quad (26)$$

$$\frac{\tau_{2max}}{\tau_1} = \frac{2\delta}{a}$$

Il rapporto tra le tensioni tangenziali è sfavorevole alla sezione chiusa, ma non tanto quanto lo è il rapporto tra i momenti.

In ambedue le sezioni si ha

$$tg \alpha = \text{rot } \tau = 2G\vartheta' = 2G \frac{M_t}{C_t} = \frac{2M_t}{(a^2 + \delta^2)a\delta}$$

Problema n. 6.

Si vuole fornire la spiegazione di un paradosso che ha non poco turbato parecchi cultori della materia. E' ben nota al lettore la trattazione approssimata della torsione della trave con sezione retta a forma di rettangolo allungato; essa importa che la coppia torcente applicata si traduca per metà nelle τ parallele al lato lungo, (con diagramma, su ogni spessore, costante, e del tipo bitriangolare, annullantesi nella mezzeria dello spessore stesso), e per l'altra metà in due forze uguali e contrarie concentrate lungo i due lati corti. E' anche noto che l'analogia della membrana, o simili, consente di trattare una trave con qualsiasi sezione aperta come somma di tante travi solidali a torsione, aventi come sezioni rette l'insieme dei rettangoli risultanti da una opportuna partizione della sezione assegnata. Sorge così il dubbio che le forze sui lati corti si eliminino a vicenda, ad esclusione delle due estreme; d'altro canto le τ bitriangolari devono equivalere a metà di tutta la coppia applicata, da cui si trarrebbe che le due forze estreme devono equivalere all'altra metà. Questo non è possibile, come per esempio facilmente si evince considerando una sezione a forma di corona circolare sottile con un taglio che la renda monoconnessa.

La difficoltà si supera considerando (fig. 6) che nella partizione in rettangoli due lati corti adiacenti non risultano coincidenti, e quindi le

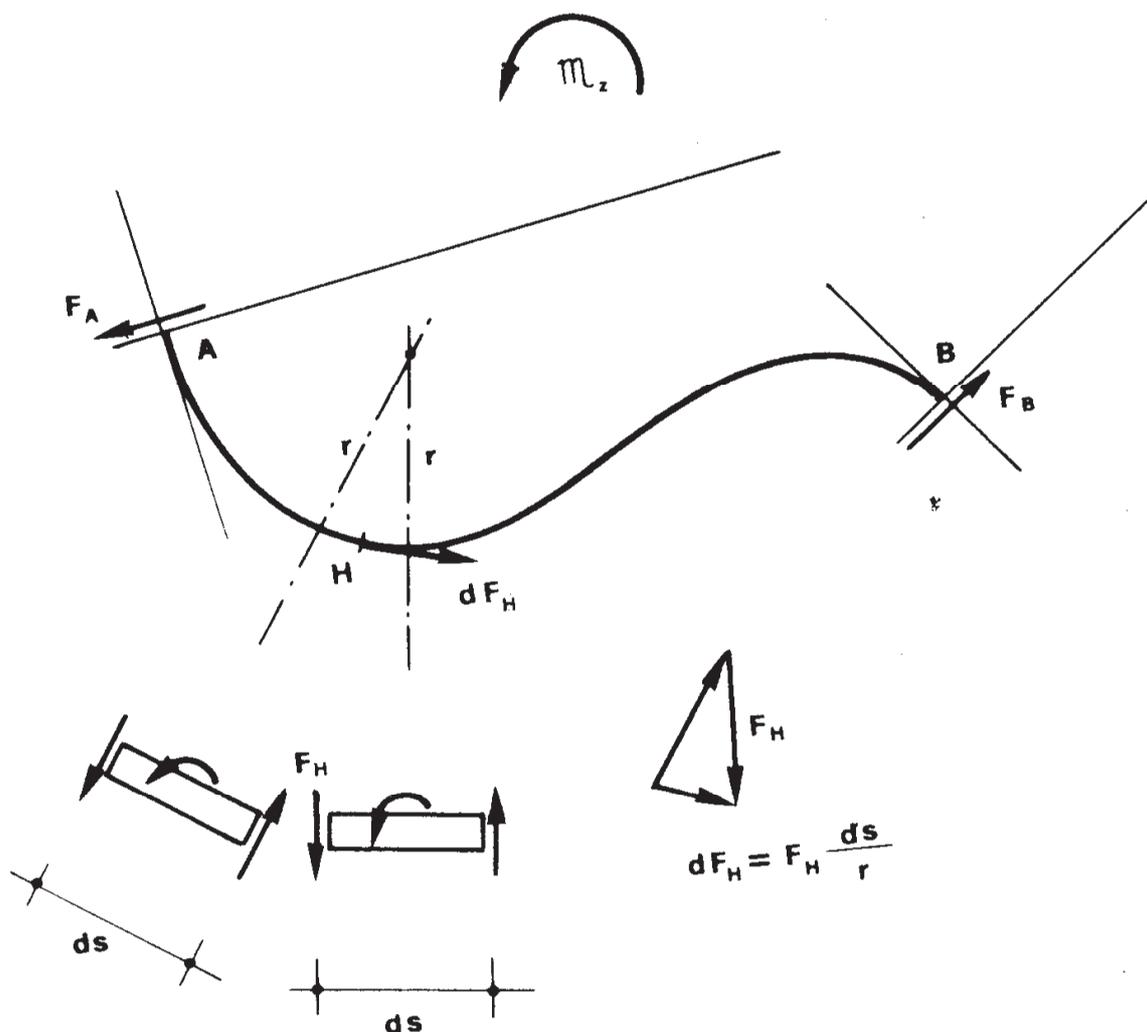


Figura 6

forze F_H corrispondenti forniscono una risultante dF . Il valore della dF_H generica è

$$dF_H = \frac{F_H}{r} ds ;$$

essa è diretta secondo la tangente alla linea media, e fornisce rispetto al centro di curvatura in H un momento concorde ad M_z . Il complesso delle dF_H e delle due forze di estremità F_A ed F_B costituisce una coppia; esso infatti equivale al complesso delle F_H e delle F_A ed F_B , che sono somma di coppie.

Problema n. 7.

La trattazione delle sezioni sottili(*) si fonda sull'ipotesi che opportuni accorgimenti, come la realizzazione di setti o diaframmi trasversali garantiscano la conservazione della forma della sezione retta, pur senza impedirne l'ingobbimento; in altre parole, i setti non hanno alcun effetto sulle componenti w dello spostamento parallele all'asse della trave, ma impongono che le componenti u e v siano ascrivibili ad una rotazione rigida intorno ad un asse parallelo all'asse della trave. Sia ϑ tale rotazione, si può scrivere quindi

$$\vartheta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (27)$$

(si ricordi che in una piccola rotazione rigida ω di componenti p q r il rotore dello spostamento s_r ha componenti $2p$, $2q$, $2r$, e cioè è costante, e pari al doppio di ω).

Si può, per quanto sopra, ottenere il rotore di τ .

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \tau &= \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = G \left(\frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = \\ &= G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = \\ &= G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \right) = G \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

da cui, per la (27),

$$\operatorname{rot} \tau = 2 G \vartheta' . \quad (28)$$

(*) Si parla di sezione sottile, piuttosto che di trave a sezione retta sottile, perchè si è in tema di verifica di resistenza, e si vogliono le tensioni in una sezione di cui già si conoscono le caratteristiche della sollecitazione.

Quindi il rotore di τ è costante, in particolare nullo nel *taglio puro* ($\vartheta = 0$).

La divergenza di τ è

$$\operatorname{div} \tau = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}$$

e quindi, per la terza delle equazioni indefinite di equilibrio,

$$\operatorname{div} \tau = - \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} .$$

Dalla

$$\sigma_z = - \frac{T_f (l - z)}{I_n} d_n$$

(dove n è l'asse neutro) si trae

$$\operatorname{div} \tau = - \frac{T_f}{I_n} d_n . \quad (*) \quad (29)$$

Quindi la divergenza di τ è proporzionale alla componente del taglio normale all'asse neutro, ed alla distanza dall'asse neutro, nella *torsione pura* ($T = 0$) essa è nulla.

Chiamando τ_n e τ_s le componenti di τ secondo la normale n_i e la tangente t_i alla linea media, si ha dalle (28) e (29)

$$\frac{\partial \tau_s}{\partial n} - \frac{\partial \tau_n}{\partial s} = 2 G \vartheta' \quad (30)$$

$$\frac{\partial \tau_n}{\partial n} + \frac{\partial \tau_s}{\partial s} = - \frac{T_f}{I_n} d_n ; \quad (31)$$

nello scrivere tali formule si è supposto che n_i e t_i siano orientate in modo che $n_i t_i = 90^\circ$ (antiorario).

La seconda ipotesi è che nei tratti della sezione *ad asse rettilineo*

(*) L'asse di flessione f è tale che $nf = 90^\circ$ (antiorario).

e di spessore δ costante sia $\tau_n = 0$ (essa è in rigore nulla agli estremi di δ , e per la sottigliezza si può supporre che sia nulla lungo tutto lo spessore δ). Si ha allora dalle (30) e (31)

$$\frac{\partial \tau}{\partial n} = 2 G \vartheta' \quad (32)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial s} = - \frac{T_f}{I_n} d_n ; \quad (33)$$

nella torsione pura ($T_f = 0$) la τ è costante lungo t_i , e varia linearmente lungo n_i ; nel taglio puro ($\vartheta' = 0$) la τ varia parabolicamente lungo t_i , ed è costante lungo n_i . In più, e questa può essere considerata come una terza ipotesi, nelle sezioni *aperte* soggette a *torsione pura* si ammette che sulla linea media sia $\tau_m = 0$: tale ipotesi, consentita dall'analogia idrodinamica come da quella della membrana, è giustificata anche dal teorema del flusso applicato ad una delle due parti in cui la sezione, che è aperta, viene sconnessa da un taglio secondo δ .

Lo studio delle sezioni *sottili aperte* (monoconnesse) generiche si esegue scomponendo la sezione in tratti ad asse rettilineo e spessore costante; in alcune sezioni, e sono la massima parte, ciò può farsi in stretto rigore, in altre con una certa approssimazione. Nella *torsione pura* le τ variano, sul generico spessore δ , con legge lineare, annullandosi nel punto medio di δ ; la pendenza del diagramma di τ su δ è lo stesso su tutti gli spessori (32), e quindi la τ^* ai bordi (uguale in modulo ai due estremi di ogni diametro) è proporzionale alla lunghezza di δ . In particolare risulta

$$\vartheta' = \frac{3M}{G \sum s_i \delta_i^3} \quad (34)$$

$$\tau^* = \frac{3M}{\sum s_i \delta_i^3} \delta , \quad (35)$$

dove le Σ sono estese ai rettangoli in cui la sezione è scomposta. Nel *taglio puro* la (33) permette di scrivere, attraverso il teorema della divergenza,

$$\tau = - \frac{T_f S_n}{I_n \delta} ; \quad (36)$$

lo spessore δ divide la sezione in due parti non connesse, ed S_n è il mo-

mento statico rispetto all'asse neutro n orientato dalla parte di sezione da cui esce la t_i positiva.

Se la sezione presenta dei *nodi*, e cioè dei punti di diramazione della linea media, in ciascuno di questi deve verificarsi, per il teorema della divergenza,

$$\sum \tau_i \delta_i = 0 \quad (37)$$

nella (37) il generico addendo deve scriversi con il segno + o - secondo che, in relazione al verso della t_i nel tratto i , la τ_i positiva è uscente o entrante nel nodo. Nella sezione *sottile chiusa* (pluriconnessa) la soluzione di una qualsiasi sezione aperta corrispondente (e cioè resa monoconnessa con tagli secondo opportuni spessori) è ancora soluzione delle equazioni di Cauchy della sezione chiusa, ma non è uniforme. Altre soluzioni delle equazioni di Cauchy sono fornite da distribuzioni di τ costanti lungo ogni spessore, costanti lungo ogni tratto rettilineo di spessore costante, e soddisfacenti le (37) sia nei nodi, sia nei punti di unione di due successivi tratti a spessore costante. Tali soluzioni sono ∞^n , se n sono i tagli che rendono monoconnessa la sezione, esse inoltre sono a risultante nulla, come facilmente si deduca dal fatto che la loro divergenza è nulla^(*). Le n relazioni necessarie e sufficienti di uniformità, traducesi nelle n relazioni di Stokes relative alle n maglie, permettono di combinare la soluzione della sezione monoconnessa con le ∞^n soluzioni di cui si è poco prima fatto cenno, ottenendo l'unica possibile soluzione equilibrata e congruente, comprendendo nella congruenza l'uniformità.

Nella torsione pura, la soluzione della sezione monoconnessa è in genere trascurabile rispetto alle altre, e quindi può supporre che τ sia costante lungo il generico spessore (in apparente contraddizione con la (32)).

Dato un asse neutro, le τ da taglio puro (intendendo per tale, come già detto, quello per cui $\vartheta' = 0$) sono definite, e quindi la loro risultante T . Eseguita tale costruzione per due assi neutri qualsiasi n_1 ed n_2 , il punto d'incontro delle rette d'azione di T_1 e T_2 definisce il *centro di taglio* C . Una forza tagliante T passante per C si può decomporre secondo le rette d'azione di T_1 e T_2 , e poichè a ciascuna delle componenti corrisponde

(*) Se la divergenza è nulla, si ha in ogni punto

$$\operatorname{div} \bar{\tau} = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = - \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 ;$$

perciò non può essere $T \neq 0$, poichè in tal caso ci sarebbe un $dM = Tz$, e quindi delle $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz$.

$\vartheta' = 0$. Viceversa, se a T corrisponde $\vartheta' = 0$, T deve passare per C , poichè in caso contrario può trasportarsi T in C , il che genera una coppia e quindi un ϑ' , mentre la T passante per C non può generare alcun ϑ' .

Nel disegno dei diagrammi $\tau(s)$ da taglio puro, che dopo avere scomposto la figura in rettangoli risultano essere un insieme di archi di parabola, è utile la seguente costruzione elementare: "dato il segmento AB di linea media, ed i valori di τ_A e di $\left(\frac{d\tau}{ds}\right)_A$, costruire il diagramma parabolico $\tau(s)$ su AB , ed in particolare i valori τ_B e $\left(\frac{d\tau}{ds}\right)_B$ ". Essa si esegue come si passa ad esporre, dopo aver determinato il punto

$$N = AB \cap n$$

(n asse neutro).

In N (fig. 7a) è, per la (33), $\frac{\partial \tau}{\partial s} = 0$; la tangente in corrispondenza

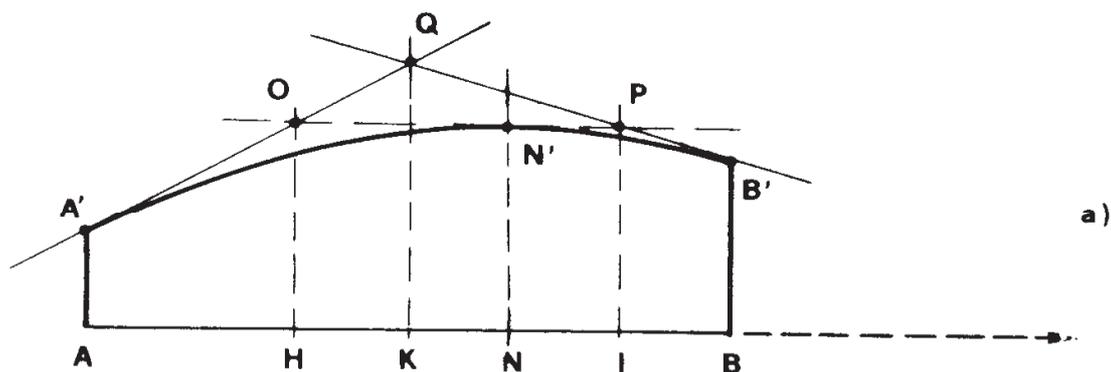


Figura 7a

di N è perciò parallela ad AB , e può ottenersi considerando che le due tangenti in corrispondenza di A e di N devono intersecarsi sulla normale ad AB per il punto medio H di AN ; quindi, si conduce per H la normale ad AB fino ad intersecare in O la tangente in A' , e da O si conduce la parallela ad AB (si ha pure così in N' l'estremo di τ_N).

La tangente ON' in corrispondenza di N e quella in corrispondenza di B devono intersecarsi sulla normale ad AB per il punto medio I di NB ; la tangente in corrispondenza di A e quella in corrispondenza di B devono intersecarsi sulla normale ad AB nel punto medio K di AB . Quindi, ottenuto P come intersezione della tangente in N' con la normale ad AB per I , e Q come intersezione della tangente in A' con la normale ad AB per K , la retta PQ è la tangente in corrispondenza di B ; la sua intersezione B' con la normale ad AB per B definisce l'ordinata $BB' = \tau_B$.

Nelle fig. 7a, b, c, d è riportata la suddetta costruzione nei quattro possibili casi in relazione alla posizione relativa di N , A , K , B , e precisamente per

- $N \in [K, B]$
- $N \in [B, +\infty]$
- $N \in [A, K]$
- $N \in [-\infty, A]$

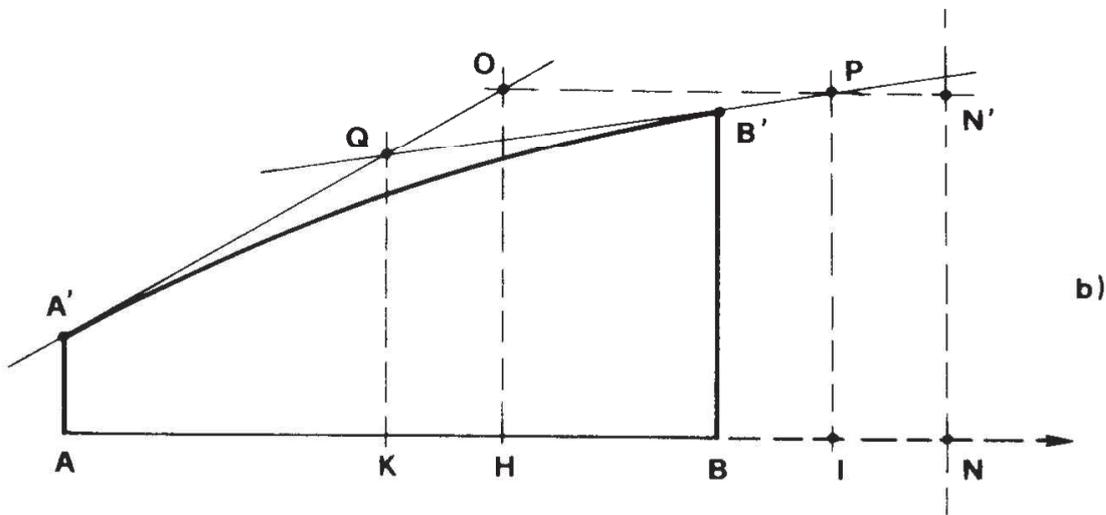


Figura 7b

Nella fig. 7e si è tracciato il diagramma $\tau(s)$ da taglio puro per il profilato ABD , di spessore costante, e per un dato asse neutro n . L'asse neutro n si è orientato, e così è pure fissato l'orientamento di f . Si fa l'ipotesi $T_f > 0$, senza peraltro fissarne il valore. Si parte da A , fissando arbitrariamente la tangente ($\tau_A = 0$, come risulta dalla (36)); avendo fissato da A a B , e da B a D , i versi della t_{AB} e della t_{BD} , e poichè dalla (33) risulta $\left(\frac{d\tau}{ds}\right)_A > 0$, la tangente in A deve essere disegnata in modo che la τ risulti crescente con t_{AB} . La τ si riporta infatti, se positiva, dalla parte delle n_{AB} positive.

La costruzione della fig. 7a fornisce il diagramma $\tau(s)$ su tutta AB .

In B il teorema della divergenza assicura che l'ordinata BB' è uguale all'ordinata BB'' ; attesi i versi delle t_{AB} e t_{BD} , la τ sui due spessori in B appartenenti ad AB e BD è positiva, quindi BB'' deve tracciarsi dalla parte della n_{BD} positiva, e cioè verso il basso. Seguendo il procedimento della fig. 7d si traccia il diagramma $\tau(s)$ in BD ; deve verificarsi $\tau_D = 0$

(l'inclinazione $\frac{d\tau}{ds}$ in B ovviamente non varia passando da AB a BD).

Ottenuto il diagramma $\tau(s)$ da taglio puro, si passa a determinare la risultante delle forze elementari $\tau \delta ds$, in funzione di un parametro, per esempio della τ_N . La risultante parziale T_{AB} delle $\tau \delta ds$ presenti su AB

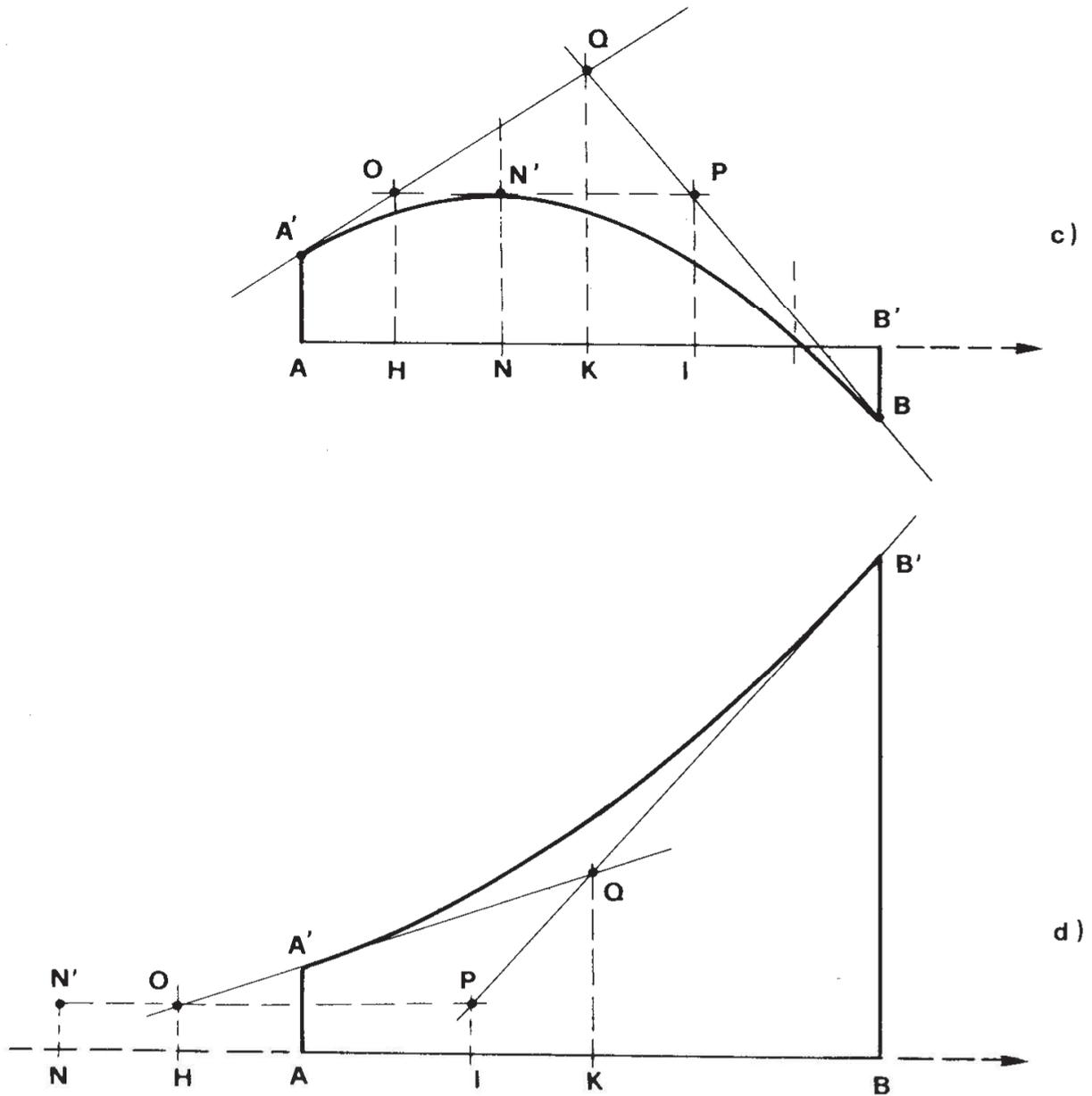


Figura 7c,d

è fornita, attesa la costanza dello spessore δ , dal prodotto

$$T_{AB} = \delta \int_A^B \tau ds = \delta A \tau_{AB} \quad (38)$$

dello spessore δ per l'area del segmento parabolico definito su AB dalla funzione $\tau(s)$; essa agisce lungo la linea media di AB . Analogamente si ha

$$T_{BD} = \delta \int_B^D \tau ds = \delta A \tau_{BD} . \quad (39)$$

Le frecce nei diagrammi di $\tau(s)$ della fig. 7e indicano soltanto il verso delle τ stesse. Il vettore risultante T di T_{AB} e T_{BD} è fornito dal triangolo di equilibrio: la risultante delle $\tau \delta ds$ è applicata lungo una retta s passante per il punto d'incontro B delle linee medie di AB e BD .

Deve verificarsi che la direzione di s sia coniugata di quella di n rispetto all'ellisse centrale d'inerzia, e che T_f sia positiva (nel disegno delle τ si è partiti da quest'ultima ipotesi).

Si osservi che ad ogni asse neutro n è associato un definito diagramma $\tau(s)$; la risultante T associata a ciascuno di tali diagrammi deve necessariamente contenere B , che è per ciò il centro di taglio.

Nella fig. 7f è studiato il profilato $ABDE$, in ciascuno dei tratti AB , BD , DE presenta spessore costante; l'asse neutro n è parallelo alle linee medie di AB e DE . I versi di t_{AB} , t_{BD} , t_{DE} sono consegnati nella figura.

In A è $\tau_A = 0$; la $\left(\frac{d\tau}{ds}\right)_A$ è positiva se T_f è positiva. Lungo AB la $\frac{d\tau}{ds}$ è costante, e quindi il diagramma $\tau(s)$ è lineare.

La $\tau(s)$ non è definita in B , poichè la funzione $\delta(s)$ è discontinua; per il teorema della divergenza è

$$-\tau_{BA} \cdot \delta_{AB} + \tau_{BD} \cdot \delta_{BD} = 0$$

da cui

$$\tau_{BD} = \tau_{BA} \frac{\delta_{AB}}{\delta_{BD}} \quad (40)$$

e quindi

$$BB'' = BB' \frac{\delta_{AB}}{\delta_{BD}} . \quad (41)$$

L'inclinazione $\frac{d\tau}{ds}$ in B non varia passando da AB a BD ; poichè

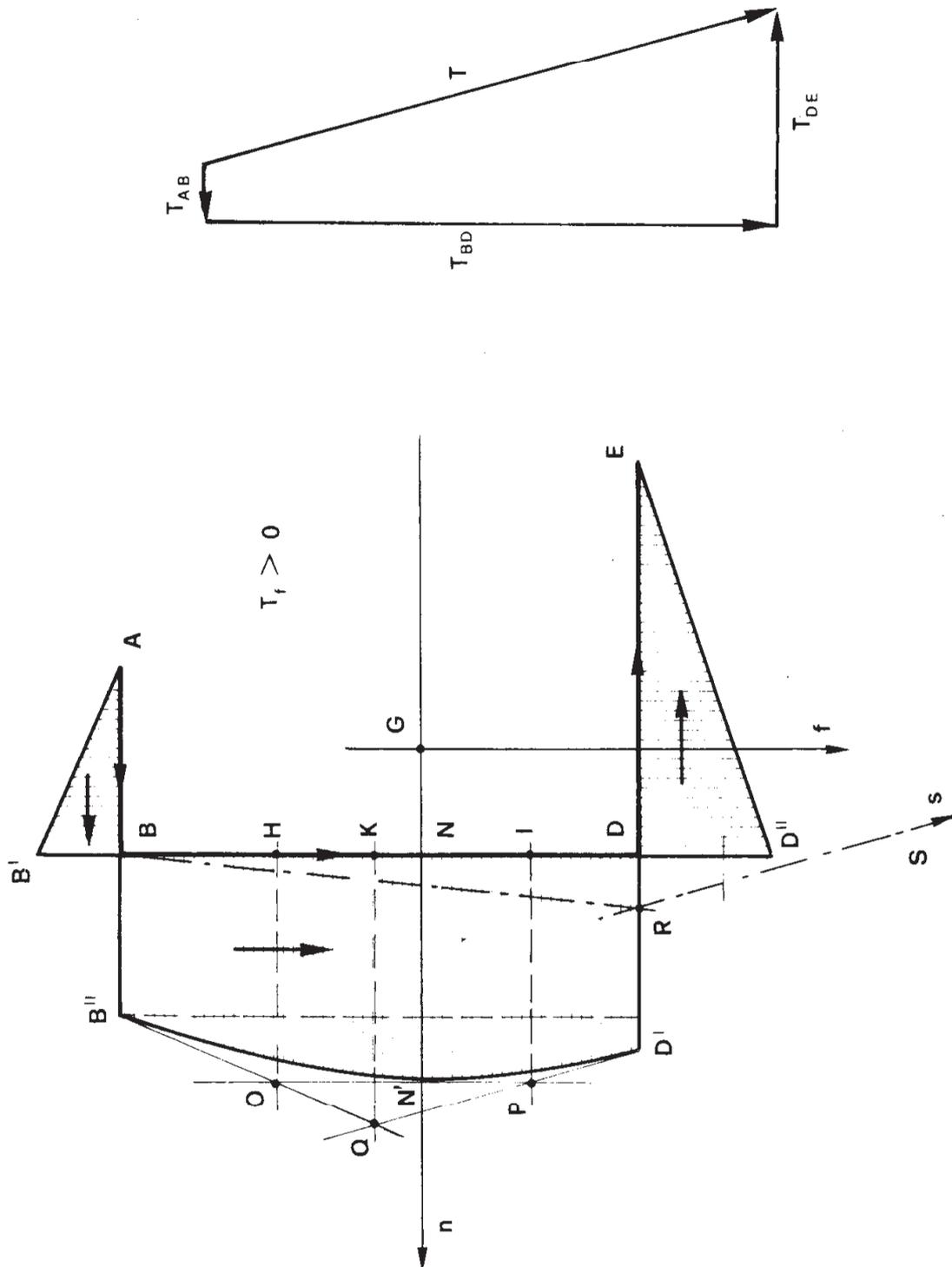


Figura 7f

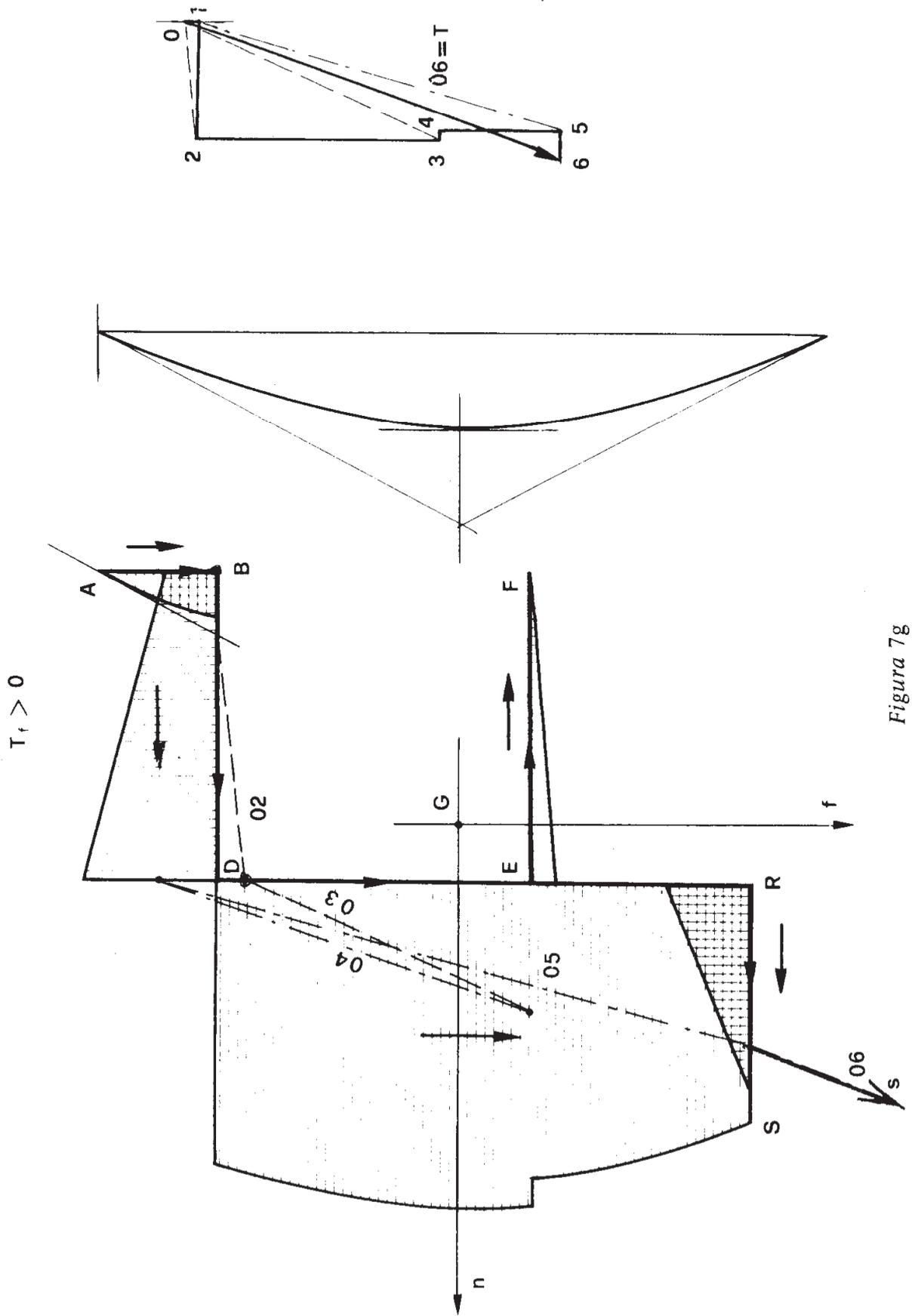


Figura 7g

la linea media di AB è ortogonale alla linea media di BD , ed attesi i versi di t_{AB} e t_{BD} , la tangente in B'' (relativa al tratto BD) è ortogonale alla AB' . Conoscendo BB'' e la tangente in B'' il diagramma $\tau(s)$ in BD si costruisce seguendo il procedimento della fig. 7a.

Il diagramma $\tau(s)$ in DE è lineare; il segmento DD'' è fornito da una relazione analoga alla (41):

$$DD'' = DD' \frac{\delta_{BD}}{\delta_{DE}} ;$$

l'inclinazione del diagramma $\tau(s)$ in DE è la stessa che il diagramma relativo al tratto BD presenta in D' , quindi il diagramma $\tau(s)$ in DE si ottiene conducendo da D'' la normale alla $D'Q$. Deve verificarsi che tale retta passi per E ($\tau_E = 0$).

Nella fig. 7f è pure disegnato il poligono delle forze T_{AB} , T_{BD} , T_{DE} , con il vettore risultante T , nonché il poligono delle successive risultanti

$$T_{AB}$$

$$T_{AB} + T_{BD} = BR$$

$$T_{BR} + T_{DE} = RS,$$

che fornisce in RS la retta d'azione s della risultante delle $\tau \delta ds$. Deve verificarsi che $T_f > 0$, e che s ed n sono coniugate rispetto all'ellisse centrale d'inerzia.

Se T agisce secondo RS , si ha taglio puro ($\vartheta' = 0$); in caso contrario, occorre sommare alle τ da taglio puro quelle da torsione pura, generate dalla coppia (torcente) di trasporto.

Nella fig. 7g si studia il profilato $ABDEFRS$; i tratti AB , BD , DR , EF , RS , sono ciascuno di spessore costante. L'asse neutro n è parallelo alle linee medie dei tratti BD , EF , RS ; in questi quindi la $\tau(s)$ presenta andamento lineare.

La costruzione inizia in A ($\tau_A = 0$) fissando la tangente al diagramma, in modo arbitrario, e prosegue in modo perfettamente analogo a quanto già fatto con riferimento alle sezioni delle figure 7e e 7f. Si osservi soltanto che in E la (37) impone

$$-\tau_{ED} \delta_{DE} + \tau_{EF} \delta_{EF} + \tau_{ER} \delta_{ER} = 0 ;$$

quindi occorre conoscere τ_{ED} (partendo da A) e τ_{EF} (partendo da F) per poter trarre τ_{ER} .

Il poligono delle $T_{i,i+1}$ fornisce il vettore T , il poligono delle successive risultanti la retta d'azione s di T nel taglio puro.

Problema n. 8.

Si vuole determinare il centro di taglio del profilato della fig. 8a. Le dimensioni sono riportate in millimetri.

Si procede innanzitutto al calcolo delle caratteristiche d'inerzia. Il profilato si suddivide in quattro rettangoli, così come appare nella fig. 8a. Le aree sono

$$A_1 = 36 \cdot 6 = 216 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = 74 \cdot 4 = 296 \text{ mm}^2$$

$$A_3 = 100 \cdot 6 = 600 \text{ mm}^2$$

$$A_4 = 28 \cdot 4 = \underline{112 \text{ mm}^2}$$

$$A = 1224 \text{ mm}^2$$

Si assumono come rette di primo riferimento le a e b della fig. 8a; si hanno così i momenti statici forniti dalla tabella 8.1.

	d_{ai}	d_{bi}	A_i	S_{ai}	S_{bi}
1	83	- 66	216	17928	- 14256
2	43	- 50	296	12728	- 14800
3	3	- 50	600	1800	- 30000
4	20	- 2	112	2240	- 224
				34696	- 59280

Tabella 8.1

le dimensioni di d_a e d_b sono mm , di A mm^2 , di S mm^3 .

Le distanze del baricentro G da a e b sono quindi

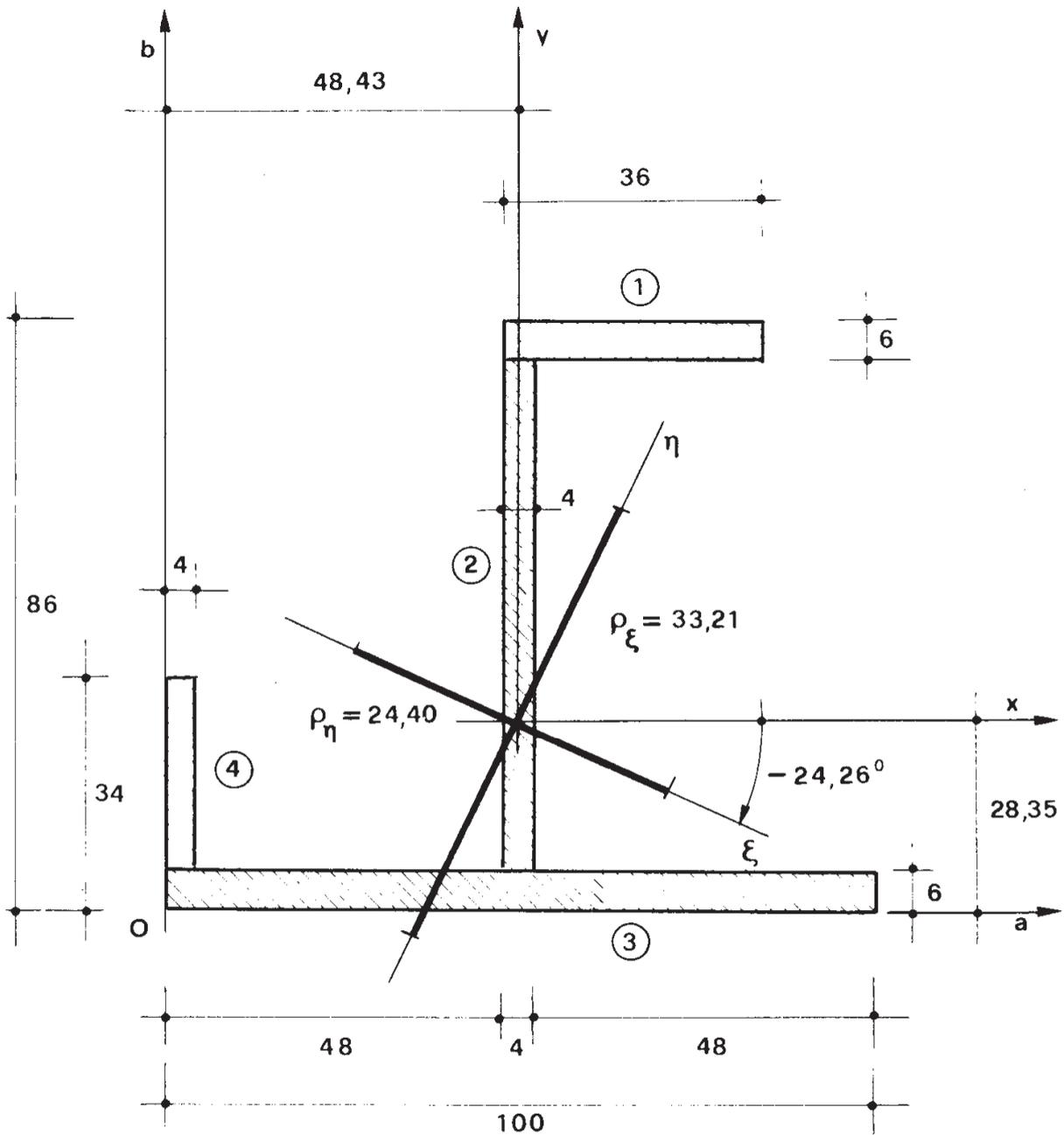


Figura 8a

$$d_{G_a} = \frac{S_a}{A} = \frac{34696}{1224} = 28,346 \text{ mm}$$

$$d_{G_b} = \frac{S_b}{A} = -\frac{59280}{1224} = -48,431 \text{ mm}.$$

I momenti di inerzia rispetto agli assi a e b sono dati dalla tabella 8.2..

	I_{ai}^0	I_{bi}^0	I_{ai}	I_{bi}	I_{abi}
1	648	23328	$1,488 \cdot 10^6$	$0,964 \cdot 10^6$	$-1,183 \cdot 10^6$
2	$0,135 \cdot 10^6$	394	$0,682 \cdot 10^6$	$0,740 \cdot 10^6$	$-0,636 \cdot 10^6$
3	1800	$0,500 \cdot 10^6$	$0,007 \cdot 10^6$	$2,000 \cdot 10^6$	$-0,090 \cdot 10^6$
4	7317	149	$0,052 \cdot 10^6$	$0,001 \cdot 10^6$	$-0,005 \cdot 10^6$
			$2,229 \cdot 10^6$	$3,705 \cdot 10^6$	$1,914 \cdot 10^6$

Tabella 8.2

dove le dimensioni sono espresse in mm^4 .

I momenti d'inerzia rispetto alle rette x ed y baricentriche e parallele rispettivamente ad a e b sono

$$I_x = 2,229 \cdot 10^6 - 1224 \cdot 28346^2 = 1,245 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = 3,705 \cdot 10^6 - 1224 \cdot 48,431^2 = 0,834 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = -1,914 \cdot 10^6 + 1224 \cdot 28,34 \cdot 48,43 = -0,233 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Se ξ ed η sono le due direzioni principali, risulta

$$\operatorname{tg}(2x\xi) = \operatorname{tg}(2x\eta) = \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

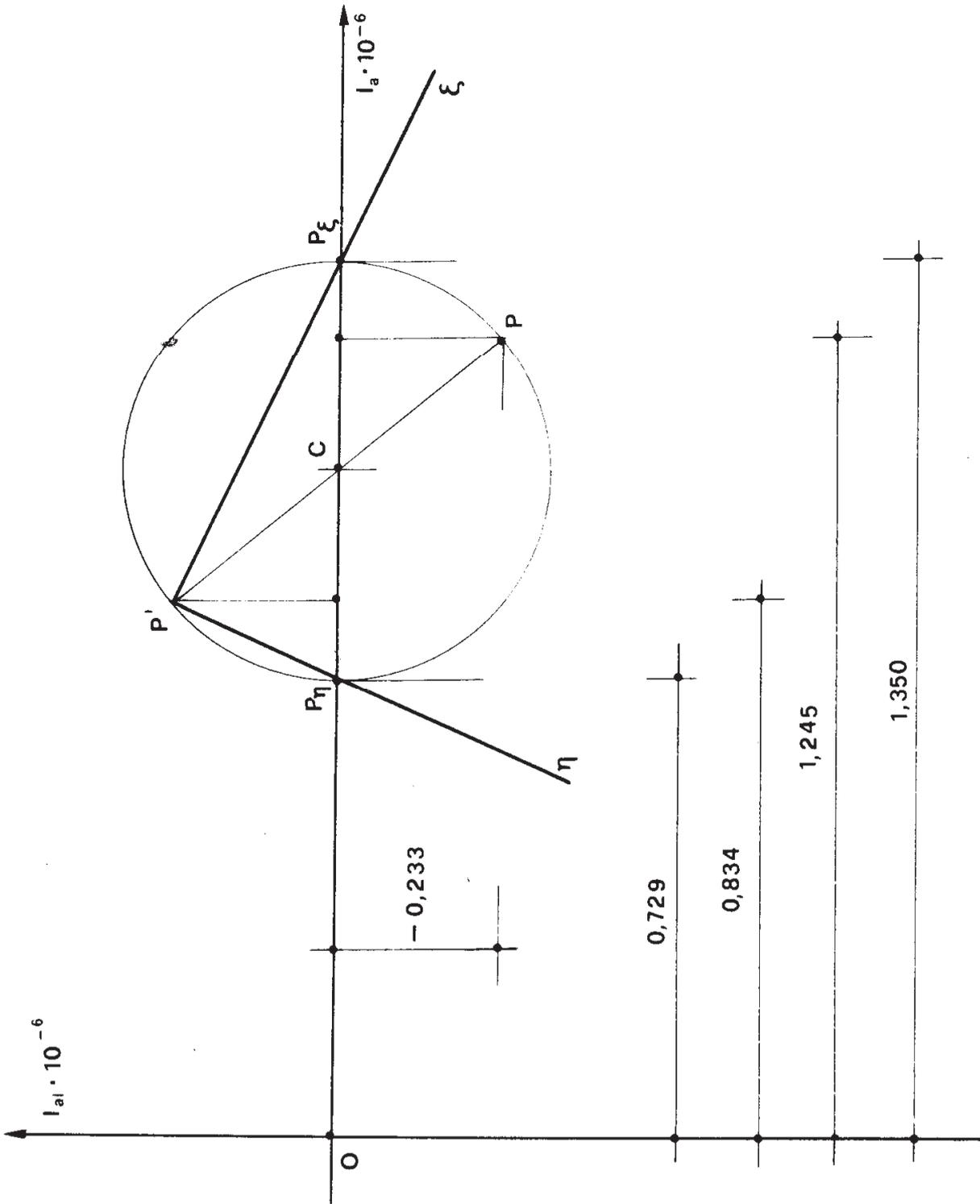


Figura 8b

e quindi

$$\operatorname{tg}(2x\xi) = \operatorname{tg}(2x\eta) = -\frac{0,465}{0,411} = -1,131$$

da cui

$$(2x\xi) = -48,518 + k\pi$$

$$(2x\eta) = -48,518 + k\pi$$

$$(x\xi) = -24,259 + k\frac{\pi}{2} \quad (42)$$

$$(x\eta) = -24,259 + k\frac{\pi}{2} .$$

Le (42) definiscono una coppia di rette ortogonali; ad esse corrispondono un momento centrifugo nullo, e momenti d'inerzia forniti da

$$\begin{array}{l} I_\xi \\ I_\eta \end{array} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = \quad (43)$$

$$= \begin{array}{l} 1,3502 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \\ 0,7288 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 . \end{array}$$

L'attribuzione dei due valori (43) alle due rette principali ξ ed η è resa possibile dalla costruzione del cerchio di Mohr (fig. 8b); si trae da esso che ξ , asse rispetto al quale I è massimo, è definito da

$$(x\xi) = -24,259 ,$$

ed η , asse rispetto al quale I è minimo, da

$$(x\eta) = -24,259 + 90^\circ = 65,741^\circ$$

I semidiametri principali d'inerzia sono

$$\rho_{\xi} = \sqrt{\frac{I_{\xi}}{A}} = 33,21 \text{ mm}$$

$$\rho_{\eta} = \sqrt{\frac{I_{\eta}}{A}} = 24,40 \text{ mm} .$$
(44)

La relazione di coniugio

$$\operatorname{tg}(s_1 \eta) \cdot \operatorname{tg}(n_1 \eta) = - \frac{I_{\eta}}{I_{\xi}} = - 0,5398$$
(45)

permette di individuare i coniugati s_1 di $n_1 = x$, ed s_2 di $n_2 = y$. Per $n_1 = x$ è infatti (fig. 8c)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(n_1 \eta) &= \operatorname{tg} 65,741^{\circ} = 2,219 \\ \operatorname{tg}(s_1 \eta) &= - 0,2433 \\ (s_1 \eta) &= - 13,674^{\circ} \end{aligned}$$

per $n_2 = y$ è

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(n_2 \eta) &= \operatorname{tg} (- 24,259^{\circ}) = - 0,4506 \\ \operatorname{tg}(s_2 \eta) &= 1,1979 \\ (s_2 \eta) &= 50,145^{\circ} \end{aligned}$$

Nella fig. 8d è riportato l'esito del programma INERZ 1° (vedi appendice primo volume di problemi).

Si calcolano le $\tau(s)$ nell'ipotesi di

a) *asse neutro coincidente con x* (fig. 8e, 8f).

Nella fig. 8e sono riportate la linea media e (tra cerchietti) gli spes-

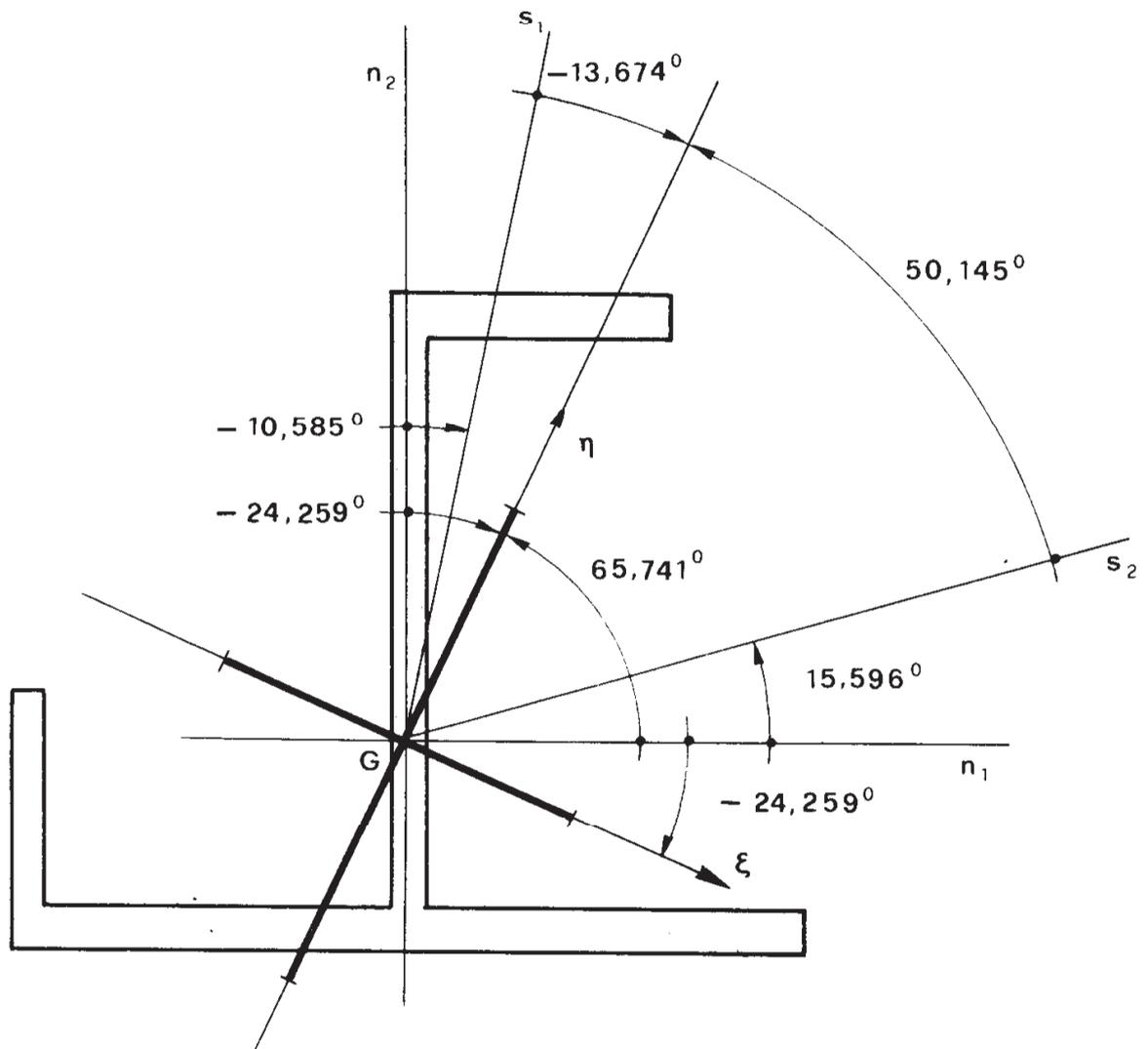


Figura 8c

=
 Area
 1224
 =
 Distanza del baricentro da x
 28.3464052288
 =
 Distanza del baricentro da y
 -48.431372549
 =
 Inclinazione dell'asse 1
 -24.2829509367
 =
 Momento d'inerzia dell'asse 1
 1352320.96982
 =
 Raggio sull'asse 1
 24.4003976058
 =
 Inclinazione asse 2
 65.7170490633
 =
 Momento d'inerzia dell'asse 2
 728744.389665
 =
 Raggio sull'asse 2
 33.2390943565

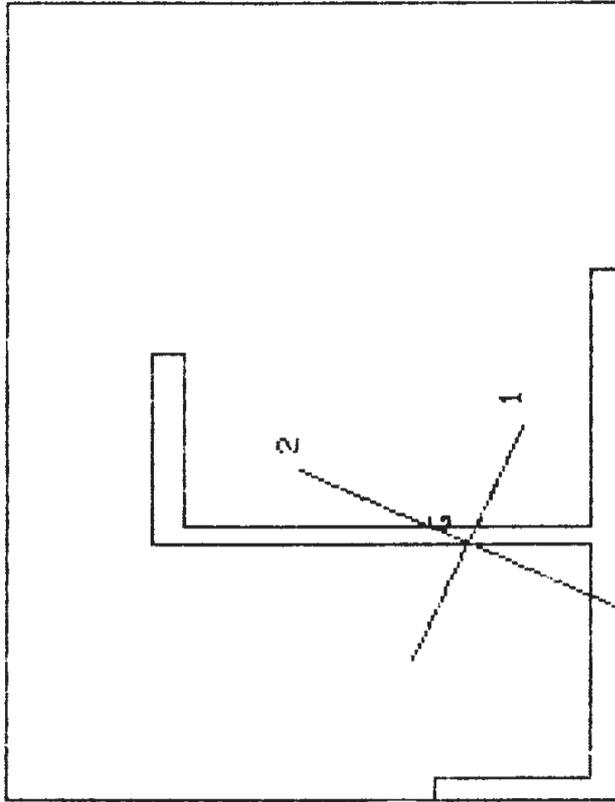


Figura 8d

sori δ ; appaiono pure i versi delle $t_{i,j+l}$. Nella tabella 8.3 sono consegnati i valori del rapporto (in mm^2)

$$\frac{S_n}{\delta}$$

nei punti da 1 a 15 della fig. 8f (punti estremi dei tratti a diagramma

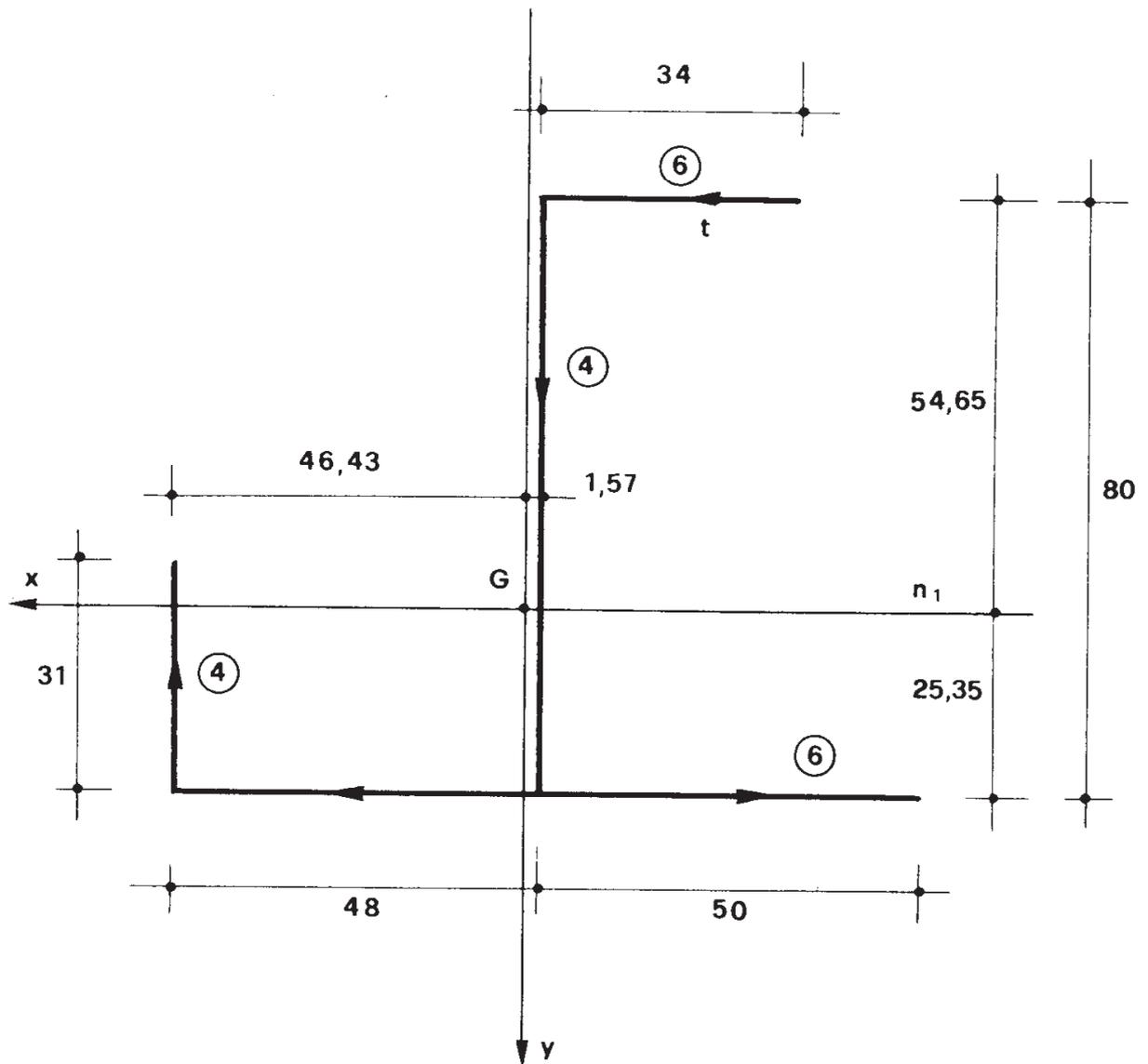


Figura 8e

lineare, punti estremi e medio dei tratti a diagramma parabolico); S_n , al solito, è il momento statico rispetto all'asse neutro della parte di sezione

a monte della t_i .

1	0	6	- 3996	11	
2		7	- 1253	12	- 207
3	- 1868	8		13	- 311
4	- 2801	9	0	14	- 43
5	- 4198	10	- 1410	15	0

Tabella 8.3

Concentrando le aree sulla linea media si commette un errore; il valore di S_n in 9, valutato come momento statico della parte a monte di t_{79} (errore di chiusura) è per es. di $- 56,16 \text{ mm}^3$, con un errore su $S_{x_{max}}$ di

$$\frac{56,16}{17241} = 3,26 \cdot 10^{-6} .$$

Per

$$T = 1000 \text{ Kg}$$

si ha

$$\begin{aligned} T_f &= 1000 \cdot \cos 10,585^\circ = \\ &= 983 \text{ Kg} \end{aligned}$$

$$\frac{T_f}{I_n} = 7,895 \cdot 10^{-4} \text{ Kg mm}^{-2}$$

e quindi i valori di τ (in Kg mm^{-2}) riportati nella tabella 8.4 e nella fig. 8f:

$$T = 1000 \text{ kg}$$

$$T_f = 983 \text{ kg}$$

$$\frac{T_f}{I_n} = 7,895 \cdot 10^{-4} \text{ kg mm}^{-4}$$

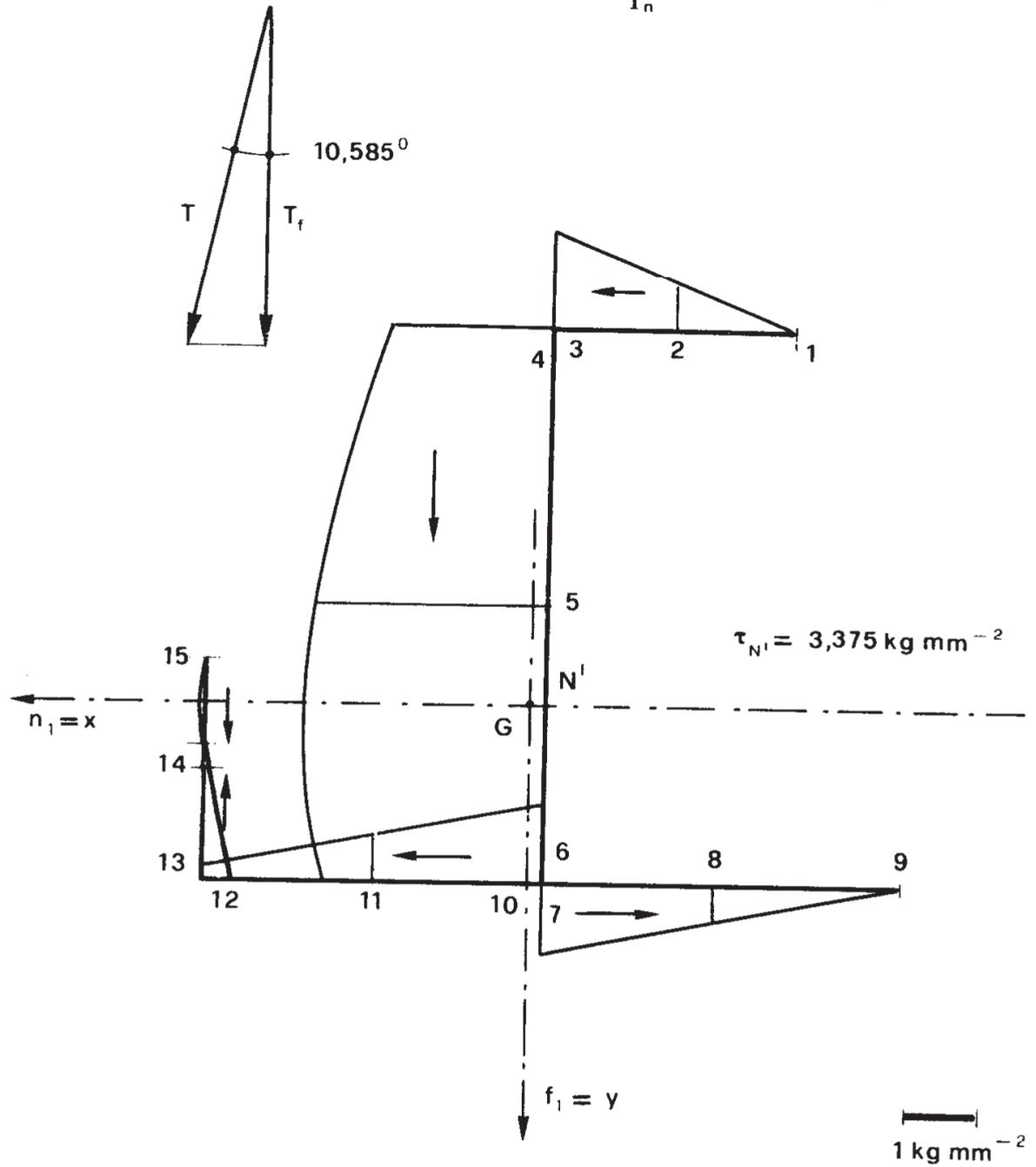


Figura 8f

1	0	6	3,129	11	
2		7	0,981	12	0,162
3	1,463	8		13	0,243
4	2,193	9	0	14	0,033
5	3,287	10	1,104	15	0

Tabella 8.4

Si calcolano adesso le τ (s) nell'ipotesi di

b) *asse neutro coincidente con y* (fig. 8g).

Nella tabella 8.5 sono consegnati (in mm^3) i valori del rapporto $\frac{S_n}{\delta}$, analogamente a quanto fatto nella tabella 8.3.

1	0	6	1073	11	1793
2	460	7	- 1328	12	967
3	631	8	- 977	13	1450
4	947	9	0	14	
5		10	2044	15	0

Tabella 8.5

Per $T = 1000 \text{ Kg}$ si ha

$$T_f = 1000 \cdot \cos 15,596^\circ = 963 \text{ Kg}$$

$$\frac{T_f}{I_n} = 11,55 \cdot 10^{-4} \text{ Kg ;}$$

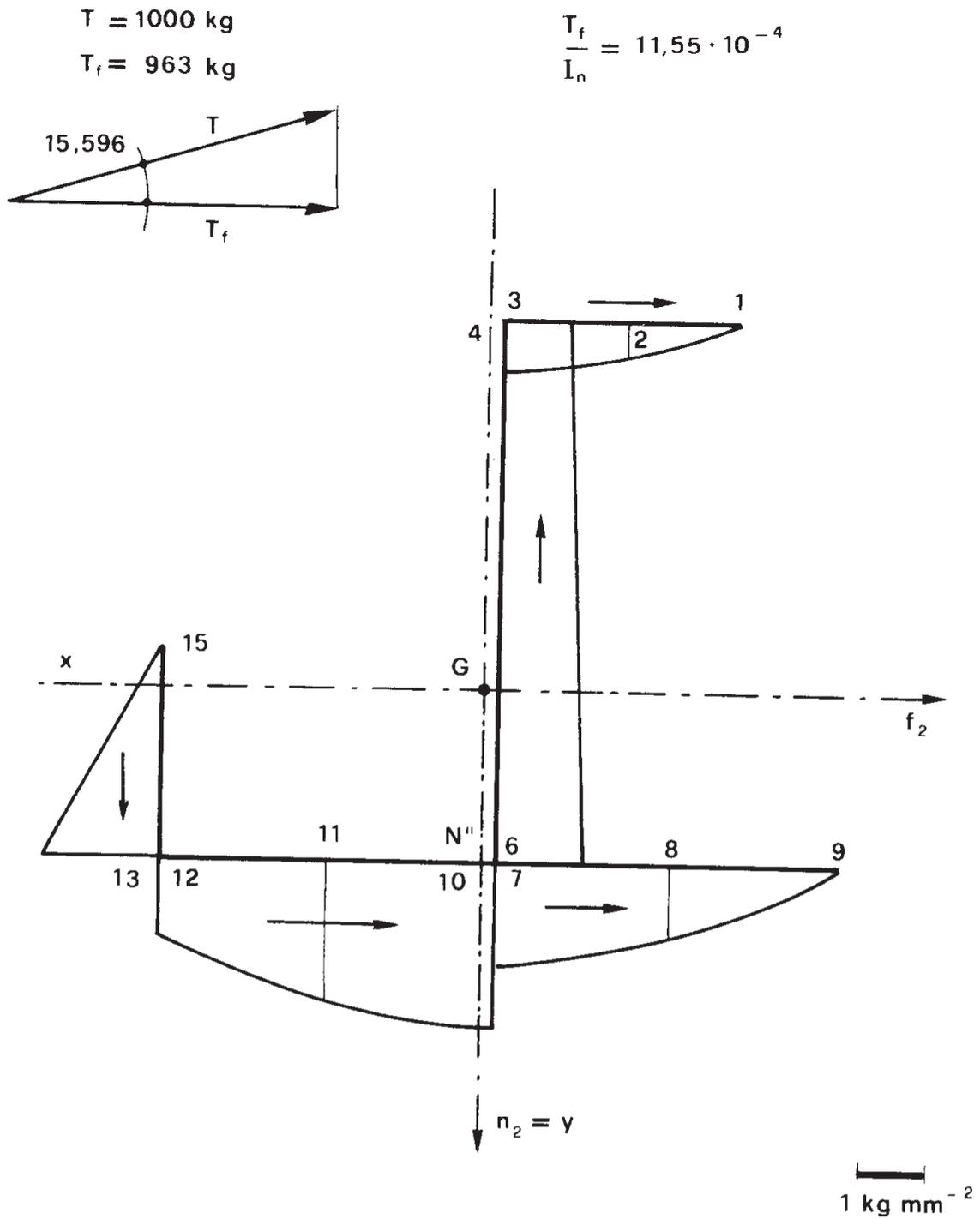


Figura 8g

possono perciò calcolarsi i valori delle τ , riportati (in Kgmm^{-2}) nella tabella 8.6, e nella fig. 8g:

1	0	6	- 1,231	11	- 2,059
2	- 0,528	7	1,525	12	- 1,110
3	- 0,725	8	1,121	13	- 1,665
4	- 1,087	9	0	14	
5		10	- 2,346	15	0

Tabella 8.6

Si può adesso passare alla determinazione del centro di taglio. Con riferimento all'asse neutro n_1 (fig. 8f) si riportano di seguito le risultanti parziali delle forze elementari $\tau \delta ds$ per i cinque tratti rettangolari in cui può scomporsi la sezione; i segni delle forze sono quelli del riferimento xy ; le aree paraboliche sono calcolate con la formula di *Stirling*:

$$T_{1 \cdot 3} = \frac{1,463 \cdot 34}{2} \cdot 6 = 149,23 \text{ Kg}$$

$$T_{4 \cdot 6} = \frac{1}{6} (2,193 + 4 \cdot 3,287 + 3,129) \cdot 80 \cdot 4 = 985,07 \text{ Kg}$$

$$T_{6 \cdot 9} = - \frac{0,981 \cdot 50}{2} \cdot 6 = - 147,15 \text{ Kg}$$

$$T_{10 \cdot 12} = \frac{1,104 + 0,162}{2} \cdot 48 \cdot 6 = 182,30 \text{ Kg}$$

$$T_{13 \cdot 15} = - \frac{1}{6} (0,243 + 4 \cdot 0,033) = - 0,06 \text{ Kg} .$$

E' quindi, chiamando T la risultante delle $\tau \delta ds$,

$$T_x = 184,38 \text{ Kg}$$

$$T_y = 985,01 \text{ Kg.}$$

Le τ sono state calcolate per $T_y = 983 \text{ Kg}$; l'errore commesso è dello 0,2 % ed è dovuto alla concentrazione delle aree sulla linea media. Risulta poi

$$\text{tg } (s_1 y) = 0,1872$$

$$(s_1 y) = 10,602^\circ ;$$

l'angolo che la coniugata di n_1 forma con y è invece (fig. 8c) pari a $10,585^\circ$, quindi l'errore è del 0,2 %. Anche tale errore è da ascriversi alla concentrazione delle aree sulla linea media. Per definire la posizione della T si calcolino i momenti delle T parziali rispetto al baricentro G . Si ha così

$$\begin{aligned} M = & 149,23 \cdot 54,93 - 985,07 \cdot 1,57 + \\ & + 147,15 \cdot 25,07 - 182,30 \cdot 25,07 + \\ & + 0,06 \cdot 46,43 = 5772,22 \text{ Kg mm.} \end{aligned}$$

Quindi i due punti (O, x_1) e (y_1, O) di intersezione della retta d'azione T rispettivamente con gli assi baricentrici x ed y sono forniti da

$$T_y \cdot x_1 = 5772,22$$

$$- T_x \cdot y_1 = 5772,22$$

da cui

$$x_1 = 5,86 \text{ mm} \tag{46}$$

$$y_1 = - 31,31 \text{ mm} .$$

Con riferimento all'asse neutro n_2 (fig. 8g) si riportano di seguito le risultanti parziali delle forze elementari $\tau \delta ds$ per gli stessi tratti prima esaminati:

$$T_{1 \cdot 3} = \frac{1,463 \cdot 34}{2} \cdot 6 = 149,23 \text{ Kg}$$

$$T_{4 \cdot 6} = \frac{1}{6} (2,193 + 4 \cdot 3,287 + 3,129) \cdot 80 \cdot 4 = 985,07 \text{ Kg}$$

$$T_{6 \cdot 9} = - \frac{0,981 \cdot 50}{2} \cdot 6 = - 147,15 \text{ Kg}$$

$$T_{10 \cdot 12} = \frac{1,104 + 0,162}{2} \cdot 48 \cdot 6 = 182,30 \text{ Kg}$$

$$T_{13 \cdot 15} = - \frac{1}{6} (0,243 + 4 \cdot 0,033) = - 0,06 \text{ Kg}$$

E' perciò

$$T_x = - 958,13 \text{ Kg}$$

$$T_y = - 267,65 \text{ Kg}$$

Le τ sono state calcolate per $T_x = 963 \text{ Kg}$; l'errore commesso è dello 0,5 %.

Risulta poi

$$\text{tg} (s_2 \ x) = - 0,2793$$

$$(s_2 \ x) = - 15,605^\circ ;$$

l'angolo che la coniugata di n_2 forma con x è invece (fig. 8c) pari a $- 15,596$, quindi l'errore è dello 0,1 %.

Il momento delle risultanti parziali rispetto al baricentro è

$$\begin{aligned} M = & - 96,46 \cdot 54,93 + 370,88 \cdot 1,57 + \\ & + 300,45 \cdot 25,07 + 561,22 \cdot 25,07 + \\ & + 103,23 \cdot 46,43 \qquad \qquad \qquad = 21678,77 \text{ Kg mm} \end{aligned}$$

I due punti $(0, x_2)$ e $(y_2, 0)$ di intersezione della retta d'azione di T rispettivamente con gli assi baricentrici x ed y sono forniti da

$$T_y \cdot x_2 = 21678,77$$

$$- T_x \cdot y_2 = 21678,77$$

da cui

$$x_2 = - 81,00 \text{ mm} \quad (47)$$

$$y_2 = 22,63 \text{ mm}.$$

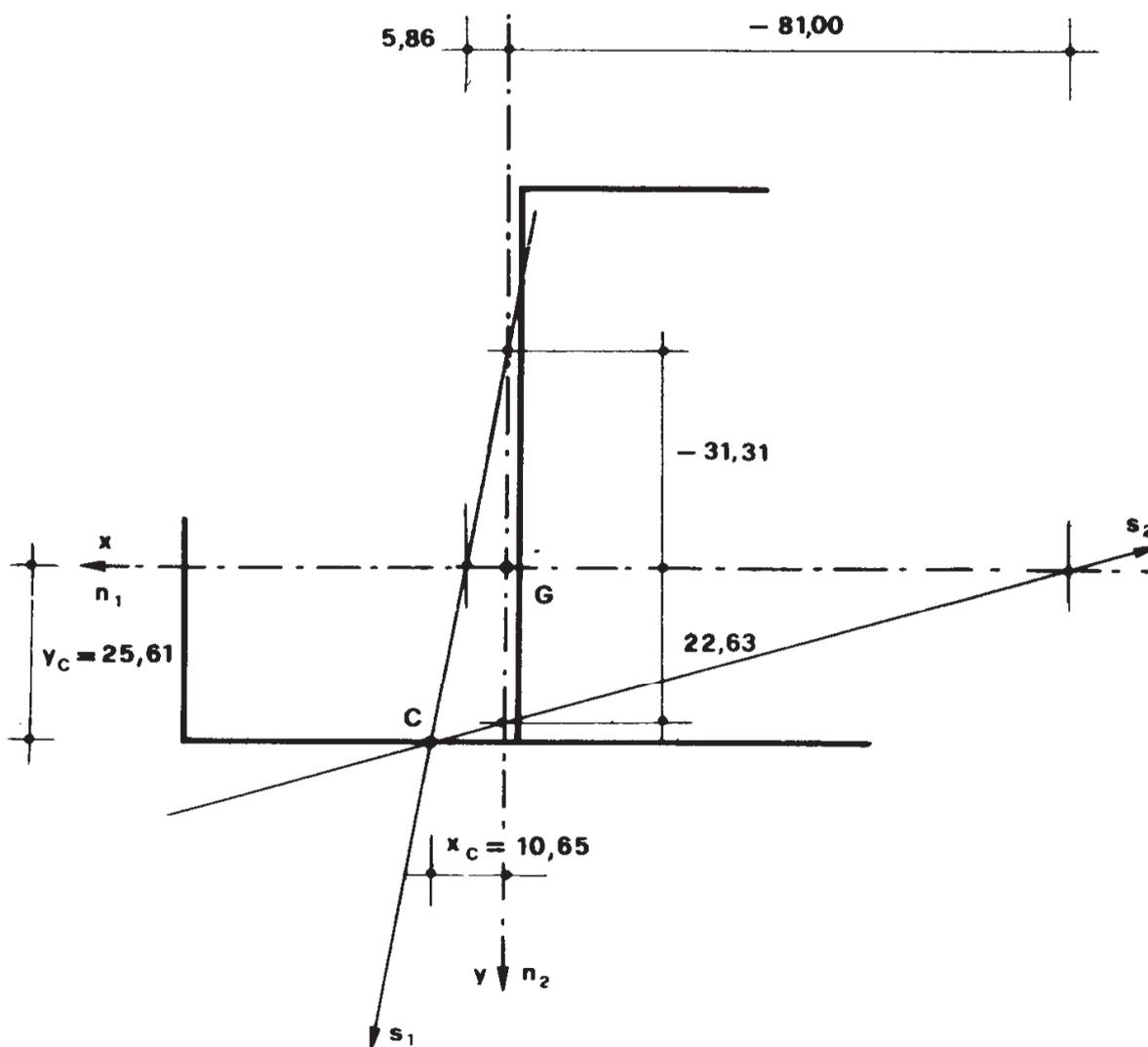


Figura 8h

Dalle (46) e (47) si traggono le equazioni delle rette d'azione di T per $n_1 = x$ ed $n_2 = y$:

$$\begin{aligned} - 31,31 x + 5,86 y + 183,48 &= 0 \\ 22,63 x - 81,00 y + 1833,03 &= 0 \end{aligned} \quad (48)$$

Il centro di taglio C , intersezione delle due rette, ha per coordinate la soluzione del sistema (48), e cioè (fig. 8h)

$$\begin{aligned}x_c &= 10,65 \text{ mm} \\y_c &= 25,61 \text{ mm} .\end{aligned}\tag{49}$$

Problema n. 9.

Si vuole determinare il centro di taglio relativo alla sezione aperta della fig.9a; gli spessori sono riportati in cerchietto, e sono costanti per ciascuno dei tratti rettilinei. I versi delle t_i sono quelli della figura; essi corrispondono, per come sono stati scelti, al verso di percorrenza antiorario della linea media considerata chiusa. Le n_i sono perciò dirette sempre verso l'esterno del rettangolo $ABDE$; poichè le τ positive si riportano sulla n_i positiva (da cui la regola pratica generale secondo cui il *viaggiatore che cammina lungo la linea media, ed ha la τ del diagramma alla sua*

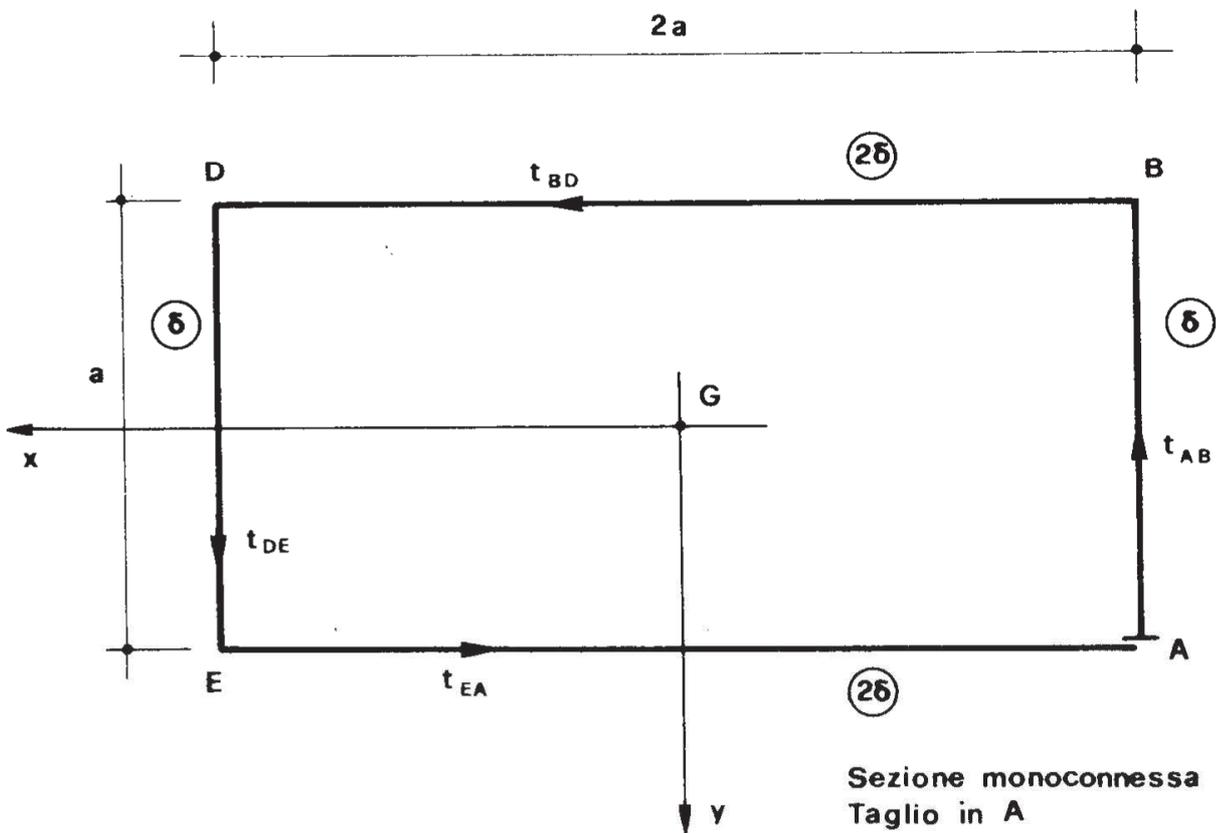


Figura 9a

destra, vede il vettore τ nel verso del suo cammino) i diagrammi di τ esterni al rettangolo $ABDE$ corrispondono a vettori τ di verso antiorario rispetto a G , e viceversa.

Data la simmetria delle aree, il baricentro G è il baricentro della linea media, risulta poi

$$I_x = 2 \cdot 2a \cdot 2\delta \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2 \frac{\delta a^3}{12} =$$

$$= \frac{13}{6} \delta a^3 = 2,166 \delta a^3 ;$$

$$I_y = 2 \cdot a \delta \cdot \left(\frac{2a}{2}\right)^2 + 2 \frac{2\delta \cdot (2a)^3}{12} =$$

$$= \frac{14}{3} \delta a^3 = 4,666 \delta a^3 .$$

Così operando si sono trascurati i termini in δ^3 a derivanti dai momenti d'inerzia dei quattro rettangoli costituenti la sezione rispetto alle loro mediane maggiori.

Si sceglie prima come asse neutro l'asse x (fig. 9b). Risulta così ($T_f = T$)

$$\tau_A = 0$$

$$\tau_B = 0$$

$$\tau_{DB} = \frac{T}{2I_x \delta} 2a \cdot 2\delta \cdot \frac{a}{2} = \frac{6}{13} \frac{T}{a \delta} = \frac{24}{52} \frac{T}{a \delta}$$

$$\tau_{DE} = 2 \tau_{DB} = \frac{12}{13} \frac{T}{a \delta} = \frac{48}{52} \frac{T}{a \delta}$$

$$\tau_H = -\frac{T}{I_x \delta} \frac{a}{2} \cdot \delta \cdot \frac{a}{4} = -\frac{3}{52} \frac{T}{a \delta}$$

$$\tau_L = \tau_{DE} - \tau_H = \left(\frac{12}{13} + \frac{3}{52}\right) \frac{T}{a \delta} = \frac{51}{52} \frac{T}{a \delta} .$$

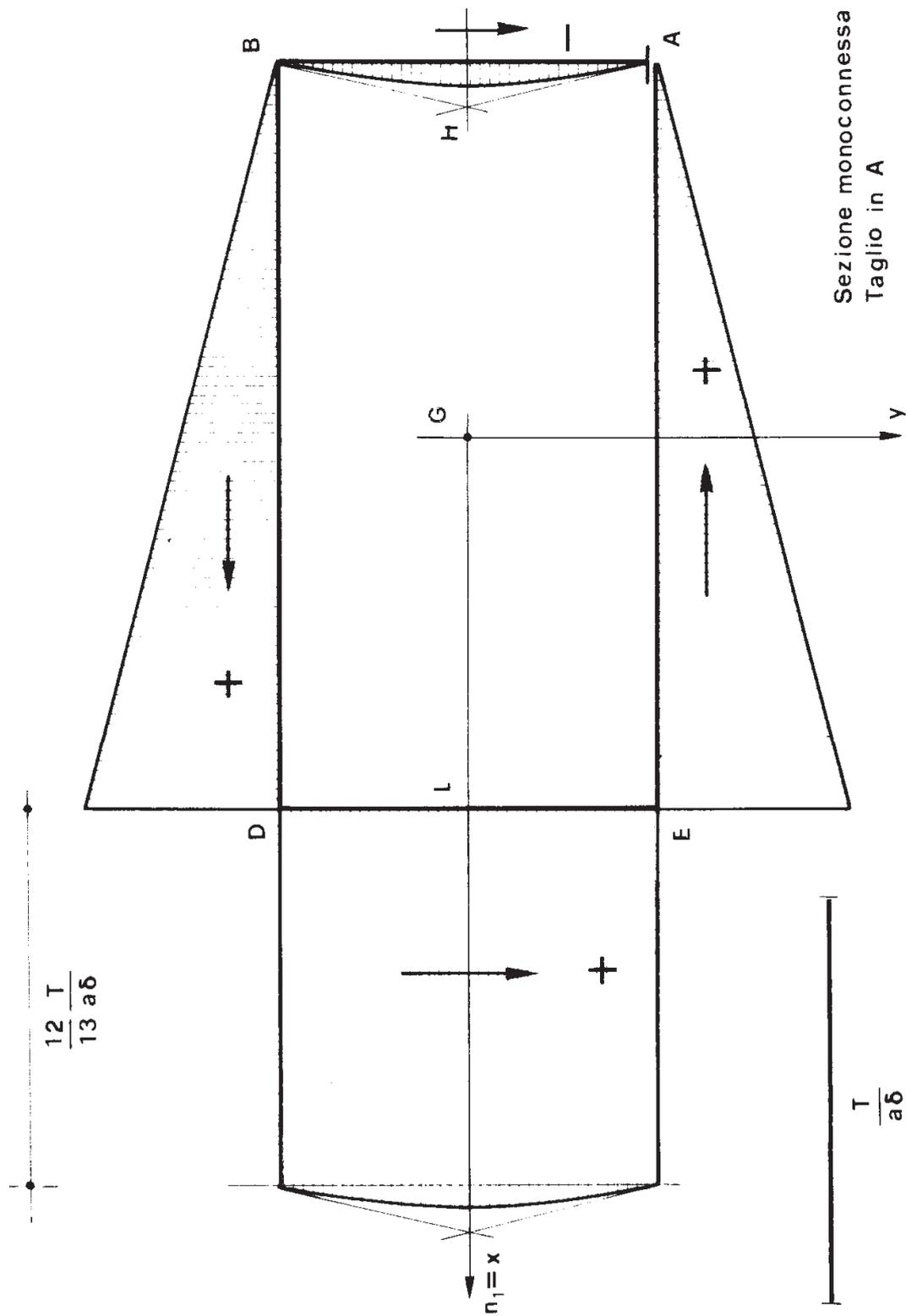


Figura 9b

Il diagramma delle τ è quindi quello della fig. 9b.

Le risultanti parziali delle forze $\tau \delta ds$ relative ai quattro rettangoli costituenti la sezione sono fornite dai seguenti valori (fig. 9c):

$$T_{AB} = \frac{2}{3} \frac{3}{52} \frac{T}{a \delta} \cdot a \delta = \frac{2}{52} T$$

$$T_{BD} = \frac{1}{2} \frac{24}{52} \frac{T}{a \delta} \cdot 2a \cdot 2\delta = \frac{48}{52} T$$

$$T_{DE} = T_{AB} + \frac{48}{52} \frac{T}{a \delta} a \delta = \frac{50}{52} T.$$

La risultante totale è pari a T : la sua retta d'azione è fornita dalla equazione di equivalenza alla rotazione intorno ad un punto, per esempio al baricentro G :

$$-\frac{2}{52} T \cdot a + \frac{48}{52} T \cdot a + \frac{50}{52} T \cdot a = T x_c$$

da cui

$$x_c = \frac{24}{13} a. \quad (50)$$

La x_c è quindi la coordinata su x del centro C di taglio.

Si sceglie poi come asse neutro l'asse y (fig. 9d). Risulta così ($T_f = -T$)

$$\tau_A = 0$$

$$\tau_{BA} = \frac{T}{I_y \delta} a \delta \cdot a = \frac{3}{14} \frac{T}{a \delta} = \frac{6}{28} \frac{T}{a \delta}$$

$$\tau_{BD} = \frac{\tau_{BA}}{2} = \frac{3}{28} \frac{T}{a \delta}$$

$$\tau_K = -\frac{T}{I_y \delta} 2a \delta \cdot \frac{a}{2} = -\frac{3}{28} \frac{T}{a \delta}$$

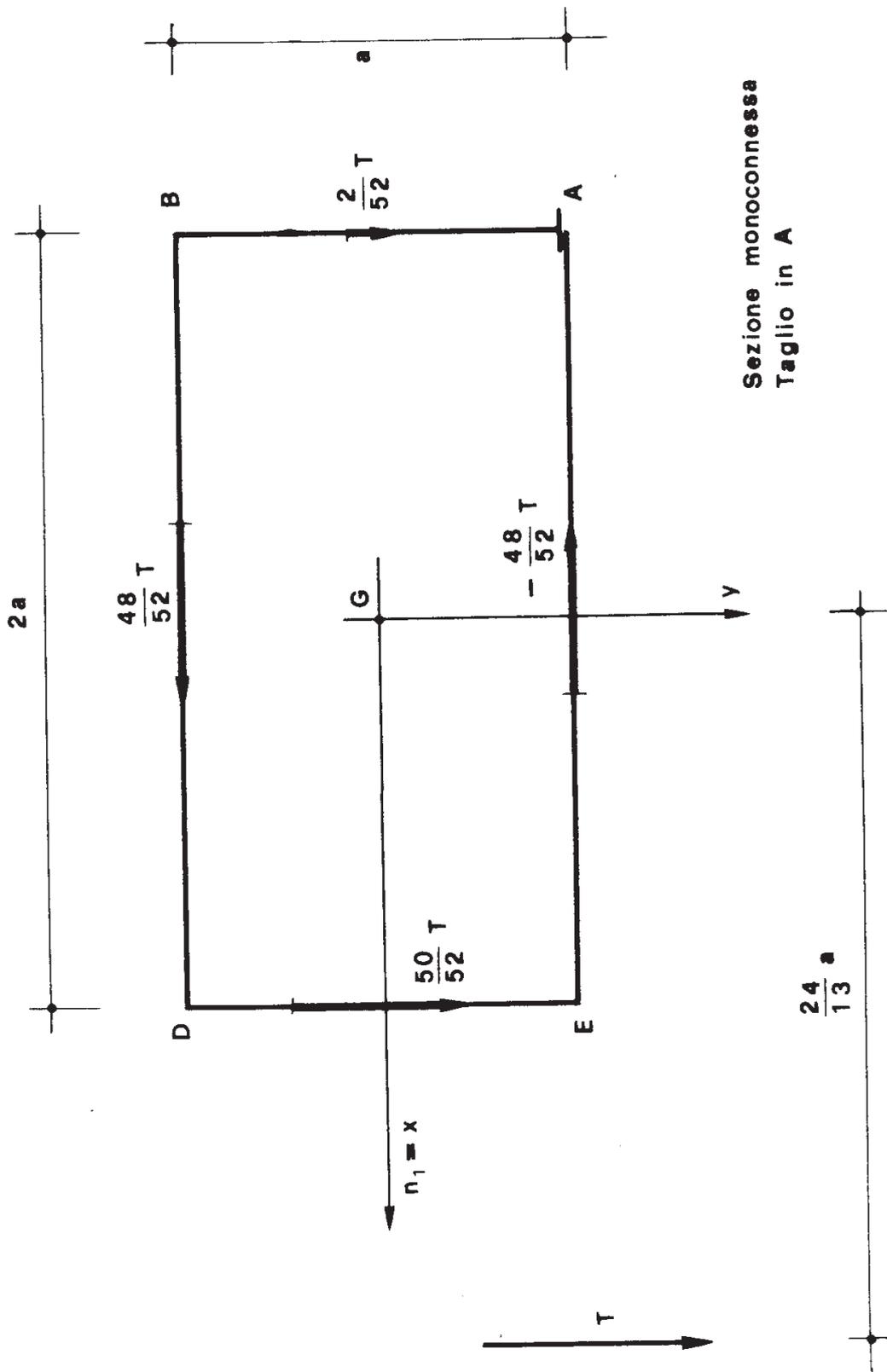


Figura 9c

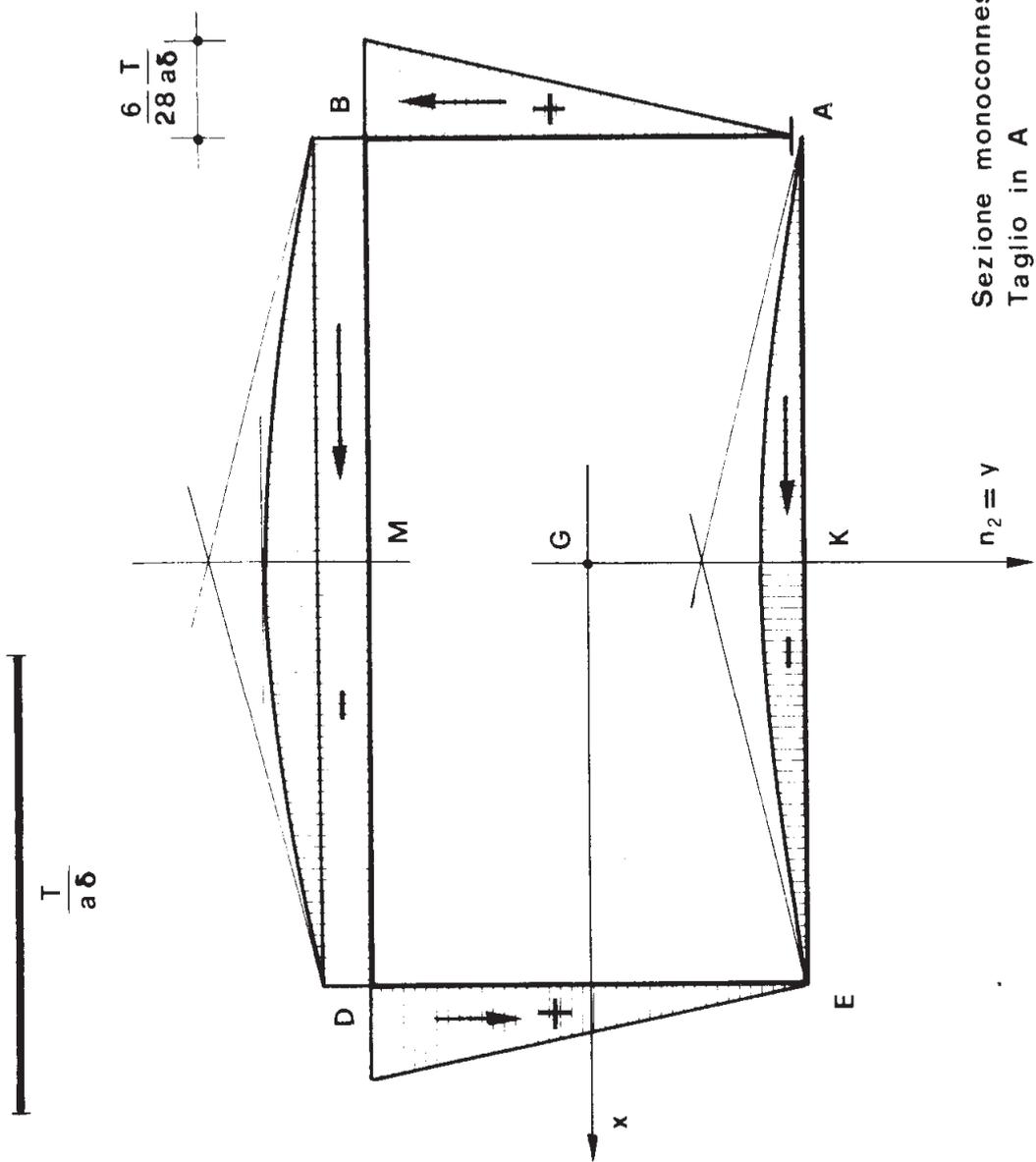


Figura 9d

$$\begin{aligned} \tau_M &= \tau_{BD} - \tau_K &= \frac{6}{28} \frac{T}{a \delta} \\ \tau_{DB} &= \tau_{BD} &= \frac{3}{28} \frac{T}{a \delta} \\ \tau_{DE} &= \tau_{BA} &= \frac{6}{28} \frac{T}{a \delta} \\ \tau_E &= &= 0 . \end{aligned}$$

Il diagramma delle τ è quindi quello della fig. 9d. Le risultanti parziali delle forze $\tau \delta ds$ relative ai quattro rettangoli costituenti la sezione sono fornite dai seguenti valori (fig. 9e):

$$T_{AB} = - \frac{1}{2} \frac{6}{28} \frac{T}{a \delta} \cdot a \delta = - \frac{3}{28} T$$

$$\begin{aligned} T_{BD} &= \frac{3}{28} \frac{T}{a \delta} 4a \delta + \frac{2}{3} \frac{3}{28} \frac{T}{a \delta} 4a \delta = \\ &= \frac{12}{28} T + \frac{8}{28} T = \frac{20}{28} T \end{aligned}$$

$$T_{EA} = \frac{8}{28} T$$

La risultante totale è pari a T , nel verso di y : la sua retta d'azione è fornita dall'equazione di equivalenza alla rotazione intorno ad un punto, per esempio al baricentro G :

$$\frac{3}{28} T \cdot 2a + \frac{20}{28} T \cdot \frac{a}{2} - \frac{8}{28} T \cdot \frac{a}{2} = - T y_c$$

da cui

$$y_c = - \frac{3}{7} a . \quad (51)$$

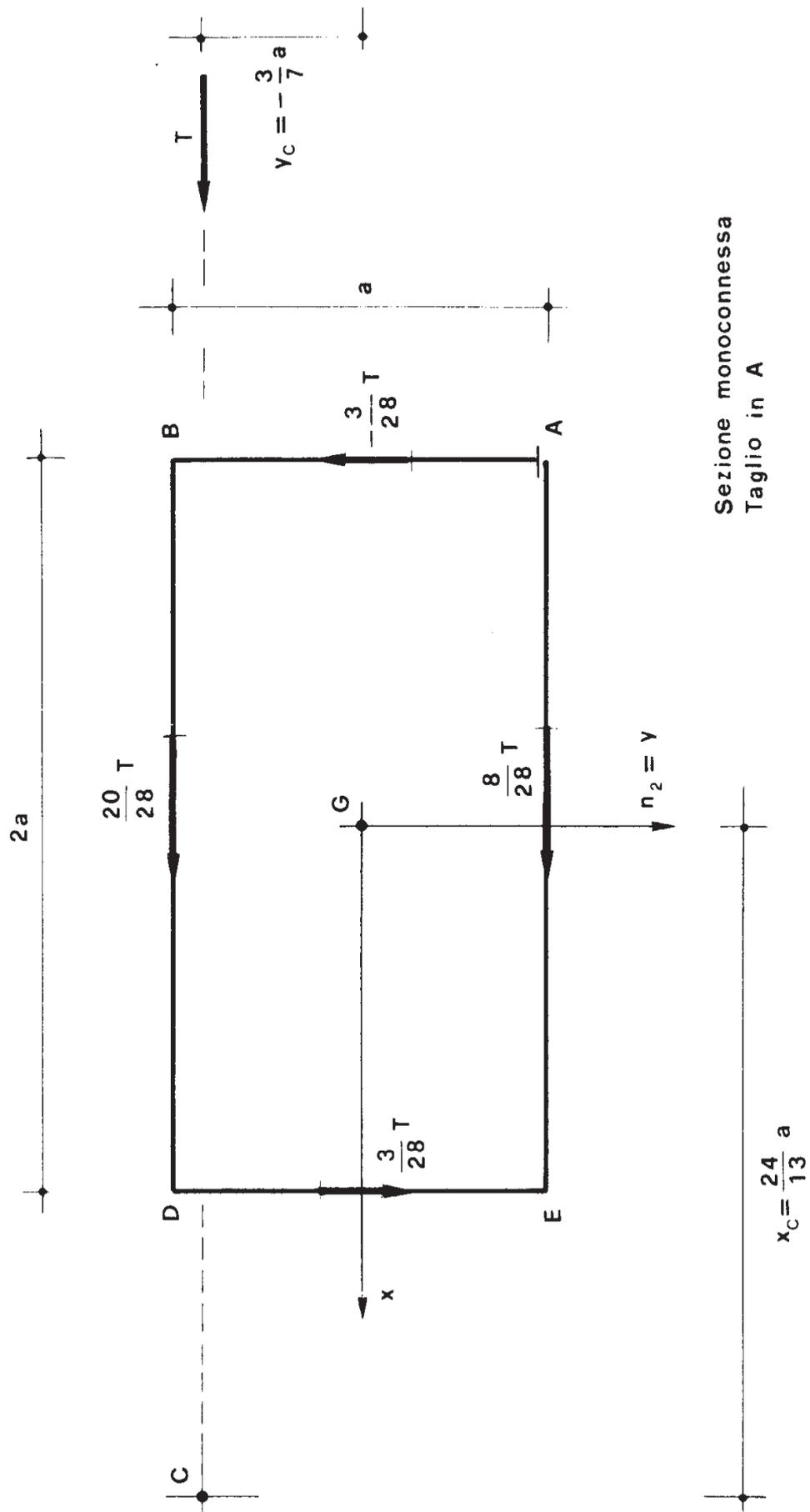


Figura 9e

La y_c è quindi la coordinata su y del centro C di taglio.

Problema n. 10.

La stessa sezione del problema precedente presenta (fig. 10a) il taglio in H invece che in A . Attesa la simmetria rispetto all'asse x , il centro di taglio C deve risultare ubicato su x ; basta perciò per ottenerlo costruire il diagramma delle τ per un solo asse neutro, e come tale conviene assumere per ovvi motivi lo stesso asse x .

E' da tener presente che, ad una generica ascissa, le derivate $\frac{d\tau}{ds}$ dei due diagrammi delle fig. 9b e 10a coincidono: quindi i due diagrammi differiscono per un diagramma differenza costituito da τ costanti in ciascuno dei rettangoli componenti. Se τ_H è il valore di tale τ in AB , sarà anche τ_H in DE , e $\frac{\tau_H}{2}$ in BD ed EA . Poichè in H (fig. 10a) è $\tau = 0$, occorre sommare al diagramma della fig. 9b il valore $\frac{3}{52} \frac{T}{a\delta}$ in AB e DE , il valore $\frac{3}{104} \frac{T}{a\delta}$ in BD ed EA .

$$\tau_{AH} = \tau_{BH} = \frac{6}{104} \frac{T}{a\delta}$$

$$\tau_{AE} = \tau_{BD} = \frac{3}{104} \frac{T}{a\delta}$$

$$\tau_{DB} = \tau_{EA} = \frac{51}{104} \frac{T}{a\delta}$$

$$\tau_{DE} = \tau_{ED} = \frac{102}{104} \frac{T}{a\delta}$$

$$\tau_L = \frac{108}{104} \frac{T}{a\delta}$$

Le risultanti parziali delle $\tau \delta ds$ (fig. 10b) sono perciò

$$T_{AB} = - \frac{2}{104} T$$

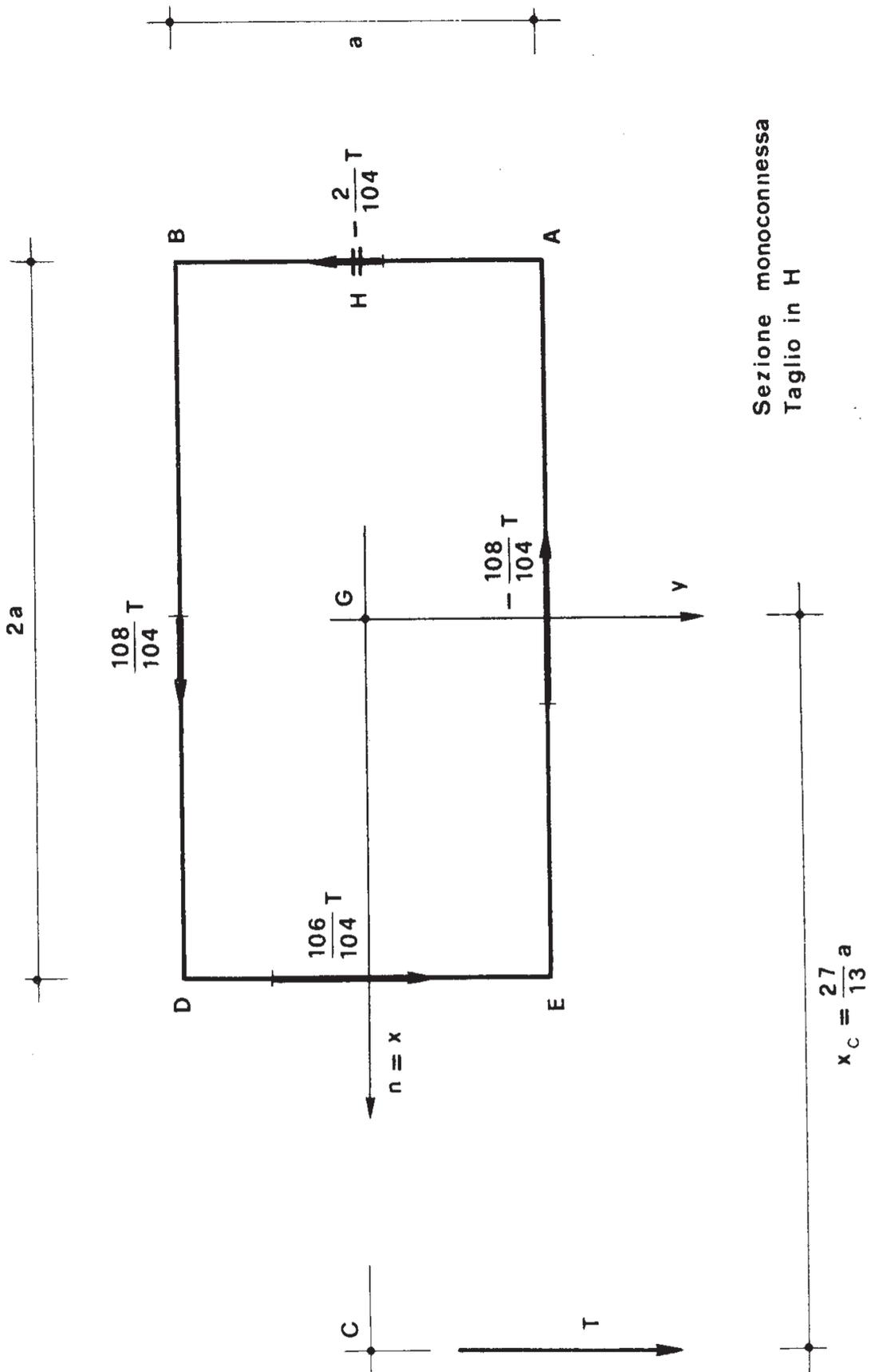


Figura 10b

$$T_{BD} = \frac{108}{104} T$$

$$T_{DE} = \frac{106}{104} T$$

$$T_{EA} = -\frac{108}{104} T.$$

La relazione di equivalenza alla rotazione intorno a G si scrive

$$\frac{2}{104} T \cdot a + \frac{106}{104} T \cdot a + \frac{108}{104} T \cdot a + \frac{108}{104} T \cdot a = T x_c$$

da cui

$$x_c = \frac{27}{13} a. \quad (52)$$

Problema n. 11.

La stessa sezione del prob. 9 presenta (fig. 11a) il taglio in K invece che in A . Per la simmetria rispetto all'asse y , il centro di taglio C deve risultare ubicato su y ; basta perciò per ottenerlo costruire il diagramma delle τ per un solo asse neutro, e come tale conviene scegliere y .

Le derivate $\frac{d\tau}{ds}$ dei due diagrammi delle figure 9d ed 11a coincidono: il secondo diagramma si ottiene quindi dal primo mediante traslazioni secondo le n_i dei tratti componenti. Poichè è $\tau_K = 0$, il diagramma su EA deve essere traslato di $\frac{3}{28} \frac{T}{a\delta}$ (vedi prob. 9), e quindi il diagramma su AB di $\frac{6}{28} \frac{T}{a\delta}$, quello su BD di $\frac{3}{28} \frac{T}{a\delta}$, quello su DE di $\frac{3}{28} \frac{T}{a\delta}$. Si ha quindi

$$\tau_{AK} = \tau_{EK} = \frac{3}{28} \frac{T}{a\delta}$$

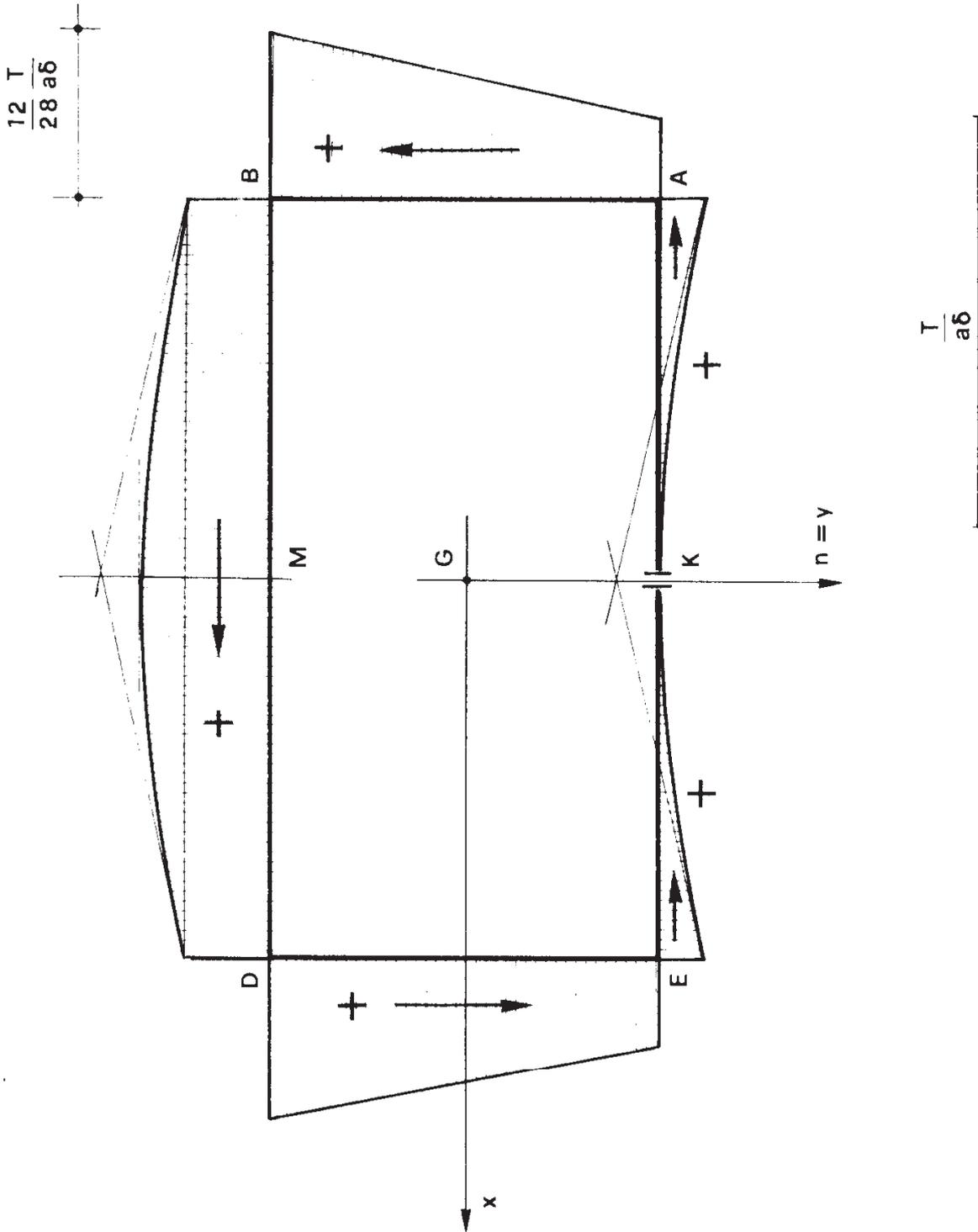
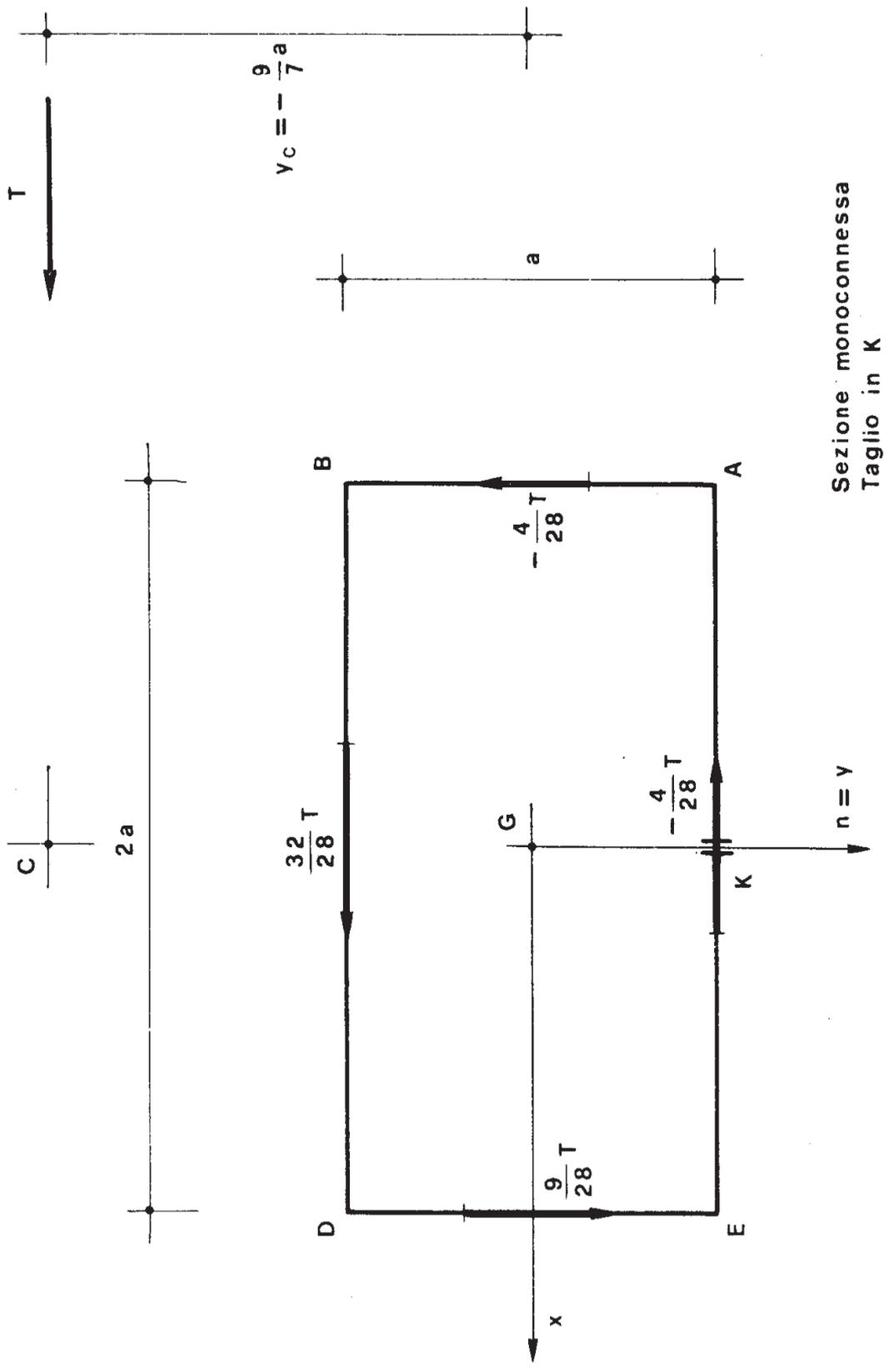


Figura 11a



Sezione monoconnessa
Taglio in K

Figura 11b

$$\tau_{AB} = \tau_{ED} = \frac{6}{28} \frac{T}{a \delta}$$

$$\tau_{BA} = \tau_{DE} = \frac{12}{28} \frac{T}{a \delta}$$

$$\tau_{BD} = \tau_{DB} = \frac{6}{28} \frac{T}{a \delta}$$

$$\tau_M = \left(\frac{6}{28} + \frac{3}{28} \right) \frac{T}{a \delta} = \frac{9}{28} \frac{T}{a \delta} .$$

Le risultanti parziali delle $\tau \delta ds$ (fig. 11b) sono quindi

$$T_{EA} = -\frac{4}{28} T$$

$$T_{AB} = -\frac{9}{28} T$$

$$T_{BD} = \frac{32}{28} T$$

$$T_{DE} = \frac{9}{28} T .$$

La relazione di equivalenza alla rotazione intorno a G si scrive

$$\frac{4}{28} T \cdot \frac{a}{2} + \frac{32}{28} T \cdot \frac{a}{2} + \frac{9}{28} T \cdot 2a = - T y_c$$

da cui

$$y_c = -\frac{9}{7} a . \quad (53)$$

Problema n. 12.

La sezione della fig. 12a è biconnessa; poichè esiste simmetria rispet-