

CAPITOLO SESTO

IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI NEL METODO DELLE FORZE

Premessa.

E' noto l'enunciato del principio dei lavori virtuali in presenza di corpi deformabili: "dato un corpo deformabile in una configurazione C , e date le forze esterne agenti sul corpo in quella configurazione (forze esterne ovviamente tra loro in equilibrio), una sestupla di funzioni σ_i definite nel dominio dello spazio occupato dal corpo, e considerate come componenti speciali di tensione, è in equilibrio con le forze esterne su quella configurazione se, e solo se, per qualsiasi variazione di configurazione il lavoro del primo ordine delle forze esterne e quello delle forze interne è globalmente nullo". Per lavoro delle forze interne si intende l'espressione

$$\delta L_i = - \int_V \sum_1^6 \sigma_i \delta \epsilon_i dV . \quad (1)$$

Formalmente l'enunciato si scrive

$$\sigma_i \text{ eq. } C, F_h \iff \delta_1 L_e + \delta_1 L_i = 0 \quad \forall \delta C. \quad (2)$$

Nel caso delle travi, l'espressione (1) si particolarizza in

$$\delta L_i = - \int_s \sum_1^6 C_i \delta C'_i ds \quad (3)$$

dove C_i sono le caratteristiche della sollecitazione interna, C'_i le corrispondenti caratteristiche della deformazione.

Il principio dei lavori virtuali, nell'ambito delle strutture monodimensionali, e sotto il rispetto delle ipotesi di validità del principio di sovrapposizione degli effetti, trova le sue più elementari applicazioni nel calcolo degli spostamenti (e quindi delle incognite iperstatiche). L'implicazione (2)

si sfrutta, a tale scopo, nel senso da sinistra a destra; si opera, infatti, su insiemi di forze fittizi ma sicuramente equilibrati, e se ne scrivono le condizioni necessarie di equilibrio utilizzando come δC gli spostamenti reali; questi possono così essere calcolati.

Il principio dei lavori virtuali si dimostra in rigore per i sistemi con un numero finito di libertà, cioè per i sistemi in cui la configurazione è univocamente definita da n parametri C_i ($i = 1, 2, \dots, n$), coordinate lagrangiane del sistema. In questo caso ha un senso preciso parlare di termini del primo ordine, del secondo ordine etc. Lo stesso principio si dimostra per i sistemi a deformabilità diffusa, cioè per i cosiddetti “continui deformabili”, facendo l’ipotesi piuttosto vaga di piccolezza degli spostamenti, e cioè la dimostrazione è valida nei limiti entro cui può accettarsi che le componenti della deformazione siano limitate ai termini lineari nelle derivate prima degli spostamenti. Nell’enunciato il lavoro, sia delle forze esterne che di quelle interne, compare sotto l’aspetto totale, e non nella sola parte del primo ordine, mentre si aggiunge, con incerta locuzione, che la variazione δC deve essere “piccola”. L’equazione dei lavori virtuali per i continui deformabili quindi può accettarsi solo se sono validi i presupposti dell’ipotesi di piccolezza degli spostamenti, e cioè se δC è tale da non variare sensibilmente la posizione reciproca dei punti della configurazione C , nè la posizione delle forze (e quindi dei vincoli) rispetto alla configurazione stessa. Esplicitamente perciò sono da escludere tutti i casi in cui le caratteristiche della sollecitazione sono variate da δC , in particolare i casi in cui per effetto di δC sorgono addirittura caratteristiche (per es. momenti flettenti) prima inesistenti.

In questo capitolo si daranno alcuni esempi di ricerche di spostamenti e di incognite iperstatiche.

Problema n. 1.

La trave isostatica della fig. 1.1a, con $EI = cost$, è soggetta ad un carico q uniforme sul tratto AC ; si vuol conoscere la rotazione relativa $\Delta\varphi_C$ tra le due facce unite dalla cerniera C .

Si assume come insieme di spostamenti quello reale (fig. 1.1a); come insieme di forze si assume invece quello fittizio della fig. 1.1b: costituito da due coppie eguali e contrarie in C , sulle due facce unite dalla cerniera in C :

$$m'_s = -1$$

$$m'_d = 1.$$

Tali coppie sono state scelte, — ma non è necessario — di valore uni-

tario, e tali da lavorare positivamente per $\Delta\varphi_c > 0$.

Si tiene conto della sola caratteristica momento. Sulla struttura soggetta al carico reale la caratteristica momento è indicata con M . Esso è parabolico in AC , e coincide con il diagrammā di trave appoggiata; quindi

$$M = q \frac{z(a-z)}{2}, \quad z \in [0, a]. \quad (4)$$

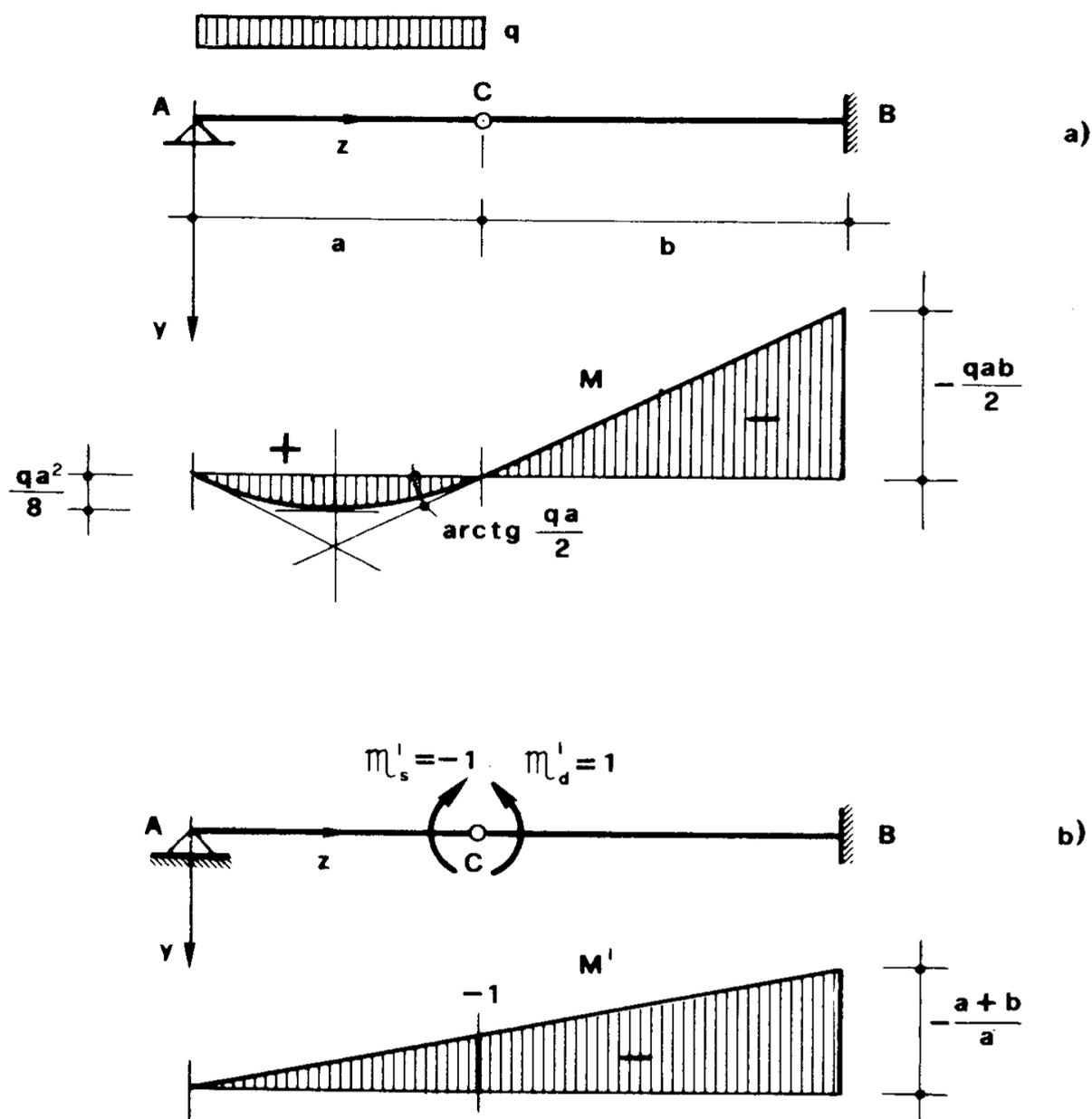


Figura 1.1

Nel tratto CB il momento varia linearmente, e la sua inclinazione in

C è quella fornita dalla (4) per $z = a$:

$$\left(\frac{dM}{dz}\right)_C = \frac{q}{2} (a - 2z)_{z=a} = -\frac{qa}{2}.$$

Quindi

$$M \doteq -q \frac{a}{2} (z - a) \quad , \quad z \in [a, a + b]. \quad (5)$$

Sulla struttura soggetta al carico fittizio (fig. 1.1b) il momento si indica con M' . Esso è nullo in A , pari a -1 in C , e varia linearmente da A a B ; quindi è

$$M' = -\frac{z}{a} \quad , \quad z \in [0, a + b]. \quad (6)$$

Assumendo come configurazione di partenza quella della struttura indeformata, si può dire che su di essa i momenti M' sono in equilibrio con le forze esterne, e cioè con le due coppie \mathfrak{m}'_s ed \mathfrak{m}'_d e con le relative reazioni.

Si assume come variazione della configurazione quella coincidente con gli spostamenti reali; ciò può farsi perchè si è nell'ambito dei piccoli spostamenti.

Il principio dei lavori virtuali permette perciò di scrivere

$$\delta L_e = -\delta L_i$$

$$1 \cdot \Delta\varphi_C = \int_0^{a+b} M' \frac{M dz}{EI}.$$

Poichè $EI = cost$, è ancora

$$\Delta\varphi_C = \frac{1}{EI} \int_0^{a+b} M' M dz.$$

L'integrale si scinde nella somma dei due:

$$\int_0^{a+b} M'M dz = -\frac{q}{2a} \int_0^a z^2 (a-z) dz + \frac{q}{2} \int_a^{a+b} z (z-a) dz =$$

$$= -\frac{qa^3}{24} + \frac{q}{12} (3ab^2 + 2b^3)$$

e quindi

$$\Delta\varphi_C = \frac{q}{24EI} (-a^3 + 6ab^2 + 4b^3) . \quad (7)$$

Per $b = 0$ è

$$\Delta\varphi_C = -\frac{qa^3}{24EI} = -\varphi_C .$$

Il valore (7) tiene conto delle sole deformazioni flessionali, poichè nell'equazione dei lavori virtuali si è chiamata in causa la sola caratteristica momento. Se si desidera anche il termine che tiene conto delle caratteristiche taglianti occorre (fig. 1.2) considerare i tagli T e T' connessi con gli insiemi reale e fittizio di carichi. Si ha

$$T = -\frac{q}{2} (2z - a) \quad , \quad z \in [0, a]$$

$$T = -\frac{qa}{2} \quad , \quad z \in [a, a + b]$$

$$T' = -\frac{1}{a} \quad , \quad z \in [0, a + b] .$$

Chiamando $\Delta\varphi_C^T$ il termine dovuto al taglio, si può scrivere

$$1 \cdot \Delta\varphi_C^T = \int_0^{a+b} T' \frac{\chi T dz}{GA} .$$

Poichè la trave si suppone di sezione costante (questa è un'ulteriore posizione, perchè $EI = cost$ non implica di necessità $\frac{\chi}{GA} = cost$) può scriversi

$$\Delta\varphi_C^T = \frac{\chi}{GA} \int_0^{a+b} T'T dz .$$

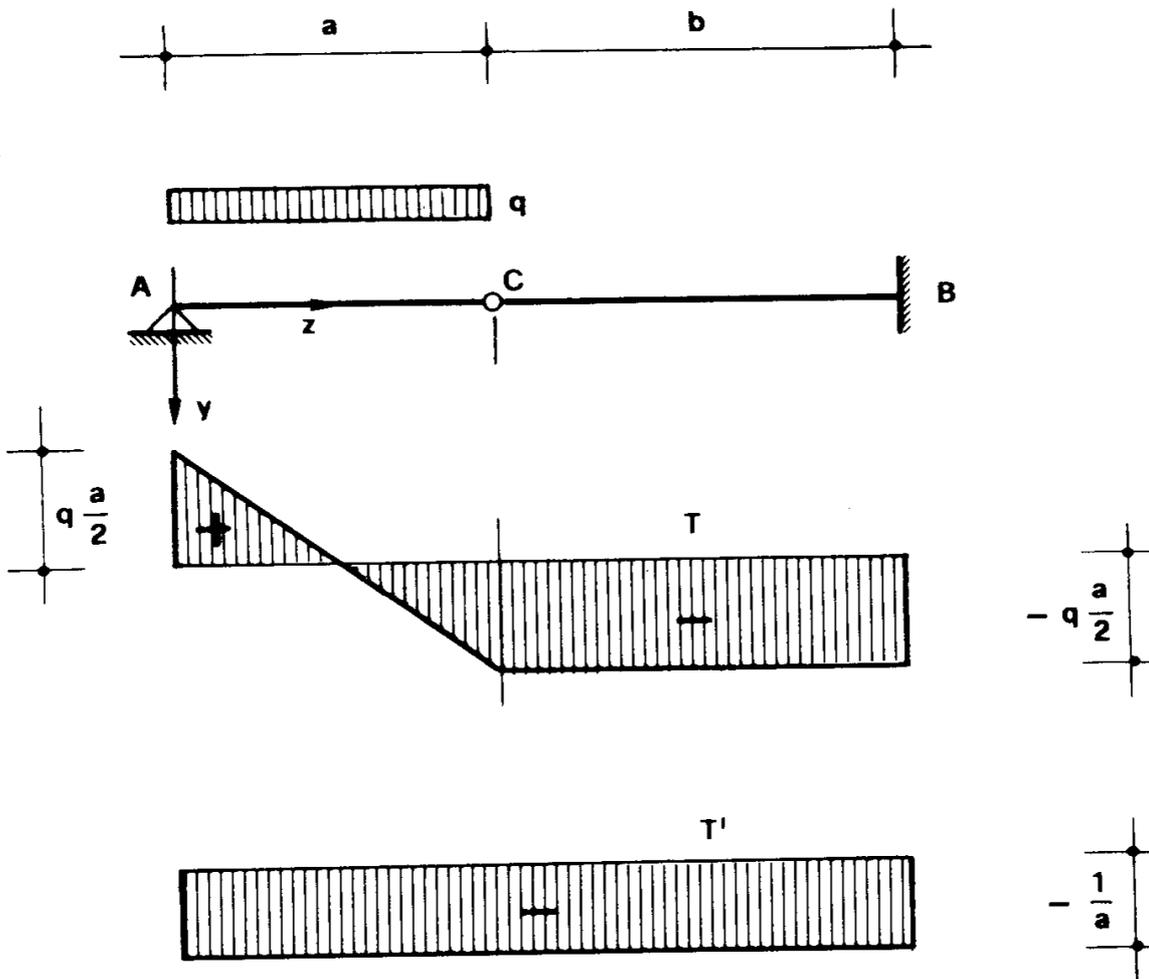


Figura 1.2

L'integrale è

$$\int_0^{a+b} T'T dz = \frac{q}{2a} \int_0^a (2z - a) dz + \frac{q}{2} \int_a^{a+b} dz = \frac{qb}{2}$$

da cui

$$\Delta\varphi_C^T = \frac{\chi}{GA} \frac{qb}{2}. \quad (8)$$

E' interessante osservare come il procedimento dei lavori virtuali permetta di ottenere separatamente i termini di uno spostamento dovuti alle deformazioni dei vari tipi, e addirittura consente di valutare gli effetti, su un generico spostamento, delle deformabilità dei vari tronchi.

Dalle (7) e (8) si trae

$$\frac{\Delta\varphi_C^T}{\Delta\varphi_C^M} = 12 \chi \frac{EI}{GA} \frac{b}{-a^3 + 4b^3 + 6ab^2}.$$

Il rapporto

$$\rho_x = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

è il raggio d'inerzia rispetto all'asse x baricentrico orizzontale della sezione retta; quindi

$$\frac{\Delta\varphi_C^T}{\Delta\varphi_C^M} = 12 \chi \frac{E}{G} \frac{\rho_x^2 b}{-a^3 + 4b^3 + 6ab^2}.$$

Se $a + b = l$, $a = \alpha l$, $b = \beta l$, si ha ancora

$$\frac{\Delta\varphi_C^T}{\Delta\varphi_C^M} = 12 \chi \frac{E}{G} \frac{\beta}{-\alpha^3 + 4\beta^3 + 6\alpha\beta^2} \frac{\rho_x^2}{l^2},$$

e cioè il rapporto tra il termine di taglio e quello da flessione è proporzionale al quadrato del rapporto tra il raggio d'inerzia ρ_x e la dimensione secondo z della trave. Tale risultato è di carattere generale, e mostra come le deformazioni taglianti nel calcolo degli spostamenti, e quindi delle iperstatiche, possono essere trascurate rispetto a quelle flessionali solo se la trave ha un basso rapporto $\frac{\rho_x}{l}$ (travi snelle).

Si svolga un esempio numerico con i seguenti dati

$$a = 8 \text{ m}$$

$$b = 12 \text{ m}$$

$$q = 2 \text{ t m}^{-1} ;$$

è pure

$$M_B = - \frac{2 \cdot 8 \cdot 12}{2} = - 9.600.000 \text{ Kgcm.}$$

Poichè la struttura è a sezione costante, si ottiene tale sezione con calcolo a pura flessione — dal rapporto

$$W_x = \frac{|M|_{max}}{\sigma_{amm.}} = \frac{9.600.000}{2400} = 4000 \text{ cm}^3 ;$$

la σ_{amm} indica che si è scelto come materiale un acciaio laminato tipo 2. Dalle tabelle risulta, per un *HE 550 A*, $W_x = 4150 \text{ cm}^3$; quindi tale profilo può essere adottato. Per esso è

$$I_x = 111.932 \text{ cm}^4$$

$$A = 212 \text{ cm}^2$$

$$\rho_x = 23 \text{ cm} .$$

Si calcola poi (fig. 1.3)

$$\chi = \frac{2 \cdot 30 \cdot 2,4 + (54 - 2 \cdot 2,4) 1,25}{(54 - 2 \cdot 2,4) 1,25} = 3,34 .$$

Per l'acciaio può porsi $\frac{1}{m} = \frac{1}{3}$, e quindi

$$\frac{E}{G} = 2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) = \frac{8}{3} ;$$

alla fine si ottiene

$$\Delta\varphi_C^M = 0,04720 = 2,702^\circ$$

$$\Delta\varphi_C^T = 0,00024 = 0,013^\circ$$

$$\frac{\Delta\varphi_C^M}{\Delta\varphi_C^T} = 197 .$$

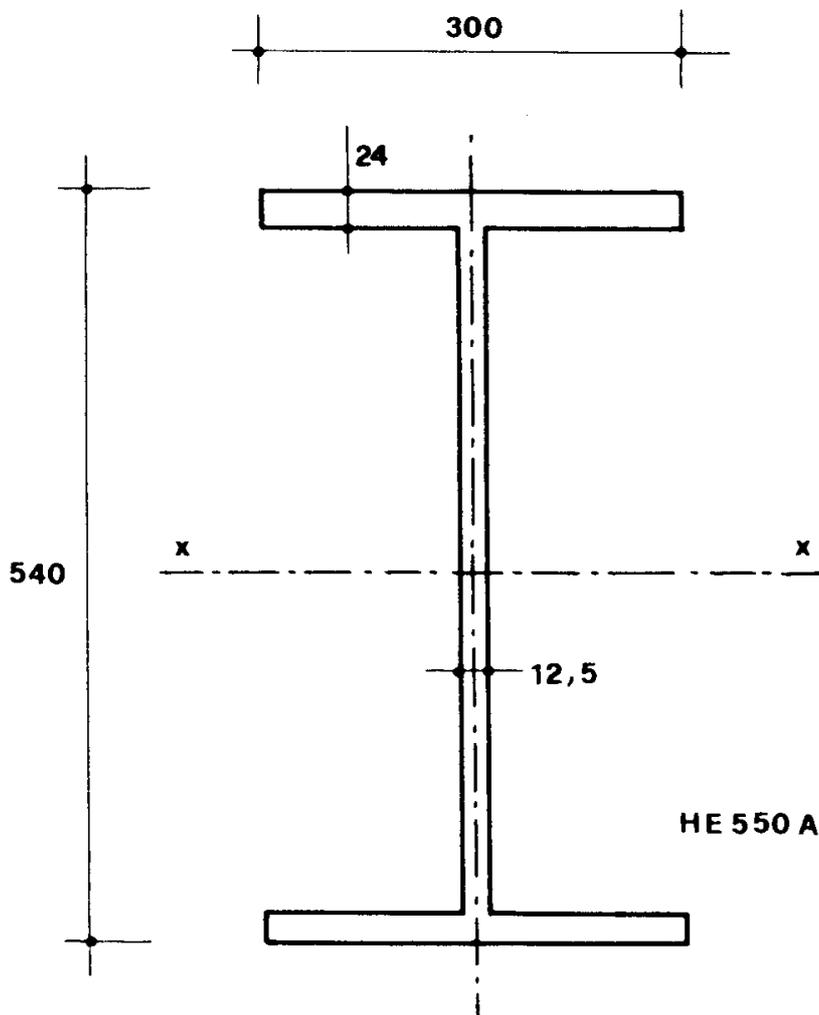


Figura 1.3

Per verifica, si vuole adesso pervenire al valore di $\Delta\varphi_C$ attraverso il procedimento di composizione. Il termine flessionale si ottiene con i seguenti successivi calcoli (fig. 1.4)

$$\varphi_{Cd} = \frac{qa}{2} \frac{b^2}{2EI} = q \frac{ab^2}{4EI}$$

$$v_C = \frac{qa}{2} \frac{b^3}{3EI} = q \frac{ab^3}{6EI}$$

$$\varphi_{Cs} = -\frac{v_C}{a} + \frac{qa^3}{24EI} = q \left(\frac{a^3}{24EI} - \frac{b^3}{6EI} \right)$$

$$\Delta\varphi_C^M = \varphi_{Cd} - \varphi_{Cs} = \frac{q}{24EI} (6ab^2 - a^3 + 4b^3).$$

Il termine da taglio si ottiene analogamente come segue:

$$\varphi_{Cd} = \chi \frac{F}{GA} = \chi \frac{qa}{2GA}$$

$$v_C = \chi \frac{Fb}{GA} = \chi \frac{qab}{2GA}$$

$$\varphi_{Cs} = -\frac{v_C}{a} + \chi \frac{qa}{2GA} = \chi \left(-\frac{qb}{2GA} + \frac{qa}{2GA} \right)$$

$$\Delta\varphi_C^T = \varphi_{Cd} - \varphi_{Cs} = \chi \frac{qb}{2GA}.$$

Altra verifica può essere fatta con il procedimento di Mohr (fig. 1.5). Il termine $\Delta\varphi_C^M$ si ottiene caricando la trave ausiliaria con il carico fittizio

$$q^* = \frac{M}{EI};$$

dall'equilibrio alla rotazione intorno ad A si ottiene

$$-\frac{qa^3}{12EI} \frac{a}{2} + \frac{qab^2}{4} \left(a + \frac{2}{3}b \right) - R_C^* a = 0$$

da cui

$$R_C^* = \frac{q}{24EI} (-a^3 + 6ab^2 + 4b^3).$$

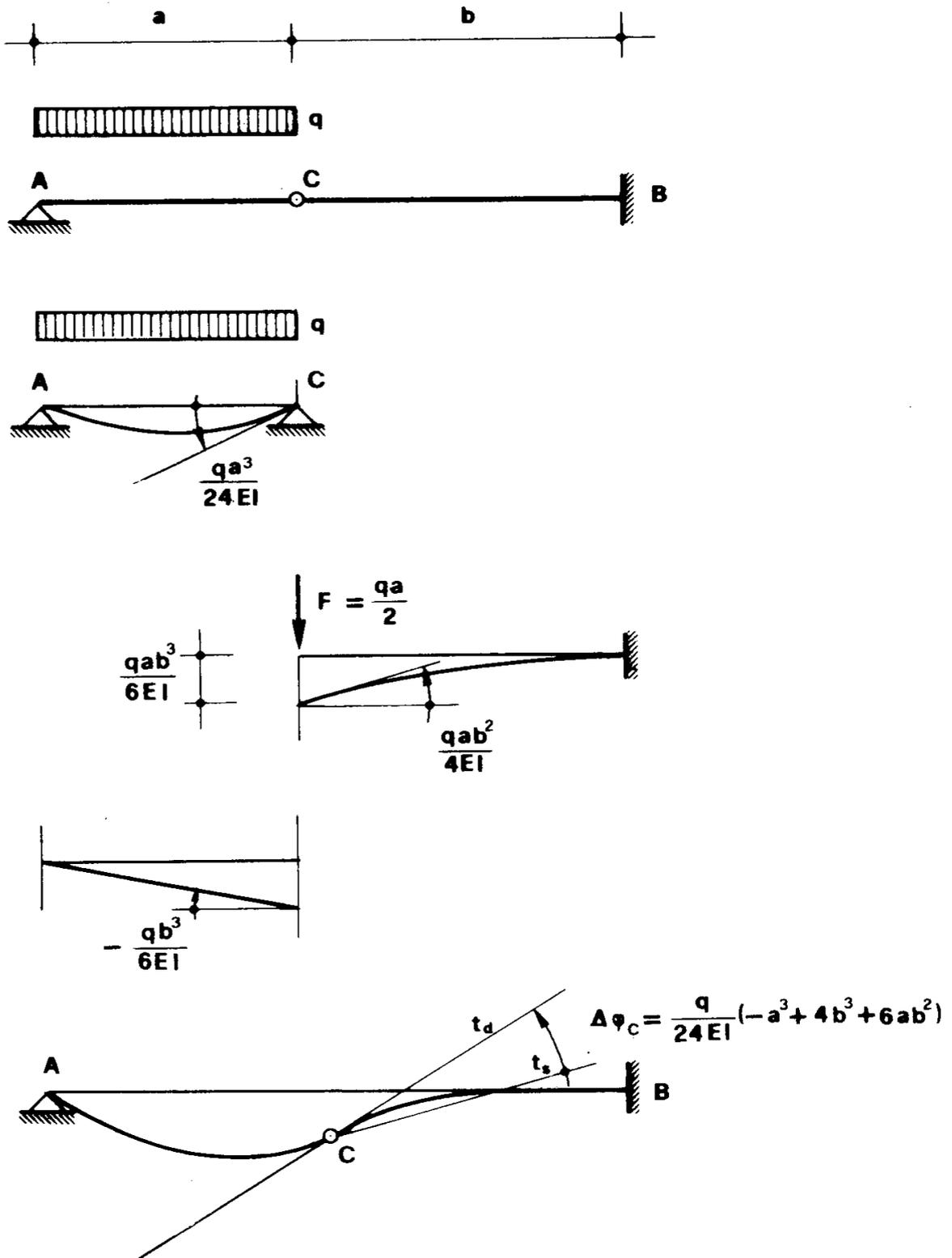


Figura 1.4

Dalla

$$R_C^* + T_{Cd}^* - T_{Cs}^* = 0$$

si ha

$$R_C^* = T_{Cs}^* - T_{Cd}^* = -\varphi_{Cs} + \varphi_{Cd} = \Delta\varphi_C,$$

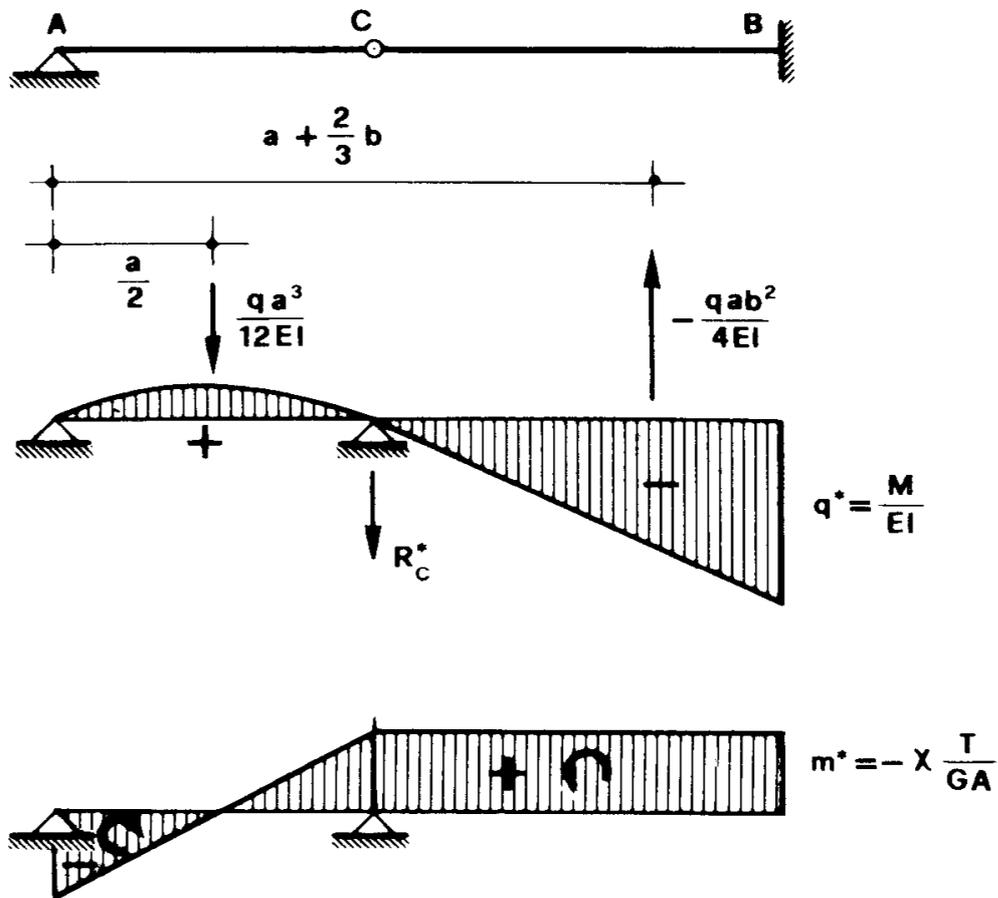


Figura 1.5

e quindi si riottiene la (7).

Il termine $\Delta\varphi_C^T$ si ottiene caricando la trave ausiliaria con le coppie fittizie

$$m^* = -\chi \frac{T}{GA} ;$$

dall'equilibrio alla rotazione intorno ad A si ottiene

$$\chi \frac{T}{GA} b - R_C^* a = 0$$

$$\chi \frac{qa}{2GA} b - R_C^* a = 0$$

$$R_C^* = \chi \frac{qb}{2GA} .$$

E' inoltre

$$R_C^* = T_{Cs}^* - T_{Cd}^* = (T_{Cs}^* - m^*) - (T_{Cd}^* - m^*) = -\varphi_{Cs} + \varphi_{Cd} = \Delta\varphi_C ,$$

e quindi si ha conferma della (8).

Problema n. 2.

1) Si prende in esame la trave della fig. 2.1 a con $EI = cost$, e vincoli non cedevoli; la struttura è tre volte iperstatica. Si vogliono ottenere le incognite iperstatiche attraverso l'uso del principio dei lavori virtuali; naturalmente, e lo si evidenzierà, in tal modo non si fa altro che scrivere le solite tre equazioni di congruenza; l'equazione dei lavori virtuali non è altro che un comodo strumento di calcolo.

La struttura si rende isostatica inserendo cerniere in A , B e C ; è questo il *sistema principale*. Il sistema principale, caricato dalle forze applicate e dalle reazioni (esterne o interne) corrispondenti ai legami soppressi prende nome di *sistema equivalente*; esso è rappresentato nella fig. 2.1b.

Il sistema principale si studia sotto $n + 1$ condizioni di carico, se n sono le reazioni iperstatiche agenti sul sistema equivalente; e precisamente il sistema principale si assoggetta una volta alle forze applicate (fig. 2.1c), ed n volte alle reazioni iperstatiche prese singolarmente e con valore unitario (fig. 2.1d, 2.1e, 2.1f).

Ci si limita a chiamare in gioco l'effetto del solo momento flettente; siano M_0 i momenti nel sistema della fig. 2.1c, che si chiamerà "*sistema zero*".

M' i momenti nel sistema della fig. 1d (sistema $X_1 = 1$),

M'' i momenti nel sistema della fig. 1e (sistema $X_2 = 1$),
 M''' i momenti nel sistema della fig. 1f (sistema $X_3 = 1$).

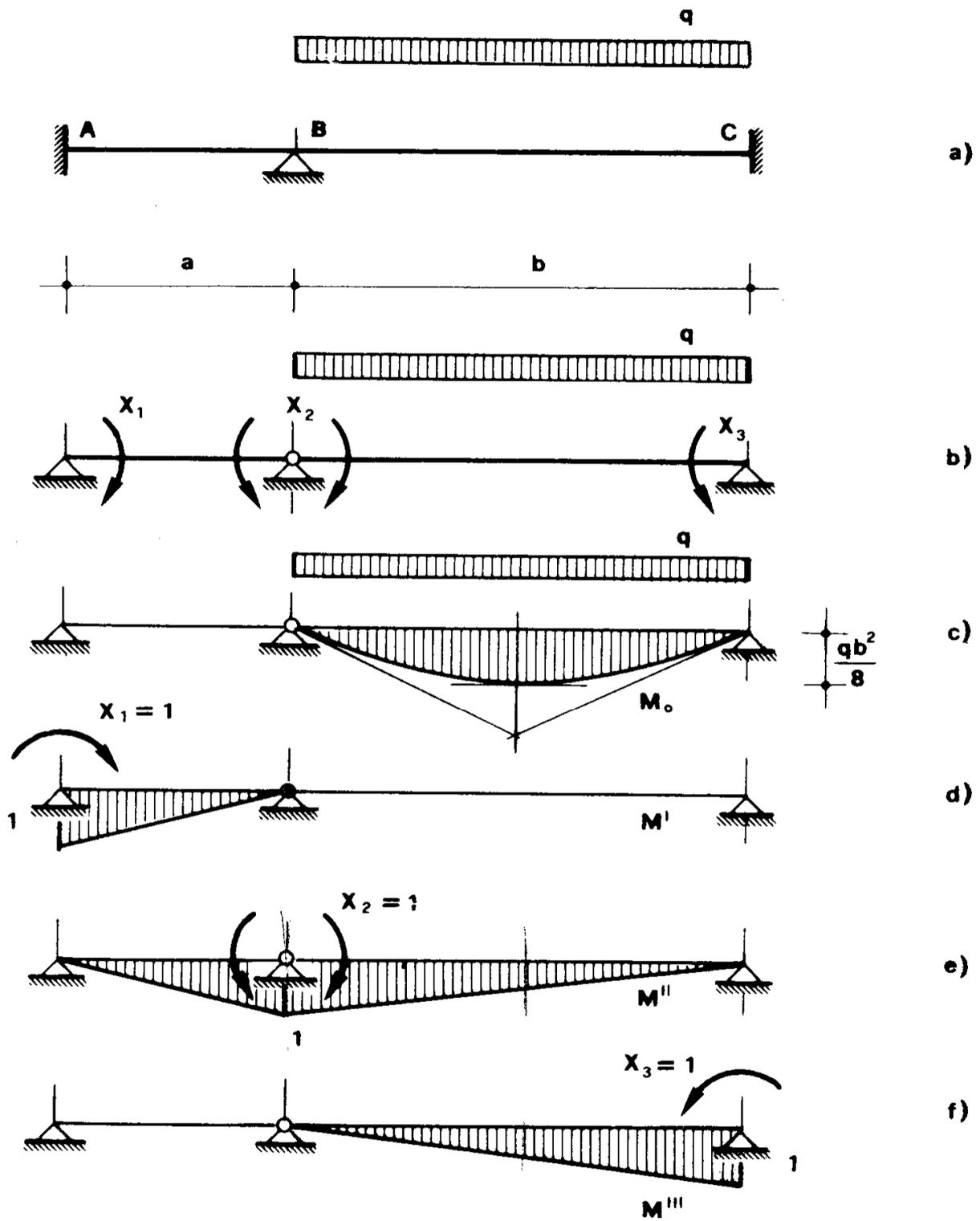


Figura 2.1

L'equazione dei lavori virtuali, scritta per il sistema di spostamenti

reali (fig. 2.1a, oppure 2.1b) e per il sistema di forze fittizio $X_1 = 1$ (fig. 2.1d), fornisce

$$0 = \int_s M' \frac{M ds}{EI} ; \quad (18)$$

poichè è

$$M = M_0 + X_1 M' + X_2 M'' + X_3 M''' \quad (19)$$

la (18) si scrive ($EI = \text{costante}$)

$$0 = \int_s M' M_0 ds + X_1 \int_s M'^2 ds + X_2 \int_s M' M'' ds + X_3 \int_s M' M''' ds.$$

Altre due equazioni analoghe si ottengono scrivendo l'equazione dei lavori virtuali per il sistema di spostamenti reali, e per i due sistemi di forze $X_2 = 1$ (fig. 2.1 e) ed $X_3 = 1$ (fig. 2.1 f). Si hanno così le tre equazioni

$$\begin{aligned} X_1 \int_s M'^2 ds + X_2 \int_s M' M'' ds + X_3 \int_s M' M''' ds &= - \int_s M' M_0 ds \\ X_1 \int_s M'' M' ds + X_2 \int_s M''^2 ds + X_3 \int_s M'' M''' ds &= - \int_s M'' M_0 ds \\ X_1 \int_s M''' M' ds + X_2 \int_s M''' M'' ds + X_3 \int_s M'''^2 ds &= - \int_s M''' M_0 ds. \end{aligned} \quad (20)$$

La matrice del sistema (20) è simmetrica rispetto alla diagonale principale. Nel caso in esame si ha^(*)

(*) L'area di un segmento parabolico è fornito dalla *formula di Stirling*

$$A = \frac{l}{2} (a + 4m + b) \quad (21)$$

$$\int_s M'^2 ds = \frac{a}{3}$$

$$\int_s M''^2 ds = \frac{a}{3} + \frac{b}{3}$$

$$\int_s M'''^2 ds = \frac{b}{3}$$

$$\int_s M' M'' ds = \frac{a}{6}$$

$$\int_s M' M''' ds = 0$$

$$\int_s M'' M''' ds = \frac{b}{6}$$

$$\int_s M_0 M' ds = 0$$

$$\int_s M_0 M'' ds = \int_s M_0 M''' ds = \int_0^b \frac{qz}{2} (b-z) \frac{z}{b} dz = \frac{qb^3}{24}$$

dove (fig. 2.2a) l è la base, a e b i due valori estremi, m il valore medio.

Può perciò dirsi che l'area del diagramma prodotto di due diagrammi lineari è fornita (fig. 2.2b) da

$$A = \frac{l}{6} (a_1 a_2 + 4 m_1 m_2 + b_1 b_2) . \quad (22)$$

Nei due casi particolari delle fig. 2.2c e 2.2d si ha rispettivamente

$$A = \frac{l}{3} b_1 b_2 \quad (23)$$

$$A = \frac{l}{6} a_1 b_2 . \quad (24)$$

Il sistema (20) si scrive così

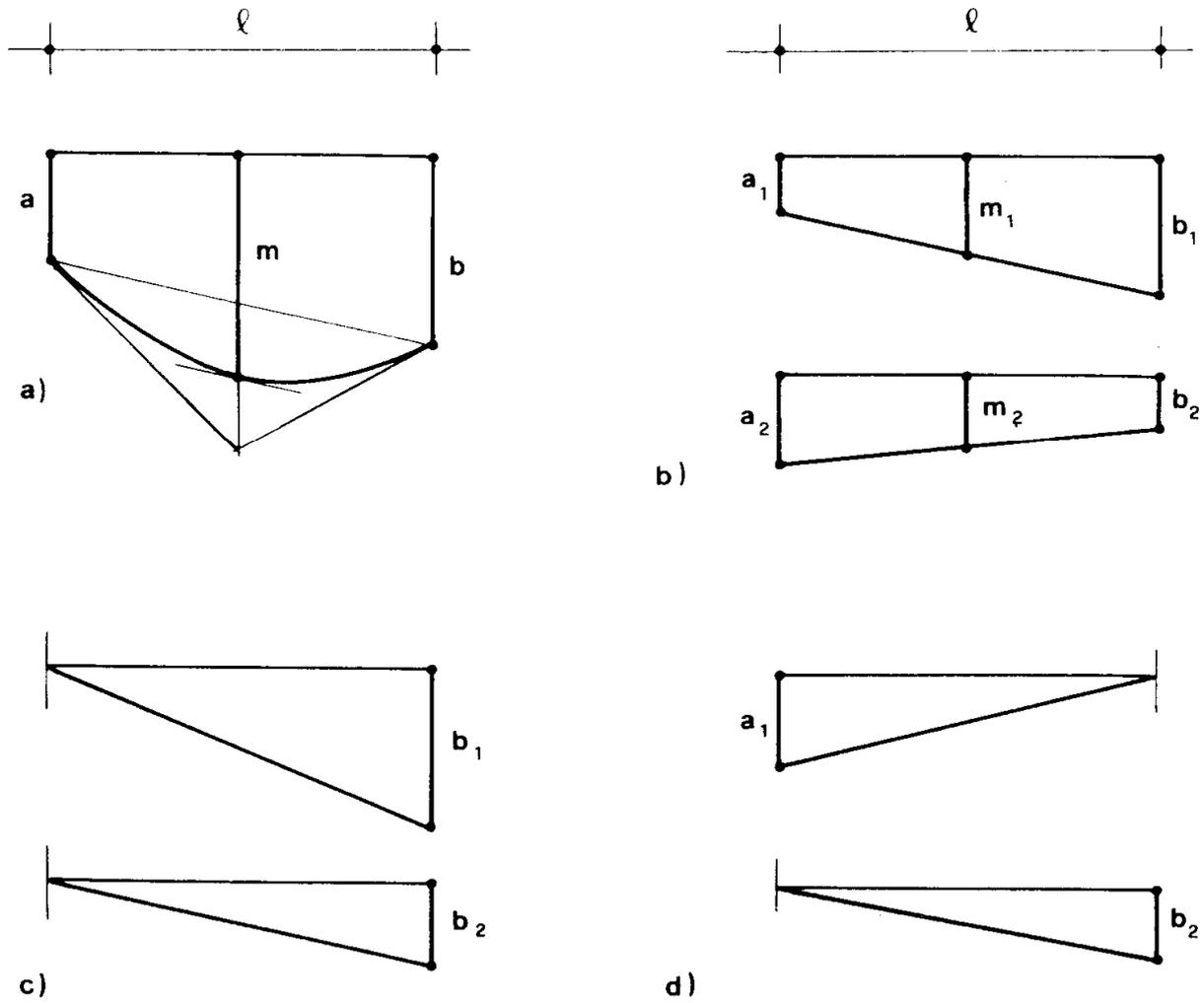


Figura 2.2

$$\begin{aligned} \frac{a}{3} X_1 + \frac{a}{6} X_2 &= 0 \\ \frac{a}{6} X_1 + \frac{a+b}{3} X_2 + \frac{b}{6} X_3 &= -\frac{qb^3}{24} \\ \frac{b}{6} + X_2 + \frac{b}{3} X_3 &= -\frac{qb^3}{24} \end{aligned} \quad (25)$$

Si ha dalla prima

$$X_1 = -\frac{X_2}{2}$$

e dalla seconda

$$X_3 = -\frac{qb^2}{8} - \frac{X_2}{2}$$

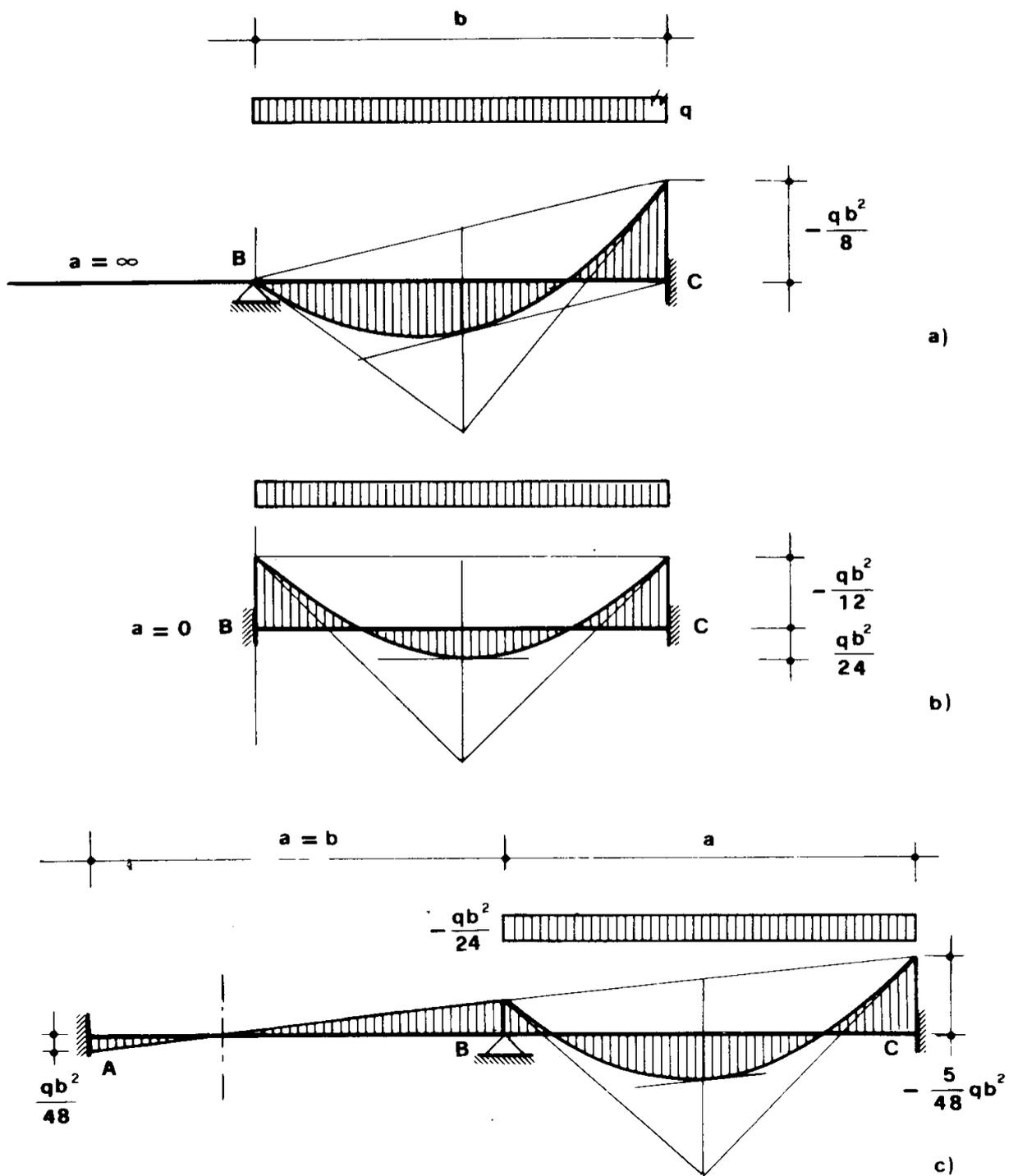


Figura 2.3

Si ottiene così

$$X_1 = \frac{qb^2}{24} \frac{b}{a+b} \quad X_2 = -\frac{qb^2}{12} \frac{b}{a+b} \quad X_3 = -\frac{qb^2}{24} \frac{3a+2b}{a+b} .$$

(26)

Sono interessanti tre casi limiti.

a) $a \rightarrow \infty$

$$X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow 0$$

$$X_3 \rightarrow -\frac{qb^2}{8} .$$

E' il caso (fig. 2.3a) della trave di luce b , con incastro e appoggio alle estremità.

b) $a \rightarrow 0$

$$X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow \frac{qb^2}{12} .$$

E' il caso (fig. 2.3b) della trave di luce b , con due incastri.

c) $a = b$

$$X_1 = \frac{qb^2}{48}$$

$$X_2 = -\frac{qb^2}{24}$$

$$X_3 = -\frac{5}{48} qb^2 .$$

Da questo caso (fig. 2.3c) si ottiene, sommando con la situazione complementare, quello della trave simmetrica simmetricamente caricata:

$$X_1 = X_2 = X_3 = -\frac{qb^2}{12}.$$

Si osservi, in relazione al caso c), che le ordinate in A , B e C presentano i vertici allineati; ciò spiega perchè, sovrapponendo il caso c) con il complementare, le ordinate in A , B e C risultano uguali, e quindi i loro vertici situati su una parallela all'asse della trave.

E' infine utile riconoscere che le tre equazioni (20) non sono altro che le tre equazioni di congruenza in A , B e C ; infatti i termini di tali equazioni sono, a meno di EI , le rotazioni, assolute in A e C , e relativa in B , dovute al carico q ed alle reazioni iperstatiche X_1 , X_2 , X_3 .

Ci si rende conto di ciò utilizzando sempre il principio dei lavori virtuali. La struttura sulla quale si vogliono calcolare le rotazioni è quella principale, nelle quattro condizioni di carico della fig. 2.1c, 2.1d, 2.1e, 2.1f. Per ottenere $\Delta\varphi_B^\circ$ si opera nel sistema 2.1c di spostamenti e nel sistema 2.1e di forze; si ha così

$$1 \cdot \Delta\varphi_B^\circ = \frac{1}{EI} \int_s M'' M_0 ds = \frac{qb^3}{24 EI}. \quad (27)$$

La $\Delta\varphi_B^\circ$ fornita dalla (27) è positiva se concorde con il segno della $X_2 = 1$ (fig. 2.1e), e cioè se la faccia di destra in B ruota rispetto a quella di sinistra in senso orario. La convenzione sui segni delle rotazioni relative è invece che $\Delta\varphi_B^\circ$ sia positiva se la faccia di destra ruota in senso antiorario rispetto a quella di sinistra. Ma tutto ciò non ha importanza, perchè non si vuole calcolare una rotazione fine a se stessa — in tal caso la coerenza impone di rispettare la convenzione sui segni fatta una volta per sempre — ma solo il termine di un'equazione di congruenza.

Così, per ottenere $\Delta\varphi_B'$ si opera sul sistema 2.1d di spostamenti, e sempre su quello 2.1e di forze; si ha:

$$1 \cdot \Delta\varphi_B' = \frac{1}{EI} \int_s M'' M' ds = \frac{a}{6 EI}.$$

Per ottenere $\Delta\varphi_B''$ si opera sul sistema 2.1e di forze e di spostamenti:

$$1 \cdot \Delta\varphi_B'' = \frac{1}{EI} \int_s M''^2 ds = \frac{a + b}{3 EI};$$

per ottenere $\Delta\varphi_B'''$ si opera nel sistema 2.1f di spostamenti, e su quello 2.1e di forze:

$$1 \cdot \Delta\varphi_B''' = \frac{1}{EI} \int_s M'' M''' ds = \frac{b}{6 EI} .$$

Si osservi che tutte le $\Delta\varphi_B$ ora calcolate rispettano la già illustrata convenzione sui segni.

L'equazione di congruenza in B è

$$\Delta\varphi_B^{\circ} + X_1 \Delta\varphi_B' + X_2 \Delta\varphi_B'' + X_3 \Delta\varphi_B''' = 0 \quad (28)$$

e cioè, eliminando EI ,

$$X_1 \frac{a}{6} + X_2 \frac{a+b}{3} + X_3 \frac{b}{6} = -\frac{qb^3}{24} \quad (29)$$

La (29) coincide con la seconda delle (25), o delle (20).

2) 2^a condizione di carico – variazione termica alla Navier sulla campata di destra (fig. 2.4a).

Qualsiasi altra condizione di carico si studia attraverso il sistema (20) – scritto anche come in (25) – in cui variano soltanto i termini noti.

Se il carico non è costituito da forze, ma da distorsioni, in particolare da variazioni termiche, non è più lecito però prescindere dal prodotto EI , anche se costante; infatti in tal caso il termine noto generico non contiene EI al denominatore, e quindi EI non può essere soppresso in ambedue i membri della generica equazione.

Nel caso in esame la (18) si scrive

$$0 = \int_s M' \frac{M ds}{EI} + \int_s M' \frac{\alpha \overline{\Delta t}}{h} ds \quad (30)$$

e, per la (19), tenendo conto che $M_0 = 0$, si ha

$$0 = \frac{X_1}{EI} \int_s M'^2 ds + \frac{X_2}{EI} \int_s M' M'' ds + \frac{X_3}{EI} \int_s M' M''' ds + \int_s M' \frac{\alpha \overline{\Delta t}}{h} ds.$$

Il sistema (20) si modifica così in

$$X_1 \int_s M'^2 ds + X_2 \int_s M'M'' ds + X_3 \int_s M'M''' ds = - \frac{EI \alpha}{h} \int_s M' \bar{\Delta} t ds.$$

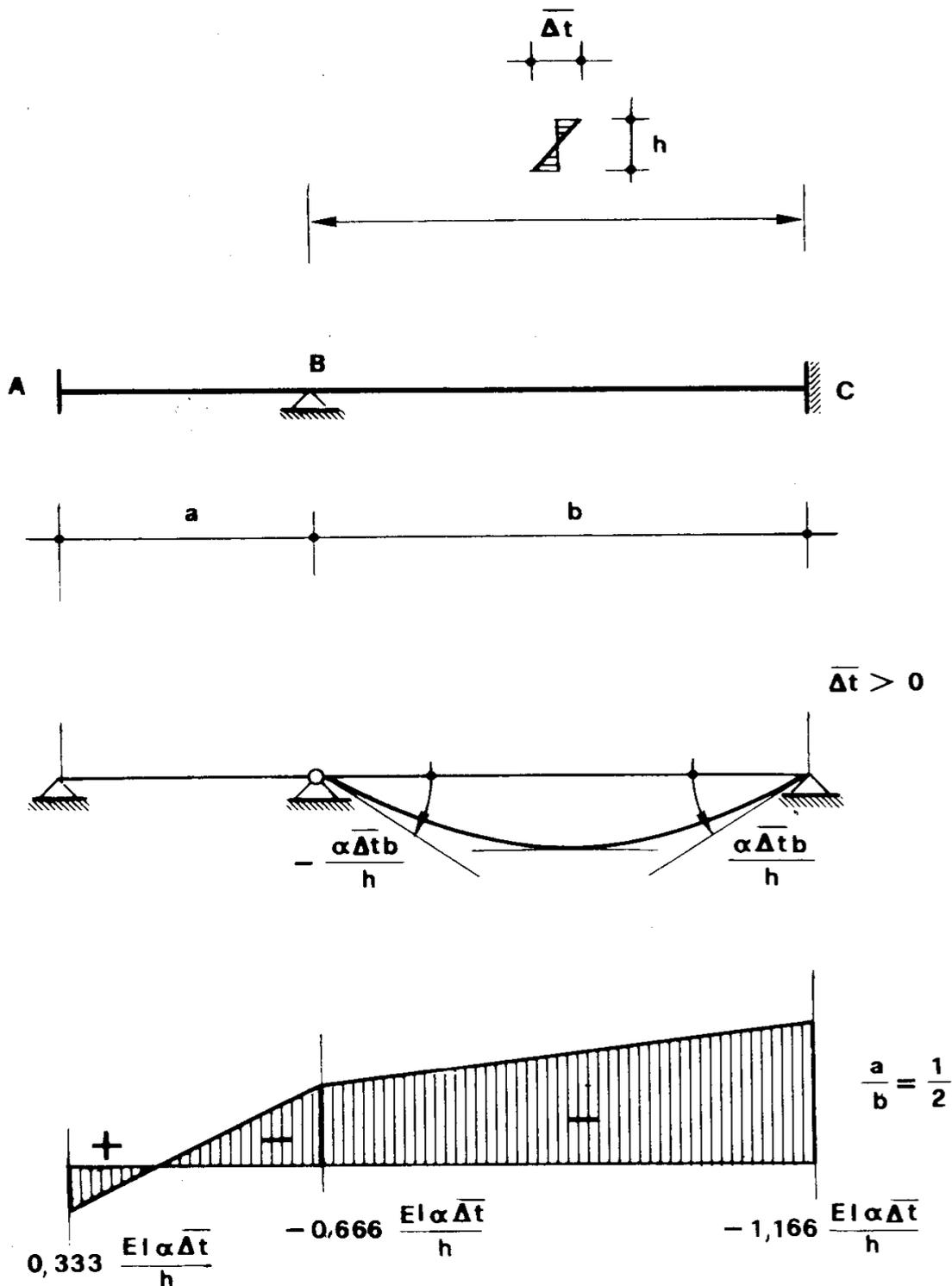


Figura 2.4

$$X_1 \int_s M'' M' ds + X_2 \int_s M'''^2 ds + X_3 \int_s M'' M''' ds = - \frac{EI \alpha}{h} \int_s M'' \overline{\Delta t} ds$$

$$X_1 \int_s M''' M' ds + X_2 \int_s M''' M'' ds + X_3 \int_s M''''^2 ds = - \frac{EI \alpha}{h} \int_s M''' \overline{\Delta t} ds$$

ed esplicitando gli integrali ($\overline{\Delta t} = cost$) si ottiene

$$\frac{a}{3} X_1 + \frac{a}{6} X_2 = 0$$

$$\frac{a}{6} X_1 + \frac{a+b}{3} X_2 + \frac{b}{6} X_3 = - \frac{EI \alpha \overline{\Delta t} b}{2h} \quad (31)$$

$$\frac{b}{6} X_2 + \frac{b}{3} X_3 = - \frac{EI \alpha \overline{\Delta t} b}{2h}$$

Si ha dalla prima

$$X_1 = - \frac{X_2}{2}$$

e dalla seconda

$$X_3 = - \frac{3}{2} \frac{EI \alpha \overline{\Delta t}}{h} - \frac{X_2}{2}$$

E' così (fig. 2.4)

$$X_1 = \frac{EI \alpha \overline{\Delta t}}{h} \frac{b}{2(a+b)}$$

$$X_2 = - \frac{EI \alpha \overline{\Delta t}}{b} \frac{b}{a+b} \quad (32)$$

$$X_3 = - \frac{EI \alpha \overline{\Delta t}}{h} \frac{3a+2b}{2(a+b)}$$

Si osserva dalle (32) che lo stato tensionale, in particolare i momenti flettenti, sono direttamente proporzionali alla rigidità EI della trave; essi poi sono indipendenti dalla luce a e b , ma sono funzioni soltanto del rapporto $\frac{a}{b}$.

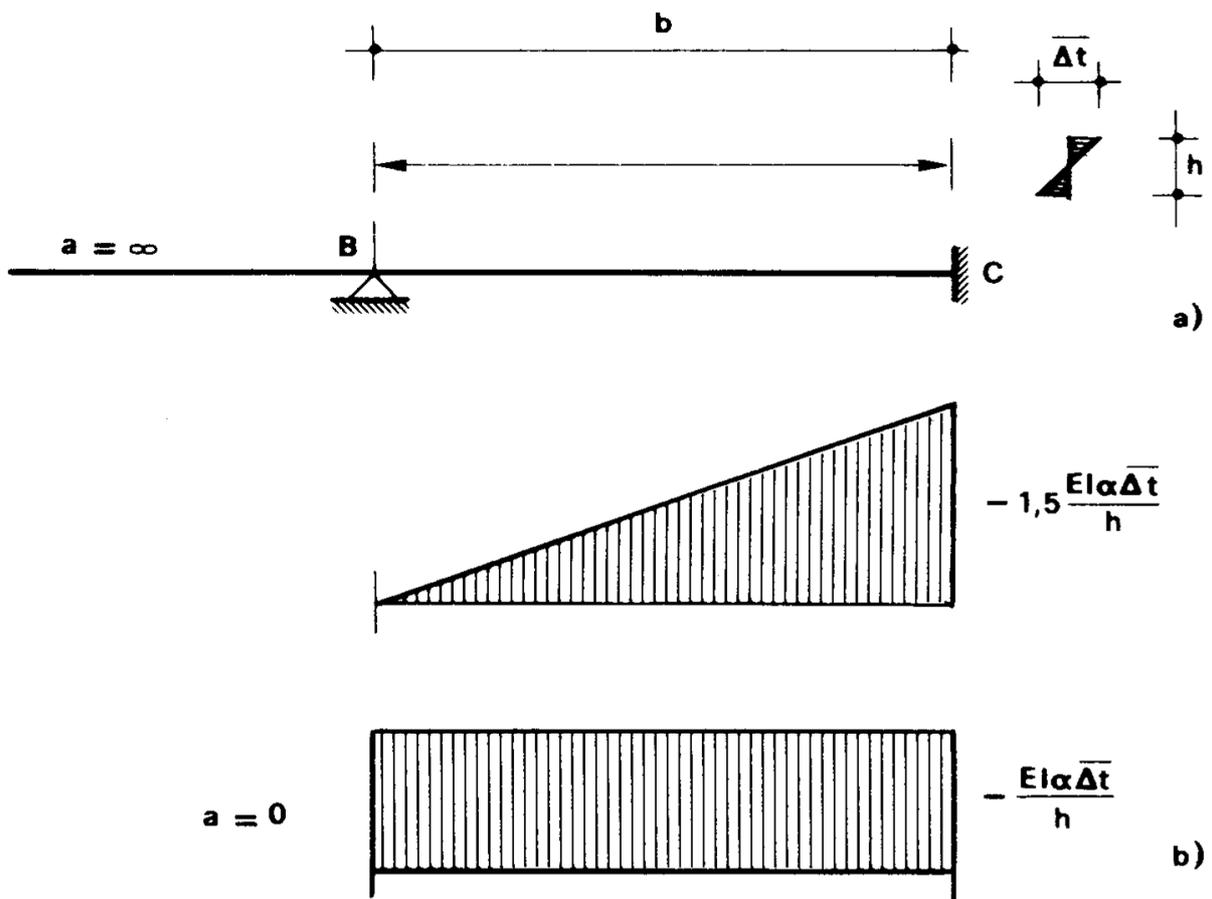


Figura 2.5

Sono interessanti due casi limite (fig. 2.5)

a) $a \rightarrow \infty$

$$X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow 0$$

$$X_3 \rightarrow -\frac{3}{2} \frac{EI\alpha\overline{\Delta t}}{h}$$

b) $a \rightarrow 0$

$$X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow - \frac{EI \alpha \overline{\Delta t}}{h} .$$

3) *Un esempio numerico.*

Sia (fig. 2.6)

$$a = 20 \text{ m}$$

$$b = 40 \text{ m}$$

$$q = 5 \text{ tm}^{-1} .$$

Il materiale sia conglomerato cementizio; si pone perciò

$$E = 3 \cdot 10^6 \text{ tm}^{-2}$$

$$\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ C}^{-1}$$

La sezione è quella della fig. 2.6 in cui

$$h = 2 \text{ m}$$

$$I = \frac{7 \cdot 2^3}{12} - \frac{6,4 \cdot 1,6^3}{12} = 2,483 \text{ m}^4 .$$

E' quindi (26)

$$X_1 = \frac{5 \cdot 1600}{24} \frac{40}{60} = 222 \text{ tm}$$

$$X_2 = - \frac{5 \cdot 1600}{12} \frac{40}{60} = - 444 \text{ tm}$$

$$X_3 = - \frac{5 \cdot 1600}{24} \frac{140}{60} = - 778 \text{ tm} .$$

Per un $\overline{\Delta t}$ pari a

$$\overline{\Delta t} = + 30^\circ$$

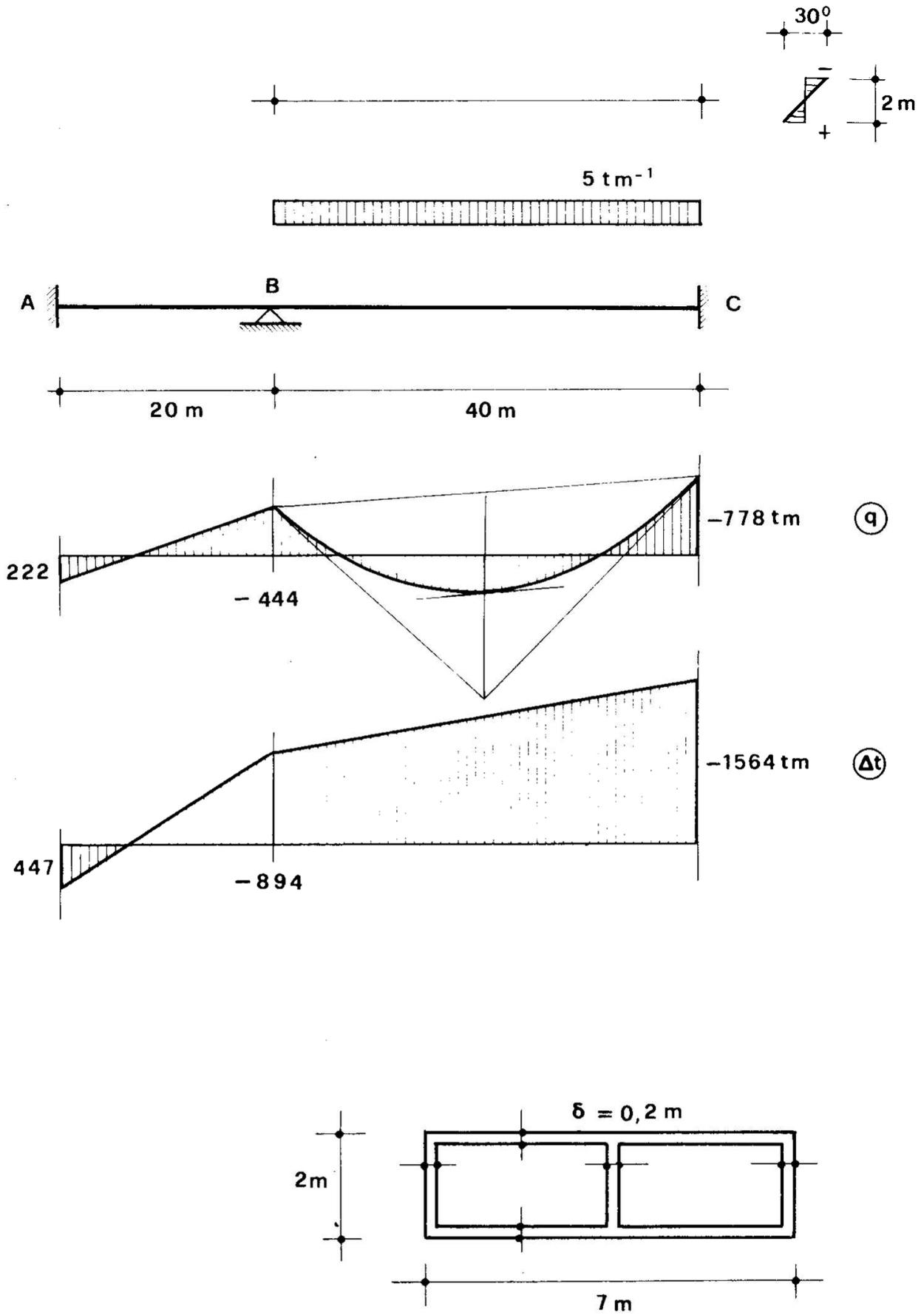


Figura 2.6

si ha (32)

$$\begin{aligned} X_1 &= 447 \text{ tm} \\ X_2 &= - 894 \text{ tm} \\ X_3 &= - 1564 \text{ tm} . \end{aligned}$$

Si può calcolare con approssimazione la compressione nel conglomerato schematizzando la sezione in due aree di valore

$$7 \cdot 0,2 = 1,4 \text{ m}^2$$

alla distanza reciproca di 1,8 m. Per effetto di q si ha in C

$$F = \frac{778}{1,8} = 432 \text{ t}$$

e quindi, sulla soletta di intradosso,

$$\sigma_c = - \frac{432}{1,4} = - 308 \text{ tm}^{-2} = - 30,8 \text{ kg cm}^{-2} .$$

Per effetto di Δt si ha invece, sempre in C ,

$$F = \frac{1564}{1,8} = 869 \text{ t}$$

$$\sigma_c = - \frac{869}{1,4} = - 620 \text{ tm}^{-2} = - 62 \text{ kg cm}^{-2} .$$

Le due σ_c si sommano, e la soletta di intradosso in C è soggetta a

$$\sigma_c = 30,8 + 62 = 92,8 \text{ kg cm}^{-2} .$$

Problema n. 3.

La struttura della fig. 3.1 a, è due volte iperstatica; il prodotto EI è costante per tutti i tratti inflessi. Si scelgono come incognite iperstatiche

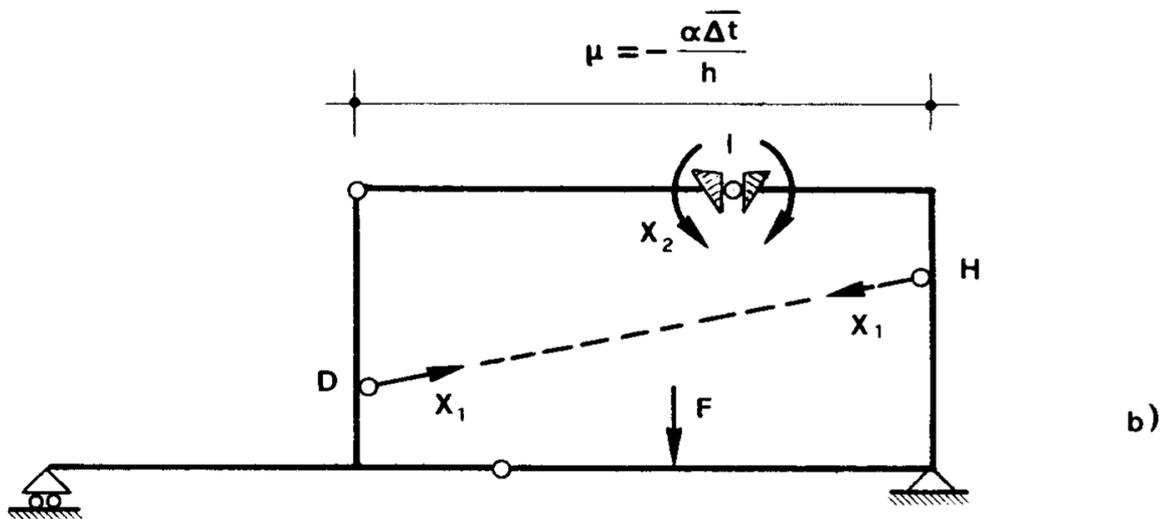
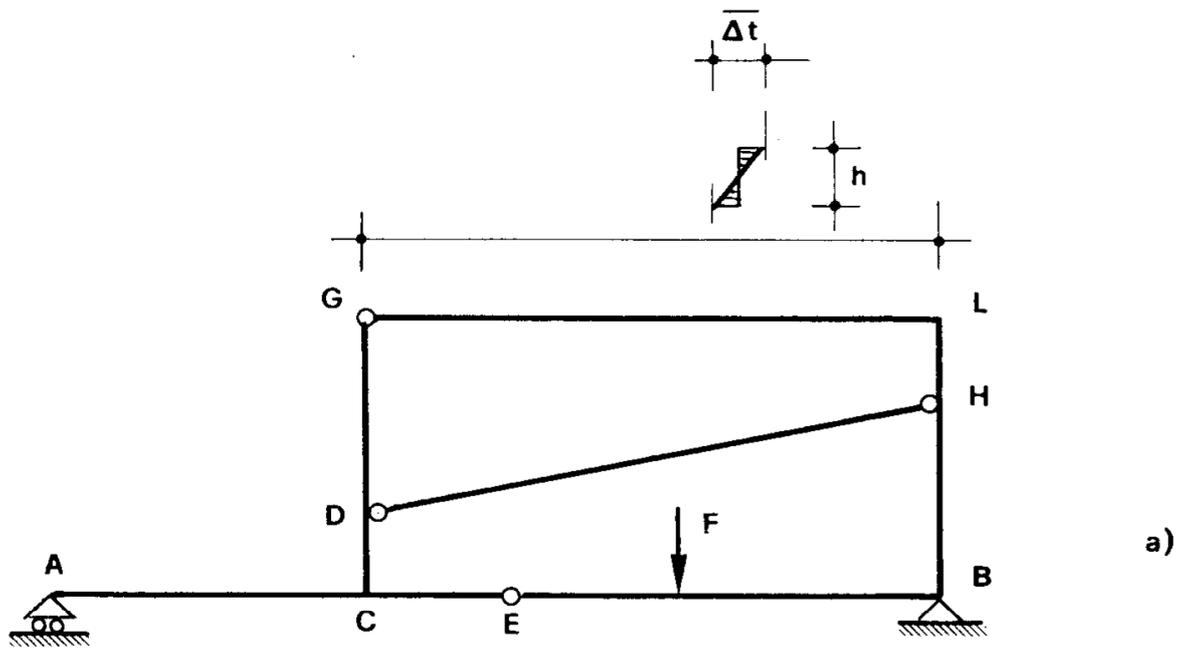


Figura 3.1

il momento flettente in K e lo sforzo nel pendolo, sicchè il sistema principale, reso equivalente, è quello della fig. 3.1 b. Nella fig. 3.2 sono disegnati il sistema principale caricato dalle forze applicate (3.2 a), il sistema principale caricato da $X_1 = 1$ (3.2 b) il sistema principale caricato da

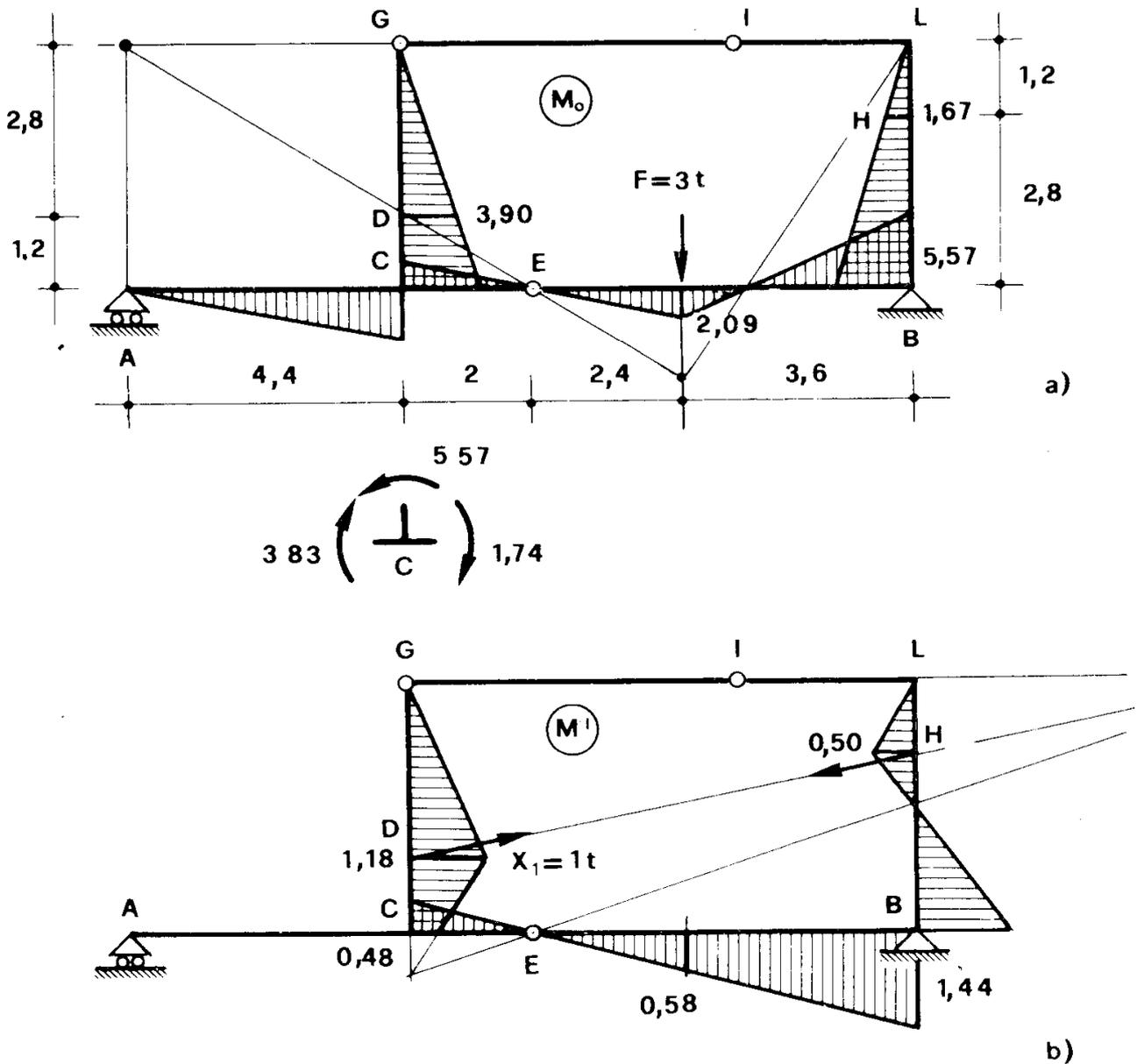


Figura 3.2

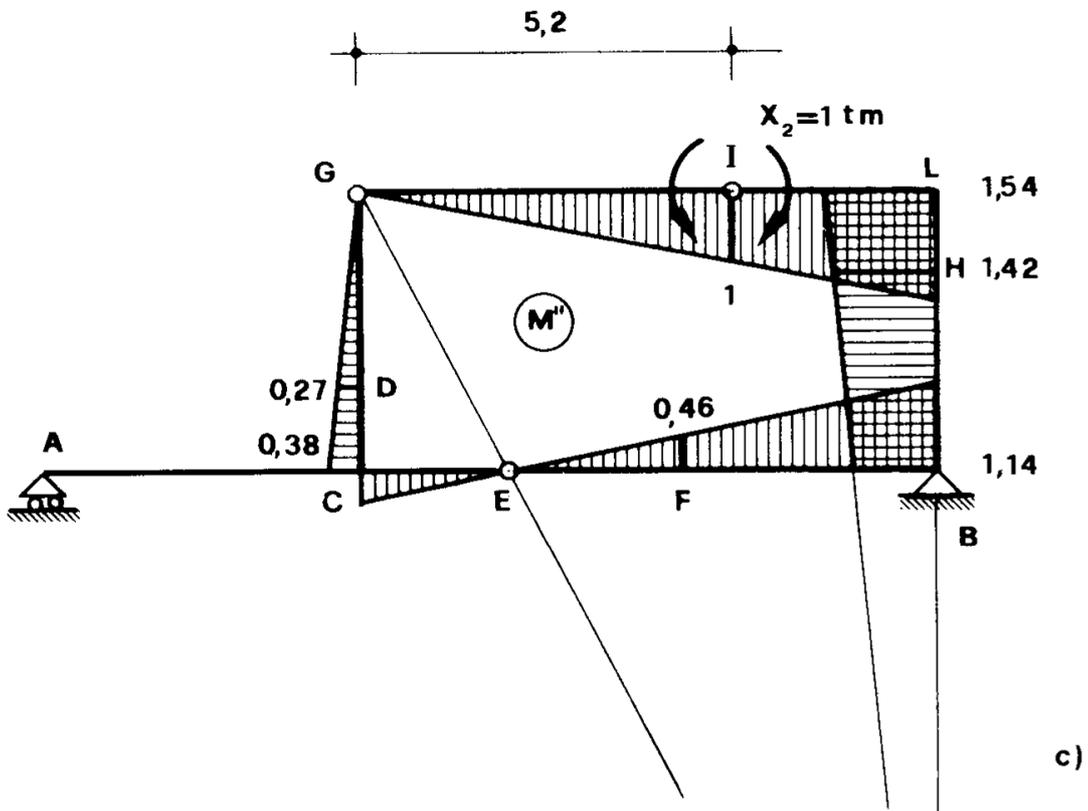
$X_2 = 1$ (3.2 c). Scegliendo come insieme di spostamenti quello reale, e come insieme di forze una volta il sistema $X_1 = 1$, e un'altra volta il sistema $X_2 = 1$, si scrivono le due equazioni

$$1 \cdot \left(-\frac{X_1 l_p}{E_p A_p} \right) = \int_s M' \frac{M ds}{EI} + \int_s M' \frac{\alpha \bar{\Delta t}}{h} ds ;$$

(33)

$$0 = \int_s M'' \frac{M ds}{EI} + \int_s M'' \frac{\alpha \overline{\Delta t}}{h} ds.$$

Nella prima delle (33) a primo membro appare il segno negativo perché la X_1 è stata assunta positiva se il pendolo è tirante, quindi le $X_1 = 1$ sono dirette come nella fig. 3.2 b, mentre per effetto delle X_1 positive i



due punti D ed H (fig. 3.1b) si allontanano poichè il pendolo (fig. 3.1b) si allunga^(*). Con il deponente p si sono indicati gli elementi relativi al pendolo.

(*) Così pure, se il pendolo fosse soggetto ad una variazione termica uniforme Δt , a primo membro della prima delle (33) apparirebbe

$$1 \left(-\frac{X_1 l_p}{E_p A_p} - \alpha_p l_p \Delta t \right) \tag{34}$$

Il termine relativo alla variazione termica appare a secondo membro delle (33); si ricordi che nell'equazione dei lavori virtuali i termini relativi alle distorsioni appaiono con il segno meno, e che le due variazioni termiche Δt e $\overline{\Delta t}$ sono esprimibili come distorsioni nel modo che segue:

$$\begin{aligned} \lambda &= -\alpha \Delta t \\ \mu &= -\frac{\alpha \overline{\Delta t}}{h} ; \end{aligned} \quad (36)$$

quindi

$$-\int_s M' \mu ds = \int_s M' \frac{\alpha \overline{\Delta t}}{h} ds$$

ed analoga per M'' .

Si avverte anche che a deponente dell'integrale appare il simbolo generico s ; esso indica soltanto che l'integrale è esteso a tutte le parti della struttura dove la funzione sotto integrale è diversa da zero. E' evidente che s rappresenta la generica ascissa curvilinea, e che l'integrale si spezza in tanti integrali quanti sono gli intervalli in cui la funzione sotto integrale può essere data con un'unica espressione; nei casi di difficoltà di quadratura, gli integrali possono sempre calcolarsi come sommatorie.

Poichè è

$$M = M_0 + M' X_1 + M'' X_2$$

le (33) si scrivono ($EI = cost$, $\overline{\Delta t} = cost$)

in genere le reazioni nei pendoli interni si assumono sempre positive se corrispondono ad una trazione nei pendoli stessi. Se invece si adottasse la convenzione opposta, è facile verificare che la (34) si muterebbe nell'altra

$$1 \left(-\frac{X_1 l_p}{E_p A_p} + \alpha_p l_p \Delta t \right) \quad (35)$$

Analoghe considerazioni valgono per i pendoli stessi, ed in genere per i vincoli cedevoli.

$$\begin{aligned}
- X_1 \frac{l_p}{E_p A_p} &= \frac{1}{EI} \int_s M' M_0 ds + \frac{X_1}{EI} \int_s M'^2 ds + \\
&+ \frac{X_2}{EI} \int_s M' M'' ds + \frac{\alpha \overline{\Delta t}}{h} \int_s M' ds ; \\
0 &= \frac{1}{EI} \int_s M'' M_0 ds + \frac{X_1}{EI} \int_s M'' M' ds + \\
&+ \frac{X_2}{EI} \int_s M''^2 ds + \frac{\alpha \overline{\Delta t}}{h} \int_s M'' ds .
\end{aligned} \tag{37}$$

Ordinando si ha

$$\begin{aligned}
X_1 \left(\int_s M'^2 ds + \frac{EI}{E_p A_p} l_p \right) + X_2 \int_s M' M'' ds &= \\
= - \int_s M' M_0 ds - \frac{\alpha \overline{\Delta t} EI}{h} \int_s M' ds &
\end{aligned} \tag{38}$$

$$X_1 \int_s M'' M' ds + X_2 \int_s M''^2 ds = - \int_s M'' M_0 ds - \frac{\alpha \overline{\Delta t} EI}{h} \int_s M'' ds .$$

Si passi adesso al calcolo degli integrali; poichè M_0 , M' ed M'' sono espressi da funzioni lineari, i loro prodotti sono funzioni quadratiche, è cioè rappresentano archi di parabola; quindi gli integrali possono essere calcolati con la formula di Stirling (22). Nella fig. 3.2 a la struttura è quotata in metri, i momenti sono quotati in tm . Poichè $F = 3t$, dalla condizione di equilibrio intorno a B

$$12,4 R_A + 3,6 F = 0$$

si trae

$$R_A = - 0,871 t$$

e quindi

$$M_{CA} = 3,83 \text{ tm.}$$

Dalla condizione di equilibrio intorno alla cerniera E , chiamando S lo sforzo nel pendolo GI si ha

$$- 4S + 6,4 R_A = 0$$

da cui

$$S = - 1,39 t$$

e quindi^(*)

$$M_{CG} = 5,57 \text{ tm.}$$

Dalla condizione di equilibrio alla rotazione del nodo C si ha

$$- 3,83 + 5,57 + \mathfrak{m}_{CE} = 0$$

da cui

$$\mathfrak{m}_{CE} = - 1,74 = M_{CE} .$$

Sotto F è perciò

$$M_F = \frac{1,74}{2} 2,4 = 2,09 \text{ tm} ,$$

ed in B

$$\begin{aligned} M_{BE} &= - M_{EB} = 6 T_E - 3,6 F = \\ &= 6 \frac{1,74}{2} - 3,6 F = - 5,57 \text{ tm} . \end{aligned}$$

Nella fig. 3.2 b i momenti sono quotati in metri. La componente orizzontale di $X_1 = 1$ è pari a $\cos \alpha$; poiché è

(*) La t è assunta verso destra in AB e GI , verso l'alto in CG , verso il basso in LB .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1,6}{8} = 0,2$$

$$\alpha = 11,31$$

$$\cos \alpha = 0,98 .$$

Poichè $R_A = 0$, dalla condizione di equilibrio del tratto AE alla rotazione intorno ad E

$$- 2,8 S - 1,2 \cdot 0,98 = 0$$

si ha

$$S = - 0,42 t$$

e quindi

$$M_D = \quad \quad \quad = 1,18 m$$

$$M_{CG} = 0,42 \cdot 4 - 1 \cdot 1,2 = 0,48 m$$

$$M_B = \frac{0,48}{2} \cdot 6 = 1,44 m$$

$$M_H = 0,42 \cdot 1,2 = 0,50 m .$$

Nella fig. 3.2 c i momenti sono quotati in numeri; si ha

$$M_L = \frac{1}{5,2} 8 = 1,54 .$$

Inoltre, è

$$T_{GL} = \frac{1}{5,2} = 0,19 m^{-1}$$

e quindi la condizione di equilibrio alla rotazione del tratto AGE intorno ad E ($R_A = 0$)

$$2 T_{GL} - 4 T_{GC} = 0$$

porge

$$T_{GC} = 0,095 \text{ m}^{-1}$$

da cui

$$M_{CG} = - M_{CE} = 0,38$$

$$M_{BE} = - M_{BL} = - \frac{0,38}{2} 6 = 1,14 .$$

Si ha così, con applicazioni ripetute della formula di Stirling,

$$\begin{aligned} \int_s M_0 M' ds &= \frac{2,8}{3} 3,90 \cdot 1,18 + \\ &+ \frac{1,2}{6} (3,90 \cdot 1,18 + 4 \cdot 4,73 \cdot 0,83 + 5,57 \cdot 0,48) + \\ &+ \frac{2}{3} 1,74 \cdot 0,48 + \frac{2,4}{3} 2,09 \cdot 0,58 + \\ &+ \frac{3,6}{6} (2,09 \cdot 0,58 - 4 \cdot 1,74 \cdot 1,01 - 5,57 \cdot 1,44) + \\ &+ \frac{2,8}{6} (- 5,57 \cdot 1,44 - 4 \cdot 3,62 \cdot 0,47 + 1,67 \cdot 0,50) + \\ &+ \frac{1,2}{3} \cdot 1,67 \cdot 0,50 = - 4,08 \text{ tm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_s M_0 M'' ds &= - \frac{4}{3} 5,57 \cdot 0,38 - \frac{2}{3} 1,74 \cdot 0,38 - \\ &- \frac{2,4}{3} 2,09 \cdot 0,46 + \\ &+ \frac{3,6}{6} (- 2,09 \cdot 0,46 + 4 \cdot 1,74 \cdot 0,8 + 5,57 \cdot 1,14) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{4}{6} (5,57 \cdot 1,14 + 4 \cdot 2,78 \cdot 1,34) = 16,71 \text{ tm}^2$$

$$\begin{aligned} \int_s M' M'' ds &= - \frac{2,8}{3} 1,18 \cdot 0,27 + \\ &- \frac{1,2}{6} (1,18 \cdot 0,27 + 4 \cdot 0,83 \cdot 0,32 + 0,48 \cdot 0,38) + \\ &- \frac{2}{3} \cdot 0,48 \cdot 0,38 - \frac{6}{3} 1,44 \cdot 1,14 + \\ &+ \frac{2,8}{6} (- 1,44 \cdot 1,14 - 4 \cdot 0,47 \cdot 1,28 + 0,50 \cdot 1,42) + \\ &+ \frac{1,2}{6} (0,50 \cdot 1,42 + 4 \cdot 0,25 \cdot 1,48) = - 5,13 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_s M'^2 ds &= \frac{2,8}{3} 1,18^2 + \frac{1,2}{6} (1,18^2 + 4 \cdot 0,83^2 + 0,48^2) + \\ &+ \frac{2}{3} 0,48^2 + \frac{6}{3} 1,44^2 + \frac{2,8}{6} (1,44^2 + 4 \cdot 0,47^2 + \\ &+ 0,50^2) + \frac{1,2}{3} 0,50^2 = 8,07 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_s M''^2 ds &= \frac{4}{3} 0,38^2 + \frac{2}{3} 0,38^2 + \frac{6}{3} 1,14^2 + \\ &+ \frac{4}{6} (1,14^2 + 4 \cdot 1,34^2 + 1,54^2) + \\ &+ \frac{8}{3} 1,54^2 = 16,45 \text{ m} \end{aligned}$$

In assenza di $\overline{\Delta t}$, e per $\frac{EI}{E_p A_p} = 0$ (pendolo indeformabile) il siste-

ma (38) si scrive

$$8,07 X_1 - 5,13 X_2 = 4,08$$

$$5,13 X_1 + 16,45 X_2 = -16,71$$

Chiamando $\Delta\varphi$ la rotazione relativa in K e Δl la variazione di distanza tra D ed H ($\Delta\varphi$ positiva se la sezione di destra ruota in senso orario rispetto a quella di sinistra, Δl positiva se i due punti si avvicinano, come si trae dalle fig. 3.2b, c è

$$\Delta l_{OF} = \int_s \frac{M' M_0}{EI} ds = -\frac{4,08}{EI} m$$

$$\Delta l' = \int_s \frac{M'^2}{EI} ds = \frac{8,07}{EI} m t^{-1}$$

$$\Delta l'' = \int_s \frac{M' M''}{EI} ds = -\frac{5,13}{EI} t^{-1}$$

$$\Delta\varphi_{OF} = \int_s \frac{M'' M_0}{EI} ds = \frac{16,71}{EI}$$

$$\Delta\varphi' = \int_s \frac{M'' M' ds}{EI} = \Delta l'' t^{-1}$$

$$\Delta\varphi'' = \int_s \frac{M''^2}{EI} ds = \frac{16,45}{EI} m^{-1} t^{-1}$$

E' inoltre

$$\int_G^L M' ds = 0$$

$$\int_G^L M'' ds = \frac{8 \cdot 1,54}{2} = 6,16 m$$

e quindi ($\bar{\Delta t} = 30^\circ$)

$$\Delta l_{O\Delta t} = 0$$

$$\Delta\varphi_{O\Delta t} = \int_G^L M'' \frac{\alpha \bar{\Delta t}}{h} ds = 6,16 \frac{\alpha \bar{\Delta t}}{h} = 184,8 \frac{\alpha}{h}$$

la cui soluzione è

$$X_1 = - 0,175 t$$

$$X_2 = - 1,070 tm .$$

Moltiplicando i momenti della fig. 3.2 b per X_1 , quelli della fig. 3.2 c per X_2 , e sommandoli tra loro e con quelli della fig. 3.2 a, si ottengono i momenti finali, consegnati nella fig. 3.3 a.

Si osservi che, se il pendolo è inestensibile, i momenti sono indipendenti da EI ; ciò accade sempre, quando il carico è costituito da forze (e cioè in assenza di distorsioni). Per il progetto della sezione, se si adotta acciaio tipo 2 con $\sigma_a = 2400 \text{ Kgcm}^{-2}$, è

$$W = \frac{M_{CG}}{\sigma_a} = \frac{589.000}{2400} \frac{\text{Kgcm}}{\text{Kgcm}^{-2}} = 245 \text{ cm}^3 ;$$

può quindi assumersi un profilato *IPE* 220, cui corrisponde

$$W_x = 252 \text{ cm}^3$$

$$I_x = 2772 \text{ cm}^4$$

$$h = 22 \text{ cm} .$$

In presenza della sola $\overline{\Delta t} = 30^\circ$, e sempre considerando il pendolo inestensibile, è

$$\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ C}^{-1}$$

$$\frac{\alpha \overline{\Delta t}}{h} = 1,636 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1} ,$$

Il sistema (37) si scrive perciò anche nel modo seguente

$$\Delta l_{0F} + X_1 \Delta l' + X_2 \Delta l'' = - X_1 \frac{l_p}{E_p A_p}$$

$$\Delta \varphi_{0F} + \Delta \varphi_{0F \Delta t} + X_1 \Delta \varphi' + X_2 \Delta \varphi'' = 0 .$$

che si riconosce essere le due equazioni di congruenza relative alla struttura resa isostatica come nella fig. 3.1b.

e quindi il sistema (38) si scrive

$$\begin{aligned} 8,07 X_1 - 5,13 X_2 &= 0 \\ - 5,13 X_1 + 16,45 X_2 &= - 10,08 \cdot 10^{-3} EI . \end{aligned}$$

la cui soluzione è

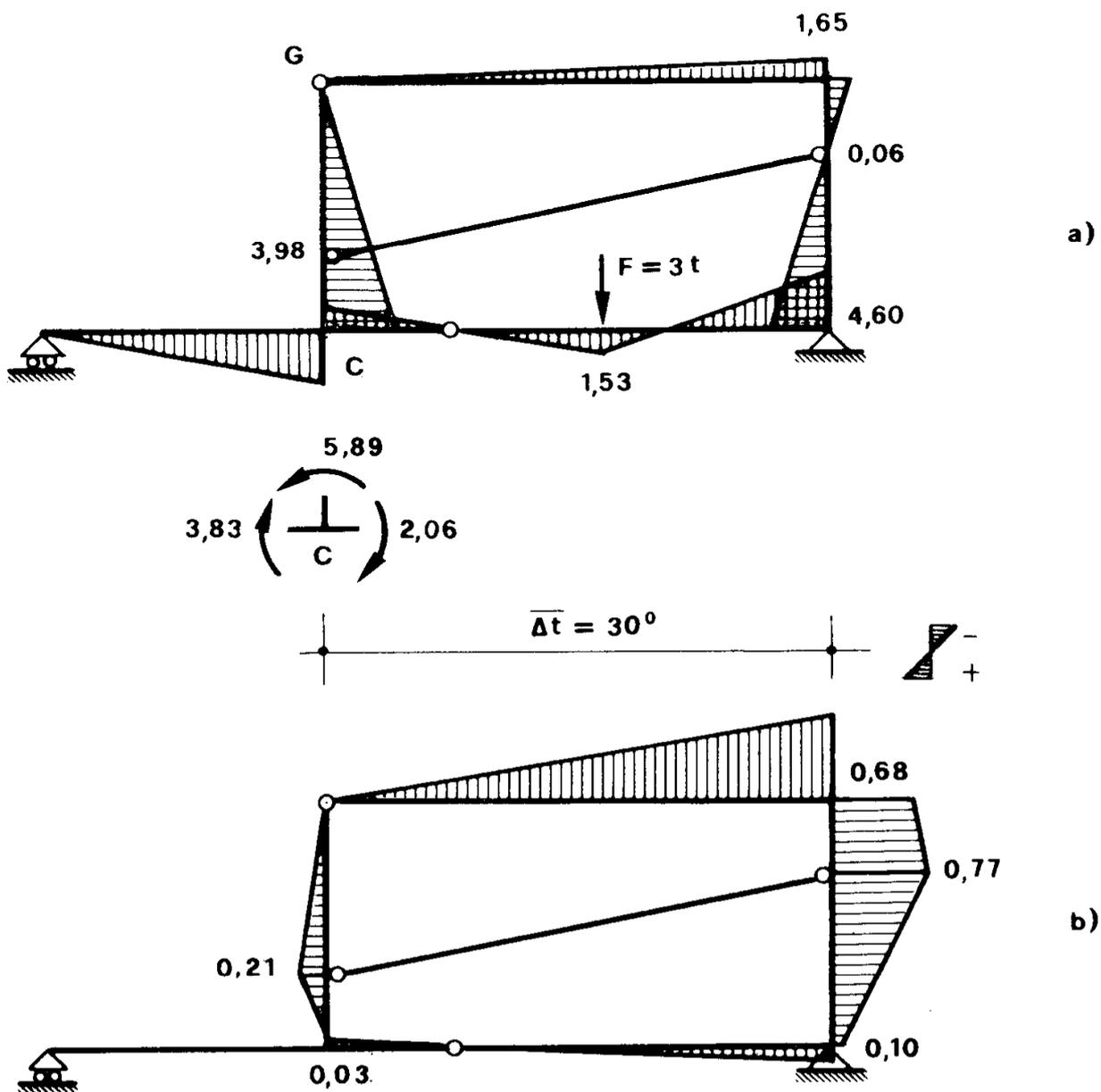


Figura 3.3

$$\begin{aligned} X_1 &= - 0,486 EI \cdot 10^{-3} t \\ X_2 &= - 0,764 EI \cdot 10^{-3} tm . \end{aligned} \tag{39}$$

Poichè è

$$E = 2,1 \cdot 10^7 \text{ tm}^{-2}$$

$$I = 2772 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

è pure

$$EI = 582,12 \text{ tm}^2$$

e quindi

$$X_1 = - 0,283 \text{ t}$$

$$X_2 = - 0,444 \text{ tm} .$$

Moltiplicando i momenti della fig. 3.2 b per X_1 e quelli della fig. 3.2 c per X_2 , e sommandoli, si ottengono i momenti indotti dalla variazione termica, riportati nella fig. 3.3 b.

Si osservi che in assenza di distorsioni i momenti di una struttura iperstatica dipendono soltanto dai rapporti delle rigidità delle varie sezioni, come già altrove fatto osservare; nel caso della fig. 3.3 a, in cui il pendolo è inestensibile, ed $EI = cost$, il prodotto EI non entra affatto in gioco. Ciò rende possibile calcolare le caratteristiche prescindendo dal valore reale di EI , e quindi fissare la sezione con un semplice calcolo di progetto.

Quando invece agiscono delle distorsioni, le caratteristiche dipendono dal valore reale di EI (vedi (39)), e perciò il calcolo non può essere eseguito che per successive verifiche.

Problema n. 4.

La struttura della fig. 4.1 a è una capriata-arco a due cerniere, di luce l e freccia f , caricata da una forza concentrata in mezzeria; si vuol mostrare entro quali limiti gioca in essa il termine estensionale rispetto a quello flessionale.

La struttura principale è l'arco a tre cerniere. Si ha

$$M_0 = 0$$

$$M' = \frac{z}{a}$$

$$T_0 = 0$$

$$T' = \frac{\text{sen } \alpha}{f}$$

$$N_0 = -\frac{F}{2 \operatorname{sen} \alpha} \qquad N' = \frac{\cos \alpha}{f} .$$

L'equazione dei lavori virtuali si scrive, tenendo conto di M ed N

$$0 = \frac{1}{EI} \int_s MM' ds + \frac{1}{EA} \int_s NN' ds .$$

Si ha

$$M = M_0 + M'X$$

$$N = N_0 + N'X$$

da cui

$$0 = \frac{1}{EI} \int_s M_0 M' ds + \frac{X}{EI} \int_s M'^2 ds + \frac{1}{EA} \int_s N_0 N' ds + \frac{X}{EA} \int_s N'^2 ds .$$

I vari termini sono forniti da

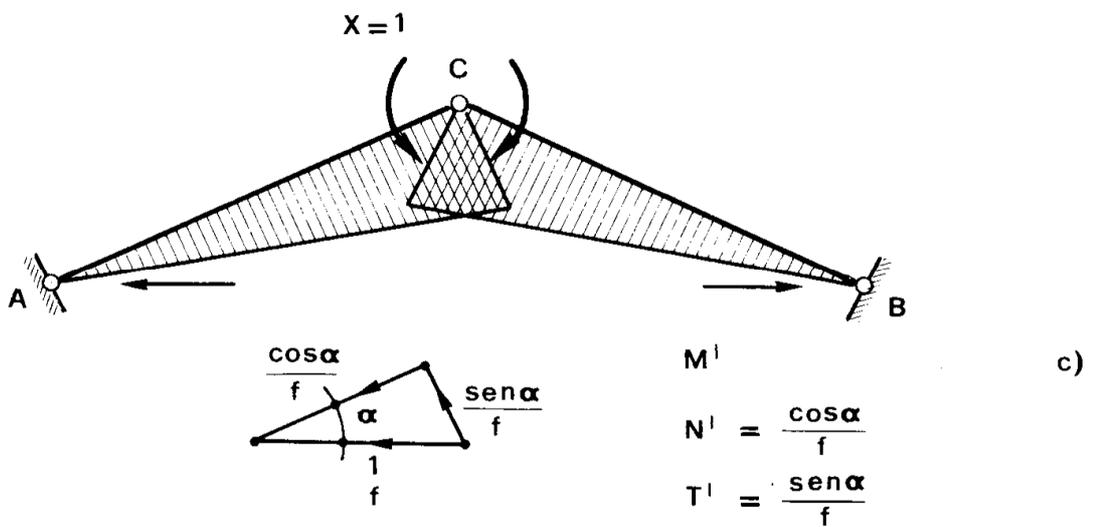
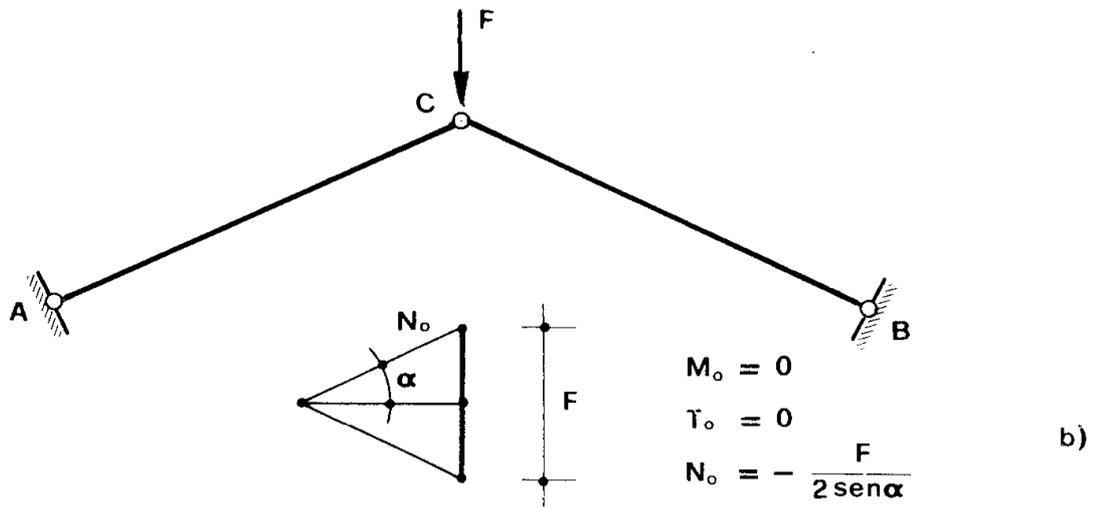
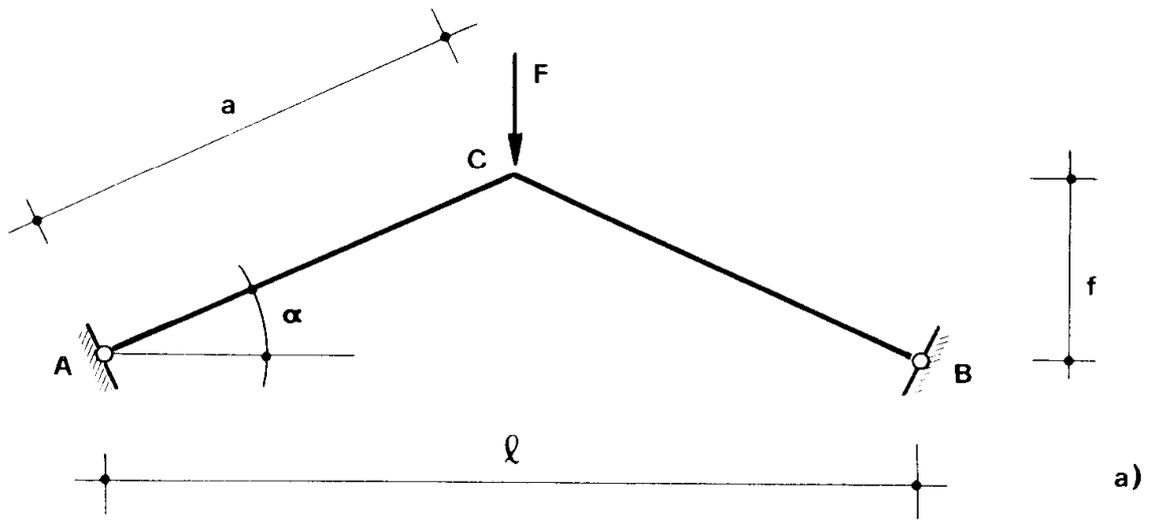
$$\int_s M_0 M' ds = 0 \qquad \int_s M'^2 ds = \frac{2}{3} a$$

$$\int_s N_0 N' ds = -2a \frac{F}{2 \operatorname{sen} \alpha} \frac{\cos \alpha}{f} = -\frac{F a}{f \operatorname{tg} \alpha}$$

$$\int_s N'^2 ds = 2a \frac{\cos^2 \alpha}{f^2}$$

L'equazione si scrive così

$$0 = \frac{X}{EI} \frac{2}{3} a - \frac{1}{EA} \frac{F a}{f \operatorname{tg} \alpha} + \frac{X}{EA} \frac{2a \cos^2 \alpha}{f^2} .$$



Azioni sulla struttura in A.

Figura 4.1

Trascurando l'effetto di accorciamento, e cioè i termini in N nell'equazione in X , è $X = 0$, e quindi $M = 0$. Esistono quindi solo gli sforzi normali della fig. 4.1 b, che per $\alpha \rightarrow 0$ tendono ad ∞ . Tenendo conto di

$$N, \text{ è invece } \left(\frac{I}{A} = \rho^2 \right)$$

$$X \left(\frac{2a}{3} + \frac{2a \cos \alpha \rho^2}{f^2} \right) = \frac{F a \rho^2}{f \operatorname{tg} \alpha}$$

da cui

$$X = \frac{3}{2} F \frac{f \rho^2}{(f^2 + 3 \rho^2 \cos^2 \alpha) \operatorname{tg} \alpha}$$

Poichè è

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2f}{l}$$

è pure

$$X = \frac{3}{4} F \frac{l \rho^2}{f^2 + 3 \rho^2 \cos^2 \alpha}$$

o anche

$$X = \frac{3 F l \rho^2}{l^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 12 \rho^2 \cos^2 \alpha}$$

Per $\alpha \rightarrow 0$ risulta

$$X \rightarrow \frac{F l}{4},$$

indipendente da ρ .

L'espressione di N è

$$N = N_0 + N' X = - \frac{F}{2 \operatorname{sen} \alpha} + X \frac{\cos \alpha}{f}$$

e cioè

$$\begin{aligned}
 N &= -\frac{F}{2 \operatorname{sen} \alpha} + \frac{3}{4} F \frac{l \rho^2}{f^2 + 3 \rho^2 \cos^2 \alpha} \frac{\cos \alpha}{f} = \\
 &= -F \left(\frac{1}{2 \operatorname{sen} \alpha} - \frac{3}{4} \frac{l \rho^2 \cos \alpha}{f^3 + 3 \rho^2 f \cos^2 \alpha} \right) = \\
 &= -F \left(\frac{1}{2 \operatorname{sen} \alpha} - \frac{3}{4} \frac{l \rho^2 \cos \alpha}{\frac{l^3}{8} \operatorname{tg}^3 \alpha + 3 \rho^2 \frac{l}{2} \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha} \right) = \\
 &= -F \left(\frac{1}{2 \operatorname{sen} \alpha} - \frac{6 \rho^2 \cos \alpha}{l^2 \operatorname{tg}^3 \alpha + 12 \rho^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} \right) = \\
 &= -F \frac{l^2 \operatorname{tg}^3 \alpha + 12 \rho^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - 12 \rho^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha (l^2 \operatorname{tg}^3 \alpha + 12 \rho^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha)} = \\
 &= -F \frac{l^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2 \cos^3 \alpha (l^2 \operatorname{tg}^3 \alpha + 12 \rho^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha)} = \\
 &= -F \frac{l^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2 l^2 \operatorname{sen}^3 \alpha + 24 \rho^2 \operatorname{sen} \alpha \cos^4 \alpha} = \\
 &= -F \frac{l^2 \operatorname{sen} \alpha}{2 l^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 24 \rho^2 \cos^4 \alpha}
 \end{aligned}$$

Per $\alpha \rightarrow 0$ è $N \rightarrow 0$;

per $\alpha \rightarrow 90^\circ$ è $N \rightarrow \frac{F}{2}$.

Si svolge adesso un esempio numerico, con i dati seguenti

$$l = 40 \text{ m} ; \quad f = 10 \text{ m} ; \quad F = 10 \text{ t} ;$$

e con riferimento ad una sezione rettangolare di 0,3 m di base e 2 m di altezza. Si ha

$$\rho^2 = \frac{h^2}{12} = \frac{4}{12} = 0,333 \text{ m}^4 .$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2f}{l} = \frac{20}{40} = 0,5 ; \quad \alpha = 26,56^\circ$$

f	$\frac{f}{l}$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{sen} \alpha$	$\operatorname{cos} \alpha$	α	M_C	N	σ_{max}
10	0,250	0,500	0,447	0,894	26,56°	0,99	- 11,09	23,43
5	0,125	0,250	0,243	0,970	14,04°	3,85	- 19,86	52,35
2	0,050	0,100	0,099	0,995	5,71°	20	- 40,34	167
1	0,025	0,050	0,050	0,999	2,86°	50	- 50,03	333
0,1	0,002	0,005	0,005	1,000	0,29°	99,156	- 10,03	512
0	0	0	0	1	0	100	0	500

Tabella 1

$$X = \frac{3 \cdot 10 \cdot 40 \cdot 0,333}{1600 \operatorname{tg}^2 \alpha + 12 \cdot 0,333 \cdot \operatorname{cos}^2 \alpha} = \frac{399,6}{1600 \operatorname{tg}^2 \alpha + 3,996 \operatorname{cos}^2 \alpha}$$

$$= \frac{399,6}{1600 \cdot 0,25 + 3,996 \cdot 0,8} = \frac{399,6}{403,2} = 0,99 \text{ tm}$$

$$N = - 10 \frac{1600 \operatorname{sen} \alpha}{3200 \operatorname{sen}^2 \alpha + 7,992 \operatorname{cos}^4 \alpha} =$$

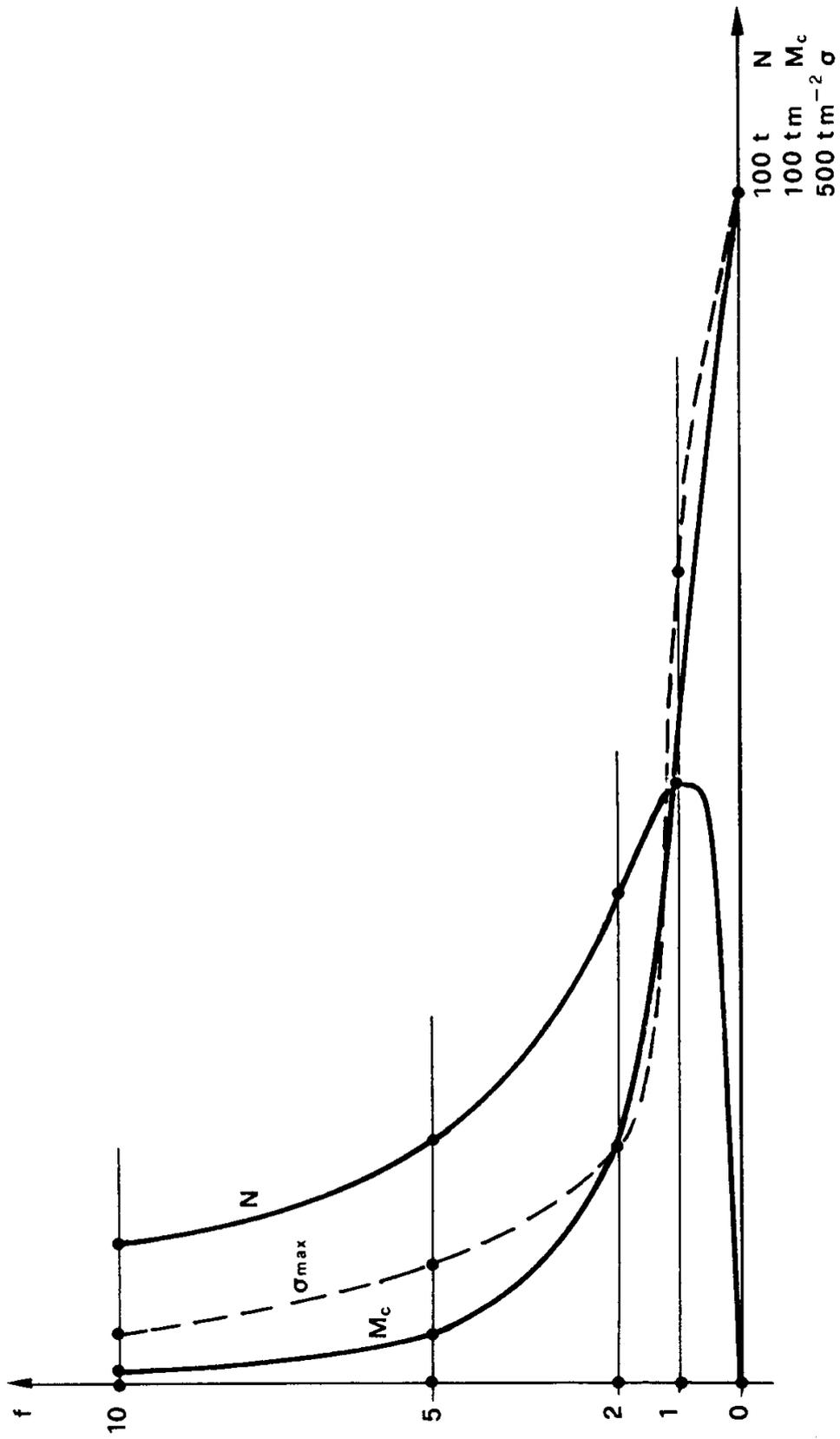


Figura 4.2

$$= - \frac{7154}{640 + 5,11} = - 11,09 t$$

Si rifanno gli stessi calcoli per $f = 5m, 2m, 1m, 0,1 m$. Nella tabella 1 sono riportati i risultati, assieme ai valori di σ_{max}

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} = \frac{M_C}{W} = \frac{N}{0,6} + \frac{M_C}{0,2} ;$$

le unità fondamentali sono tonnellate e metri.

Nella fig. 4.2 sono riportati in grafico i valori di N , M_C e σ_{max} , in funzione della freccia f , e quindi della *monta* $\frac{f}{l}$ o *ribassamento* $\frac{l}{f}$. Si

osserva che mentre N presenta un andamento prima crescente e poi decrescente al diminuire di f , sia M_C che σ_{max} crescono sempre al diminuire di f , tendendo, per $f \rightarrow 0$, ai valori di trave appoggiata.

Problema n. 5.

La struttura della fig. 5.1 a è simile a quella della fig. 4 a già studiata; essa è però tre volte iperstatica, ed è soggetta ad un carico q sul tirante. Dal punto di vista fisico, la fondamentale differenza tra le due è nell'essere la prima spingente, la seconda no. Anche qui si terrà conto sia degli effetti di M che di N .

La struttura è simmetrica, poichè si assume che E , l ed A siano gli stessi per tutte le sezioni; data la simmetria del carico, le incognite si riducono a due; come tali si scelgono il momento flettente in C (X_1) e quello in A (X_2), simmetrico di quello in B .

Il sistema principale è quindi quello della fig. 5.1 b; esso si studia sotto il carico applicato q (fig. 5.1b), sotto $X_1 = 1$ (fig. 5.1c), e sotto $X_2 = 1$ (fig. 5.1d).

Nella condizione di carico q le aste AC e BC non sono sollecitate; nell'asta AB c'è solo momento flettente, pari a quello di una trave appoggiata in A e B . Nella condizione di carico $X_1 = 1$ l'asta AB funziona da pendolo, ed è soggetta ad una compressione di valore $-\frac{1}{f}$; per l'equilibrio del nodo A la forza $\frac{1}{f}$, agente verso sinistra, e decomposta secondo

la direzione di AC e la normale ad AC , fornisce rispettivamente lo sforzo normale in AC (di trazione) e lo sforzo di taglio in AC (positivo). Nella condizione di carico $X_2 = 1$, si osservi che la reazione in C deve essere

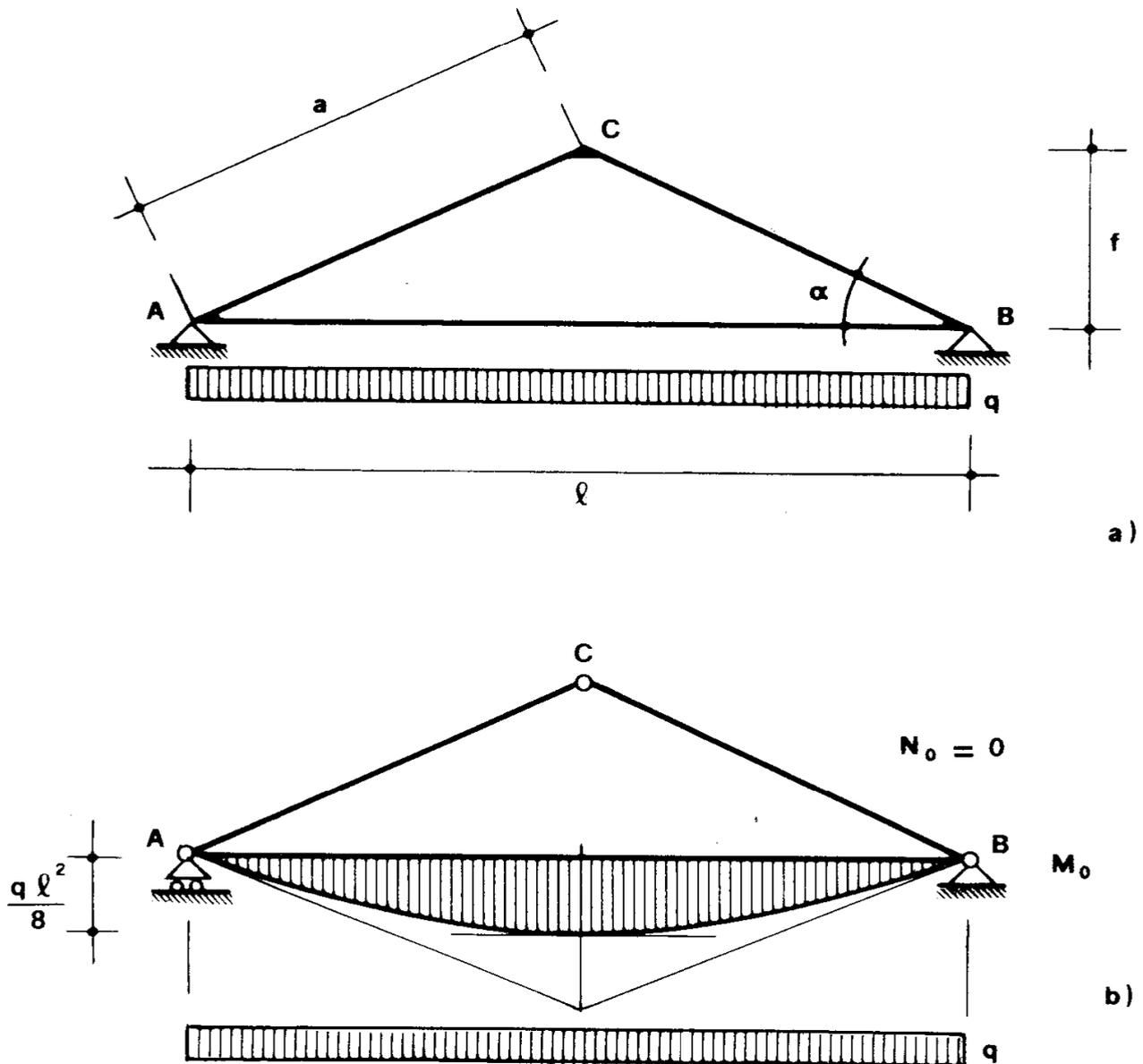


Figura 5.1a, b

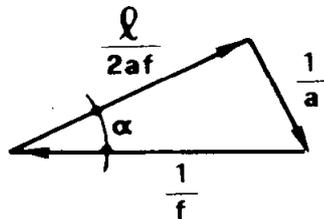
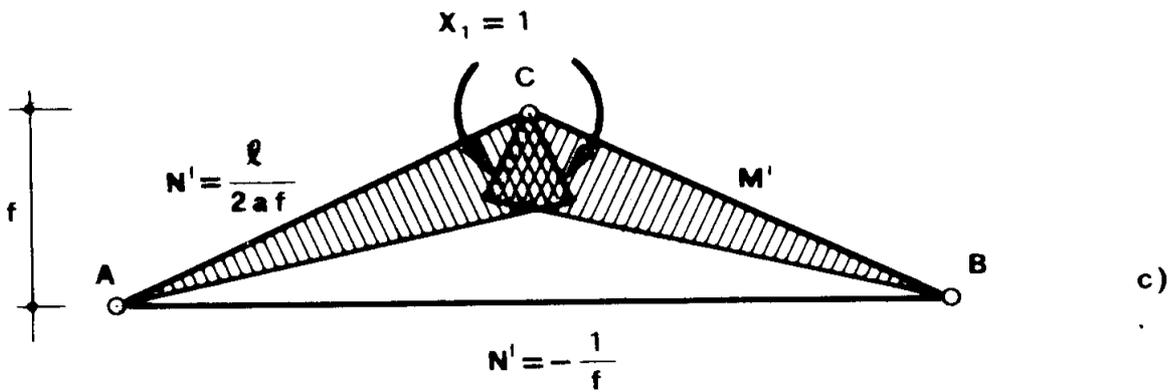
orizzontale; infatti $R_{Cs} = -R_{Cd}$, ed inoltre devono essere rispettate le condizioni di simmetria. L'equilibrio del tratto AC alla rotazione intorno ad A fornisce (R_C positiva se agisce su AC verso destra)

$$-R_C f + 1 = 0$$

da cui

$$R_C = \frac{1}{f} .$$

Lo sforzo normale in AB è di compressione, e pari a $-\frac{1}{f}$; quindi



Sforzi sulla cerniera in A
(sia in $X_1=1$ che in $X_2=1$)

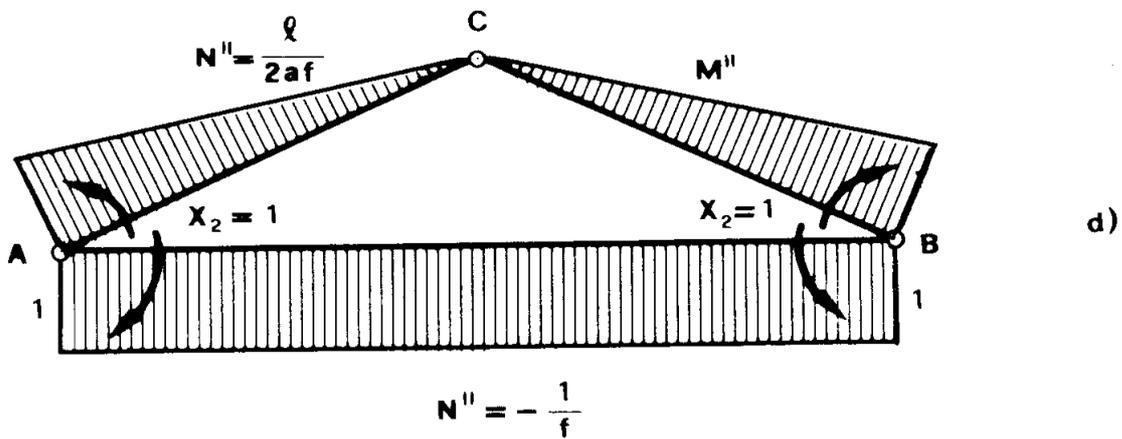


Figura 5.1c, d

nei due sistemi $X_1 = 1$ ed $X_2 = 1$ gli sforzi normali e taglienti sono identici:

$$N'_{AC} = N''_{AC} = \frac{l}{2af}$$

$$T'_{AC} = T''_{AC} = \frac{1}{a}$$

$$N'_{AB} = N''_{AB} = -\frac{1}{f}$$

Gli integrali che interessano sono i seguenti:

$$\int_s M_0 M' ds = 0$$

$$\int_s M_0 M'' ds = l \frac{2}{3} q \frac{l^2}{8} = \frac{ql^3}{12}$$

$$\int_s M' M'' ds = -2a \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{a}{3}$$

$$\int_s M'^2 ds = 2a \frac{1}{3} = \frac{2}{3} a$$

$$\int_s M''^2 ds = \frac{2}{3} a + l = \frac{3l + 2a}{3}$$

$$\int_s N_0 N' ds = \int_s N_0 N'' ds = 0$$

$$\int_s N' N'' ds = \int_s N'^2 ds = \int_s N''^2 ds =$$

$$= 2a \frac{l^2}{4a^2 f^2} + \frac{l}{f^2} = \frac{l(l + 2a)}{2af^2}$$

Assumendo come insieme di forze una volta il sistema $X_1 = 1$, una altra volta il sistema $X_2 = 1$, e come sistema di spostamenti quello reale, il principio dei lavori virtuali permette di scrivere le due equazioni:

$$0 = \int_s M' \frac{M ds}{EI} + \int_s N' \frac{N ds}{EA}$$

$$0 = \int_s M'' \frac{M ds}{EI} + \int_s N'' \frac{N ds}{EA} .$$

Poichè è

$$M = M_0 + M' X_1 + M'' X_2$$

$$N = N_0 + N' X_1 + N'' X_2 ,$$

il sistema (40) si scrive, esplicitando le incognite X_1 ed X_2 ,

$$\begin{aligned} X_1 \left(\frac{1}{I} \int_s M'^2 ds + \frac{1}{A} \int_s N'^2 ds \right) + X_2 \left(\frac{1}{I} \int_s M' M'' ds + \right. \\ \left. + \frac{1}{A} \int_s N' N'' ds \right) = - \frac{1}{I} \int_s M' M_0 ds - \frac{1}{A} \int_s N' N_0 ds \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} X_1 \left(\frac{1}{I} \int_s M'' M' ds - \frac{1}{A} \int_s N'' N' ds \right) + X_2 \left(\frac{1}{I} \int_s M''^2 ds + \frac{1}{A} \int_s N''^2 ds \right) = \\ = - \frac{1}{I} \int_s M'' M_0 ds - \frac{1}{A} \int_s N'' N_0 ds . \end{aligned}$$

Tenendo conto dei soli termini in M (flessionali) il sistema (41) si scrive

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} a X_1 - \frac{a}{3} X_2 &= 0 \\ - \frac{a}{3} X_1 + \frac{3l + 2a}{3} X_2 &= - \frac{ql^3}{12} , \end{aligned}$$

la cui soluzione è

$$X_1 = -\frac{ql^3}{12} \frac{1}{2l+a}$$

(42)

$$X_2 = -\frac{ql^3}{6} \frac{1}{2l+a}$$

Si osserva che, per $\alpha \rightarrow 0$, è $a \rightarrow \frac{l}{2}$, e quindi

$$X_1 \rightarrow -\frac{ql^2}{30}$$

(43)

$$X_2 \rightarrow -\frac{ql^2}{15}$$

Tale risultato è assurdo, perchè lo schema della struttura, per $\alpha \rightarrow 0$, è quello della fig. 5.2, e cioè è costituito da due travi AB identiche, affiancate, appoggiate in A e B ed in tali punti reciprocamente saldate; di tali travi una sola è soggetta al carico q . L'equazione di congruenza in tale schema porge

$$\frac{ql^3}{24EI} - \frac{Xl}{2EI} = \frac{Xl}{2EI}$$

da cui

$$X = \frac{ql^2}{24},$$

$$X_1 = -X_2 = \frac{ql^2}{24}.$$

(44)

L'assurdo si elimina chiamando in causa anche i termini in N (estensionali). Si ha allora, dal sistema (41),

$$X_1 \left(\frac{2}{3}a + \frac{I}{A} \frac{l(l+2a)}{2af^2} \right) + X_2 \left(-\frac{a}{3} + \frac{I}{A} \frac{l(l+2a)}{2af^2} \right) = 0$$

$$X_1 \left(-\frac{a}{3} + \frac{I}{A} \frac{l(l+2a)}{2af^2} \right) + X_2 \left(\frac{3l+2a}{3} + \frac{I}{A} \frac{l(l+2a)}{2af^2} \right) = -\frac{ql^3}{12}.$$

Ponendo

$$k = \frac{I}{A} \frac{l(l+2a)}{2af^2} = \frac{l(l+2a)}{2a} \frac{\rho^2}{f^2} \quad (45)$$

la soluzione del sistema è

$$X_1 = - \frac{ql^3}{12} \frac{a - 3k}{a^2 + 2al + 6ak + 3kl} \quad (46)$$

$$X_2 = - \frac{ql^3}{12} \frac{2a + 3k}{a^2 + 2al + 6ak + 3kl}$$

Si osserva che, per $\alpha \rightarrow 0$, è $k \rightarrow \infty$, $a \rightarrow \frac{l}{2}$, e

$$X_1 \rightarrow - \frac{ql^3}{12} \frac{-3}{6a + 3l} = \frac{ql^2}{24}$$

$$X_2 \rightarrow - \frac{ql^3}{12} \frac{3}{6a + 3l} = - \frac{ql^2}{24};$$

si ottiene così conferma delle (44).

Si svolga un esempio numerico, con i seguenti dati (fig. 5.3):

$$l = 14 \text{ m}$$

$$f = 7 \text{ m}$$

$$q = 3 \text{ tm}^{-1} .$$

Risulta

$$a = 9,9 \text{ m}$$

$$\alpha = 45^\circ .$$

Si assume come sezione quella di una HE 400 B, cui corrisponde

$$A = 198 \text{ cm}^2$$

$$I = 57680 \text{ cm}^4$$

$$W = 2880 \text{ cm}^3$$

$$\rho = 17,1 \text{ cm} .$$

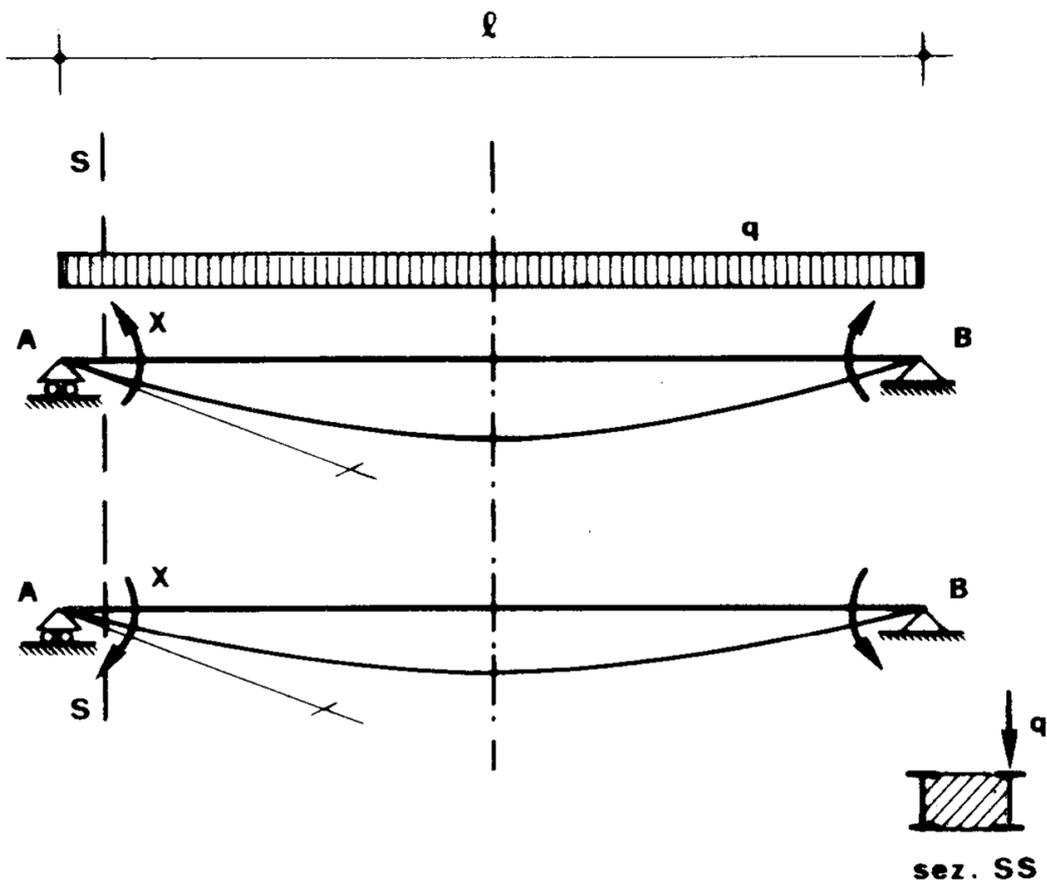


Figura 5.2

Tenendo conto dei soli termini flessionali, le (42) forniscono

$$X_1 = - \frac{ql^2}{32,48} = - 18,10 \text{ tm}$$

$$X_2 = - \frac{ql^2}{16,24} = - 36,20 \text{ tm} .$$

Il diagramma dei momenti è quello della fig. 5.3. Tenendo conto anche dei termini estensionali, le (45) e (46) forniscono

$$k = 0,099 \text{ m}$$

$$X_1 = - \frac{ql^2}{34,51} = - 17,04 \text{ tm}$$

$$X_2 = - \frac{ql^2}{16,49} = - 35,65 \text{ tm} .$$

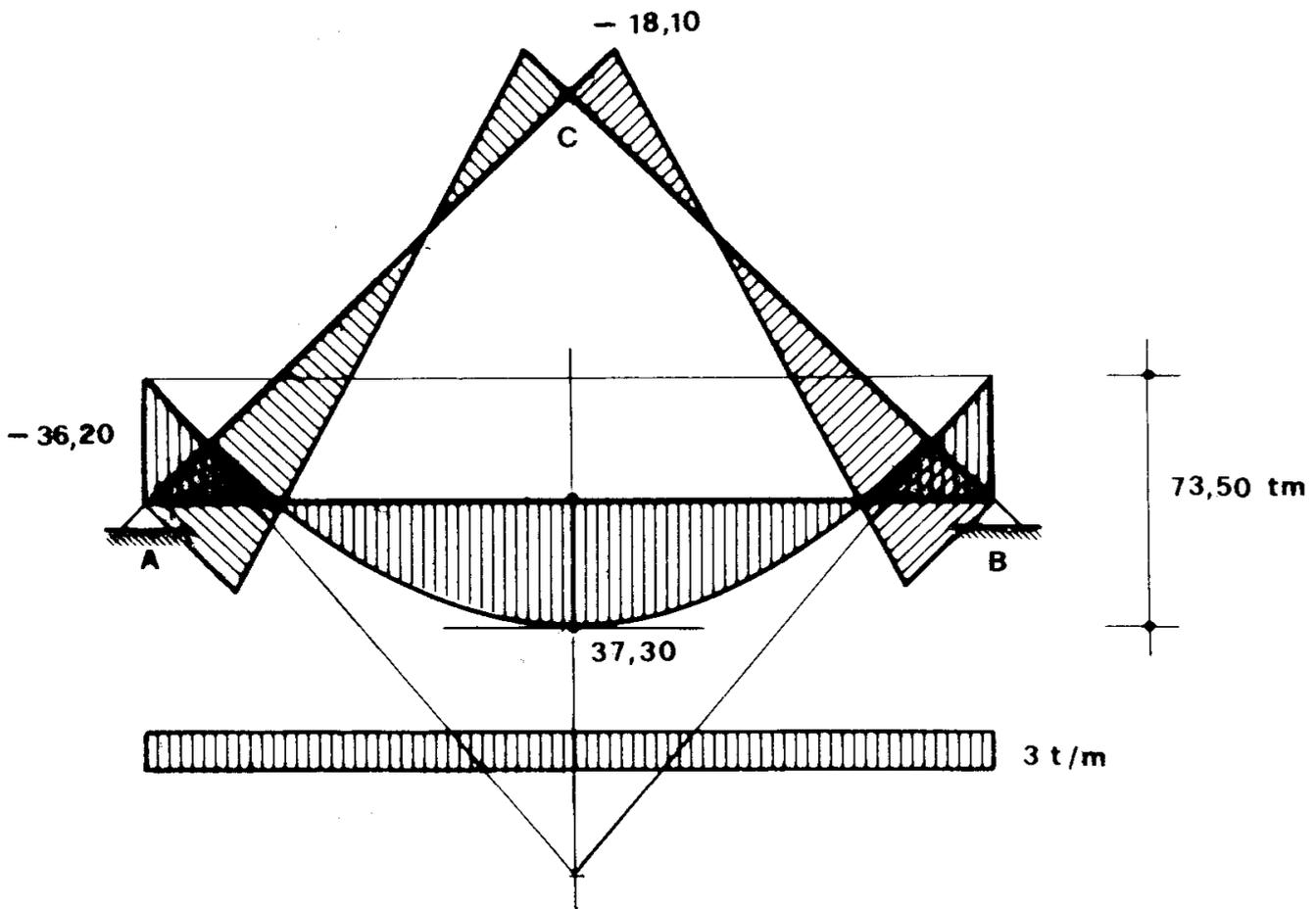


Figura 5.3

Gli stessi calcoli sono stati effettuati per i valori di f pari a $5m$, $3m$, $1m$; i risultati sono consegnati nella fig. 5.4 a, dove in funzione di f sono riportati i valori

$$c = - \frac{ql^2}{M_A}$$

(momento positivo se tende le fibre inferiori di AB); la curva 1 è calcolata chiamando in causa i soli termini flessionali, la curva 2 invece tiene conto anche dei termini estensionali. L'errore commesso in 1 è tanto più grande quanto maggiore è il ribassamento.

Tale errore, in percentuale, ed in funzione del rapporto $\frac{f}{l}$, è evidenziato dal grafico della fig. 5.4 b. Si può classificare la struttura come *trave* o come *arco* secondo che l'errore

$$\frac{dc}{c}$$

è minore o maggiore di una certa percentuale; se per esempio si fissa tale valore in

$$\frac{dc}{c} = \frac{3}{100}$$

la struttura studiata è da considerarsi trave o arco secondo che

$$f \geq 0,29$$

Dai due esempi dei problemi 4 e 5 si può misurare l'importanza dei termini estensionali e, in genere, delle deformazioni non flessionali; solo una vasta esperienza ed un intuito pronto possono, in molti casi, decidere se ci si possa limitare o meno ad operare sulle sole deformazioni flessionali; è sempre prudente, solo che si affacci l'ombra del dubbio, verificare l'errore attraverso il principio dei lavori virtuali, che a ciò fare è uno degli strumenti più validi di cui il tecnico possa disporre.

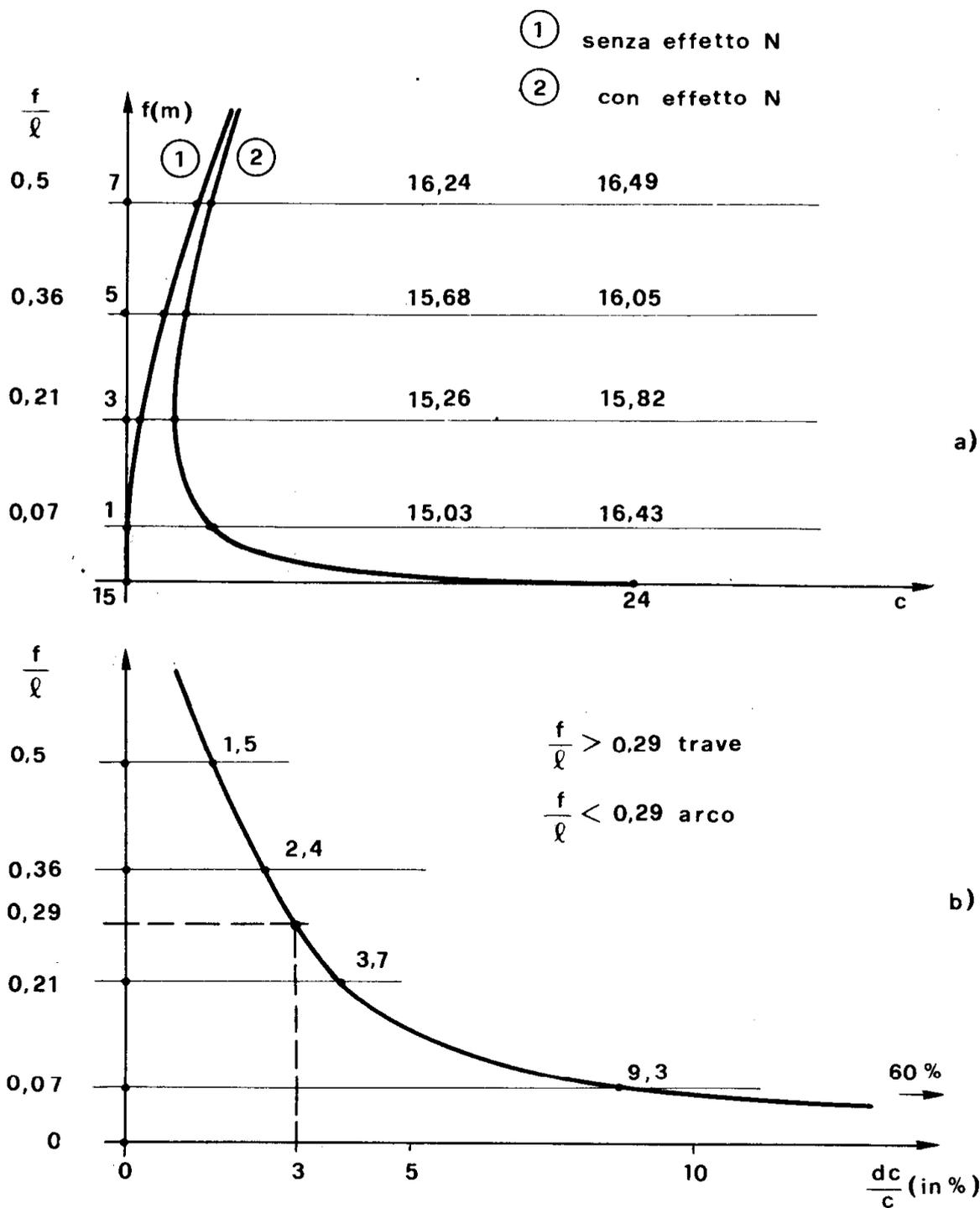


Figura 5.4