

CAPITOLO QUINTO

LINEE D'INFLUENZA

Premessa.

Già nel capitolo secondo del primo volume di problemi, capitolo dedicato al procedimento di Lagrange, si è dato qualche esempio di linea d'influenza. Poichè ci si limitava a considerare strutture prive di deformabilità elastica, ci si è dovuti restringere a due casi:

- a) linee d'influenza di una caratteristica della sollecitazione interna (in particolare di una reazione vincolare) per una forza viaggiante
- b) linee d'influenza di uno spostamento per una distorsione viaggiante;

ed infatti, se non c'è deformabilità elastica, una forza non provoca spostamenti, ed una distorsione non provoca sforzi interni su una struttura isostatica, o ne provoca di infinitamente grandi (la locuzione è certamente inesatta) su una struttura iperstatica. Comunque quest'ultimo caso non si presentava nel primo volume, dove si sono trattate esclusivamente strutture isostatiche.

Chiamando in gioco la deformabilità elastica, occorre considerare gli altri due casi:

- c) linee d'influenza di una caratteristica della sollecitazione interna (in particolare di una reazione) per una distorsione viaggiante;
- d) linee d'influenza di uno spostamento per una forza viaggiante.

Già nel problema 2.10 del primo volume si è data la formulazione generale che permette in tutti e quattro i casi suddetti di ottenere la linea di influenza come diagramma di spostamenti, o di caratteristiche della sollecitazione interna; tale formulazione, valida sotto le ipotesi di validità del principio di sovrapposizione degli effetti, si scrive

$$e_s^V(s) = V'(s) \uparrow E'_s = \begin{cases} +1 & \text{se } V \equiv E \\ - & \\ -1 & \text{se } V \neq E \end{cases} \quad (1)$$

e si enuncia: “la linea di influenza di un qualsiasi ente E in S , per effetto di un ente V viaggiante, è il diagramma dell’ente V' corrispondente a V , provocato dall’ente $E' = \pm 1$ corrispondente ad E ed agente in S ; $E' = + 1$, se E e V sono equivalenti, $E' = - 1$ se E e V non sono equivalenti”. Si precisa che l’ente V' corrispondente ad un ente V è quello per cui V può compiere lavoro; per esempio, ad F_y corrisponde v , a φ_x corrisponde \mathfrak{M}_x .

L’aggettivo “equivalente” presuppone la partizione degli enti V ed E in due classi, quella delle forze e quella delle distorsioni. Un ente appartiene ad una classe se in quella stessa classe esiste l’ente per cui esso può compiere lavoro. La tabella che segue chiarisce questo concetto.

	Classe forze			Classe distorsioni		
V causa (viaggiante)	F_x	F_y	F_z	D_{sx}	D_{sy}	D_{sz}
	\mathfrak{M}_x	\mathfrak{M}_y	\mathfrak{M}_z	$D_{\varphi x}$	$D_{\varphi y}$	$D_{\varphi z}$
E effetto (localizzato in S)	u	v	w	T_x	T_y	N
	φ_x	φ_y	φ_z	M_x	M_y	M_z

Problema n. 1.

Si vuole la linea d’influenza

$$\varphi_A^F(z)$$

della rotazione in A per effetto di una forza viaggiante sulla trave della fig. 1 a. La trave è continua su due campate, EI è costante lungo tutta la trave. In rigore la linea dovrebbe chiamarsi

$$\varphi_{xA}^{Fy}(z),$$

ma, poichè non c’è adito ad equivoci, si preferisce adottare una simbologia più spiccia.

A norma della (1), la linea richiesta si ottiene facendo agire in A una coppia $\mathfrak{M}_S = 1$, e calcolando il diagramma $v(z)$ provocato da detta coppia; la \mathfrak{M}_S è positiva perchè φ_A è equivalente a F_y .

Si opera alla Cross per ottenere il diagramma dei momenti, poichè è

$$\rho_{BA} = \frac{3EI}{a}$$

$$\rho_{BC} = \frac{3EI}{b},$$

si ha

$$\tau_{BA} = \frac{b}{a+b}$$

$$\tau_{BC} = \frac{a}{a+b}.$$

La coppia d'incastro perfetto in B è

$$\overline{\mathfrak{M}}_{BA} = \frac{1}{2},$$

e si ripartisce in

$$\mathfrak{M}_{BA}^* = -\frac{b}{2(a+b)}$$

$$\mathfrak{M}_{BC}^* = -\frac{a}{2(a+b)};$$

quindi risulta

$$\mathfrak{M}_{BA} = \overline{\mathfrak{M}}_{BA} + \mathfrak{M}_{BA}^* = \frac{a}{2(a+b)}$$

$$\mathfrak{M}_{BC} = \mathfrak{M}_{BC}^* = -\frac{a}{2(a+b)}$$

e perciò

$$M_B = \frac{a}{2(a+b)} .$$

Il diagramma del momento appare nella fig. 1b. Si può ottenere da questo, il diagramma del taglio, si ha infatti (eq. di AB alla rotazione su B).

$$-R_A \cdot a - 1 - \frac{a}{2(a+b)} = 0$$

da cui

$$R_A = -\frac{3a+2b}{2a(a+b)} .$$

e ancora (eq. di BC alla rotazione su B)

$$R_C b + \frac{a}{2(a+b)} = 0$$

da cui

$$R_C = -\frac{a}{2b(a+b)} .$$

e quindi

$$R_B = -(R_A + R_C) = \frac{a^2 + 3ab + 2b^2}{2ab(a+b)}$$

Il diagramma del taglio (fig. 1c) mostra che

$$T_{AB} = \frac{3a+2b}{2a(a+b)}$$

$$T_{BC} = -\frac{a}{2b(a+b)} .$$

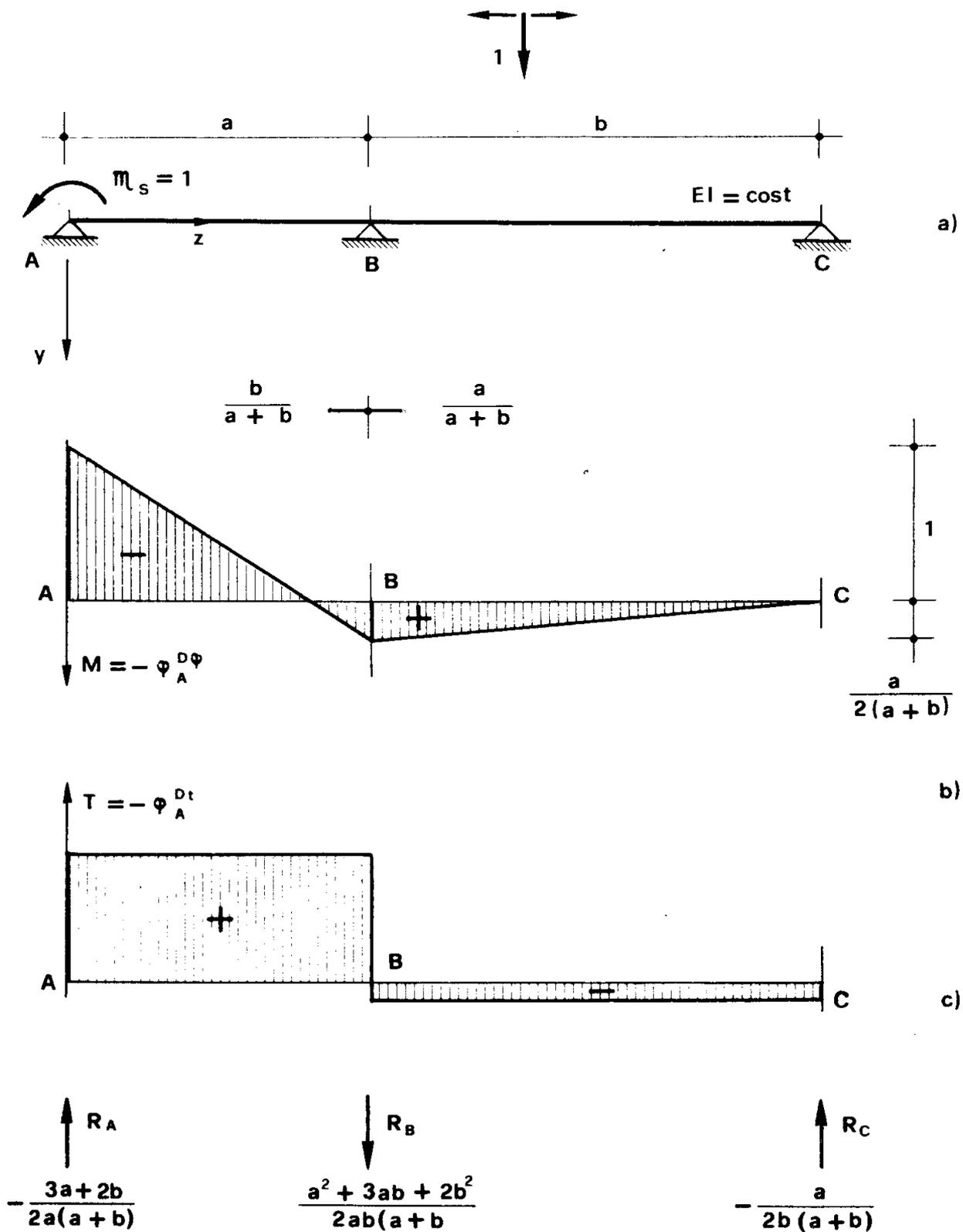


Figura 1a, b, c

Le rotazioni in A B C sono

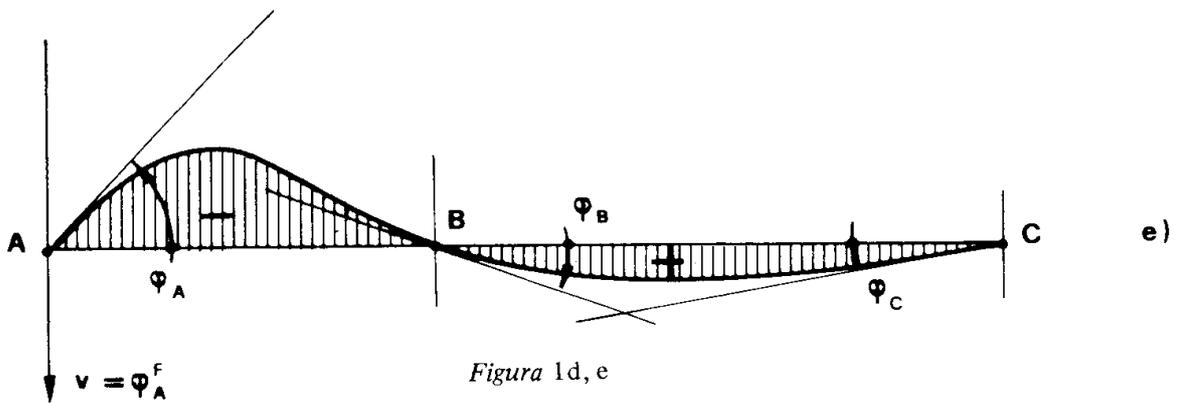
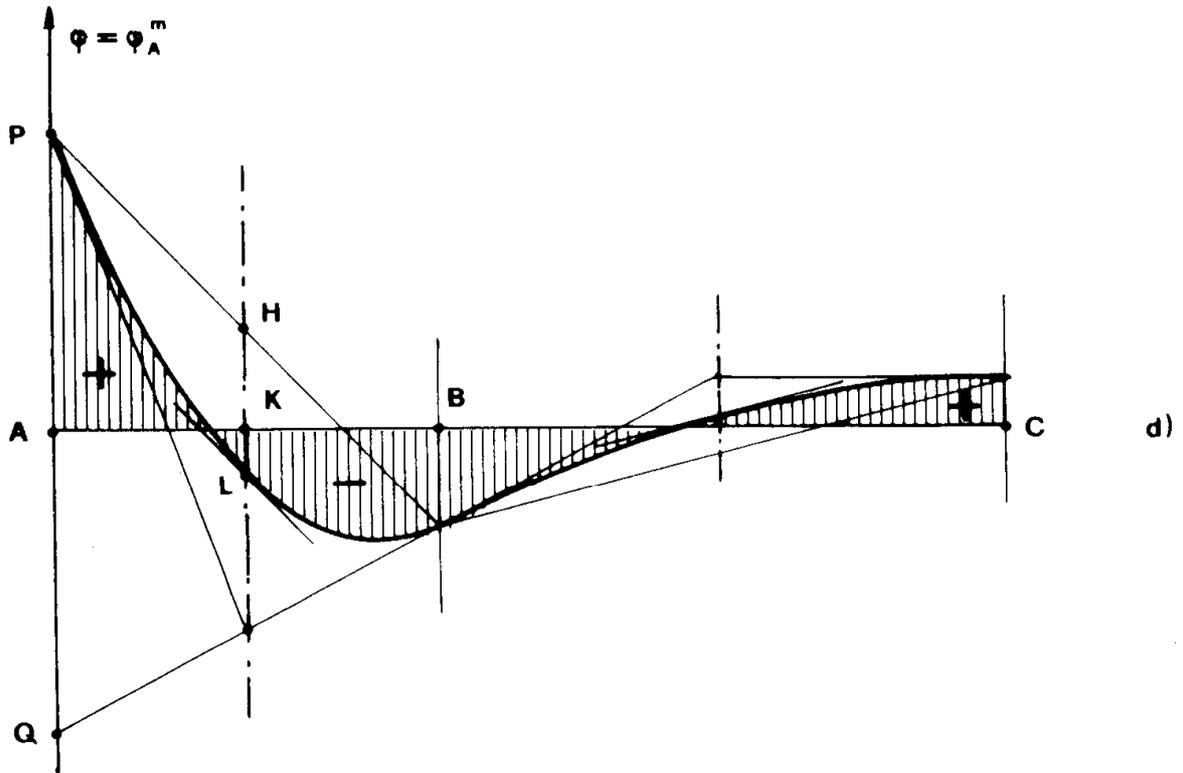


Figura 1d, e

$$\varphi_A = \frac{a}{3EI} - \frac{a}{2(a+b)} \frac{a}{6EI} = \frac{1}{12EI} \frac{3a^2 + 4ab}{a+b}$$

$$\varphi_B = -\frac{a}{6EI} + \frac{a}{2(a+b)} \frac{a}{3EI} = -\frac{1}{6EI} \frac{ab}{a+b}$$

$$\varphi_C = \frac{a}{2(a+b)} \frac{b}{6EI} = \frac{1}{12EI} \frac{ab}{a+b}$$

Si osserva che per $b \rightarrow 0$ (trave AB incastrata in B) è

$$M_B \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\varphi_A \rightarrow \frac{a}{4EI}$$

$$\varphi_B \rightarrow 0 \quad ;$$

per $b \rightarrow \infty$ (trave AB appoggiata in B) è

$$M_B \rightarrow 0$$

$$\varphi_A \rightarrow \frac{a}{3EI}$$

$$\varphi_B \rightarrow -\frac{a}{6EI}$$

Poichè la funzione $M(z)$ è definita in $[AB]$ e $[BC]$ da due funzioni lineari, la funzione $\varphi(z)$ è definita in $[AB]$ e $[BC]$ da due parabole quadratiche, ed è in tutta $[AC]$ continua e con derivata continua; il relativo diagramma è tracciato nella fig. 1d.

La funzione $v(z)$ è definita in $[AB]$ e $[BC]$ da due parabole cubiche, ed è in tutta $[AC]$ continua e con derivate prima e seconda continue; il relativo diagramma è riportato nella fig. 1e. Si noti che le due tangenti in B e C si intersecano sulla verticale trisecante di sinistra dell'intervallo BC , e cioè in corrispondenza del baricentro dell'area triangolare dei momenti relativa a BC ; invece le due tangenti in A e B si intersecano sulla verticale passante per il baricentro dell'area trapezia (trapezio misto) dei momenti relativa ad AB . Per quanto detto, $v(z)$ è la richiesta linea di influenza.

Problema n. 2.

Si vuole la rotazione in A per effetto (fig. 2 a) di un carico q uniformemente distribuito su tutta la luce della trave già studiata. Può scriversi

$$\varphi_A = \int_A^C q \varphi_A^F dz = q \int_A^C \varphi_A^F dz = q A_{AC}$$

dove A_{AC} è l'area del diagramma φ_A^F .

Per avere l'espressione di A_{AC} si prendono in esame le due condizioni di carico della fig. 2 d, sulla stessa trave appoggiata AB con $EI = cost$; per il principio di Betti si può scrivere

$$-\frac{ql^3}{24EI} = q \cdot A'$$

da cui

$$A' = -\frac{l^3}{24EI}$$

Quindi l'area della deformata connessa con due coppie \mathfrak{m}_A ed \mathfrak{m}_B agenti in A e B è

$$A = \frac{\mathfrak{m}_B - \mathfrak{m}_A}{24} \frac{l^3}{EI} \quad (2)$$

A volte è utile esprimere A in funzione di φ_A e φ_B . A ciò fare, si osservi che nella trave AB incastrata in A e B ad un cedimento φ_A corrispondono le coppie

$$\mathfrak{m}_A = \frac{4EI}{l} \varphi_A$$

$$\mathfrak{m}_B = \frac{2EI}{l} \varphi_A,$$

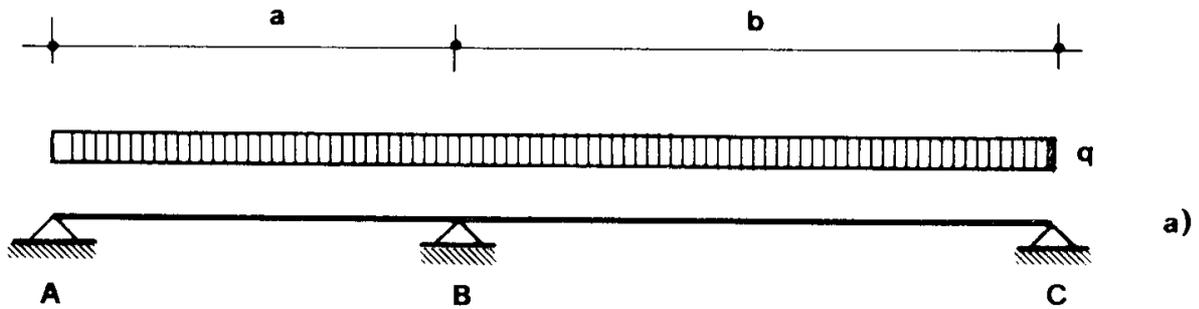
e ad un cedimento φ_B le coppie

$$\mathfrak{m}_A = \frac{2EI}{l} \varphi_B$$

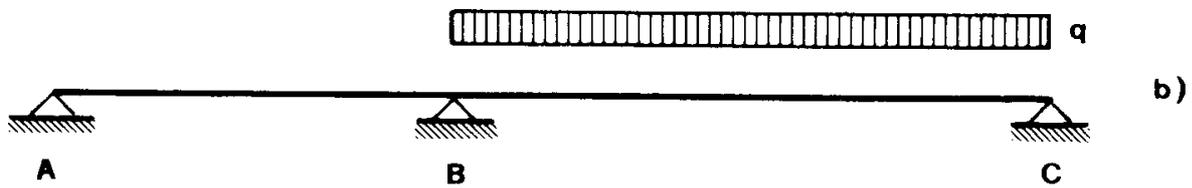
$$\mathfrak{m}_B = \frac{4EI}{l} \varphi_B;$$

è perciò

$$m_A = \frac{2EI}{l} (2\varphi_A + \varphi_B)$$



$$\varphi_A = \frac{q}{48EI} \frac{a^4 + 2a^3b - ab^3}{a + b}$$



$$\varphi_{Amax} = \frac{q}{48EI} \frac{ab^3}{a + b}$$



$$\varphi_{Amin} = -\frac{q}{48EI} \frac{a^4 + 2a^3b}{a + b}$$

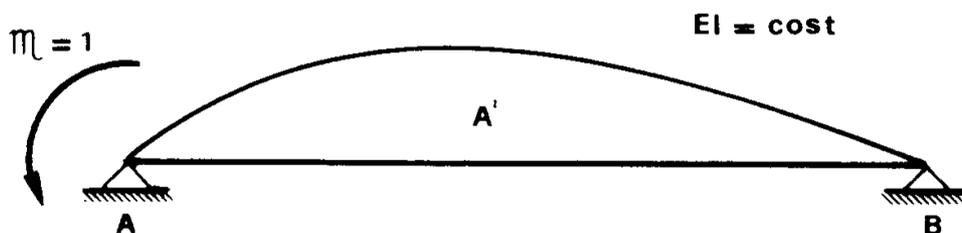
Figura 2a, b, c

(3)

$$m_B = \frac{2EI}{l} (\varphi_A + 2\varphi_B),$$

da cui

$$A = (\varphi_B - \varphi_A) \frac{l^2}{12} . \quad (4)$$



d)

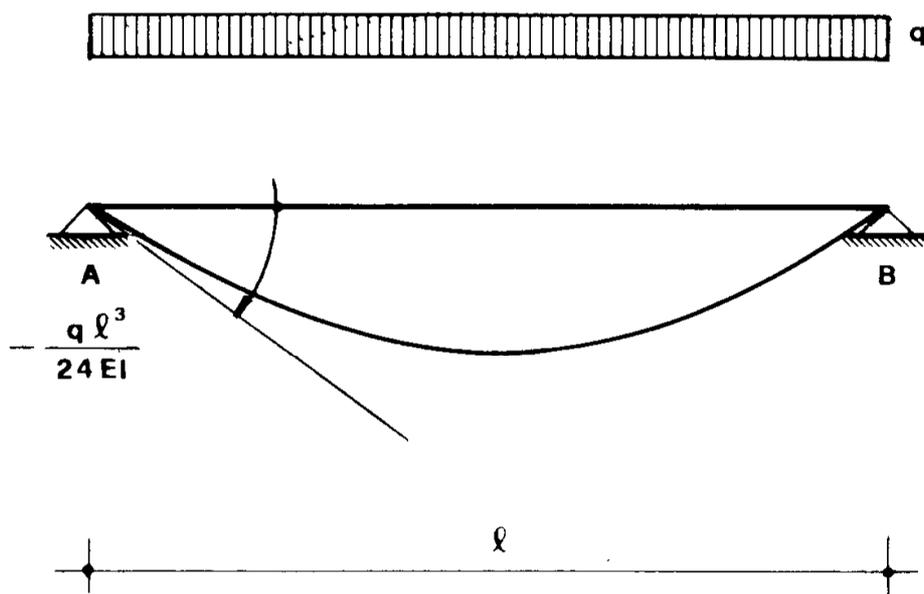


Figura 2d

Nel caso in esame è perciò

$$A_{AB} = - \frac{a^3}{48 EI} \frac{a + 2b}{a + b}$$

$$A_{BC} = \frac{b^3}{48 EI} \frac{a}{a + b} ;$$

quindi, per il carico della fig. 2 a risulta

$$\varphi_A = \frac{q}{48 EI} \frac{a^4 + 2a^3b - ab^3}{a + b} .$$

Si vuole adesso conoscere il massimo valore che φ_A può assumere in presenza di un carico uniforme q di intensità costante, ma che può impegnare qualsiasi parte della struttura. Tale massimo si verifica se e solo se il carico q agisce in modo da massimizzare l'area della parte del diagramma φ_A^F ad esso sottostante, e cioè (fig. 1e) tra B e C ; il carico è quindi quello della fig. 2 b, e

$$\varphi_{A \max} = q \cdot A_{BC} = \frac{q}{48 EI} \frac{ab^3}{a + b} .$$

Se invece si vuole conoscere il minimo valore di φ_A , vale a dire il massimo in valore assoluto dei valori negativi di φ_A , occorre e basta che il carico q agisca in modo da minimizzare l'area della parte del diagramma φ_A^F ad esso sottostante, e cioè tra A e B (fig. 2c); tale condizione è la complementare di quella che fornisce $\varphi_{A \max}$. Si ha così

$$\varphi_{A \min} = q \cdot A_{AB} = - \frac{q}{48 EI} \frac{a^4 + 2a^3b}{a + b} .$$

Problema n. 3.

Sempre nella trave già studiata, si vuole la rotazione φ_A per la condizione di carico della fig. 3 a. Poichè agisce una coppia, occorre utilizzare la linea d'influenza φ_A^m della rotazione in A per coppia viaggiante; essa è fornita dal diagramma delle rotazioni provocate da $\mathfrak{M} = +1$ agente in A ; il segno è giustificato dal fatto che φ_A è equivalente alla coppia \mathfrak{M} viaggiante.

A rigore la linea andrebbe chiamata

$$\varphi_{xA}^x(z) ;$$

attesa l'impossibilità di equivoci, si preferisce la notazione semplificata.

La linea φ_A^m è già in nostro possesso; essa infatti è stata tracciata

di necessità (fig. 1 d) per poter ottenere φ_A^F .

Dalla figura 1 d si trae

$$KH = \frac{\varphi_A + \varphi_B}{2} = \frac{1}{24 EI} \frac{3a^2 + 2ab}{a + b},$$

$$HL = \frac{PQ}{4} = -\frac{M_A + M_B}{8 EI} a = -\frac{3a^2 + 2ab}{16 EI}$$

$$= -\frac{1}{16 EI} \frac{3a^2 + 2ab}{a + b}$$

$$KL = KH + HL = -\frac{1}{48 EI} \frac{3a^2 + 2ab}{a + b}$$

e quindi

$$\varphi_A = -\frac{\mathfrak{M}}{48 EI} \frac{3a^2 + 2ab}{a + b}$$

Si verifica che per $b \rightarrow 0$ è

$$\varphi_A \rightarrow -\frac{\mathfrak{M} a}{16 EI},$$

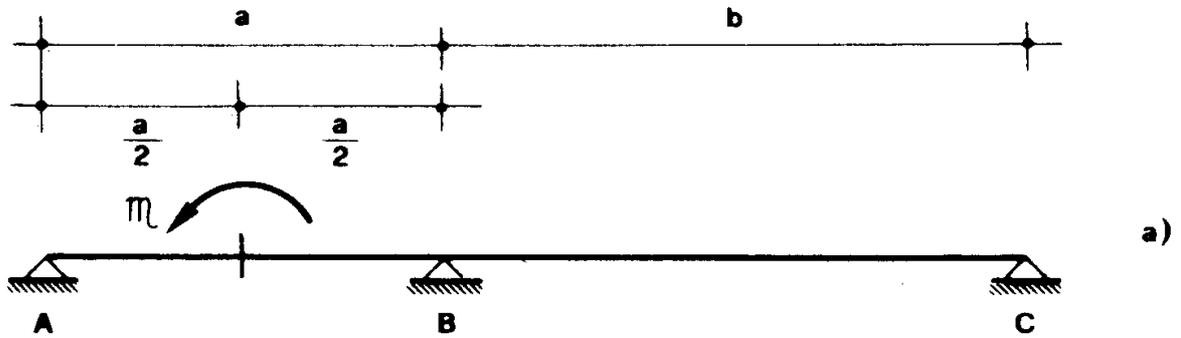
e per $b \rightarrow \infty$ è

$$\varphi_A \rightarrow -\frac{\mathfrak{M} a}{24 EI}.$$

Si studi adesso la condizione di carico della fig. 3 b, costituita da un insieme di coppie distribuito uniformemente con valore m da B a C ; risulta

$$\varphi_A = \int_B^C m \varphi_A^m dz = m \int_B^C \varphi_A^m dz = m A_{BC},$$

avendo chiamato A_{BC} l'area del diagramma φ_A^m nell'intervallo $[BC]$.
 Esplicitando è (fig. 1d)



$$\varphi_A = -\frac{m}{48EI} \frac{3a^2 + 2ab}{a + b}$$



$$\varphi_A = 0$$

Figura 3

$$A_{BC} = \frac{\varphi_B + \varphi_C}{2} b + \frac{2}{3} \frac{\varphi_C - \varphi_B}{4} b = 0$$

e quindi $\varphi_A = 0$.

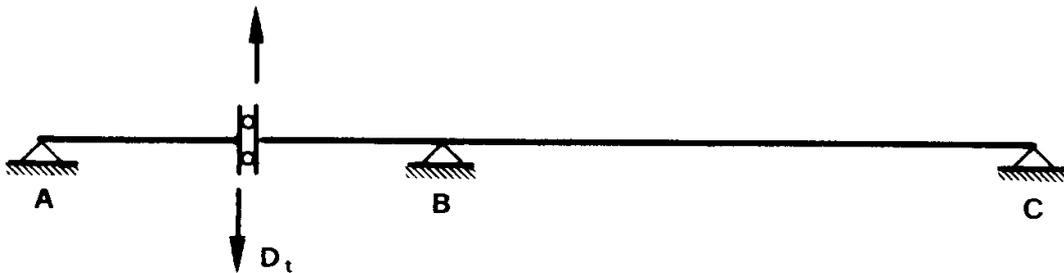
Ciò doveva attendersi, poichè le coppie m uniformemente distribuite su una trave appoggiata BC non danno spostamenti.

Problema n. 4.

Sempre nella trave già studiata, si desidera il valore della rotazione

φ_A prodotta da una distorsione concentrata D_t del tipo tagliante agente sulla campata AB (fig. 4). Questa volta occorre la linea

$$\varphi_A^{D_t},$$



$$\varphi_A = - D_t \frac{3a + 2b}{2a(a+b)}$$

Figura 4

coincidente con il diagramma del taglio provocato da $\mathfrak{M} = -1$ agente in A ; il segno $-$ è giustificato dal fatto che φ_A non è equivalente alla distorsione D_t viaggiante. La linea φ_A è già stata calcolata nel corso del problema 1; essa infatti coincide con il diagramma del taglio, lo cambiato di segno. E' perciò

$$\varphi_A = - D_t \frac{3a + 2b}{2a(a+b)} .$$

Si noti che φ_A è indipendente dalla posizione di D_t in] AB [; si verifica che per $b \rightarrow 0$ è

$$\varphi_A \rightarrow -\frac{3}{2} \frac{D_t}{a},$$

e per $b \rightarrow \infty$ è

$$\varphi_A \rightarrow -\frac{D_t}{a}$$

Problema n. 5.

Ancora nella trave già studiata, si desidera il valore di φ_A per effetto della variazione termica alla Navier $\overline{\Delta t}$ della fig. 5; sia

$$\mu = -\frac{\alpha \overline{\Delta t}}{h} = cost$$

lungo tutta la campata AB .

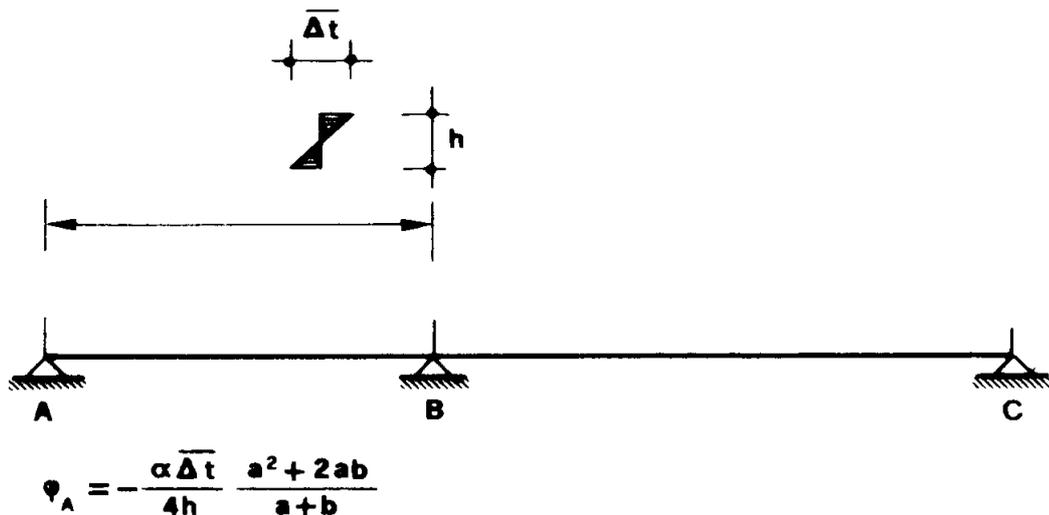


Figura 5

Poichè si è in presenza di una distorsione del tipo flessionale, occorre prendere in esame la linea

$$\varphi_A^{D\varphi},$$

coincidente con il diagramma del momento provocato da $\mathfrak{M} = -1$ agente in A ; infatti φ_A non è equivalente alla distorsione D_{φ} viaggiante.

La linea desiderata coincide con il diagramma dei momenti già ottenuto nel problema 1, con il segno cambiato (fig. 1b). Poiché μ è costante, può scriversi

$$\varphi_A = \int_A^B \mu \varphi_A^{D\varphi} dz = - \frac{\alpha \overline{\Delta t}}{h} \int_A^B \varphi_A^{D\varphi} dz = - \frac{\alpha \overline{\Delta t}}{h} A_{AB} ,$$

dove A_{AB} è l'area del diagramma $\varphi_A^{D\varphi}$ relativa al tratto AB ; è perciò

$$\varphi_A = - \frac{\alpha \overline{\Delta t}}{4h} \frac{a^2 + 2ab}{a + b} .$$

Per $b \rightarrow 0$ è

$$\varphi_A \rightarrow - \frac{\alpha \overline{\Delta t}}{4h} a ;$$

per $b \rightarrow \infty$ è

$$\varphi_A \rightarrow - \frac{\alpha \overline{\Delta t}}{2h} a .$$

Problema n. 6.

Nella struttura della fig. 6 a si desidera la linea d'influenza del momento in S per effetto di una forza verticale viaggiante sul traverso. A norma della (1), occorre far agire in S una distorsione $D_{\varphi S} = -1$, e disegnare il diagramma $v(z)$. La struttura è una volta iperstatica; la si può rendere isostatica proprio eliminando la continuità flessionale in S , e cioè inserendo in S una cerniera.

In S può porsi

$$\mathfrak{M}_{Ss} = M_S$$

$$\mathfrak{M}_{Sd} = - M_S ,$$

ove M_S , momento flettente in S generato dalla $D_{\varphi S}$, è l'incognita.

Si ha (fig. 6 b), chiamando $E'I'$ la rigidità (costante) del ritto ed EI quella (pur essa costante) del traverso,

$$\varphi_B = -\frac{M_S l}{a} \frac{h}{3E'I'}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{Sd} &= \varphi_B - \frac{M_S b}{EI} - \frac{M}{b} \frac{b^2}{2EI} = \\ &= -M_S \left(\frac{lh}{3aE'I'} + \frac{b}{EI} + \frac{b^2}{2aEI} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_S &= \varphi_B b - \frac{M_S b^2}{2EI} - \frac{M}{a} \frac{b^3}{3EI} = \\ &= -M_S \left(\frac{lhb}{3aE'I'} + \frac{b^2}{2EI} + \frac{b^3}{3aEI} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{Ss} &= -\frac{v_S}{a} + \frac{M_S a}{3EI} = \\ &= M_S \left(\frac{lhb}{3a^2 E'I'} + \frac{b^2}{2aEI} + \frac{b^3}{3a^2 EI} + \frac{a}{3EI} \right) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_S &= \varphi_{Sd} - \varphi_{Ss} = \\ &= -\frac{M_S}{6a^2} \left(\frac{2l^2 h}{E'I'} = \frac{2a^3 + 6a^2 b + 6ab^2 + 2b^3}{EI} \right). \end{aligned}$$

Dalla condizione ($D_{\varphi_S} = -\Delta\varphi_S$)

$$\Delta\varphi_S = 1$$

si trae

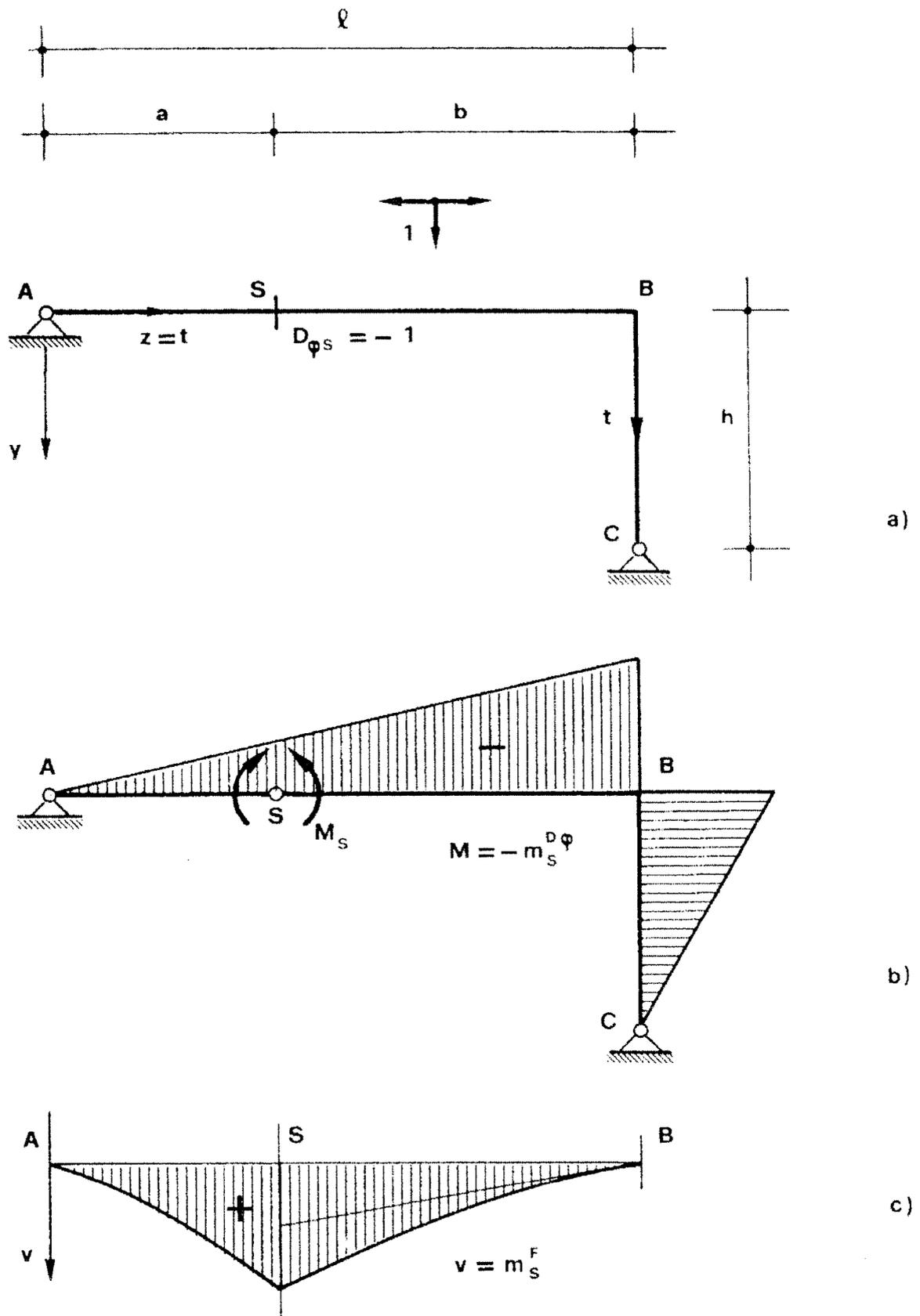


Figura 6

$$M_S = - \frac{6a^2 EI}{2l^2 h \rho + 2a^3 + 6a^2 b + 6ab^2 + 2b^3} ,$$

avendo posto

$$\rho = \frac{EI}{E'I'} .$$

Si verifica che per $\rho \rightarrow 0$ e per $b = 0$ è

$$M_S \rightarrow - \frac{3EI}{a} ;$$

la desiderata linea d'influenza, è riportata nella fig. 6 c.

Si osservi che il diagramma dei momenti, cambiato di segno, è la linea d'influenza del momento in S per effetto di una distorsione del tipo flessionale viaggiante (fig. 6 b); così pure il diagramma del taglio (cambiato di segno) e quello delle rotazioni (col proprio segno) forniscono le linee d'influenza del momento in S rispettivamente per una distorsione del tipo tagliante e per una coppia viaggianti.

Problema n. 7.

La stessa struttura del problema 6 è soggetta ad una variazione termica alla Navier Δt lungo il ritto BC (fig. 7); la quantità

$$\mu = - \alpha \frac{\overline{\Delta t}}{h'}$$

sia costante lungò BC . Si ha

$$M_S = \int_B^C \mu m_S^{D\varphi} ds = - \frac{\alpha \overline{\Delta t}}{h'} A_{BC} ,$$

dove A_{BC} è l'area del diagramma $m_S^{D\varphi}$ relativa al ritto BC . Poichè è

$$A_{BC} = \frac{h}{2} \frac{6a^2 EI}{2l^2 h \rho + 2a^3 + 6a^2 b + 6ab^2 + 2b^3} \frac{l}{a} =$$

$$= \frac{3ahlEI}{2l^2 h\rho + 2a^3 + 6a^2b + 6ab^2 + 2b^3}$$

è pure

$$M_S = -\frac{\alpha \bar{\Delta t}}{h'} \frac{3ahlEI}{2l^2 h\rho + 2a^3 + 6a^2b + 6ab^2 + 2b^3}.$$

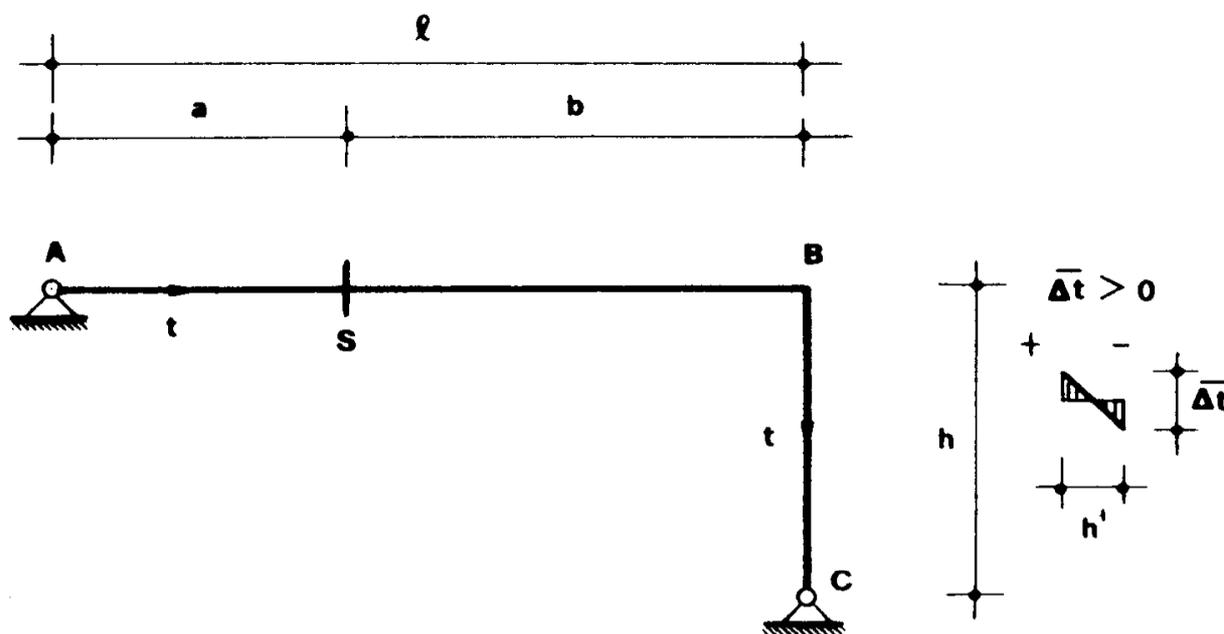


Figura 7

Problema n. 8.

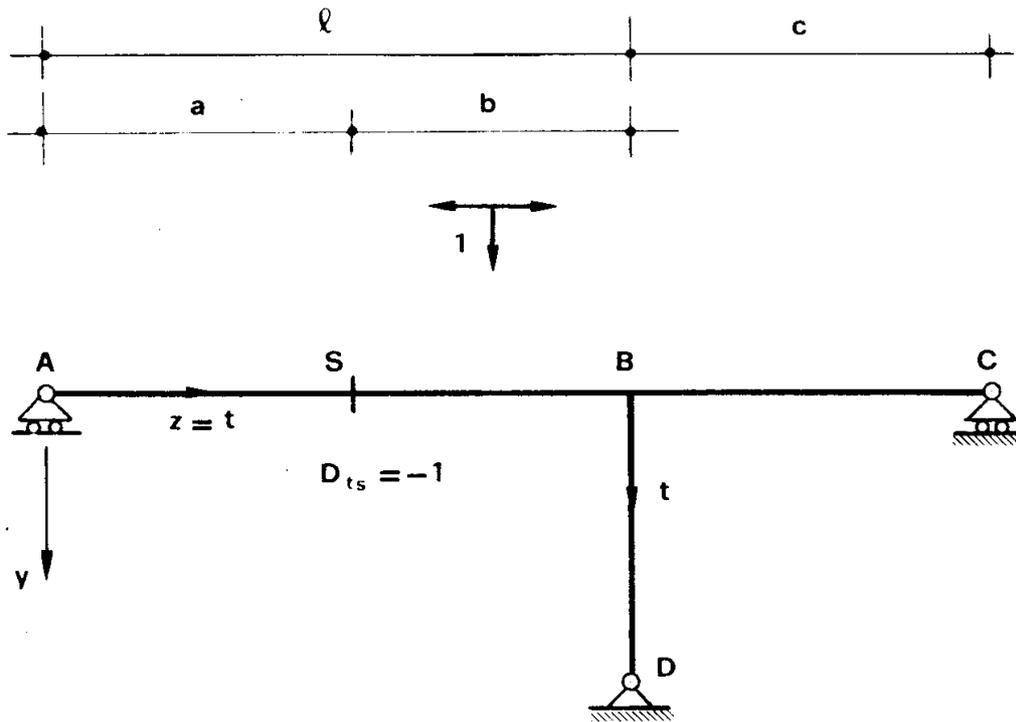
Si desidera la linea d'influenza del taglio in S per una forza verticale viaggiante sul traverso della struttura della fig. 8 a; EI è costante in tutto il traverso.

Occorre imprimere una distorsione $D_{tS} = -1$ in S , e tracciare il diagramma delle componenti verticali degli spostamenti in AC . Si inserisce in S un bipendolo interno con piano di scorrimento parallelo ad y , e così la struttura diviene isostatica.

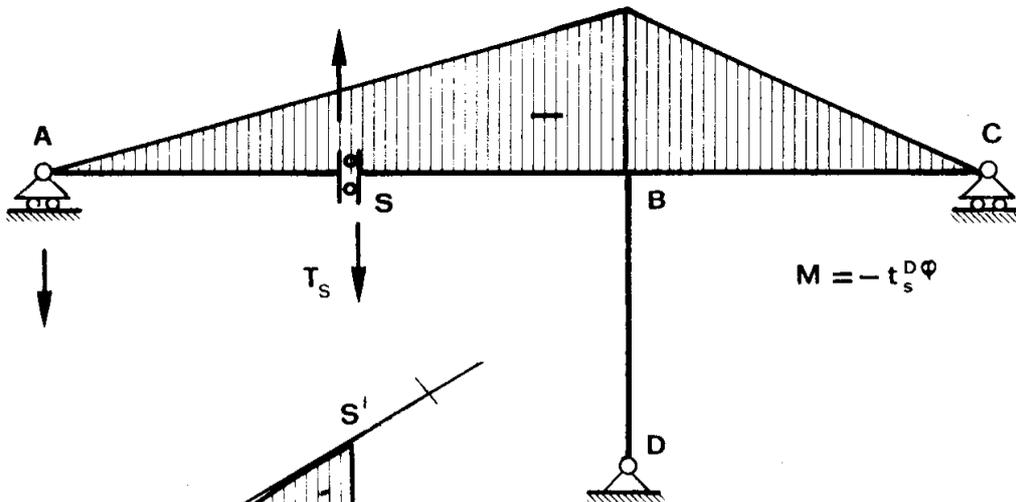
In S si ha

$$F_{ys} = -T_S$$

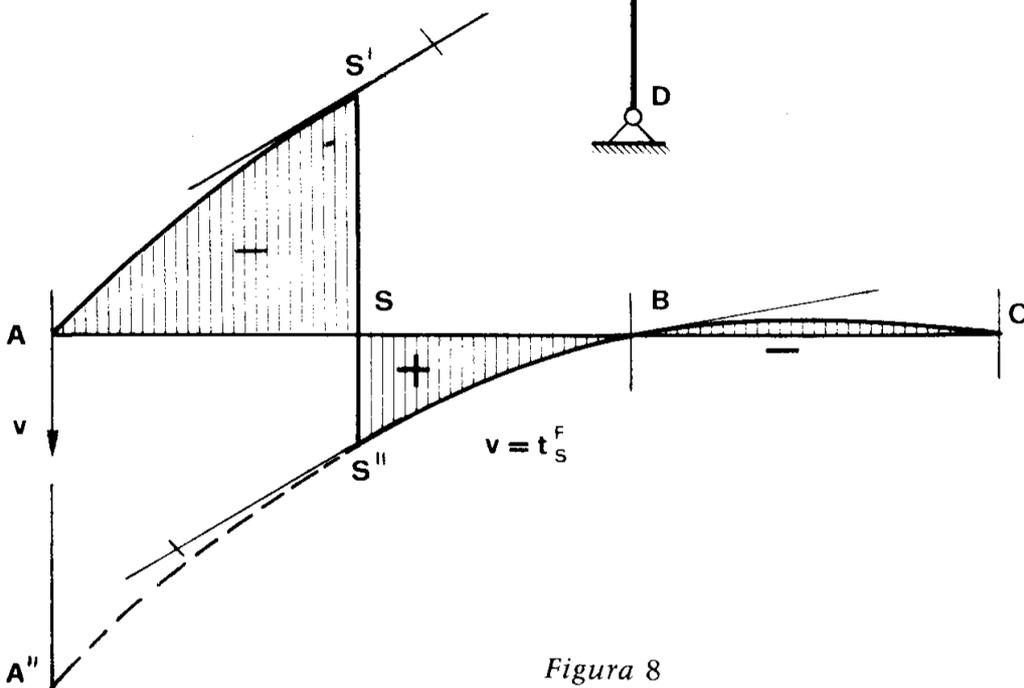
$$F_{yd} = T_S.$$



a)



b)



c)

Figura 8

Ove T_S , taglio in S generato dalla D_{ts} , è l'incognita.

Risulta (fig. 8 b)

$$M_S = -R_A a = T_S a$$

$$M_B = T_S l$$

$$\varphi_B = -T_S l \frac{c}{3EI}$$

$$AA'' = \varphi_B l - T_S \frac{l^3}{3EI} = -\frac{T_S}{3EI} (cl^2 + l^3)$$

$$\begin{aligned} \Delta v_S &= v_{Sd} - v_{Ss} = SS'' - SS' = S'S + SS'' = S'S'' = \\ &= AA'' = -\frac{T_S}{3EI} (cl^2 + l^3) . \end{aligned}$$

Dalla condizione ($D_{ts} = -\Delta v_S$)

$$\Delta v_S = 1$$

si trae

$$T_S = -\frac{3EI}{cl^2 + l^3} .$$

Si verifica che per $c \rightarrow \infty$ è $T_S \rightarrow 0$ (la struttura tende allo schema isostatico di trave appoggiata in A e B), e per $c = 0$ è

$$T_S = -\frac{3EI}{l^3} ;$$

in questo caso infatti la trave è appoggiata in A e incastrata in B , e T_S è il taglio corrispondente a $v_A = 1$.

Ottenuto T_S , il problema è risolto. Nella fig. 8 c è tracciato il diagramma v , corrispondente alla richiesta linea d'influenza.

Il diagramma del momento, cambiato di segno, fornisce la linea d'influenza di M_S per una distorsione viaggiante del tipo flessionale; il dia-

gramma del taglio cambiato di segno, e quello delle rotazioni con il suo segno, sono rispettivamente le linee d'influenza di M_S per una distorsione viaggiante del tipo tagliante, e per una coppia viaggiante.

Si osservi che sia la struttura della fig. 6 che quella della fig. 8 sono una sola volta iperstatiche, e quindi il procedimento della sconnessione semplice, adoperato per tracciare le linee di influenza, è il più conveniente, facendo operare su una struttura resa isostatica.

Problema n. 9.

Si prende in esame il telaio della fig. 9 a, per disegnare la linea d'in-

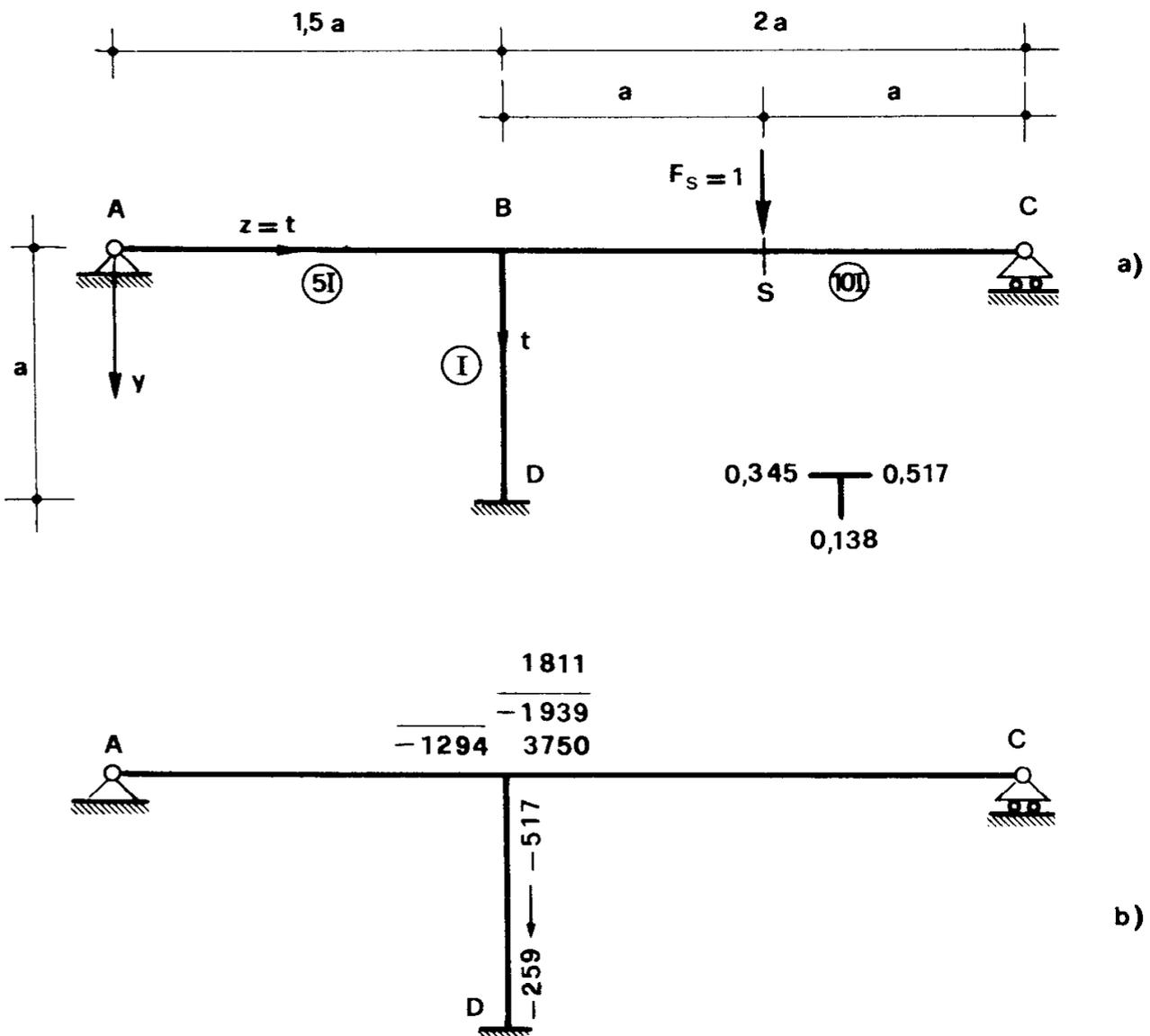


Figura 9a, b

fluenza dello spostamento della sezione S per una forza verticale viaggiante. Occorre, a ciò fare, applicare in S una $F_y = + 1$, e tracciare la deformata.

Seguendo il procedimento di Cross, è ($E = cost$)

$$\rho_{BA} = \frac{3E \cdot 5I}{1,5a} = 10 \frac{EI}{a}$$

$$\rho_{BC} = \frac{3E \cdot 10I}{2a} = 15 \frac{EI}{a}$$

$$\rho_{BD} = 4 \frac{EI}{a},$$

e quindi i coefficienti di ripartizione in B sono quelli trascritti nella stessa fig. 2 a.

La coppia di incastro perfetto è (cap. 2, for. 1)

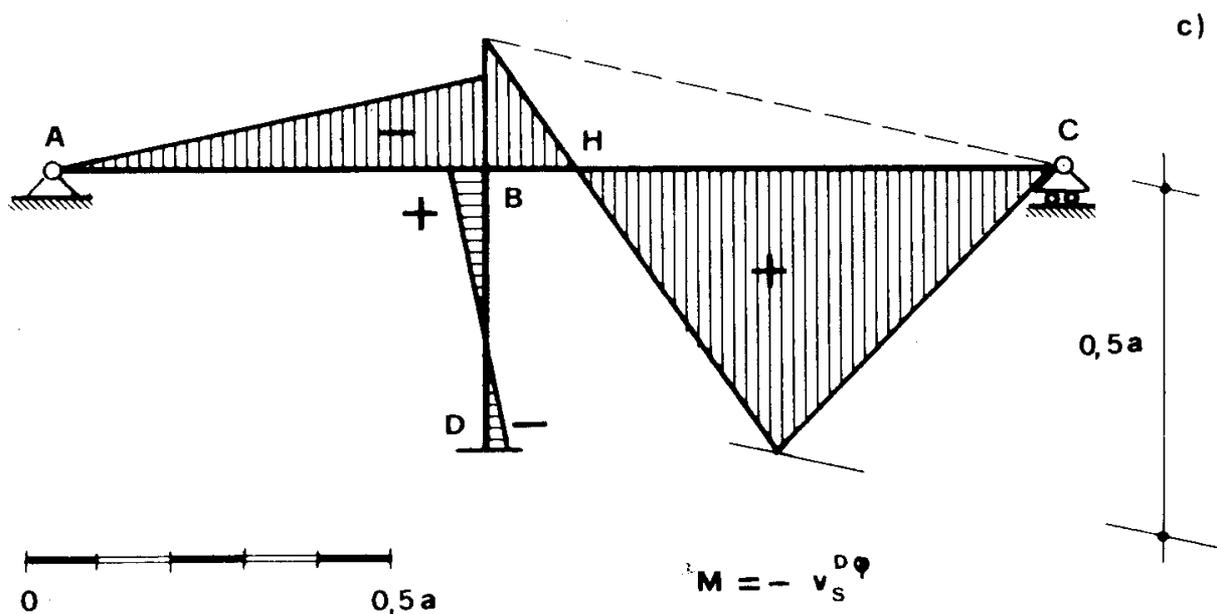


Figura 9c

$$\overline{m}_{BC} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}}{2} Fl = \frac{3}{16} Fl = \frac{3}{8} a$$

e cioè

$$\overline{m}_{BC} = 0,3750 a .$$

La ripartizione alla Cross (fig. 9 b) si esegue una sola volta, e fornisce il risultato esatto; il diagramma dei momenti è disegnato nella fig. 9 c^(*).

Il diagramma degli spostamenti è consegnato nella fig. 9 d; gli spostamenti sono stati calcolati nelle sezioni a distanza multipla di $0,3a$ da A , per quanto attiene alla campata AB , ed a distanza multipla di $0,4a$ da B , per quanto riguarda la campata BC . In una trave AB con EI_t costante, soggetta ad una coppia \mathfrak{M}_B in B , è presa l'origine in A ,

$$v = -\varphi_A z - \frac{\mathfrak{M}_B z^3}{6EI_t} = \frac{\mathfrak{M}_B}{6EI_t l} (z l^2 - z^3) . \quad (5)$$

Nel nostro caso è quindi, nella campata AB ,

$$\mathfrak{M}_B = -0,1294 a$$

$$\varphi_A = \frac{0,1294a \cdot 1,5a}{6E \cdot 5I} = 0,00647 \frac{a^2}{EI}$$

$$\varphi_B = -2\varphi_A = -0,01294 \frac{a^2}{EI}$$

$$v = \frac{1}{EI} (-0,00647a^2 z + 0,00288z^3) .$$

Si passi adesso alla campata BC , soggetta alla coppia

$$\mathfrak{M}_B = 0,1811 a$$

all'estremo sinistro B , ed alla forza unitaria in mezzeria; l'origine si assume in C . Lo spostamento dovuto alla coppia è fornito quindi ancora dalla (5), e cioè da

$$v_m = \varphi_c z' + \frac{\mathfrak{M}_B z'^3}{6EI_t l} = -\frac{\mathfrak{M}_B}{6EI_t l} (z l^2 - z^3) ;$$

(*) Al solito, tale diagramma cambiato di segno coincide con la linea di influenza dello spostamento v_S per effetto di una distorsione di tipo flessionale viaggiante.

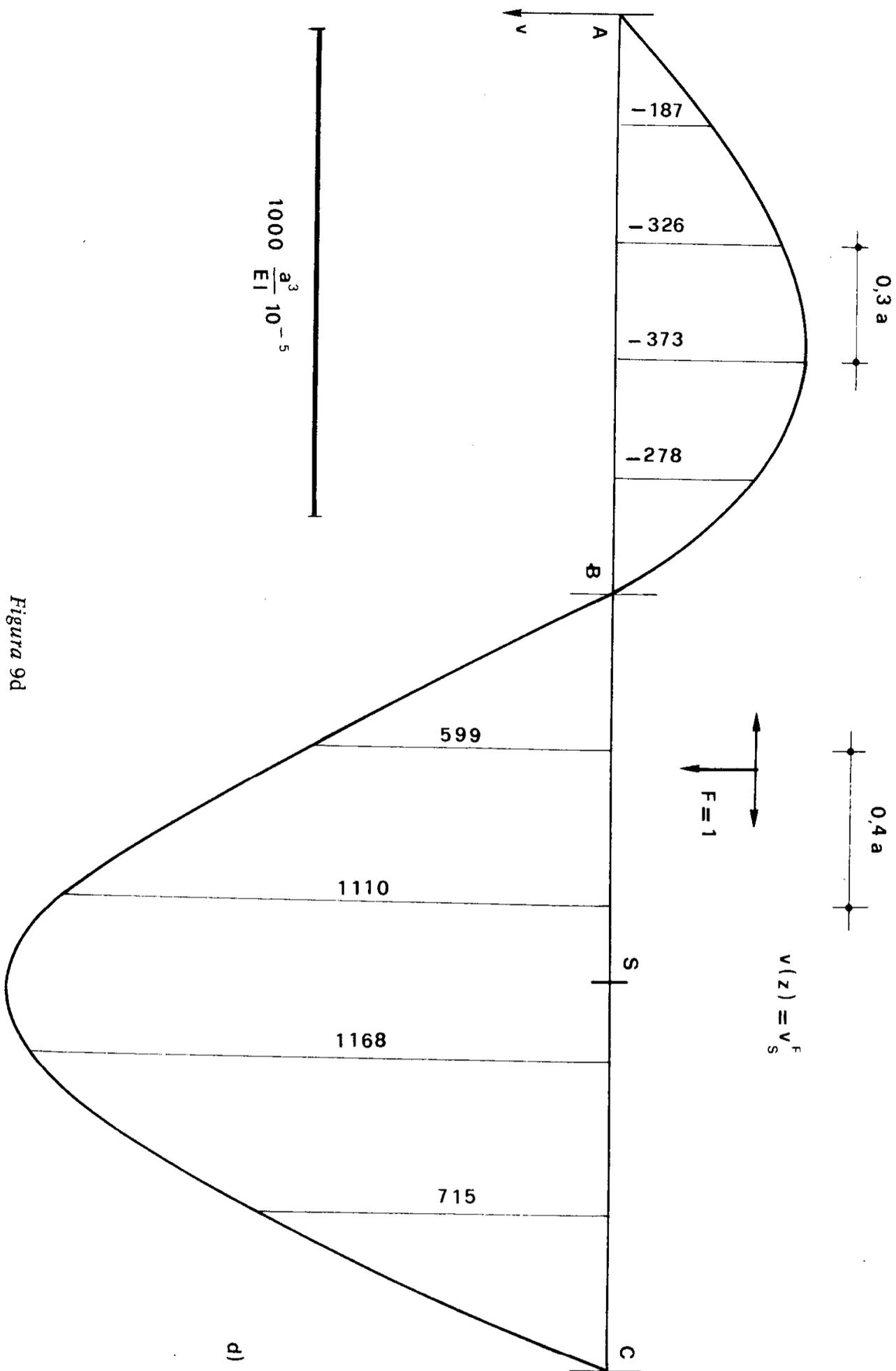


Figura 9d

d)

lo spostamento dovuto alla forza è invece

$$v_F = \frac{1}{48 EI_t} (3 l^2 z' - 4 z'^3) , \quad z \in \left[0 , \frac{l}{2} \right] .$$

E' perciò in BC

$$v = \frac{1}{EI} (0,01897 a^2 z' - 0,00682 z'^3) .$$

Con le suddette formule sono stati calcolati i valori della fig. 9d.

Problema n. 10.

Nella stessa struttura del problema precedente una variazione termica $\Delta t = - 30^\circ$ agisce sul traverso; si è quindi in presenza di una distorsione

$$\mu = - \alpha \frac{\overline{\Delta t}}{h} = 30 \frac{\alpha}{h} ,$$

dove h è l'altezza della sezione.

La linea d'influenza $v_S^{D\varphi}$ (fig. 9c) permette di asserire che si ottiene v_{Smax} se μ agisce da A ad H , v_{Smin} se μ agisce da H a C (fig. 10). La stessa linea permette di calcolare v_{Smax} e v_{Smin} . E infatti le aree positiva e negativa del diagramma valgono

$$A^+ = 0,1247 a^2$$

$$A^- = - 0,3466 a^2$$

e quindi

$$v_{Smax} = 3,742 \frac{a^2}{h} \alpha$$

$$v_{Smin} = - 10,398 \frac{a^2}{h} \alpha .$$

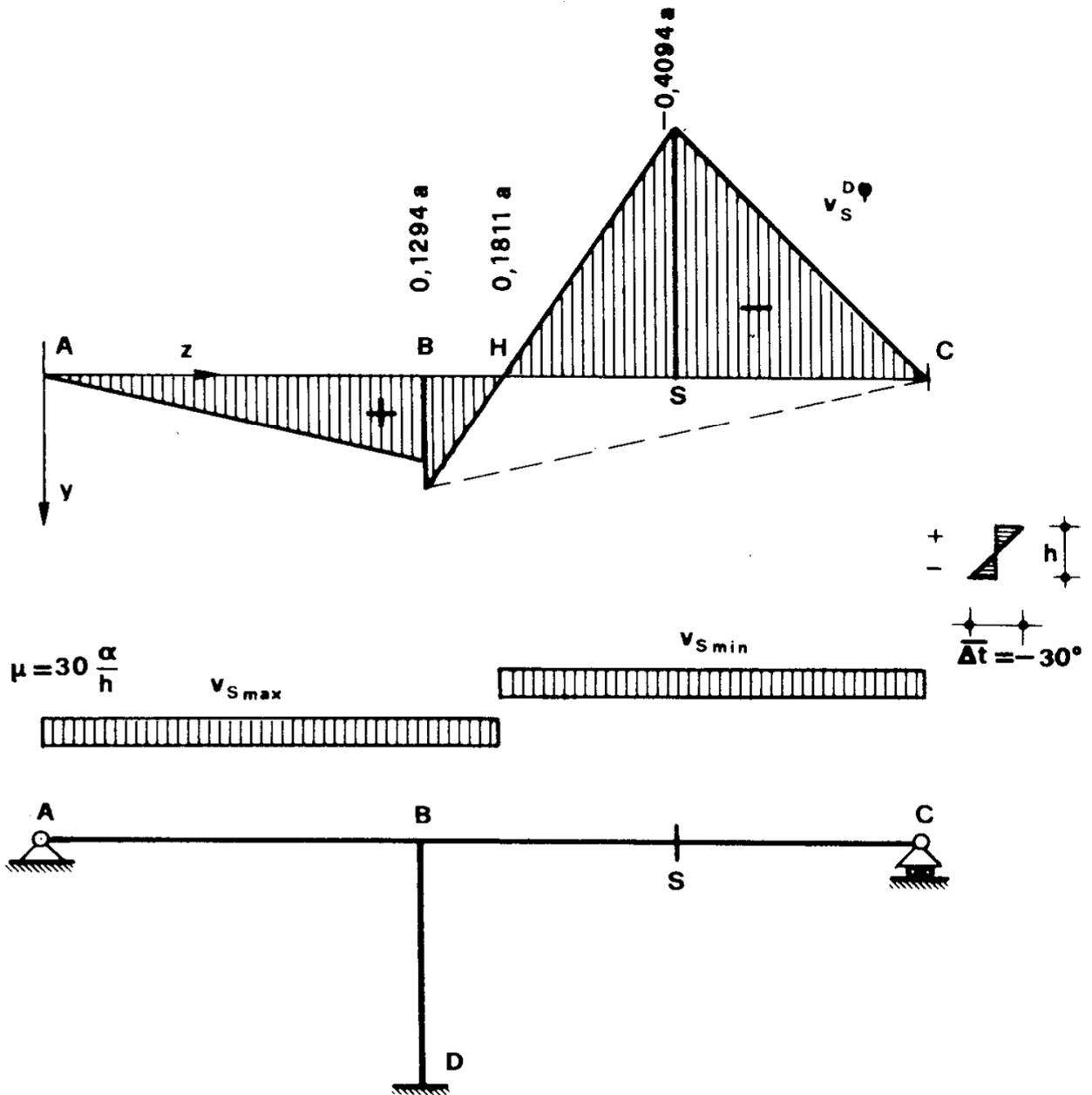


Figura 10

Problema n. 11.

Sempre nella struttura del problema precedente, un carico q agisce, uniformemente distribuito, sul traverso. L'esame della linea d'influenza v_S^F (fig. 9d) fa riconoscere che si ottiene v_{Smax} se q agisce fra B e C

v_{Smin} se q agisce da A a B . Poichè le aree positiva e negativa del diagramma valgono

$$A^+ = 1436 \cdot 10^{-5} \frac{a^4}{EI}$$

$$A^- = - 349 \cdot 10^{-5} \frac{a^4}{EI}$$

è pure

$$v_{Smax} = 1436 \cdot 10^{-5} \frac{qa^4}{EI}$$

$$v_{Smin} = 349 \cdot 10^{-5} \frac{qa^4}{EI}$$

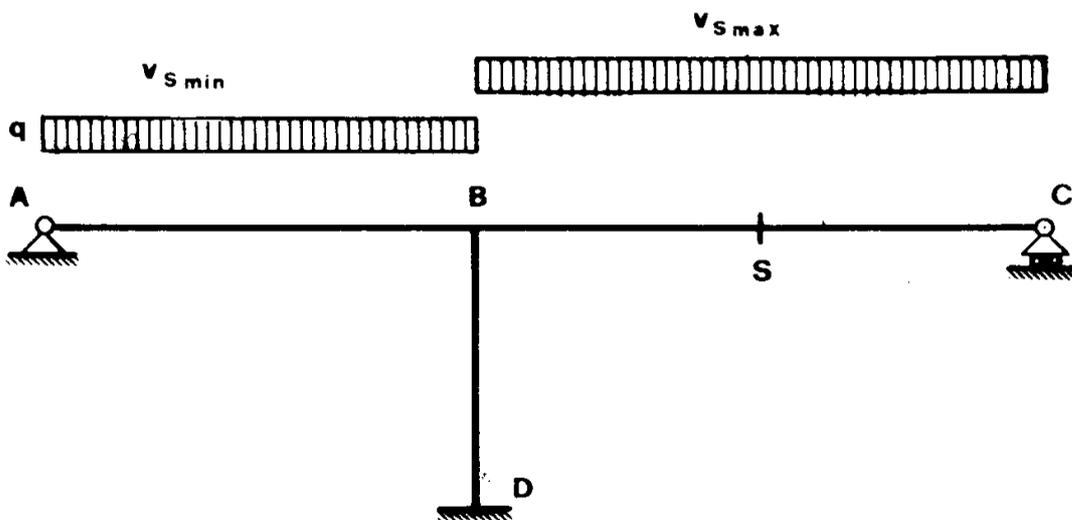


Figura 11

Le corrispondenti condizioni di carico risultano dalla fig. 11.

Problema n. 12.

La struttura è sempre quella della fig. 9a, e così pure la sezione S che interessa, questa volta però ci si occupa del momento M_S (fig. 12a),

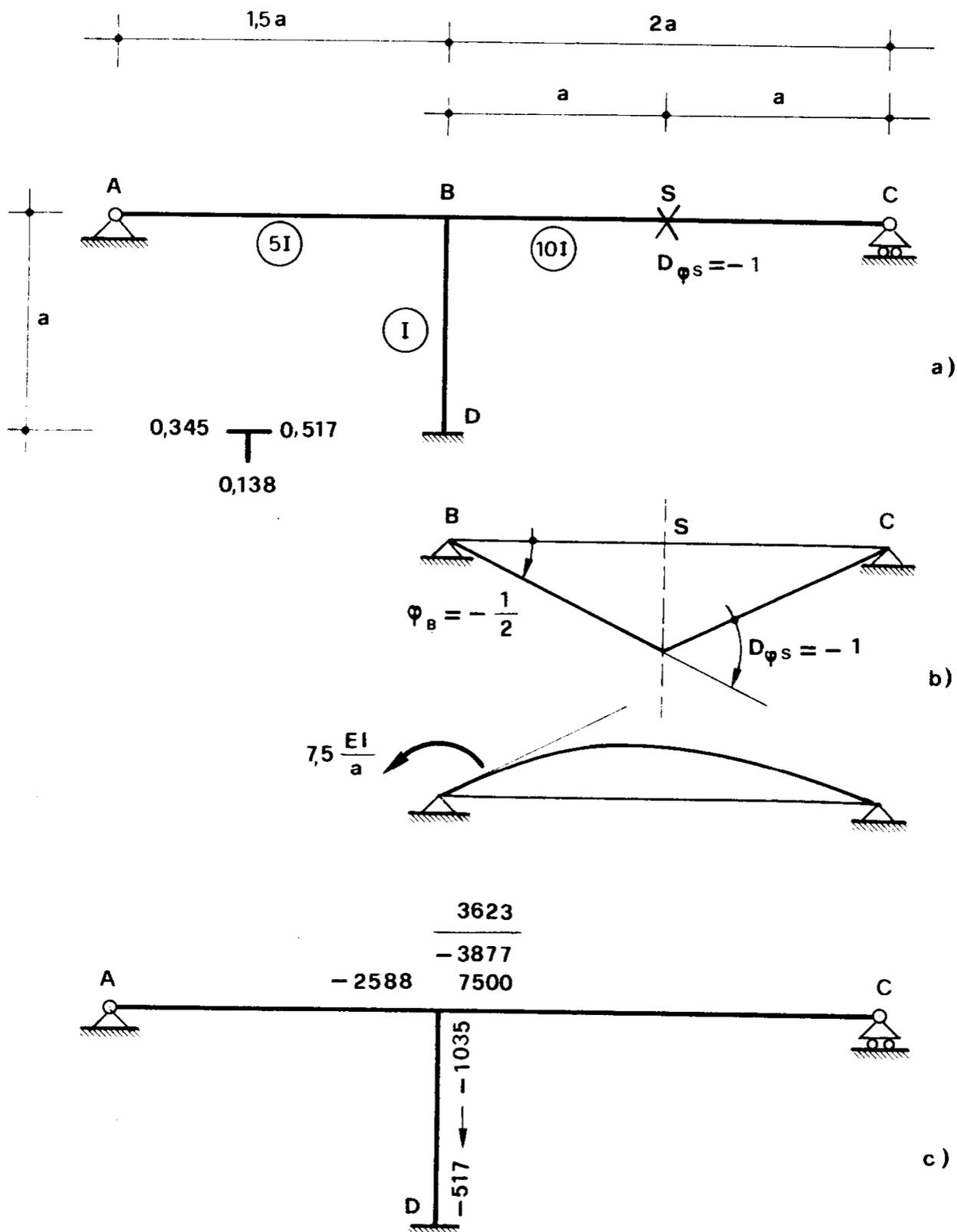


Figura 12a, b, c

e quindi in S agisce una distorsione $D_{\varphi S}$.

Si vuole la linea d'influenza di M_S per una forza viaggiante; quindi $D_{\varphi S} = -1$.

Si opera ancora alla Cross. Dalla condizione di congruenza in B relativa alla trave BC incastrata in B ed appoggiata in C (fig. 12b) si trae

$$\bar{m}_{BC} = 7,5 \frac{EI}{a} ;$$

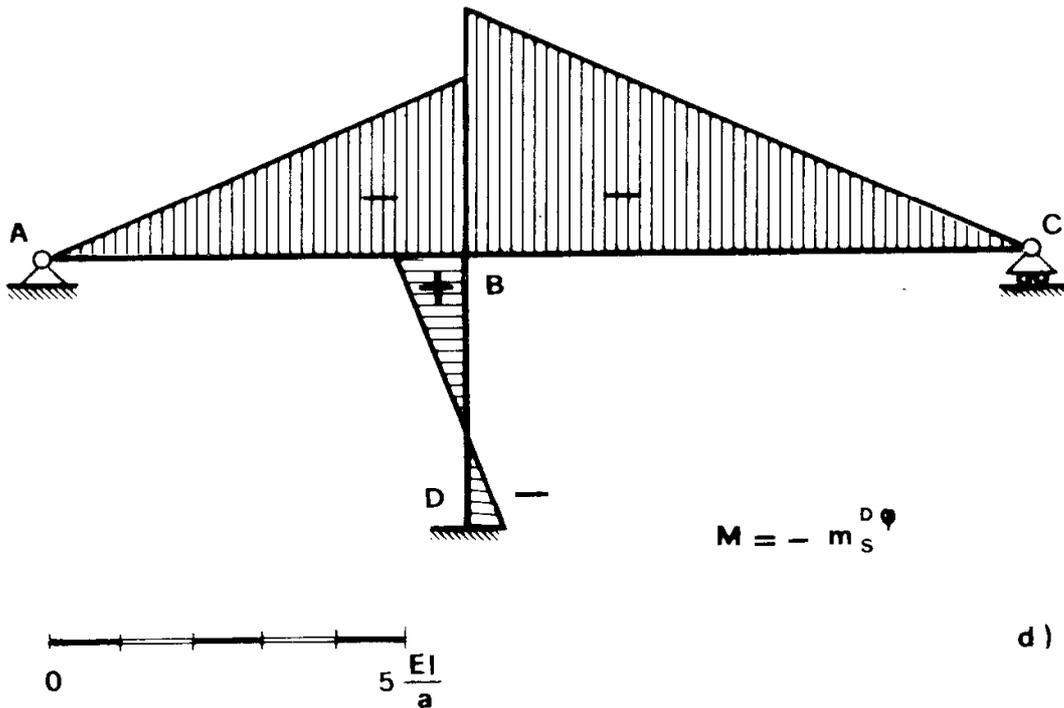


Figura 12d

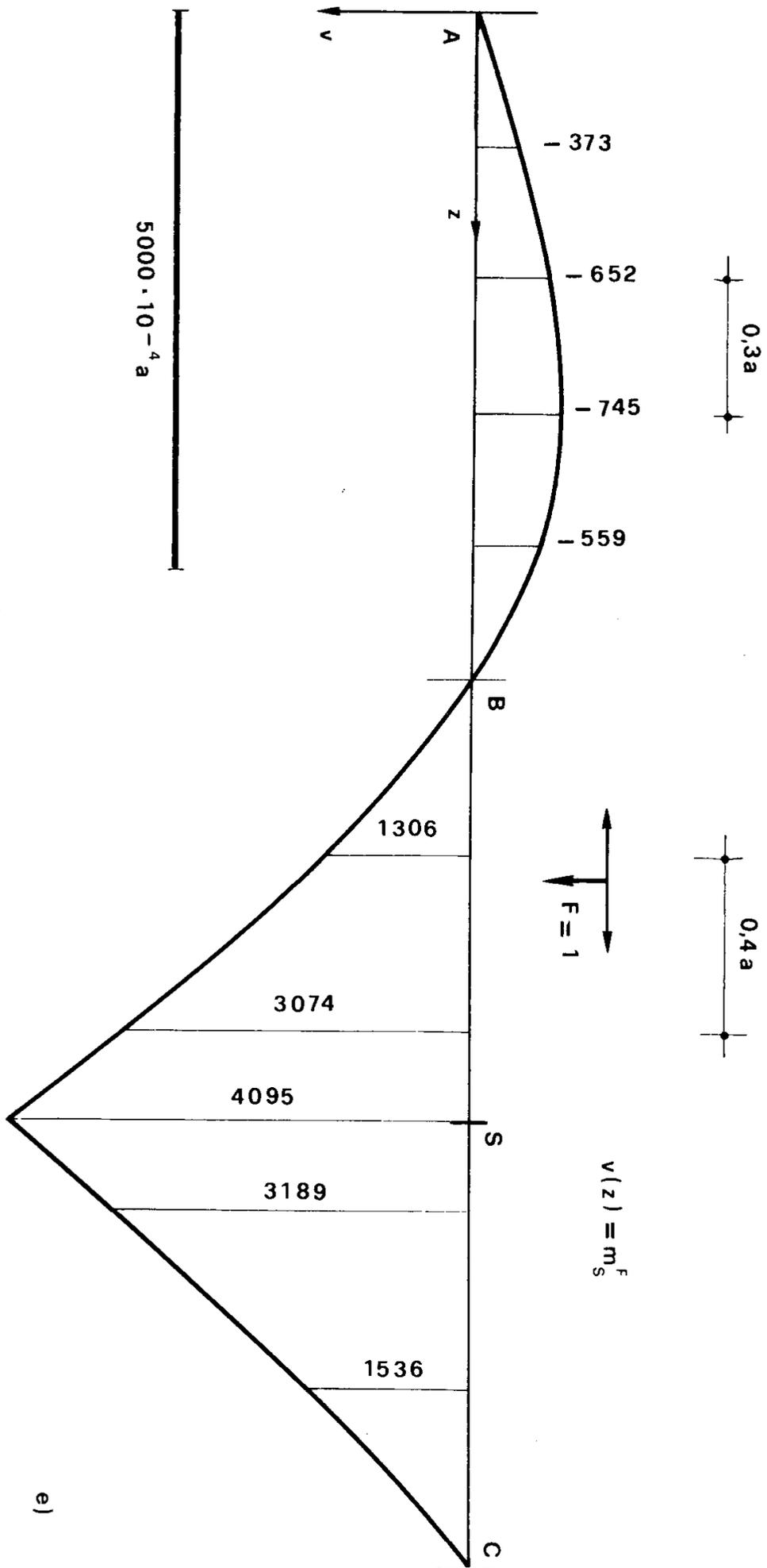
la ripartizione alla Cross si esegue una sola volta in B , ed è riportata nella fig. 12c.

Il diagramma dei momenti è disegnato nella fig. 12d; al solito, cambiato di segno, esso coincide con la linea d'influenza di M_S per una distorsione del tipo flessionale viaggiante. Il diagramma degli spostamenti, e cioè la richiesta linea d'influenza per forza viaggiante, è consegnato nella fig. 12e. Nella campata AB la formula da utilizzare è sempre la (5), che

fornisce, per $m_B = -2,588 \frac{EI}{a}$,

$$v = -0,1294z + 0,0575 \frac{z^3}{a^2} .$$

Nella campata BC gli spostamenti si ottengono considerando la trave



e)

Figura 12e

BC appoggiata in B e C , e sovrapponendo gli spostamenti v_m dovuti alla coppia $\mathfrak{M}_B = 3,623 \frac{EI}{a}$ a quelli v_φ dovuti alla distorsione -1 in S . Gli spostamenti v_m sono forniti da

$$v_m = -0,1207 z' + 0,0302 \frac{z'^3}{a^2},$$

quelli v_φ da

$$v_\varphi = \begin{cases} \frac{z'}{2} & , \quad z' \in [0, a] \\ \frac{2a - z'}{2} & , \quad z' \in [a, 2a] . \end{cases}$$

Sul traverso agisce una variazione termica $\overline{\Delta t}$, e quindi una distorsione $\mu = -\frac{\alpha \overline{\Delta t}}{h}$; h , altezza della sezione, e $\overline{\Delta t}$, siano costanti. Se μ agisce su tutta la luce AC (fig. 12d) il valore assoluto di M_S è massimo; e si ha

$$M_S = -5,564 \alpha \frac{\overline{\Delta t}}{h} EI .$$

Sul traverso agisca un carico q ; la linea m_S^F permette di asserire che il momento M_{Smax} si ha se il carico agisce da B a C , ed è

$$M_{Smax} = 0,3835 qa^2 ;$$

il momento M_{Smin} si ha se il carico agisce da A a B , ed è

$$M_{Smin} = -0,0699 qa^2 .$$

Se q agisce su tutta la luce, è

$$M_S = M_{Smax} + M_{Smin} = 0,3136 qa^2 ;$$

infatti le due condizioni di carico per M_{Smax} ed M_{Smin} sono ovviamente complementari per quella di carico totale.