

CAPITOLO SETTIMO

IL METODO DEI CEDIMENTI: I TELAI CLASSICI

Premessa.

Il *metodo delle forze* è il procedimento più spontaneo per lo studio di una struttura iperstatica, poichè si traduce nel calcolo degli spostamenti di alcuni punti della struttura resa isostatica, e quindi, in ultima analisi, nello studio statico di una struttura fittizia isostatica. Il suddetto metodo è poi quello che meglio permette di chiamare in gioco tutte le caratteristiche della sollecitazione, e di tener conto della curvatura dell'asse e della variabilità delle sezioni; soccorre appunto a ciò il potente strumento del principio dei lavori virtuali.

Per alcune strutture appare però preferibile, per i motivi che tra breve si esporranno, il *metodo dei cedimenti*, cui si è già accennato nella premessa al cap. 3; esso consiste nell'operare su una struttura fittizia più vincolata di quella reale, e nell'imprimere ai *vincoli aggiunti* cedimenti tali da annullare le reazioni da essi stessi sviluppate. Occorre perciò prima calcolare le reazioni R_i° trasmesse alla struttura, sotto i carichi applicati, dagli n vincoli aggiunti ($i = 1, 2, \dots n$); poi calcolare le reazioni

$$r_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots n) \quad (1)$$

provocate sulla struttura in i dal cedimento pari a $+1$ del vincolo in j ; e quindi, utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, imporre le condizioni

$$\begin{aligned} r_{11} X_1 + r_{12} X_2 + \dots + r_{1n} X_n &= - R_1^\circ \\ \dots & \\ \dots & \\ r_{n1} X_1 + r_{n2} X_2 + \dots + r_{nn} X_n &= - R_n^\circ \end{aligned} \quad (2)$$

Il sistema (2) esprime condizioni di equilibrio, mentre nel metodo delle forze il sistema risolutivo esprime condizioni di congruenza; inoltre

le incognite del sistema (2) sono degli spostamenti, mentre nel metodo delle forze sono, appunto, delle forze. Il metodo dei cedimenti sceglie l'unica soluzione equilibrata e congruente tra le ∞ congruenti ma non equilibrate, mentre il metodo delle forze sceglie l'unica soluzione equilibrata e congruente tra le ∞ equilibrate ma non congruenti; ambedue sfruttano il principio di sovrapposizione degli effetti, dalle cui ipotesi sono perciò condizionati.

Con il metodo dei cedimenti si opera su una struttura più iperstatica di quella reale; la convenienza è quindi innanzitutto da valutare in ordine alle maggiori o minori difficoltà nell'ottenere su tale struttura i valori delle reazioni R_i^0 ed r_{ij} . Queste difficoltà sono piccole solo per alcune particolari strutture, per esempio i telai; e minime se i telai sono ad elementi di sezione costante.

La (2) si scrive, in notazione matriciale,

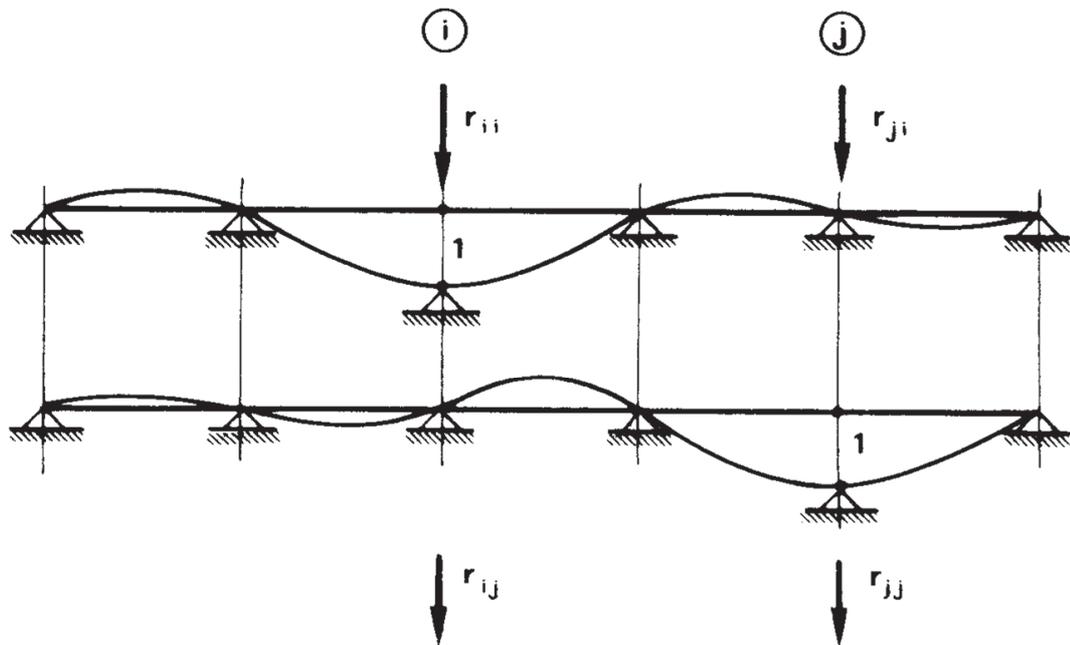


Figura 1

$$AX = B, \quad (3)$$

dove

$$A = |r_{ij}| \quad (4)$$

è la *matrice di rigidità*. Tale matrice è *intrinseca* alla struttura (ed alla scelta dei vincoli aggiunti), e quindi si calcola una volta per sempre; varia invece, con le condizioni di carico, la matrice colonna B .

La matrice A è simmetrica. Ed infatti, si consideri (fig. 1) la struttura con un cedimento unitario in i , e con un cedimento unitario in j ; sopprimendo i vincoli in i ed in j , e sostituendoli con le loro reazioni sulla struttura, il teorema di Betti fa scrivere

Per strutture a molte iperstatiche, come per esempio i telai, il metodo dei cedimenti fa operare su un numero di equazioni molto minore che non quello delle forze. Inoltre, nel metodo dei cedimenti la matrice dei coefficienti presenta i termini della diagonale principale preponderanti rispetto agli altri, ed addensati intorno a tale diagonale. Ambedue queste circostanze giocano, sul piano della soluzione numerica, a favore del metodo dei cedimenti.

Il metodo di Cholesky.

Il fatto che sia la matrice di rigidità che quella di elasticità siano connesse con una forma quadratica definita positiva permette di utilizzare il metodo di *Cholesky* per la soluzione del sistema di equazioni. Sotto la suddetta ipotesi, la matrice $A = |a_{ij}|$ del sistema

$$AX = B$$

risulta uguale al prodotto di due matrici triangolari V^T e V , l'una trasposta dell'altra. Con riferimento ad un sistema di quattro equazioni si ha

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \quad (8)$$

$$= \begin{vmatrix} v_{11} & 0 & 0 & 0 \\ v_{12} & v_{22} & 0 & 0 \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} & 0 \\ v_{14} & v_{24} & v_{34} & v_{44} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ 0 & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ 0 & 0 & v_{33} & v_{34} \\ 0 & 0 & 0 & v_{44} \end{vmatrix}$$

o, in sintesi,

$$A = V^T V \quad (9)$$

La (8) implica le seguenti relazioni:

$$a_{11} = v_{11} \cdot v_{11}$$

$$a_{12} = v_{11} \cdot v_{12}$$

$$a_{13} = v_{11} \cdot v_{13}$$

$$a_{14} = v_{11} \cdot v_{14}$$

$$a_{22} = v_{12} \cdot v_{12} + v_{22} \cdot v_{22}$$

$$a_{23} = v_{12} \cdot v_{13} + v_{22} \cdot v_{23}$$

$$a_{24} = v_{12} \cdot v_{14} + v_{22} \cdot v_{24}$$

$$a_{33} = v_{13} \cdot v_{13} + v_{23} \cdot v_{23} + v_{33} \cdot v_{33}$$

$$a_{34} = v_{13} \cdot v_{14} + v_{23} \cdot v_{24} + v_{33} \cdot v_{34}$$

$$a_{44} = v_{14} \cdot v_{14} + v_{24} \cdot v_{24} + v_{34} \cdot v_{34} + v_{44} \cdot v_{44}$$

e cioè, in generale,

$$a_{ij} = \sum_{q=1}^i v_{qi} \cdot v_{qj} \quad (10)$$

Nella (10) è

$$i \leq j ,$$

ed ancora

$$i, j = 1, 2, \dots n ,$$

ove n è il numero delle equazioni.

Per $i = j$ si ha

$$v_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$v_{22} = \sqrt{a_{22} - v_{12}^2} \quad (11)$$

$$v_{33} = \sqrt{a_{33} - v_{13}^2 - v_{23}^2}$$

$$v_{44} = \sqrt{a_{44} - v_{14}^2 - v_{24}^2 - v_{34}^2}$$

e cioè, in generale,

$$v_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{q=1}^{i-1} v_{qi}^2} \quad (12)$$

Per $i < j$ si ha

$$v_{12} = \frac{a_{12}}{v_{11}}$$

$$v_{13} = \frac{a_{13}}{v_{11}}$$

$$v_{14} = \frac{a_{14}}{v_{11}}$$

$$v_{23} = (a_{23} - v_{12} \cdot v_{13})/v_{22}$$

$$v_{24} = (a_{24} - v_{12} \cdot v_{14})/v_{22}$$

$$v_{34} = (a_{34} - v_{13} \cdot v_{14} - v_{23} \cdot v_{24})/v_{33}$$

e cioè, in generale,

$$v_{ij} = (a_{ij} - \sum_{q=1}^{i-1} v_{qi} \cdot v_{qj})/v_{ii} . \quad (13)$$

E' facile constatare che i radicandi delle (11) sono tutti non nulli e positivi se e solo se la matrice A è connessa ad una forma definita positiva.

Si ha infatti $a_{11} > 0$, e poi

$$\begin{aligned} a_{22} - v_{12}^2 &= a_{22} - \frac{a_{12}^2}{v_{11}^2} = \\ &= a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} = \frac{1}{a_{11}} (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) , \end{aligned}$$

e così via.

La (9) consente di scrivere

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{V}^T \mathbf{VX} = \mathbf{B} ;$$

ponendo

$$\mathbf{VX} = \mathbf{Z} \quad (14)$$

si trae

$$\mathbf{V}^T \mathbf{Z} = \mathbf{B} . \quad (15)$$

Nel caso del sistema di quattro equazioni le (15) e (14) si scrivono

$$\begin{aligned} v_{11} Z_1 &= B_1 \\ v_{12} Z_1 + v_{22} Z_2 &= B_2 \\ v_{13} Z_1 + v_{23} Z_2 + v_{33} Z_3 &= B_3 \\ v_{14} Z_1 + v_{24} Z_2 + v_{34} Z_3 + v_{44} Z_4 &= B_4 \end{aligned} \quad (16)$$

ed ancora

$$\begin{aligned} v_{11} X_1 + v_{12} X_2 + v_{13} X_3 + v_{14} X_4 &= Z_1 \\ v_{22} X_2 + v_{23} X_3 + v_{24} X_4 &= Z_2 \\ v_{33} X_3 + v_{34} X_4 &= Z_3 \\ v_{44} X_4 &= Z_4 . \end{aligned} \quad (17)$$

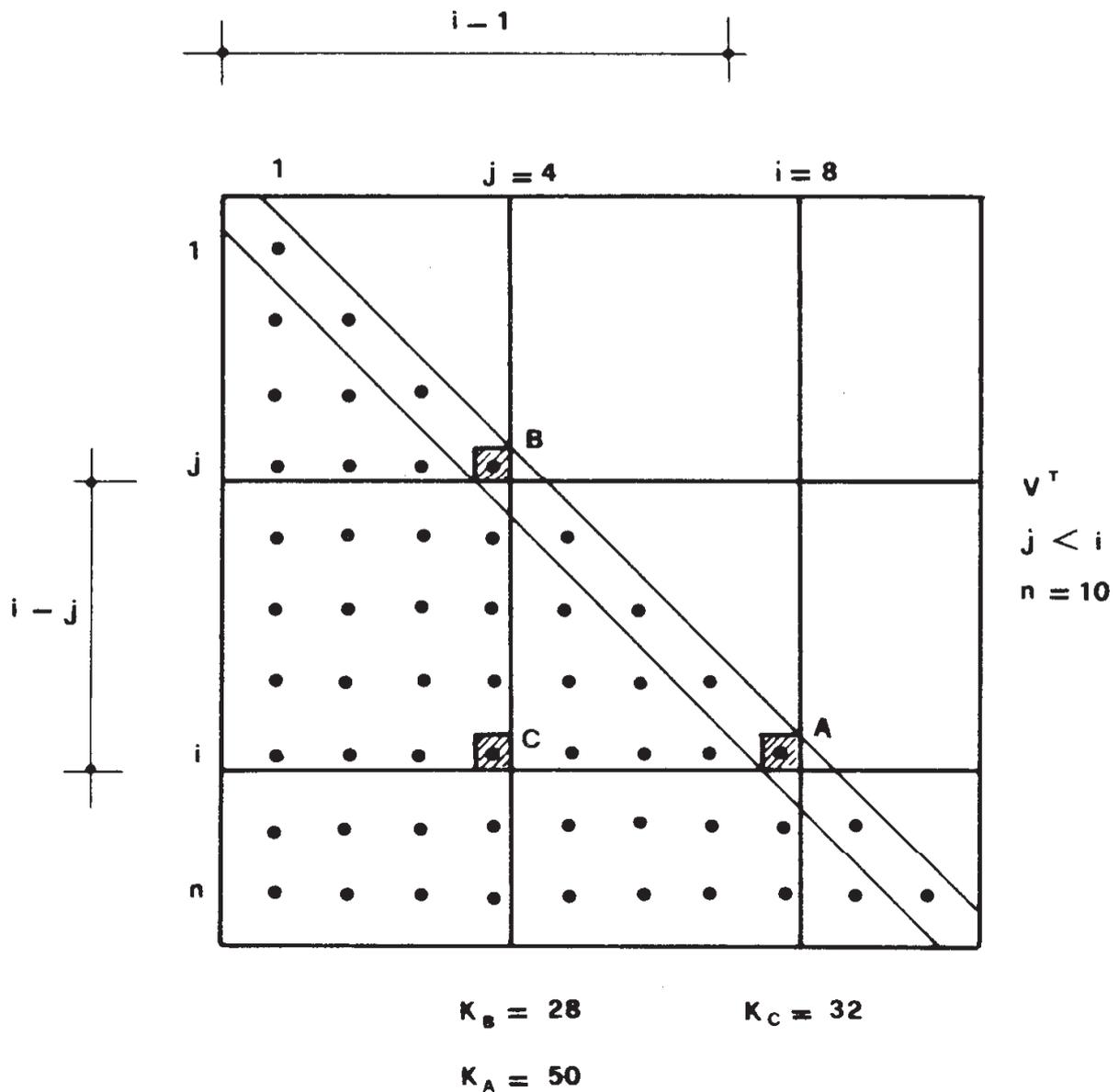
Dalle (16), procedendo dall'alto al basso, si ricavano consecutivamente Z_1 , Z_2 , Z_3 e Z_4 ; dalle (17), procedendo dal basso all'alto, si ricavano consecutivamente, X_4 , X_3 , X_2 ed X_1 .

Programmazione delle equazioni di elasticità.

Il metodo di Cholesky si presta ad una non difficile programmazione. Conviene, per la migliore utilizzazione dello spazio di memoria, ordinare le v_{ij} in un array monodimensionale; e cioè contarle successivamente,

nella matrice V^T per colonne successive, e nella matrice V per righe successive, con un solo indice k , così come segue:

$$\begin{aligned}
 v_1 Z_1 &= B_1 \\
 v_2 Z_1 + v_5 Z_2 &= B_2 \\
 v_3 Z_1 + v_6 Z_2 + v_8 Z_3 &= B_3 \\
 v_4 Z_1 + v_7 Z_2 + v_9 Z_3 + v_{10} Z_4 &= B_4
 \end{aligned}
 \tag{18}$$



ed ancora

Figura 2

$$v_1 X_1 + v_2 X_2 + v_3 X_3 + v_4 X_4 = Z_1$$

$$\begin{aligned}
 v_5 X_2 + v_6 X_3 + v_7 X_4 &= Z_2 \\
 v_8 X_3 + v_3 X_4 &= Z_3 \\
 v_{10} X_4 &= Z_4 .
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Occorre perciò nei due casi, esprimere k in funzione di i e j .
 Nel primo caso (fig. 2), e cioè per

$$j \leq i , \tag{20}$$

si ha, per l'elemento A della diagonale principale, di ordine (i, i)

$$k_A = (i - 1) n - [1 + 2 + 3 + \dots + (i - 2)] + 1 ,$$

e cioè

$$\begin{aligned}
 k &= (i - 1) n - (i - 2) (i - 1)/2 + 1 = \\
 &= (i - 1) n - i (i - 1)/2 + i .
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Analogamente, per l'elemento B della diagonale principale, di ordine (j, j) , è

$$k_B = (j - 1) n - j (j - 1)/2 + j .$$

Ed infine, per il generico elemento C , di ordine (i, j) , si ha

$$k_C = k_B + (i - j)$$

e cioè

$$k = (j - 1) n - j (j - 1)/2 + i . \tag{22}$$

La (21) è la particolarizzazione della (22) per $j = i$.
 Nel secondo caso (fig. 3), e cioè per

$$j \geq i , \tag{23}$$

la (21) rimane inalterata, mentre la (22) si modifica permutando i e j :

$$k = (i - 1) n - i(i - 1)/2 + j. \tag{24}$$

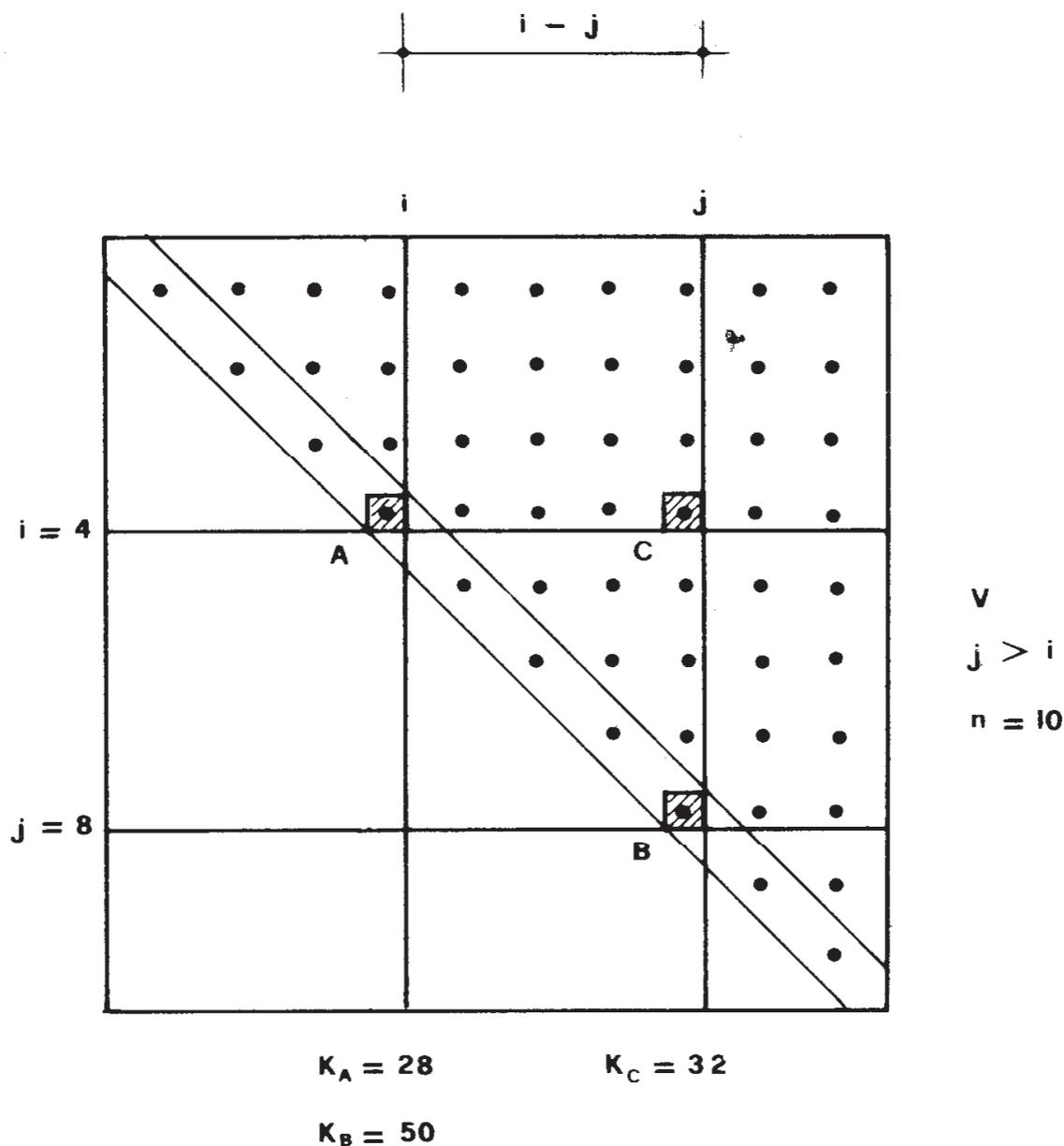


Figura 3

Dalle (18) si ha quindi

$$B_i = \sum_{j=1}^{i-1} v_{ij} Z_j$$

$$Z_i = \frac{B_i}{v_{ii}}$$

ed ancora, per le (21) e (22),

$$Z_i = \frac{B_i - \sum_{j=1}^{i-1} v_{[(j-1)n-j(j-1)/2+i]} \cdot Z_j}{v_{[(i-1)n-i(i-1)/2+i]}} \quad (25)$$

Dalle (19) si ha poi

$$X_i = \frac{Z_i - \sum_{j=i+1}^n v_{ij} X_j}{v_{ii}}$$

e ancora, per le (21) e (24),

$$X_i = \frac{Z_i - \sum_{j=i+1}^n v_{[(i-1)n-i(i-1)/2+j]} \cdot X_j}{v_{[(i-1)n-i(i-1)/2+i]}} \quad (26)$$

Nella fig. 4 è riportato il listing del programma in BASIC relativo alla soluzione di un sistema con il metodo di Cholesky; in DATA, (ovunque, anche dopo END) si suppongono consegnati, nell'ordine, i coefficienti a_{ij} per righe successive, secondo lo schema della fig. 3, e poi i termini noti B_i , con il segno che loro compete se compaiono al secondo membro, secondo lo schema

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}.$$

In 70 occorre, volta per volta, porre N pari ad n ; le 80 e 200 dimensionano gli array monodimensionali V ed Y , con dimensioni rispettivamente $n(n+1)/2$ ed n .

Le frasi da 120 a 190 leggono gli a_{ij} piazzandoli di seguito nell'array V , ancora con la numerazione, per righe successive, della fig. 3. Essi sono stampati per gruppi, con righe separate da un intervallo. Se si rinuncia all'intervallo, più semplicemente può scriversi

```

120  FOR I = 1 TO N * (N + 1)/2
130  READ V (I)
140  PRINT "A (" ; I ; ") = "; V (I)
150  NEXT I ,

```

cancellando le frasi da 160 a 190.

Se non si vuole la stampa dei coefficienti, basta cancellare l'istru-

```

10 REM Programma "SIMM"
20 REM Sistema di equazioni li-
30 REM neari a matrice simmetri
40 REM ca definita positiva.
50 REM Metodo di CHOLESKY.
60 OPTION BASE 1
70 N=3
80 DIM V(6)
90 A=0
100 PRINT
110 PRINT
120 FOR H=0 TO N-1
130 FOR I=A+1 TO A+N-H
140 READ V(I)
150 PRINT "A (";I;") =";V(I)
160 NEXT I
170 A=A+1
180 PRINT
190 NEXT H
200 DIM Y(3)
210 FOR I=1 TO N
220 READ Y(I)
230 PRINT "B (";I;") =";Y(I)
240 NEXT I
250 PRINT
260 FOR I=1 TO N
270 FOR J=I TO N
280 W=0
290 FOR Q=1 TO I-1
300 K1=N*(Q-1)-Q*(Q-1)/2+I
310 K2=N*(Q-1)-Q*(Q-1)/2+J
320 W=W+V(K1)*V(K2)
330 NEXT Q
340 K=N*(I-1)-I*(I-1)/2+J
350 K0=N*(I-1)-I*(I-1)/2+I
360 IF K=K0 THEN 390
370 V(K)=(V(K)-W)/V(K0)
380 GOTO 400
390 V(K)=SQR(V(K)-W)
400 NEXT J
410 NEXT I
420 FOR I=1 TO N
430 Y(I)=Y(I)/V((I-1)*N-I*(I-1)/
2+I)
440 FOR J=1 TO I-1
450 Y(I)=Y(I)-V((J-1)*N-J*(J-1)/
2+I)*Y(J)/V((I-1)*N-I*(I-1)/
2+I)
460 NEXT J
470 NEXT I
480 FOR I=N TO 1 STEP -1
490 Y(I)=Y(I)/V((I-1)*N-I*(I-1)/
2+I)
500 FOR J=I+1 TO N
510 Y(I)=Y(I)-V((I-1)*N-I*(I-1)/
2+J)*Y(J)/V((I-1)*N-I*(I-1)/
2+I)
520 NEXT J
530 NEXT I
540 FOR I=1 TO N
550 PRINT "X (";I;") =";Y
560 NEXT I
570 END
580 DATA 5,3,1,-5,4,8,3,2,4

```

Figura 4

zione 140. Se si vuole risparmiare lo spazio di memoria operativa occupato dai DATA occorre dare questi ultimi in files di disco o nastro; oppure richiedere gli a_{ij} dal video modificando le frasi 120 ÷ 190 come segue

```

120   FOR I = 1 TO N * (N + 1)/2
130   DISP"A ("; I; ") = ";
140   INPUT V (I)
150   NEXT I.

```

In questo secondo caso però gli a_{ij} non sono più reperibili alla fine del programma, poichè nell'array V si ritrovano le v_i invece delle a_i . Le frasi da 210 a 240 pongono nell'array Y i termini noti B_i , imponendo la loro stampa. Per esse vale quanto già detto per gli a_{ij} ; in particolare, anche i valori B_i non si reperiscono più nell'array Y alla fine del programma, poichè in tale array si ritrovano invece i valori delle incognite.

Conviene, se si può in relazione al numero delle equazioni, porre a_{ij} e B_i nei DATA della memoria operativa; è così agevole studiare più casi di sollecitazione, modificando dal video i soli termini B_i .

Dalla frase 260 ha inizio la fase operativa. Le istruzioni da 260 a 410 operano le sostituzioni (12) e (13), ponendo v_i al posto di a_i nell'array V: si risparmia così memoria, ma scompaiono appunto gli a_{ij} , reperibili alla fine solo nei DATA.

Il looping interno 290 ÷ 330 (con l'istruzione iniziale $V = 0$ in 280) calcola in V , dati i ed j , la sommatoria che compare sia nella (12) che nella (13). Ed infatti, per la (24) è

$$K1 = k(q, i) = (q - 1)n - q(q - 1)/2 + i$$

$$K2 = k(q, j) = (q - 1)n - q(q - 1)/2 + j.$$

Le istruzioni 340 e 350 calcolano, per i valori i ed j del looping esterno 260 ÷ 410, i valori k forniti dalla (24) e dalla (21)

$$K = (i - 1)n - i(i - 1)/2 + j.$$

$$K0 = (i - 1)n - i(i - 1)/2 + i;$$

il test 360 fa calcolare v_{ij} con la (12) se $i = j$, e cioè se $K = K0$, con la (13) in caso contrario.

Le frasi da 420 a 470 forniscono nell'array Y (scompaiono così i B_i) i valori Z_i della (25); e così le frasi da 480 a 530 forniscono, sempre nell'array Y, i valori X_i della (26).

Nella fig. 5 è riportata la soluzione del sistema di otto equazioni del problema n. 49 del secondo capitolo del terzo volume di problemi: sono esse appunto equazioni di equilibrio, connesse con il metodo dei

```

580 DATA 1.,25,0,0,0,1,0,0
590 DATA .9,1,0,0,-.15,.075,0
600 DATA 1.2,.5,0,-.075,.075,.25

610 DATA 1.2,1,0,.06,.25
620 DATA .7,0,.06,-.1875
630 DATA .3017,-.0375,0
640 DATA .0615,0
650 DATA .1771
660 DATA 0,0,-3,3,0,0,0,3

```

```

A ( 1 ) = 1
A ( 2 ) = .25
A ( 3 ) = 0
A ( 4 ) = 0
A ( 5 ) = 0
A ( 6 ) = .1
A ( 7 ) = 0
A ( 8 ) = 0

A ( 9 ) = .9
A ( 10 ) = .1
A ( 11 ) = 0
A ( 12 ) = 0
A ( 13 ) = -.15
A ( 14 ) = .075
A ( 15 ) = 0

A ( 16 ) = 1.2
A ( 17 ) = .5
A ( 18 ) = 0
A ( 19 ) = -.075
A ( 20 ) = .075
A ( 21 ) = .25

A ( 22 ) = 1.2
A ( 23 ) = .1
A ( 24 ) = 0
A ( 25 ) = .06
A ( 26 ) = .25

A ( 27 ) = .7
A ( 28 ) = 0
A ( 29 ) = .06
A ( 30 ) = -.1875

A ( 31 ) = .3017
A ( 32 ) = -.0375
A ( 33 ) = 0

A ( 34 ) = .0615
A ( 35 ) = 0

A ( 36 ) = .1771

B ( 1 ) = 0
B ( 2 ) = 0
B ( 3 ) = -3
B ( 4 ) = 3
B ( 5 ) = 0
B ( 6 ) = 0
B ( 7 ) = 0
B ( 8 ) = 3

X ( 1 ) = .062799272594
X ( 2 ) = .798235060811
X ( 3 ) = -13.6466126845
X ( 4 ) = -7.24465026637
X ( 5 ) = .184262090949
X ( 6 ) = -2.62358037797
X ( 7 ) = 3.16017118513
X ( 8 ) = 65.9386219253

```

Figura 5

cedimenti, ed ottenute attraverso il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale.

Un programma per i telai ordinari.

Il metodo dei cedimenti trova la sua più naturale utilizzazione nei

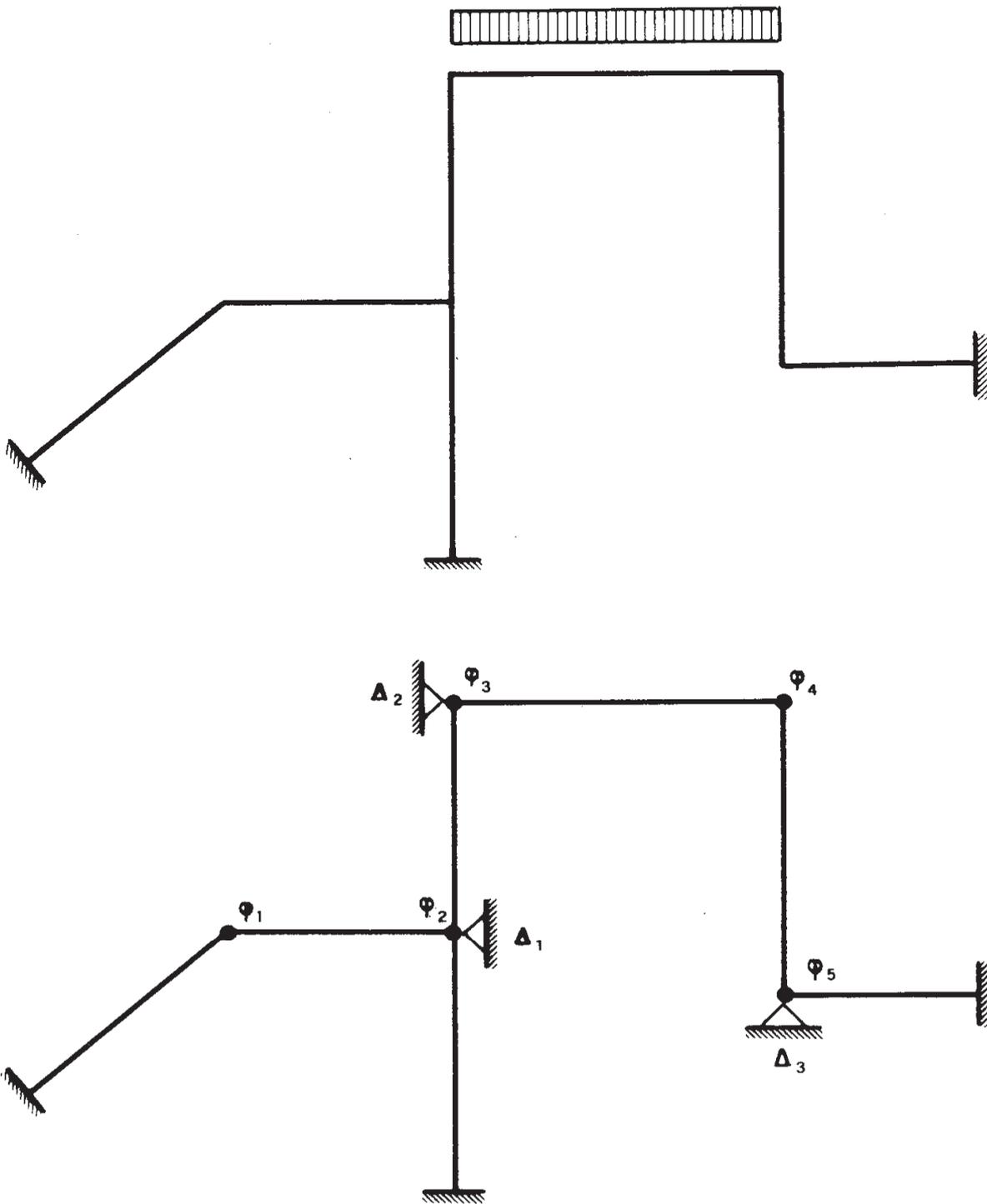


Figura 6

telai ordinari, intesi come assemblaggi (fig. 6) di travi ad asse rettilineo e

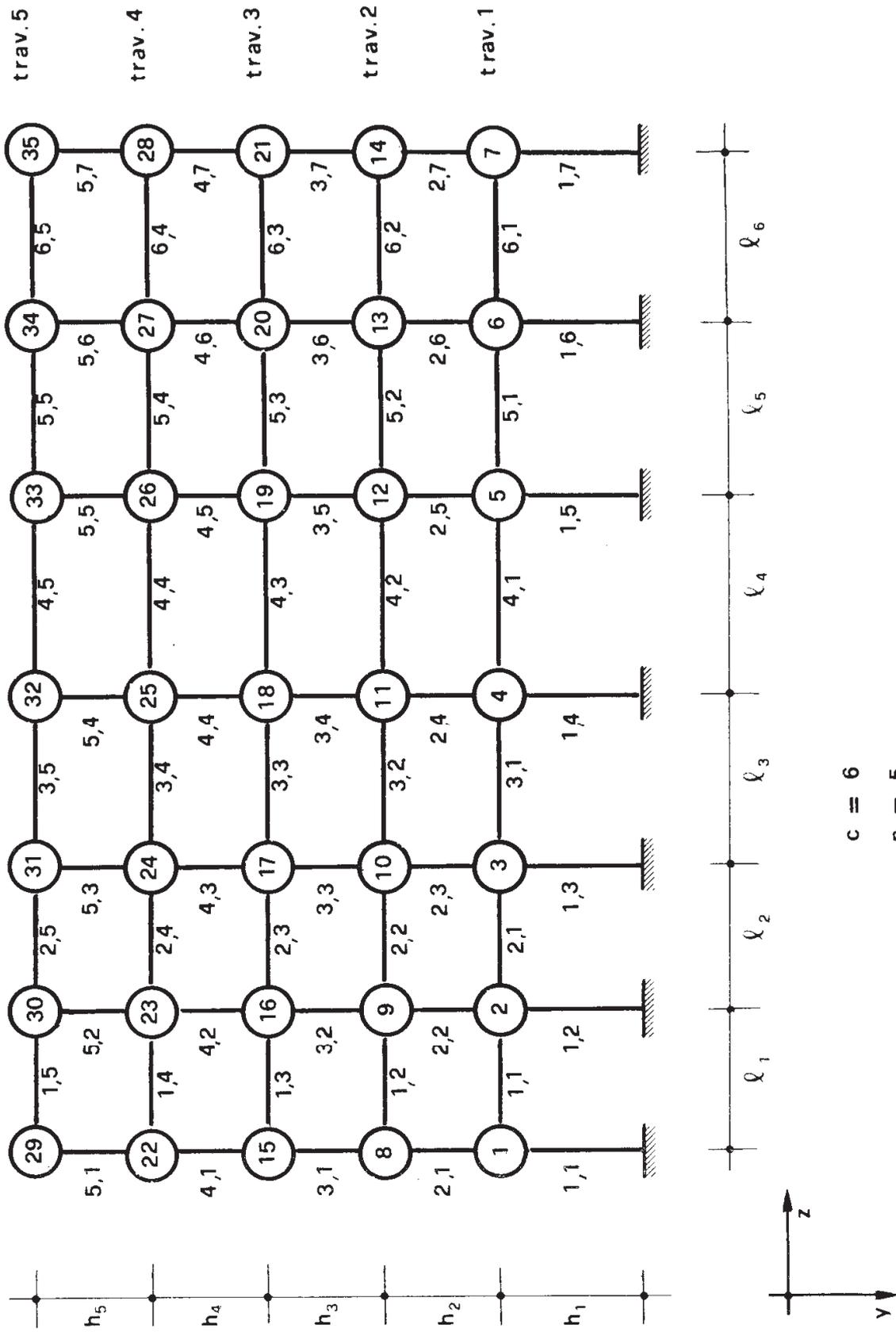


Figura 7

sezione costante; i vincoli aggiunti sono morsetti che impediscono la rotazione nei nodi, ed appoggi capaci, per numero e distribuzione, di impedire gli spostamenti da flessione di tali nodi. E' noto (Fondamenti di Scienza delle Costruzioni, vol. III, pag. 258) che tali appoggi si disegnano facilmente ponendo cerniere in corrispondenza dei nodi e degli incastrati, e rendendo poi con gli appoggi isostatica la struttura che era prima divenuta labile. Le reazioni trasmesse dai vincoli aggiunti alle estremità delle travi, per effetto dei carichi applicati e dei cedimenti, sono in questo caso fornite da semplici e ben note formule, e quindi facilmente si scrive il sistema (2) di equazioni di equilibrio.

Nel caso poi dei telai a ritti verticali e traversi orizzontali, che comprende la grande maggioranza delle strutture portanti in acciaio o in conglomerato armato, e che è esemplificato nella fig. 7, gli appoggi aggiunti sono immediatamente identificabili come quelli posti ad impedire gli spostamenti orizzontali dei traversi; e le equazioni (2) sono immediatamente scrivibili e programmabili, nelle incognite $n + p$, ove n sono i cedimenti dei nodi, pari alle rotazioni effettive, e p i cedimenti degli appoggi, pari agli spostamenti orizzontali effettivi dei traversi.

Nella nomenclatura più usata, l'elemento trave, e cioè quello compreso tra due nodi successivi, si chiama *trave* o *pilastro* secondo che sia orizzontale o verticale; l'insieme delle travi su una stessa orizzontale si chiama *traverso*, l'insieme dei pilastri su una stessa verticale si chiama *ritto*.

Al solito, le componenti verticali di forze e spostamenti sono positive se verso il basso, le orizzontali positive se verso destra; le coppie reattive *sulle travi*, come le rotazioni dei nodi, positive se antiorarie; le forze reattive sulle travi, intese come tagli, positive se sul concio elementare il taglio induce una coppia oraria.

Ci si limiterà, in quanto segue, a carichi uniformi sull'intera luce (del pilastro o della trave), pilastri di base incastrati e di uguale altezza, forze orizzontali sui traversi; il procedimento è del tutto generale, è facilmente adattabile a casi diversi da quello ora circoscritto.

Gli n nodi siano numerati (fig. 7) da sinistra a destra e, successivamente, dal basso all'alto; le c luci, e con esse i $c + 1$ ritti, da sinistra a destra, le p altezze, e con esse i p traversi, dal basso all'alto.

Le incognite sono le rotazioni dei nodi e gli spostamenti dei traversi, le prime in numero di n , i secondi di p ; in totale le incognite sono

$$m = n + p .$$

Nella fig. 8 è disegnata la matrice delle m equazioni di equilibrio. Le prime n sono le *equazioni di nodo*; nella t -esima equazione entrano in gioco, come si osserverà tra breve, la rotazione del nodo t , del cui equilibrio l'equazione t -esima si occupa, e le rotazioni dei quattro nodi adiacenti; nonchè gli spostamenti del traverso cui il nodo t appartiene, e dei due traversi inferiore e superiore. Le altre p equazioni sono le *equazioni*

di piano; nella t -esima equazione di questo tipo entrano in gioco lo spostamento del traverso ($t - n$), esimo, al cui equilibrio l'equazione si interessa, e gli spostamenti dei due traversi inferiore e superiore; nonché le

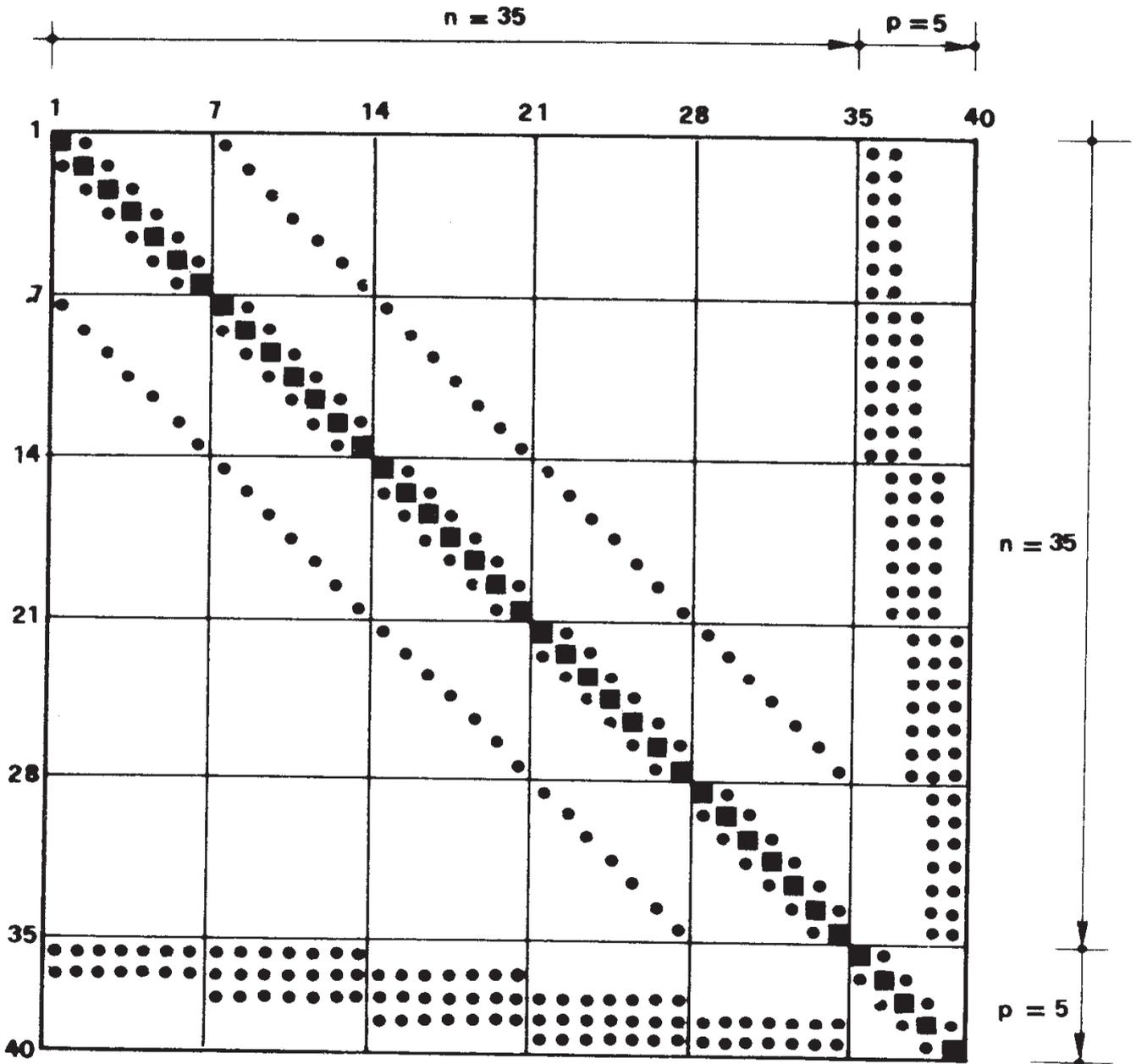


Figura 8

rotazioni di tutti i nodi giacenti sui tre traversi suddetti. La matrice presenta perciò il caratteristico aspetto a banda diagonale sinistra, con in più le due bande orizzontale inferiore e verticale destra. Queste ultime due

scompaiono se il telaio è a nodi fissi; infatti in tal caso le equazioni di equilibrio sono soltanto quelle di nodo. Si riconoscerà (17) la prevalenza degli elementi diagonali (tracciati con un quadrato) sugli adiacenti. E' anche interessante osservare la disposizione e l'aspetto delle sottomatrici di ordine $r \times r$ (ove $r = c + 1$ è il numero dei ritti) ed $r \times p$; ciò consente, per telai a forte numero di incognite, una forte riduzione della memoria impegnata nello stoccaggio dei coefficienti, a costo di non difficili accorgimenti di programmazione.

Le equazioni di nodo e di piano sono chiamate, assieme, equazioni di *Gehler*. I coefficienti a_{ij} della matrice vanno numerati, per utilizzare il metodo di Cholesky, da sinistra a destra e, successivamente, dall'alto in basso; il tutto a destra della diagonale principale. E' perciò necessario definire i numeri d'ordine k in tale successione, e cioè alla Cholesky, in relazione al numero d'ordine t dell'equazione, e cioè della riga della matrice ($t = 1, 2, \dots, m$); t coincide con il numero d'ordine del nodo cui l'equazione si riferisce, o con quello del traverso incrementato di n .

Per il coefficiente t -esimo il numero d'ordine alla Cholesky è comunque fornito dalla (21):

$$k_t = (t - 1) m - (t^2 - t)/2 + t . \tag{27}$$

Nelle equazioni di nodo, i numeri d'ordine dei coefficienti a destra del t -esimo, e relativi alle incognite φ nei nodi a destra e al disopra del t -esimo (fig. 9), sono, da sinistra a destra,

$$k_t + 1 \tag{28}$$

$$k_t + c + 1 ;$$

essi sono rappresentati dai cerchietti in nero della fig. 8, sulle due diagonali destre parallele alla principale.

Dato t , occorre anche conoscere il numero d'ordine l della luce di destra, contando le luci dalla sinistra, ed il numero d'ordine h dell'altezza superiore, contando le altezze dal basso.

In relazione infatti ad l ed h si impone alle travi (fig. 10) il doppio indice

$$\begin{aligned} i &= l & (i = 1, 2, \dots, c) \\ j &= h - 1 & (j = 1, 2, \dots, p) , \end{aligned} \tag{29}$$

ed ai pilastri il doppio indice

$$\begin{aligned} i &= h - 1 & (i = 1, 2, \dots, p) \\ j &= l & (j = 1, 2, \dots, c + 1); \end{aligned} \tag{30}$$

così un qualsiasi ente (per esempio la rigidezza) può essere ordinato in un array bidimensionale, $c \times p$, per le travi, e $p \times (c + 1)$ per i pilastri.

Chiamando h_1 la parte intera del rapporto $t/(c + 1)$, e cioè

$$h_1 = IP \ t/(c + 1), \tag{31}$$

si ha

$$\begin{aligned} h &= h_1 + 2 \\ l &= t - h_1 (c + 1) \end{aligned}$$

se $h_1 \neq t (c + 1)$, se cioè non ci si trova sul ritto estremo di destra; se invece è $h_1 = t (c + 1)$, e cioè se ci si trova su tale ritto, è

$$\begin{aligned} h &= t/(c + 1) + 1 \\ l &= c + 1. \end{aligned}$$

In sintesi si scrive perciò

$$\begin{aligned} h_1 \neq t (c + 1) &\rightarrow \begin{cases} h = h_1 + 2 \\ l = t - h_1 (c + 1) \end{cases} \\ h_1 = t (c + 1) &\rightarrow \begin{cases} h = t/(c + 1) + 1 \\ l = c + 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{32}$$

I tre spostamenti Δ interessati dall'equazione t-esima di nodo ($t \leq n$) corrispondono ai coefficienti con numeri d'ordine alla Cholesky (fig. 10)

$$\begin{aligned} k &= k_t + (n - t) + (h - 2) \\ k &= k_t + (n - t) + (h - 1) \\ k &= k_t + (n - t) + h. \end{aligned} \tag{33}$$

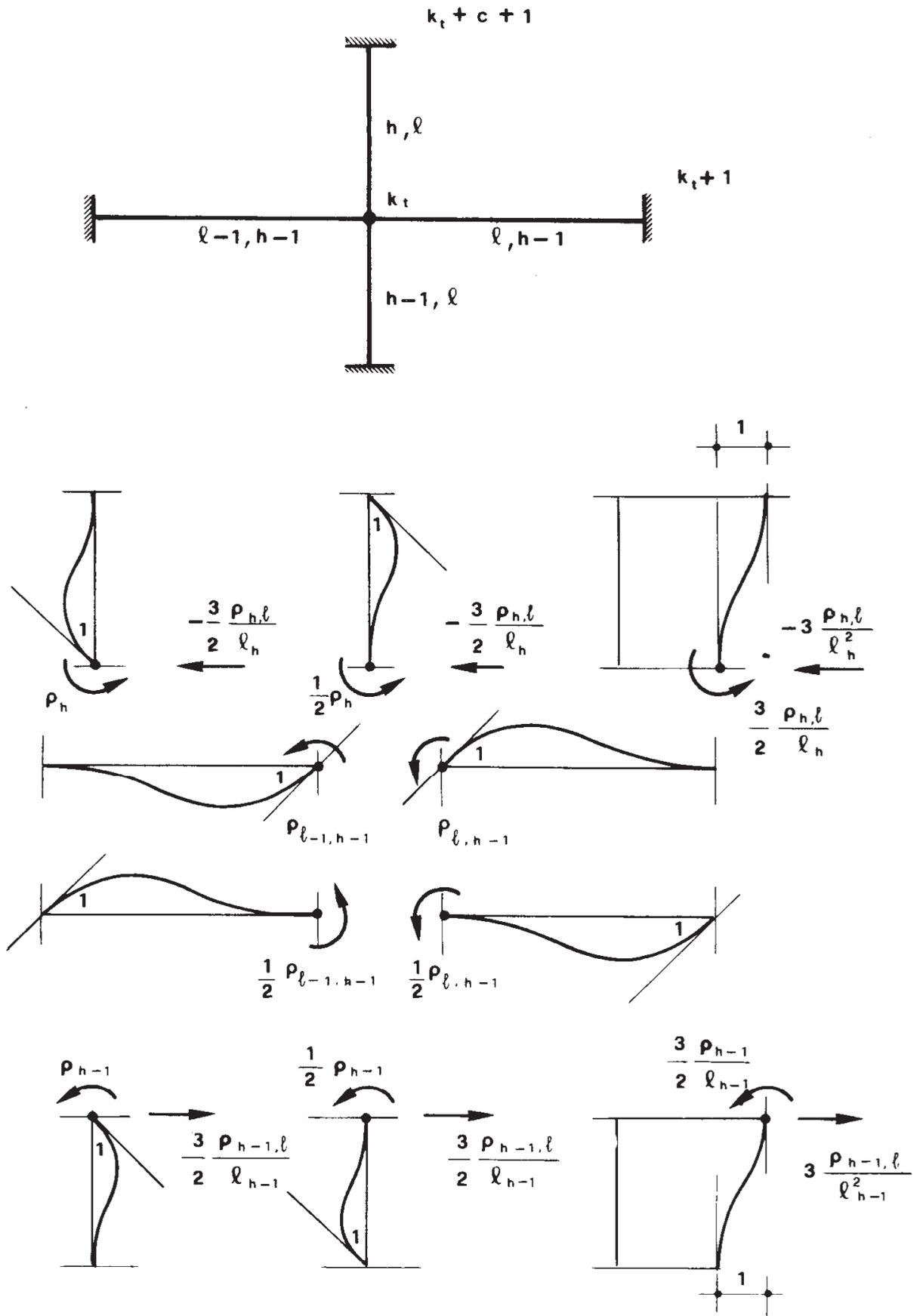


Figura 10

Essi sono rappresentati nella banda verticale destra della fig. 8.

Se la t -esima equazione è di piano ($n < t \leq n + p$), il numero d'ordine alla Cholesky del coefficiente t -esimo, relativo al traverso $t - n$, è sempre fornito dalla (27). Entra poi in gioco il coefficiente relativo allo spostamento superiore, che nella fig. 8 compare a destra del termine diagonale, ed il cui numero d'ordine alla Cholesky è quindi

$$k = k_t + 1 . \tag{34}$$

I dati della struttura sono contenuti nella matrice **T** delle travi ed in quella **R** dei pilastri. La matrice **T** è la seguente:

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} l_1 & I_{11} & I_{12} & \dots & I_{1p} & q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1p} \\ \dots & \dots \\ l_c & I_{c1} & I_{c2} & \dots & I_{cp} & q_{c1} & q_{c2} & \dots & q_{cp} \end{vmatrix} . \tag{35}$$

Ogni riga è relativa alle travi di una verticale; la generica riga contiene di seguito, per quella verticale, la luce, unica per tutte le travi, i momenti d'inerzia ed i carichi q , dal basso verso l'alto. Le dimensioni di **T** sono quindi

$$T (c, 2p + 1) . \tag{36}$$

La matrice **R** è la seguente:

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} h_1 & J_{11} & J_{12} & \dots & J_{1(c+1)} & q'_{11} & q'_{12} & \dots & q'_{1(c+1)} & F'_1 \\ \dots & \dots \\ h_p & J_{p1} & J_{p2} & \dots & J_{p(c+1)} & q'_{p1} & q'_{p2} & \dots & q'_{p(c+1)} & F'_p \end{vmatrix} . \tag{37}$$

Ogni riga è relativa ai pilastri di un piano; la generica riga contiene di seguito, per quel piano, l'altezza, unica per tutti i pilastri, i momenti d'inerzia, i carichi q' , da sinistra a destra, ed infine la forza sul traverso.

Le dimensioni di **R** sono quindi

$$R (p, 2c + 4) . \tag{38}$$

Nelle matrici **R1** ed **R2** vengono posti, da programma, nell'ordine già precisato (fig. 7), i valori (E modulo elastico)

$$\rho = \frac{4IE}{l}$$

$$\rho' = \frac{4JE}{h}$$

relativi alle travi ed ai pilastri; esse sono

$$\mathbf{R1} = \begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \dots & \rho_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{c1} & \rho_{c2} & \dots & \rho_{cp} \end{vmatrix} \quad (40)$$

$$\mathbf{R2} = \begin{vmatrix} \rho'_{11} & \rho'_{12} & \dots & \rho'_{1(c+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho'_{p1} & \rho'_{p2} & \dots & \rho'_{p(c+1)} \end{vmatrix} \quad (41)$$

La $\mathbf{R1}$ contiene le ρ delle travi; ogni riga corrisponde alle travi di una verticale.

La $\mathbf{R2}$ contiene le ρ dei pilastri; ogni riga corrisponde ad un piano. Le dimensioni di $\mathbf{R1}$ ed $\mathbf{R2}$ sono

$$R1 (c, p) \quad (42)$$

$$R2 (p, c + 1).$$

Nella matrice $\mathbf{M1}$ vengono posti i valori assoluti delle coppie $\overline{\mathfrak{M}}$ di incastro perfetto $\frac{ql^2}{12}$ alle estremità delle travi, nelle matrici $\mathbf{M2}$ e $\mathbf{Z2}$ i valori assoluti delle coppie \mathfrak{M} di incastro perfetto $\frac{ql^2}{12}$ e delle reazioni \overline{R} di incastro perfetto $\frac{qh}{2}$ alle estremità dei pilastri; le dimensioni di tali matrici sono

$$\begin{aligned} M1 (c, p) \\ M2 (p, c + 1) \\ Z2 (p, c + 1). \end{aligned} \quad (43)$$

La matrice colonna V accoglie i coefficienti v_K ; le sue dimensioni sono

$$V \left(m \cdot \frac{m+1}{2} \right). \quad (44)$$

La matrice colonna Y accoglie prima i termini noti e poi le incognite, e cioè le rotazioni φ dei nodi e gli spostamenti Δ dei traversi; le sue dimensioni sono

$$Y (m). \quad (45)$$

La matrice M contiene le coppie reattive alle estremità delle travi e dei pilastri, e cioè quattro elementi per ogni nodo; essa è così articolata

$$M = \begin{vmatrix} \bar{m}_{11} & \bar{m}_{12} & \bar{m}_{13} & \bar{m}_{14} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \bar{m}_{n1} & \bar{m}_{n2} & \bar{m}_{n3} & \bar{m}_{n4} \end{vmatrix}, \quad (46)$$

e cioè ogni riga corrisponde ad un nodo, e contiene le coppie reattive (agenti dal nodo sulle travi) rispettivamente a sinistra ed a destra, sotto e sopra il nodo stesso.

Le dimensioni di M sono quindi

$$M (n, 4). \quad (47)$$

La matrice colonna $M3$ contiene le coppie reattive alle estremità dei ritri di base, e quindi

$$M\beta (c + 1). \quad (48)$$

Le matrici G e $G3$ sono analoghe alle M ed $M3$, e riguardano i tagli.

L'equazione di equilibrio relativa al nodo t -esimo ($t = 1, 2, \dots n$) è (fig. 10), facendo riferimento agli enti agenti dal nodo sulle travi,

$$\begin{aligned} & \varphi_t (\rho_{l-1,h-1} + \rho_{l,h-1} + \rho'_{h-1,l} + \rho'_{h,l}) + \\ & + \varphi_{t-1} \frac{\rho_{l-1,h-1}}{2} + \varphi_{t+1} \frac{\rho_{l,h-1}}{2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varphi_{t-c-1} \frac{\rho'_{h-1,l}}{2} + \varphi_{t+c+1} \frac{\rho'_{h,l}}{2} + \\
& + \frac{3\rho'_{h-1,l}}{2h_{h-1}} (\Delta_{h-1} - \Delta_{h-2}) + \frac{3\rho'_{h,l}}{2h_h} (\Delta_h - \Delta_{h-1}) + \Sigma \bar{m} = 0,
\end{aligned}$$

dove le \bar{m} sono le coppie di incastro perfetto sulle estremità delle travi e dei pilastri concorrenti nel nodo t-esimo. Ordinando si ha quindi

$$\begin{aligned}
& \varphi_t (\rho_{l-1,h-1} + \rho_{l,h-1} + \rho'_{h-1,l} + \rho'_{h,l}) + \\
& + \varphi_{t-1} \frac{\rho_{l-1,h-1}}{2} + \varphi_{t+1} \frac{\rho_{l,h-1}}{2} + \tag{49} \\
& + \varphi_{t-c-1} \frac{\rho'_{h-1,l}}{2} + \varphi_{t+c+1} \frac{\rho'_{h,l}}{2} - \Delta_{h-2} \frac{3}{2} \frac{\rho'_{h-1,l}}{h_{h-1}} + \\
& + \Delta_{h-1} \frac{3}{2} \left(\frac{\rho'_{h-1,l}}{h_{h-1}} - \frac{\rho'_{h,l}}{h_h} \right) + \Delta_h \frac{3}{2} \frac{\rho'_{h,l}}{h_h} = - \Sigma \bar{m}.
\end{aligned}$$

L'equazione t-esima è di equilibrio relativa ad un traverso se si verifica

$$n < t < n + p.$$

Essa si scrive (fig. 11)

$$F - \Sigma \bar{R} - \Sigma \bar{R} = 0,$$

dove la F e le \bar{R} sono la forza applicata sul traverso e le reazioni di incastro perfetto agenti sulle estremità dei pilastri concorrenti sul traverso, mentre le \bar{R} sono le reazioni, sulle stesse estremità dei pilastri, generate dalle φ dei nodi e dai Δ dei traversi.

E' perciò

$$\Sigma \bar{R} = F - \Sigma \bar{R},$$

e cioè, per il traverso di ordine h , ove

$$h = t - n ,$$

si ha (fig. 11)

$$(\Delta_{h-1} - \Delta_{h-2}) \frac{3}{h_{h-1}^2} \sum_{i=1}^{c+1} \rho'_{h-1,i} -$$

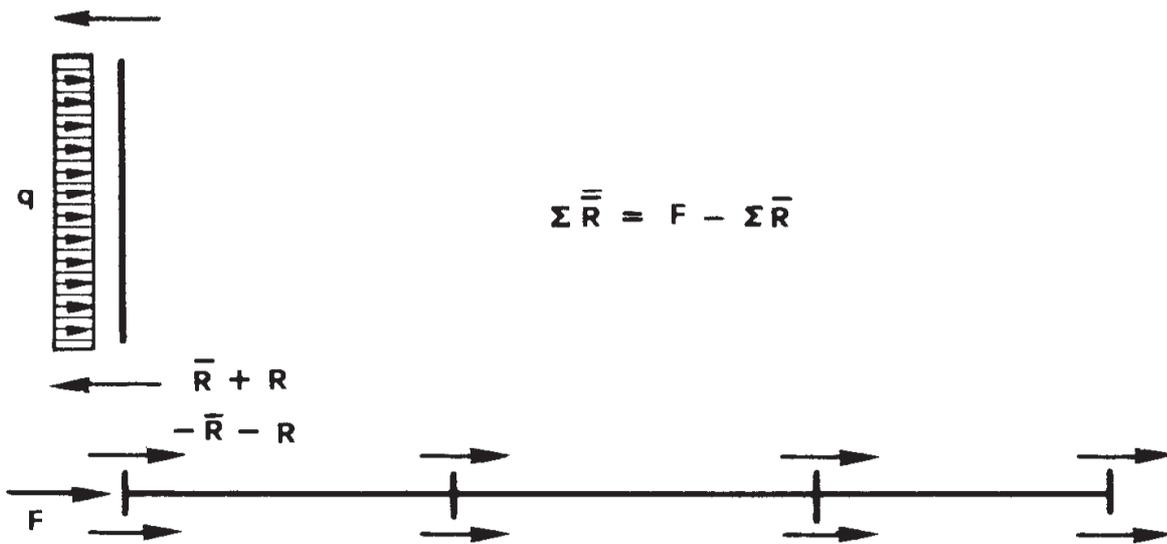


Figura 11

$$\begin{aligned} & - (\Delta_h - \Delta_{h-1}) \frac{3}{h_h^2} \sum_{i=1}^{c+1} \rho'_{h,i} + \\ & + \frac{3}{2 h_{h-1}} \left(\sum_{i=1}^{c+1} \varphi_{h-2,i} \rho'_{h-1,i} + \sum_{i=1}^{c+1} \varphi_{h-1,i} \rho'_{h-1,i} \right) - \\ & - \frac{3}{2 h_h} \left(\sum_{i=1}^{c+1} \varphi_{h-1,i} \rho'_{h,i} + \sum_{i=1}^{c+1} \varphi_{h,i} \rho'_{h,i} \right) = \\ & = F_{h-1} - \sum_{i=1}^{c+1} \bar{R}_{h-1,i} - \sum_{i=1}^{c+1} \bar{R}_{h,i} . \end{aligned}$$

Ordinando si ottiene

$$\begin{aligned}
& - \Delta_{h-2} \frac{3}{h_{h-1}^2} \sum_{i=1}^{c+1} \rho'_{h-1,i} + \\
& + \Delta_{h-1} 3 \left(\frac{1}{h_{h-1}^2} \sum_{i=1}^{c+1} \rho'_{h-1,i} + \frac{1}{h_h^2} \sum_{i=1}^{c+1} \rho'_{h,i} \right) - \\
& - \Delta_h \frac{3}{h_h^2} \sum_{i=1}^{c+1} \rho'_{h,i} + \tag{50} \\
& + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{c+1} \varphi_{h-2,i} \frac{\rho'_{h-1,i}}{h_{h-1}} + \\
& + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{c+1} \varphi_{h-1,i} \left(\frac{\rho'_{h-1,i}}{h_{h-1}} - \frac{\rho'_{h,i}}{h_h} \right) - \\
& - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{c+1} \varphi_{h,i} \frac{\rho'_{h,i}}{h_h} = \\
& = F_{h-1} - \sum_{i=1}^{c+1} \bar{R}_{h-1,i} - \sum_{i=1}^{c+1} \bar{R}_{h,i} .
\end{aligned}$$

Una volta ottenute le rotazioni φ e gli spostamenti Δ , le coppie sulle estremità A e B di una trave AB sono fornite (fig. 12) da

$$\mathfrak{m}_A = \bar{\mathfrak{m}}_A + \left(\varphi_A + \frac{1}{2} \varphi_B \right) \rho \tag{51}$$

$$\mathfrak{m}_B = \bar{\mathfrak{m}}_B + \left(\varphi_B + \frac{1}{2} \varphi_A \right) \rho ,$$

ed i due tagli da

$$T_A = \frac{q l}{2} + \frac{\mathfrak{m}_A + \mathfrak{m}_B}{l} \tag{52}$$

$$T_B = -\frac{ql}{2} + \frac{A + B}{l}.$$

Per un pilastro AB invece la (51) si scrive

$$m_A = \bar{m}_A + \left(\varphi_A + \frac{1}{2} \varphi_B\right) \rho' + \frac{\Delta_B - \Delta_A}{h} \frac{3}{2} \rho' \tag{53}$$

$$m_B = \bar{m}_B + \left(\varphi_B + \frac{1}{2} \varphi_A\right) \rho' + \frac{\Delta_B - \Delta_A}{h} \frac{3}{2} \rho'.$$

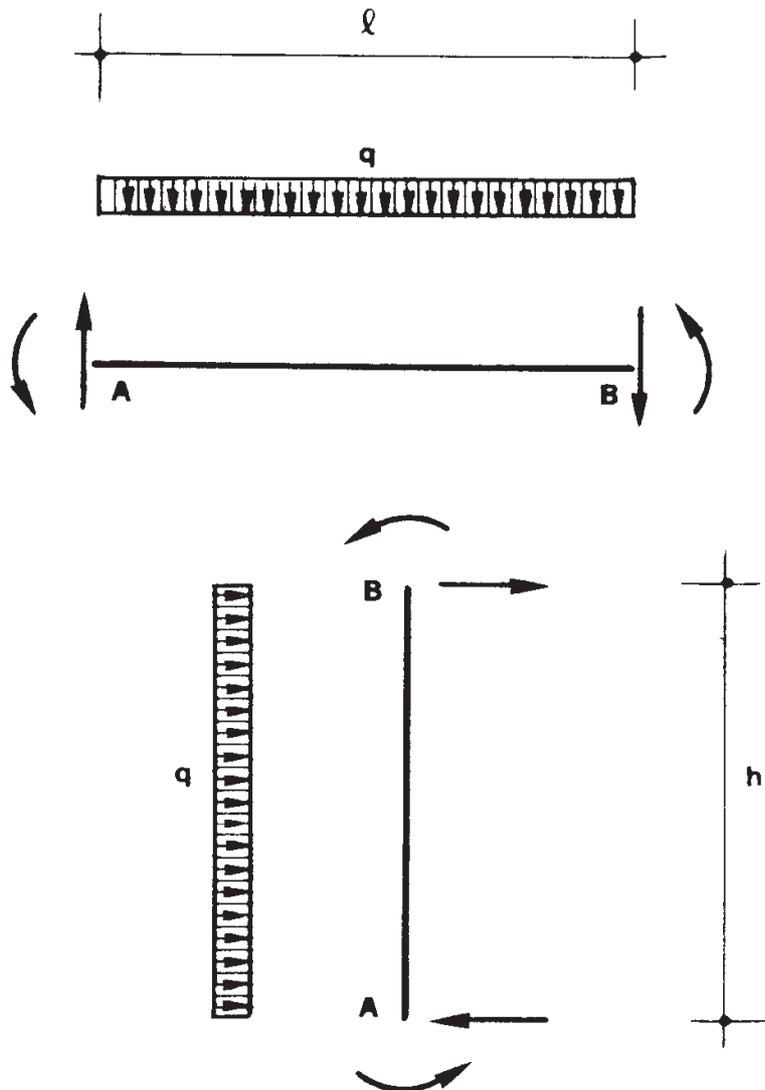


Figura 12

Nelle formule ora scritte si è supposto che il verso AB sia nella trave verso destra, e nel pilastro verso l'alto. Nella fig. 13 è segnata la dispo-

zione dei termini di una generica riga della matrice M delle coppie e della matrice G dei tagli.

Nella fig. 14 è riportato il listing del programma. Nelle frasi da 460 a 600 sono dimensionate le matrici, e queste vanno corrette preliminarmente caso per caso.

I DATA possono essere imposti in qualsiasi stadio del programma, per esempio dopo END, e cioè a partire dalla frase 3950; nell'ordine essi sono c , p , il modulo elastico E e poi, riga per riga, prima i valori della matrice T (35), poi quelli della matrice R (37)

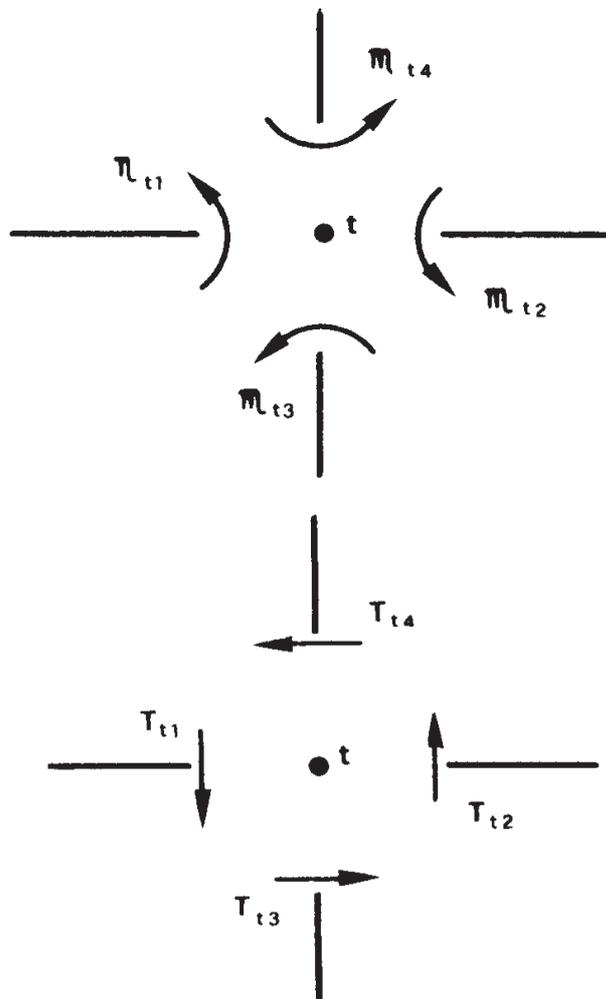


Figura 13

Le frasi da 610 a 740 leggono i DATA e li inseriscono nella memoria operativa.

Le frasi da 750 a 990 costruiscono le matrici $R1$, $R2$, $M1$, $M2$ e $Z2$.

Le frasi da 1000 a 1020 azzerano inizialmente tutti i termini della matrice colonna V dei coefficienti delle equazioni.

Il looping 1030 ÷ 1410 calcola i V per le equazioni (49), che sono le equazioni di nodo.

Per ogni t , che varia da 1 ad n , si calcolano il k_t della (27) con la frase 1040, h ed l con le frasi 1050 ÷ 1110. Le frasi da 1120 a 1270 cal-

```

10 REM Programma "GELER".
20 REM Telaio a nodi spostabili
30 REM Basi incastrate ed alla
40 REM stessa quota
50 REM L'input si esegue in fon
60 REM do al programma, in DATA,
70 REM a partire dall'istr.3930
80 REM Si forniscono prima i
90 REM valori di c e p
100 REM Si inizia dalla vertica
110 REM le di sinistra,dando Pri
120 REM ma la luce, poi i momen
130 REM ti di inerzia dei tra
140 REM versi dal basso verso
150 REM l'alto,poi i carichi uni
160 REM formi verticali.
170 REM Si continua analogamente
180 REM per le successive verti
190 REM cali da sinistra a
200 REM destra.
210 REM Si inizia poi dal piano
220 REM piu' basso,dando prima
230 REM l'altezza del piano,
240 REM poi i momenti d'inerzia
250 REM dei ritti da sinistra a
260 REM destra,poi i carichi uni
270 REM formi orizzontali (even
280 REM tuali) ,infine la forza
290 REM orizzontale sul piano.
300 REM Si continua analogamente
310 REM per i piani successivi
320 REM dal basso verso l'alto
330 REM Forze e spostamenti sono
340 REM positivi se verso il bas
350 REM so o verso destra.
360 REM Le coppie fornite sono
370 REM quelle agenti dal nodo
380 REM sulla trave,positive se
390 REM antiorarie.
400 REM I taeli forniti sono po
410 REM sitivi se sul concio for
420 REM mano coppia oraria.
430 REM Le rotazioni sono Positi
440 REM ve se antiorarie
450 OPTION BASE 1
460 DIM T(2,9)
470 DIM R(4,8)
480 DIM R1(2,4)
490 DIM R2(4,3)
500 DIM M1(2,4)
510 DIM M2(4,3)
520 DIM Z2(4,3)
530 DIM V(136)
540 DIM Y(16)
550 DIM M(12,4)
560 DIM M3(3)
570 DIM G(12,4)
580 DIM G3(3)
590 DIM N1(2,4)
600 DIM N2(4,3)

```

Figura 14a

```

610 READ C,P,E
620 N=P*(C+1)
630 M=N+P
640 V=M*(M+1)/2
650 FOR I=1 TO C
660 FOR J=1 TO 2*P+1
670 READ T(I,J)
680 NEXT J
690 NEXT I
700 FOR I=1 TO P
710 FOR J=1 TO 2*C+4
720 READ R(I,J)
730 NEXT J
740 NEXT I
750 FOR I=1 TO C
760 FOR J=1 TO P
770 R1(I,J)=4*T(I,J+1)/T(I,1)*E
780 NEXT J
790 NEXT I
800 FOR I=1 TO P
810 FOR J=1 TO C+1
820 R2(I,J)=4*R(I,J+1)/R(I,1)*E
830 NEXT J
840 NEXT I
850 FOR I=1 TO C
860 FOR J=1 TO P
870 M1(I,J)=T(I,J+P+1)*T(I,1)^2/
12
880 NEXT J
890 NEXT I
900 FOR I=1 TO P
910 FOR J=1 TO C+1
920 M2(I,J)=R(I,J+C+2)*R(I,1)^2/
12
930 NEXT J
940 NEXT I
950 FOR I=1 TO P
960 FOR J=1 TO C+1
970 Z2(I,J)=R(I,J+C+2)*R(I,1)/2
980 NEXT J
990 NEXT I
1000 FOR I=1 TO V
1010 V(I)=0
1020 NEXT I
1030 FOR T=1 TO N
1040 K=(T-1)*M+T-(T^2-T)/2
1050 H1=IP(T/(C+1))
1060 IF H1=T/(C+1) THEN 1100
1070 H=H1+2
1080 L=T-H1*(C+1)
1090 GOTO 1120
1100 H=T/(C+1)+1
1110 L=C+1
1120 IF (T-1)/(C+1)=IP((T-1)/(C+
1)) THEN 1170
1130 IF T/(C+1)=IP(T/(C+1)) THEN
1200
1140 IF H=P+1 THEN 1270
1150 V(K)=R1(L-1,H-1)+R1(L,H-1)+
R2(H-1,L)+R2(H,L)

```

Figura 14b

```

1160 GOTO 1280
1170 IF H=P+1 THEN 1230
1180 V(K)=R1(L,H-1)+R2(H-1,L)+R2
(H,L)
1190 GOTO 1280
1200 IF H=P+1 THEN 1250
1210 V(K)=R1(L-1,H-1)+R2(H-1,L)+
R2(H,L)
1220 GOTO 1280
1230 V(K)=R1(L,H-1)+R2(H-1,L)
1240 GOTO 1280
1250 V(K)=R1(L-1,H-1)+R2(H-1,L)
1260 GOTO 1280
1270 V(K)=R1(L-1,H-1)+R1(L,H-1)+
R2(H-1,L)
1280 IF T/(C+1)=IP(T/(C+1)) THEN
1300
1290 V(K+1)=R1(L,H-1)/2
1300 IF H=P+1 THEN 1320
1310 V(K+C+1)=R2(H,L)/2
1320 IF T<=C+1 THEN 1340
1330 V(K+N-T+H-2)=-3/2*R2(H-1,L)
/R(H-1,1)
1340 IF H=P+1 THEN 1370
1350 V(K+N-T+H-1)=3/2*R2(H-1,L)/
R(H-1,1)-3/2*R2(H,L)/R(H,1)
1360 GOTO 1390
1370 V(K+N-T+H-1)=3/2*R2(H-1,L)/
R(H-1,1)
1380 GOTO 1390
1390 IF H=P+1 THEN 1410
1400 V(K+N-T+H)=3/2*R2(H,L)/R(H,
1)
1410 NEXT T
1420 FOR T=N+1 TO M
1430 K=(T-1)*M+T-(T^2-T)/2
1440 H=T-N+1
1450 S1=0
1460 FOR I=1 TO C+1
1470 S1=S1+R2(H-1,I)/R(H-1,1)^2
1480 NEXT I
1490 S2=0
1500 IF T=M THEN 1540
1510 FOR I=1 TO C+1
1520 S2=S2+R2(H,I)/R(H,1)^2
1530 NEXT I
1540 V(K)=3*(S1+S2)
1550 IF T=M THEN 1580
1560 V(K+1)=-3*S2
1570 NEXT T
1580 FOR T=1 TO N
1590 K=(T-1)*M+T-(T^2-T)/2
1600 H1=IP(T/(C+1))
1610 IF H1=T/(C+1) THEN 1650
1620 H=H1+2
1630 L=T-H1*(C+1)
1640 GOTO 1670
1650 H=T/(C+1)+1
1660 L=C+1
1670 IF (T-1)/(C+1)=IP((T-1)/(C+
1)) THEN 1720

```

Figura 14c

```

1680 IF T/(C+1)=IP(T/(C+1)) THEN
1690   1750
1690 IF H=P+1 THEN 1820
1700 Y(T)=M1(L-1,H-1)-M1(L,H-1)+
      M2(H-1,L)-M2(H,L)
1710 GOTO 1830
1720 IF H=P+1 THEN 1780
1730 Y(T)=-M1(L,H-1)+M2(H-1,L)-M
      2(H,L)
1740 GOTO 1830
1750 IF H=P+1 THEN 1800
1760 Y(T)=M1(L-1,H-1)+M2(H-1,L)-
      M2(H,L)
1770 GOTO 1830
1780 Y(T)=-M1(L,H-1)+M2(H-1,L)
1790 GOTO 1830
1800 Y(T)=M1(L-1,H-1)+M2(H-1,L)
1810 GOTO 1830
1820 Y(T)=M1(L-1,H-1)-M1(L,H-1)+
      M2(H-1,L)
1830 NEXT T
1840 FOR T=N+1 TO M-1
1850 H=T-N+1
1860 S1=0
1870 S2=0
1880 FOR I=1 TO C+1
1890 S1=S1+Z2(H-1,I)
1900 S2=S2+Z2(H,I)
1910 NEXT I
1920 Y(T)=S1+S2+R(H-1,2*C+4)
1930 NEXT T
1940 S2=0
1950 FOR I=1 TO C+1
1960 S2=S2+Z2(P,I)
1970 NEXT I
1980 Y(M)=S2+R(P,2*C+4)
1990 FOR I=1 TO M
2000 FOR J=I TO M
2010 W=0
2020 FOR Q=1 TO I-1
2030 K1=M*(Q-1)-Q*(Q-1)/2+I
2040 K2=M*(Q-1)-Q*(Q-1)/2+J
2050 W=W+V(K1)*V(K2)
2060 NEXT Q
2070 K=M*(I-1)-I*(I-1)/2+J
2080 K0=M*(I-1)-I*(I-1)/2+I
2090 IF K=K0 THEN 2120
2100 V(K)=(V(K)-W)/V(K0)
2110 GOTO 2130
2120 V(K)=SQR(V(K)-W)
2130 NEXT J
2140 NEXT I
2150 FOR I=1 TO M
2160 Y(I)=Y(I)/V((I-1)*M-I*(I-1)
      /2+I)
2170 FOR J=1 TO I-1
2180 Y(I)=Y(I)-V((J-1)*M-J*(J-1)
      /2+I)*Y(J)/V((I-1)*M-I*(I-1)
      /2+I)
2190 NEXT J

```

Figura 14d

```

2200 NEXT I
2210 FOR I=M TO 1 STEP -1
2220 Y(I)=Y(I)/V((I-1)*M-I*(I-1)
/2+I)
2230 FOR J=I+1 TO M
2240 Y(I)=Y(I)-V((I-1)*M-I*(I-1)
/2+J)*Y(J)/V((I-1)*M-I*(I-1)
)/2+I)
2250 NEXT J
2260 NEXT I
2270 FOR T=1 TO N
2280 FOR J=1 TO 4
2290 M(T, J)=0
2300 NEXT J
2310 NEXT T
2320 FOR T=1 TO N
2330 H1=IP(T/(C+1))
2340 IF H1=T/(C+1) THEN 2380
2350 H=H1+2
2360 L=T-H1*(C+1)
2370 GOTO 2400
2380 H=T/(C+1)+1
2390 L=C+1
2400 IF (T-1)/(C+1)=IP((T-1)/(C+
1)) THEN 2420
2410 M(T, 1)=-M1(L-1, H-1)+(Y(T)+Y
(T-1)/2)*R1(L-1, H-1)
2420 IF T/(C+1)=IP(T/(C+1)) THEN
2440
2430 M(T, 2)=M1(L, H-1)+(Y(T)+Y(T+
1)/2)*R1(L, H-1)
2440 IF T<=C+1 THEN 2470
2450 M(T, 3)=-M2(H-1, L)+(Y(T)+Y(T
-C-1)/2+(Y(N+H-1)-Y(N+H-2))
)/R(H-1, 1)*3/2)*R2(H-1, L)
2460 GOTO 2480
2470 M(T, 3)=-M2(H-1, L)+(Y(T)+Y(N
+H-1)/R(H-1, 1)*3/2)*R2(H-1,
L)
2480 IF H=P+1 THEN 2500
2490 M(T, 4)=M2(H, L)+(Y(T)+Y(T+C+
1)/2+(Y(N+H)-Y(N+H-1))/R(H,
1)*3/2)*R2(H, L)
2500 IF T>C+1 THEN 2520
2510 M3(T)=M2(1, L)+(Y(T)/2+Y(N+1)
)/R(1, 1)*3/2)*R2(1, L)
2520 NEXT T
2530 FOR T=1 TO N
2540 FOR J=1 TO 4
2550 G(T, J)=0
2560 NEXT J
2570 NEXT T
2580 FOR T=1 TO N
2590 H1=IP(T/(C+1))
2600 IF H1=T/(C+1) THEN 2640
2610 H=H1+2
2620 L=T-H1*(C+1)
2630 GOTO 2660
2640 H=T/(C+1)+1
2650 L=C+1

```

Figura 14e

```

2660 IF (T-1)/(C+1)=IP((T-1)/(C+
1)) THEN 2680
2670 G(T,1)=-T(L-1,H+P)*T(L-1,1)
/2+(M(T-1,2)+M(T,1))/T(L-1,
1)
2680 IF T/(C+1)=IP(T/(C+1)) THEN
2700
2690 G(T,2)=T(L,H+P)*T(L,1)/2+(M
(T,2)+M(T+1,1))/T(L,1)
2700 IF T<=C+1 THEN 2730
2710 G(T,3)=-R(H-1,L+C+2)*R(H-1,
1)/2+(M(T,3)+M(T-C-1,4))/R(
H-1,1)
2720 GOTO 2740
2730 G(T,3)=-R(H-1,L+C+2)*R(H-1,
1)/2+(M(T,3)+M3(T))/R(H-1,1)
)
2740 IF H=P+1 THEN 2760
2750 G(T,4)=R(H,L+C+2)*R(H,1)/2+
(M(T,4)+M(T+C+1,3))/R(H,1)
2760 IF T>C+1 THEN 2780
2770 G3(T)=R(1,L+C+2)*R(1,1)/2+(
M(T,3)+M3(T))/R(1,1)
2780 NEXT T
2790 FOR T=1 TO N
2800 PRINT " rotazione in";T;"="
;Y(T)
2810 PRINT
2820 NEXT T
2830 PRINT
2840 PRINT
2850 FOR T=N+1 TO M
2860 PRINT "spostamento trav. ";T
-N;"=";Y(T)
2870 PRINT
2880 NEXT T
2890 PRINT
2900 PRINT
2910 FOR I=1 TO C+1
2920 PRINT "coppia flettente all
a base del ritto";I;"=";M3
(I)
2930 NEXT I
2940 PRINT
2950 PRINT
2960 FOR T=1 TO N
2970 PRINT "coppia flettente sul
la trave alla sinistra di"
;T;"=";M(T,1)
2980 PRINT "coppia flettente sul
la trave alla destra di ";
T;"=";M(T,2)
2990 PRINT "coppia flettente sul
ritto sotto ";T;"=";M(T,3)
3000 PRINT "coppia flettente sul
ritto sopra ";T;"=";M(T,4)
3010 PRINT
3020 NEXT T
3030 PRINT
3040 PRINT

```

Figura 14f

```

3050 FOR I=1 TO C+1
3060 PRINT "taolio alla base del
      ritto";I;"=";G3(I)
3070 NEXT I
3080 PRINT
3090 PRINT
3100 FOR T=1 TO N
3110 PRINT "taolio alla sinistra
      di ";T;"=";G(T,1)
3120 PRINT "taolio alla destra d
      i ";T;"=";G(T,2)
3130 PRINT "taolio sotto";T;"=";
      G(T,3)
3140 PRINT "taolio sopra";T;"=";
      G(T,4)
3150 PRINT
3160 NEXT T
3170 PRINT
3180 PRINT
3190 FOR J=1 TO P
3200 FOR I=1 TO C
3210 IF I#1 THEN 3240
3220 N1(I,J)=-R(J,2*C+4)+G(1+(C+
      1)*(J-1),3)-G(1+(C+1)*(J-1)
      ,4)
3230 GOTO 3260
3240 N1(I,J)=N1(I-1,J)+G(I+(C+1)
      *(J-1),3)-G(I+(C+1)*(J-1),4
      )
3250 GOTO 3260
3260 NEXT I
3270 NEXT J
3280 FOR J=1 TO C+1
3290 FOR I=P TO 1 STEP -1
3300 IF I#P THEN 3330
3310 N2(I,J)=G(J+(C+1)*(P-1),1)-
      G(J+(C+1)*(P-1),2)
3320 GOTO 3340
3330 N2(I,J)=N2(I+1,J)+G(J+(C+1)
      *(I-1),1)-G(J+(C+1)*(I-1),2
      )
3340 NEXT I
3350 NEXT J
3360 FOR J=1 TO P
3370 FOR I=1 TO C
3380 PRINT "sforzo normale sulla
      trave della verticale";I;"
      e del piano";J;"=";N1(I,J)
3390 NEXT I
3400 PRINT
3410 NEXT J
3420 PRINT
3430 PRINT
3440 FOR J=1 TO C+1
3450 FOR I=1 TO P
3460 PRINT "sforzo normale sul p
      ilastro del piano";I;"e del
      ritto";J;"=";N2(I,J)
3470 NEXT I
3480 PRINT

```

Figura 14g

```

3490 NEXT J
3500 PRINT
3510 PRINT
3520 GCLEAR
3530 L1=0
3540 FOR I=1 TO C
3550 L1=L1+T(I,1)
3560 NEXT I
3570 L2=0
3580 FOR I=1 TO P
3590 L2=L2+R(I,1)
3600 NEXT I
3610 IF L1<=L2 THEN 3650
3620 H=4/3*L1
3630 E=3/4*H
3640 GOTO 3670
3650 B=4/3*L2
3660 H=4/3*B
3670 SCALE -H/8,9/8*H,-B/8,9/8*B
3680 XAXIS -B/8 @ XAXIS 9/8*B
3690 YAXIS -H/8 @ YAXIS 9/8*H
3700 MOVE 0,0
3710 FOR I=1 TO C+1
3720 IF I#1 THEN 3750
3730 D=0
3740 GOTO 3770
3750 D=D+T(I-1,1)
3760 MOVE D,0
3770 S=0
3780 FOR J=1 TO P
3790 S=S+R(J,1)
3800 DRAW D,S
3810 Q=(J-1)*(C+1)+I
3820 LABEL VAL$(Q)
3830 NEXT J
3840 NEXT I
3850 D=0
3860 FOR I=1 TO P
3870 D=D+R(I,1)
3880 MOVE 0,0
3890 DRAW L1,D
3900 NEXT I
3910 COPY
3920 END
3930 DATA 2.4,3000000000
3940 DATA 5.65,.0182,.0182,.0152
      .0152,0,0,0,0
3950 DATA 6.85,.0182,.0182,.0152
      .0152,0,0,0,0
3960 DATA 2.5,.0068,.0068,.0068,
      0,0,0,1549
3970 DATA 5.2,.00625,.00625,.006
      25,0,0,0,3038
3980 DATA 3.6,.00267,.00267,.002
      67,0,0,0,2738
3990 DATA 3.8,.00214,.00214,.002
      14,0,0,0,2105

```

Figura 14h

colano il coefficiente $V(k_t)$ del termine t -esimo dell'equazione (termine diagonale). Si osservi che l'espressione generale di $V(k_t)$ è data dalla frase 1150, e vale se il nodo t è *interno*, se cioè ad esso giungono due piedritti e due travi. Nei seguenti casi di *nodi di frontiera* l'espressione è ridotta:

NODO	CONDIZIONE	ESPRESSIONE DI $V(k_t)$
sinistro (A)	$\frac{t-1}{c+1} = \text{int} \frac{t-1}{c+1}$	$\rho_{l,h-1} + \rho'_{h-1,l} + \rho'_{h,l}$
destra (B)	$\frac{t}{c+1} = \text{int} \frac{t}{c+1}$	$\rho_{l-1,h-1} + \rho'_{h-1,l} + \rho'_{h,l}$
superiore (C)	$h = p + 1$	$\rho_{l-1,h-1} + \rho_{l,h-1} + \rho'_{h-1,l}$
angolo sinistro	$A + C$	$\rho_{l,h-1} + \rho'_{h-1,l}$
angolo destra	$B + C$	$\rho_{l-1,h-1} + \rho'_{h-1,l}$

Tabella 1

Sempre per il t del loop, la frase 1290 calcola il coefficiente del termine $V(k_t + 1)$ delle (49), che è nullo (fig. 7 ed 8) se il nodo t è di frontiera destra, se cioè vale la condizione B della tabella 1; di ciò tien conto il test della frase 1280.

Sempre per il t del loop, la frase 1310 calcola il coefficiente del termine $V(k_t + c + 1)$ delle (49), che è nullo se il nodo t è di frontiera superiore, se cioè vale la condizione C della tabella 1. Di ciò tien conto il test della frase 1300.

Sempre infine per il t del loop, la frase 1330 calcola il coefficiente del termine $V(k_t + n - t + h - 2)$ delle (49), corrispondente all'incognita Δ_{h-2} (vedi for. 33); esso è nullo se il nodo t appartiene al primo traverso, e di ciò tiene conto il test della frase 1320.

Le frasi 1350 o 1370 calcolano il coefficiente del termine $V(k_t +$

+ $n - t + h - 1$) delle (49), corrispondente all'incognita Δ_{h-1} ; esso è dato dalla seguente tabella

NODO	CONDIZIONE	$V(k_t + n - t + h - 1)$
interno		$\frac{3}{2} \left(\frac{\rho'_{h-1,l}}{h_{h-1}} - \frac{\rho'_{h,l}}{h_h} \right)$
superiore	$h = p + 1$	$\frac{3}{2} \frac{\rho'_{h-1,l}}{h_{h-1}}$

Tabella 2

La frase 1400 calcola infine il coefficiente del termine $V(k_t + n - t + h)$ delle (49), corrispondente all'incognita Δ_h ; esso è nullo se il nodo t è di frontiera superiore, e di ciò tien conto il test della frase 1390.

Il looping 1420 ÷ 1570 fornisce poi i coefficienti delle p equazioni di piano (50). Per un dato t , la frase 1430 calcola, come la 1040 del looping delle equazioni di nodo, il valore di k_t corrispondente all'incognita Δ_{h-1} . I due looping interni 1460 ÷ 1480 e 1510 ÷ 1530 calcolano i due addendi in parentesi, e la frase 1540 il coefficiente del termine $V(k_t)$, che contiene o meno il secondo addendo della parentesi secondo che il traverso $(h - 1)$ -esimo sia uno degli intermedi, o il superiore; e cioè secondo che t sia minore o uguale ad m .

Infine la frase 1560 calcola il coefficiente $\bar{V}(k_t + 1)$ delle (50), corrispondente all'incognita Δ_h ; salvo che non sia $t = m$, e di ciò si fa carico il test della frase 1550.

Il looping 1580 ÷ 1830 ed il successivo 1840 ÷ 1930 con il segmento 1940 ÷ 1980 pone nell'array Y i termini noti delle (48) e delle (50).

La risoluzione del sistema alla Cholesky è contenuta nel segmento di programma 1990 ÷ 2260.

Il segmento 2270 ÷ 2540 pone in M ed $M3$ le coppie sulle estremità delle travi; il segmento 2530 ÷ 2780 pone in G e $G3$ i tagli; ai looping da 2790 a 3160 è affidata la stampa.

Il segmento 3190 ÷ 3510 si incarica del calcolo e della stampa degli sforzi normali, attraverso i valori dei tagli contenuti nell'array G ; per la generica trave HK è (fig. 15)

$$N_{HK} = N_{GH} + T_{H3} - T_{H4} ,$$