

CAPITOLO SECONDO  
IL METODO DELLE FORZE.

Problema n. 1.

La trave  $AB$  ad asse rettilineo, di materiale omogeneo e di sezione costante, di lunghezza  $l$ , è soggetta all'ascissa  $z_s = \alpha l$  alla forza assiale  $F$ .

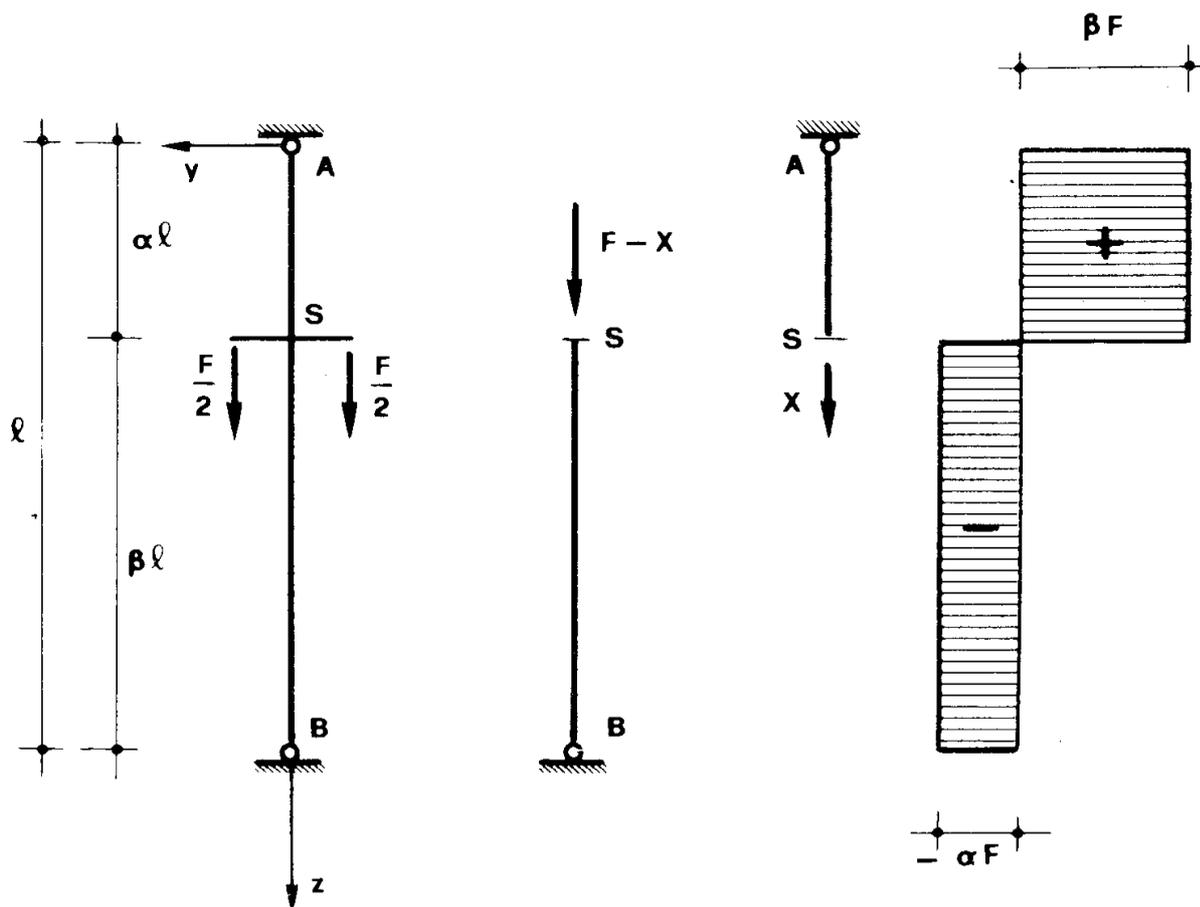


Figura 1

Si effettui un taglio secondo la sezione retta  $S$  ove agisce  $F$ ; se  $X$  (incognita iperstatica) è lo sforzo normale in  $AS$ ,  $X - F$  è lo sforzo normale in  $SB$ . La condizione che la sezione  $S$  debba avere lo stesso spostamento,

si consideri appartenente ad  $AS$  o ad  $SB$ , si scrive

$$\frac{X \alpha l}{EA} = \frac{F - X}{EA} \beta l$$

da cui l'equazione di congruenza

$$X = F \beta = F \frac{b}{l} .$$

E' perciò

$$N_{AS} = F \beta$$

$$N_{SB} = - F \alpha .$$

### Problema n. 2.

La trave  $AB$  della fig. 2, incastrata in  $A$  e appoggiata in  $B$ , di luce  $l$ , è di materiale omogeneo e di sezione costante. All'ascissa  $z_s = \alpha l$  agisce una forza  $F$ .

La struttura è una volta iperstatica; si assume come struttura isostatica la trave appoggiata, e per ricondursi al rispetto del vincolo in  $A$  occorre considerare agente in  $A$  una coppia  $\mathfrak{M}_A$ , che è poi la coppia reattiva di incastro della trave reale (incognita iperstatica). Sulla trave appoggiata le rotazioni della sezione  $A$  dovute ad  $F$  e ad  $\mathfrak{M}_A$  sono rispettivamente date da (cap. 1, for. (34) e (38))

$$\varphi_A^o = - \frac{\beta (1 - \beta^2)}{6} \frac{Fl^2}{EI}$$

$$\varphi_{AX} = \frac{\mathfrak{M}_A l}{3 EI} .$$

Quindi la condizione di congruenza  $\varphi_A = 0$  si scrive

$$- \frac{\beta (1 - \beta^2)}{6} \frac{Fl^2}{EI} + \frac{\mathfrak{M}_A l}{3 EI} = 0$$

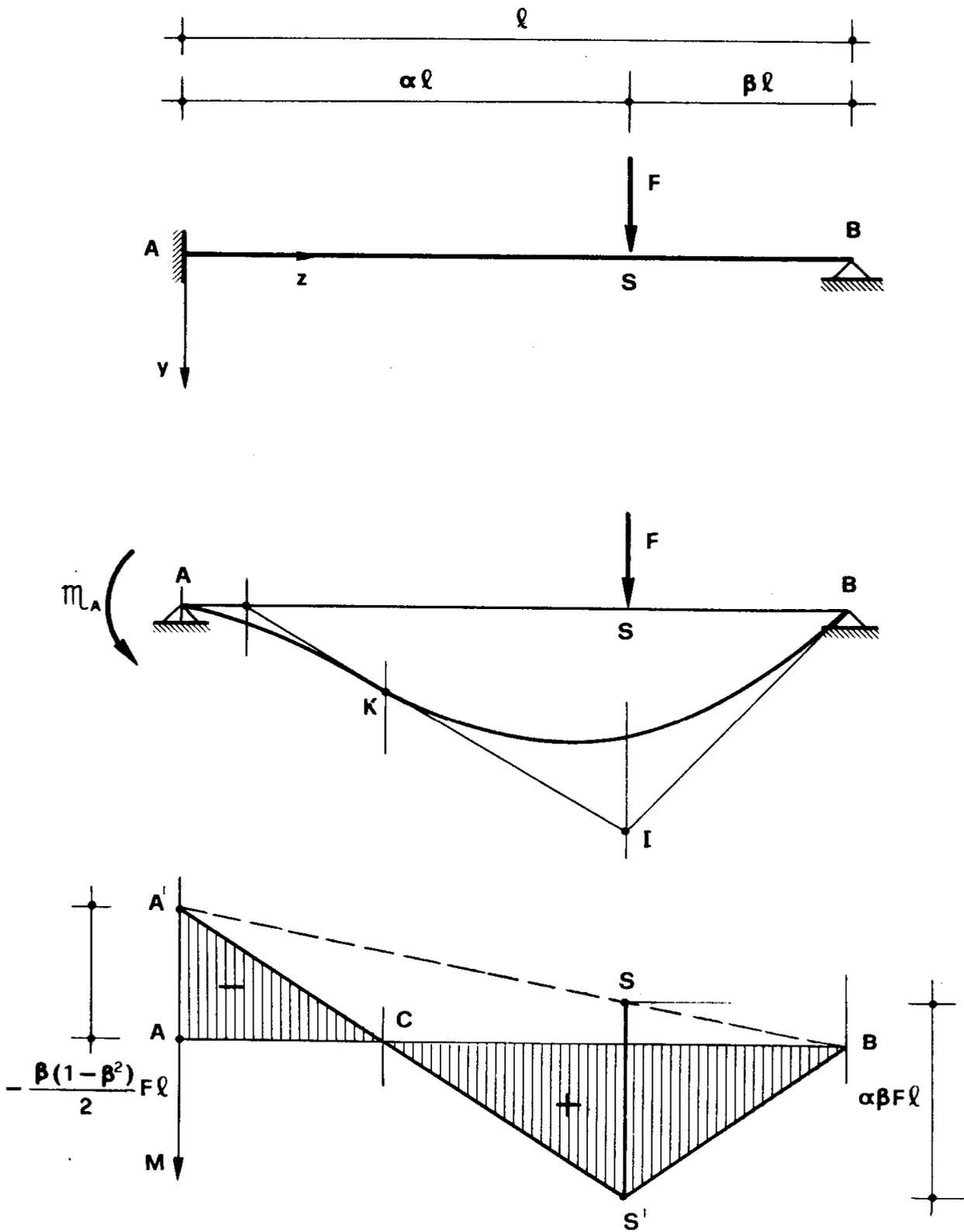


Figura 2

da cui

$$\mathfrak{m}_A = \frac{\beta (1 - \beta^2)}{2} Fl ; \quad (1)$$

è quindi

$$M_A = - \frac{\beta (1 - \beta^2)}{2} Fl . \quad (2)$$

Nella fig. 2 è disegnato il diagramma del momento; in  $S$  si ha, chiamando  $M_S^o$  il momento sulla trave appoggiata,

$$M_S = M_S^o + \beta M_A ,$$

e cioè (prob. 1-11)

$$M_S = \alpha \beta Fl + \beta M_A = \frac{Fl}{2} (2\alpha\beta - \beta^2 + \beta^4) . \quad (3)$$

La deformata presenta tangente in  $A$  orizzontale, ed un punto  $K$  di flesso nella verticale per il punto  $C$  di momento nullo. La tangente in  $A$  e quella in  $K$  si incontrano in un punto  $H$  appartenente alla verticale per il baricentro del triangolo  $AA'C$ , la tangente in  $K$  e quella in  $B$  si incontrano in un punto  $I$  appartenente alla verticale per il baricentro del triangolo  $CS'B$ .

Per  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  risulta

$$M_A = - \frac{3}{4} \frac{Fl}{4} , \quad M_S = \frac{5}{8} \frac{Fl}{4} ;$$

si verifica che

$$M_S - \frac{M_A}{2} = \frac{Fl}{4} .$$

Si osservi che la trave ausiliaria è libera in  $A$  e appoggiata in  $B$ , e quindi labile, il diagramma  $M$ , considerato come carico, deve presentare quindi momento nullo rispetto a  $B$ .

**Problema n. 3.**

La trave della fig. 3 di materiale omogeneo, sezione costante, e luce  $l$ , è incastrata in  $A$  e appoggiata in  $B$ ; su essa agisce un carico  $q$  uniformemente ripartito.

Sulla trave appoggiata si ha (cap. 1, for. (40))

$$\varphi_A^{\circ} = - \frac{ql^3}{24 EI}$$

$$\varphi_{AX} = \frac{\mathfrak{m}_A l}{3 EI} .$$

La condizione

$$\varphi_A = \varphi_A^{\circ} + \varphi_{AX} = 0$$

porta alla formula

$$\mathfrak{m}_A = \frac{ql^2}{8}$$

$$M_A = - \frac{ql^2}{8} . \quad (4)$$

Il diagramma del momento si costruisce disegnando  $AA' = M_A$ , e sulla congiungente  $A'B$  la parabola di corda  $A'B$  e freccia

$$CH = \frac{ql^2}{8} .$$

Si osservi che il carico  $qdz$  all'ascissa  $z = \alpha l$  induce un momento  $dM_A$  pari (2) a

$$dM_A = - qdz \frac{\beta (1 - \beta^2)}{2} l .$$

Poichè è in modulo

$$dz = l d\beta$$

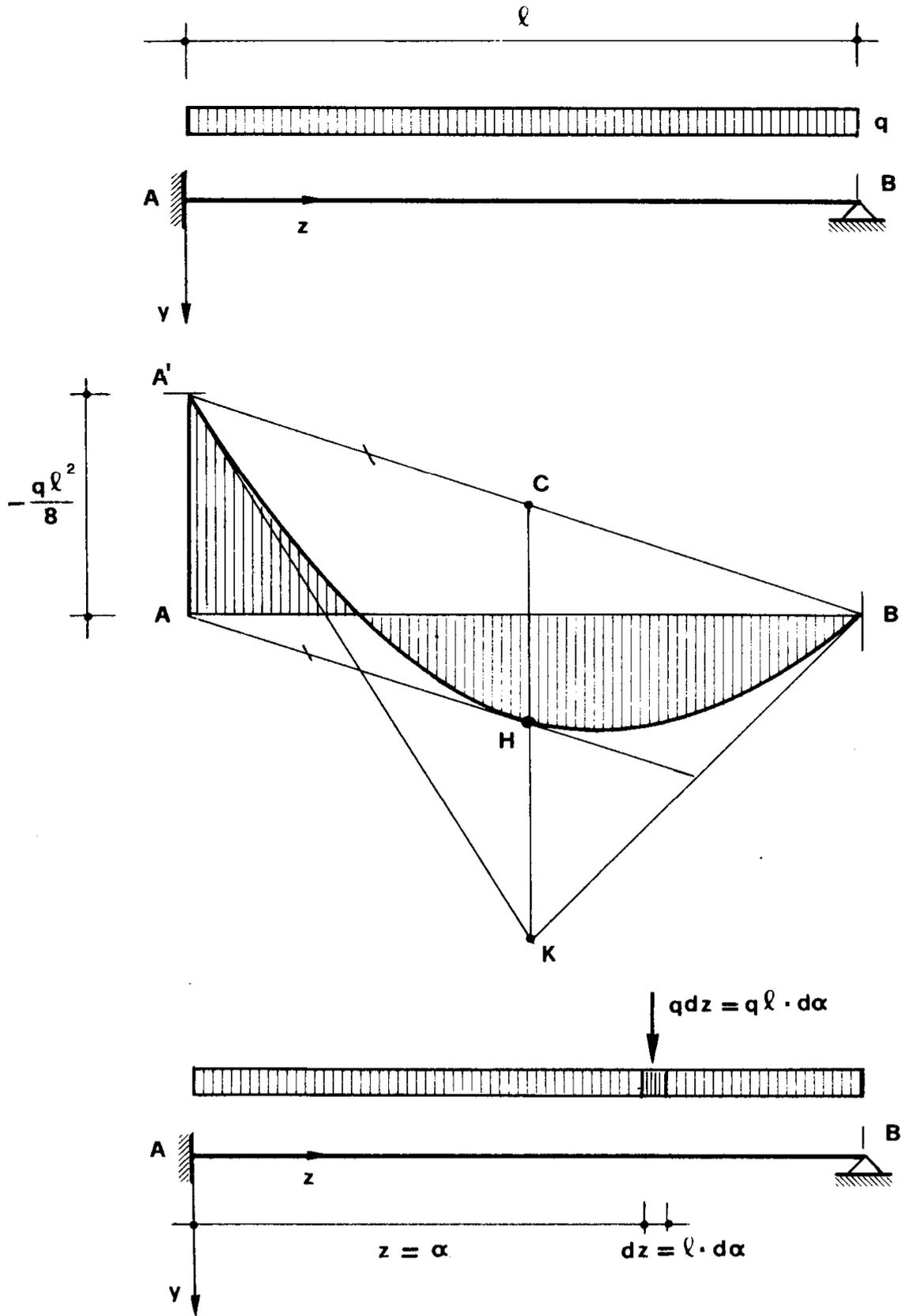


Figura 3

è pure

$$dM_A = -\frac{ql^2}{2} \beta (1 - \beta^2) d\beta$$

e quindi

$$M_A = -\frac{ql^2}{2} \int_0^1 \beta (1 - \beta^2) d\beta = -\frac{ql^2}{8},$$

in accordo con la (4).

#### Problema n. 4.

La trave della fig. 4, di materiale omogeneo, sezione costante e luce  $l$ , incastrata in  $A$  e appoggiata in  $B$ , sopporta una coppia  $\mathfrak{M}$  all'ascissa  $z_s = \alpha l$ . Si assume al solito la trave appoggiata come struttura isostatica, considerando una coppia  $\mathfrak{M}_A$  agente in  $A$ , di valore tale da annullare la rotazione dovuta ad  $\mathfrak{M}$ .

Poichè è (cap. 1, for. 37 e 38)

$$\varphi_A^o = \frac{3\beta^2 - 1}{6} \frac{\mathfrak{M}l}{EI}$$

$$\varphi_{AX} = \frac{\mathfrak{M}_A l}{3 EI},$$

la condizione di congruenza  $\varphi_A = 0$  si scrive

$$\frac{3\beta^2 - 1}{6} \frac{\mathfrak{M}l}{EI} + \frac{\mathfrak{M}_A l}{3 EI} = 0$$

da cui

$$\mathfrak{M}_A = \frac{1 - 3\beta^2}{2} \mathfrak{M}$$

$$M_A = \frac{3\beta^2 - 1}{2} m \quad (5)$$

Il diagramma  $M(z)$  si ottiene disegnando in  $A$  il segmento  $AA' = M_A$ ,

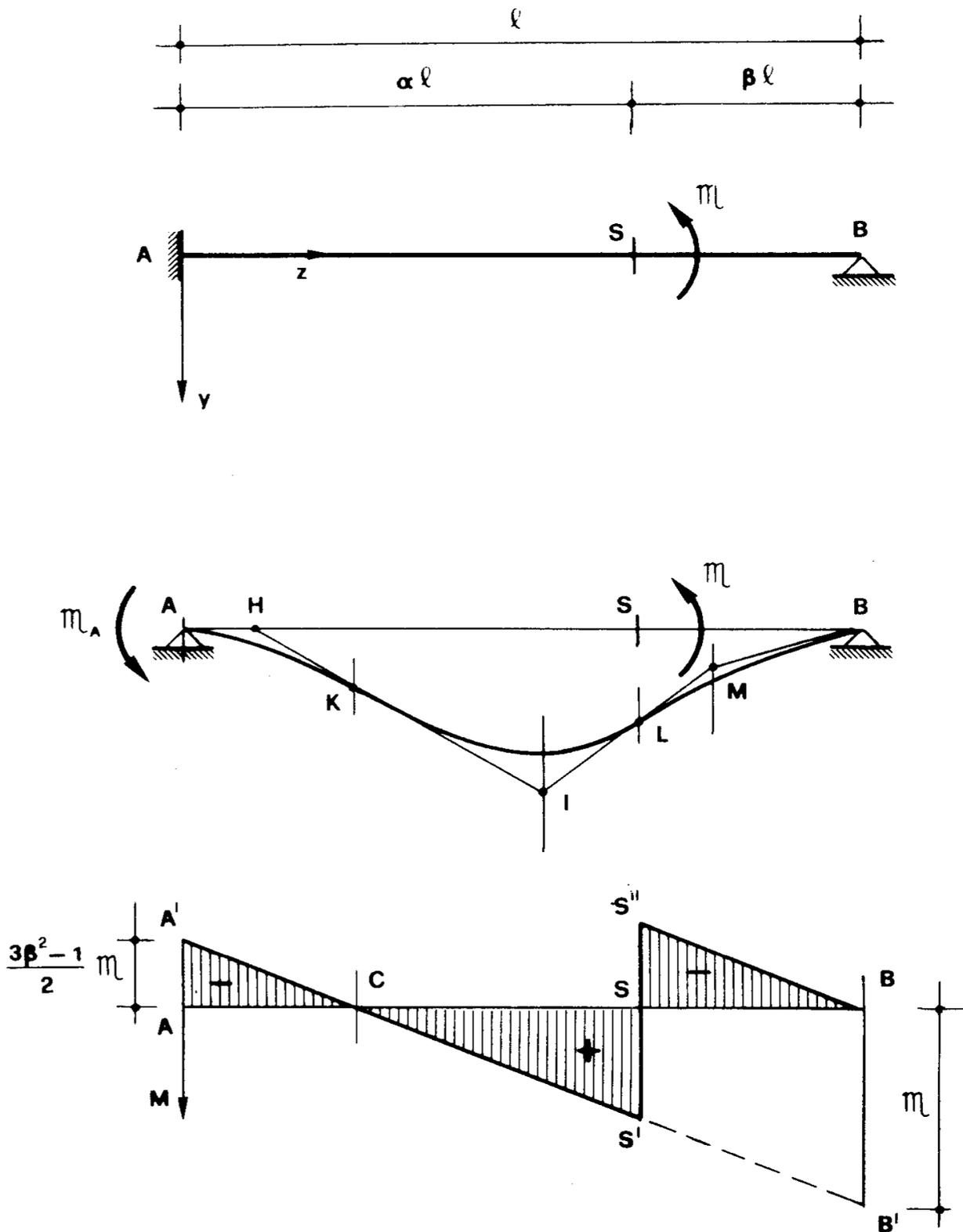


Figura 4

in  $B$  il segmento  $BB' = \mathfrak{m}$ , congiungendo  $A'$  con  $B'$ , tale retta è valida nell'intervallo  $] 0, \alpha l [$ . Nell'intervallo  $] \alpha l, l ]$  il momento è fornito dalla parallela ad  $A'B'$  per  $B$ .

La tangente in  $A$  alla deformata è orizzontale; si hanno due punti di flesso,  $K$  in corrispondenza del punto  $C$  di momento nullo,  $L$  in corrispondenza della sezione  $S$  di applicazione della coppia. La tangente in  $A$  e quella in  $K$  si incontrano in un punto  $H$  appartenente alla verticale per il baricentro del triangolo  $AA'C$ ; la tangente in  $K$  e quella in  $L$  si incontrano in un punto  $I$  appartenente alla verticale per il baricentro del triangolo  $CSS'$ ; la tangente in  $L$  e quella in  $B$  si incontrano in un punto  $M$  appartenente alla verticale per il baricentro del triangolo  $S''SB$ .

E' notevole osservare che per  $\beta = 0$  (coppia applicata in  $B$ ) si ha:

$$\varphi_B = \frac{\mathfrak{m}l}{4EI}$$

$$M_A = -\frac{\mathfrak{m}}{2}, \quad (6)$$

ed il punto di nullo del momento,  $C$ , si trova all'ascissa

$$z_C = \frac{l}{3}. \quad (7)$$

### Problema n. 5.

La struttura della fig. 5 è costituita da una trave  $AB$  di materiale omogeneo e di sezione costante, di luce  $l$ , incastrata in  $A$  e appoggiata in  $B$ ; la trave è soggetta a due cedimenti verticali  $\Delta v_A$  e  $\Delta v_B$  in  $A$  e  $B$ , e ad una rotazione anelastica  $\Delta \varphi_A$  dell'incastro.

Assumendo come trave isostatica quella appoggiata, risulta che per effetto di  $\Delta v_A$  e  $\Delta v_B$  la sezione  $A$  ruota di

$$\varphi_A^\circ = -\frac{\Delta v_B - \Delta v_A}{l};$$

la quantità

$$\delta_{AB} = \Delta v_B - \Delta v_A \quad (8)$$

è il cedimento relativo tra gli estremi, quindi può scriversi

$$\varphi_A^o = - \frac{\delta_{AB}}{l} .$$

L'equazione di congruenza deve esprimere il fatto che la coppia  $m_A$

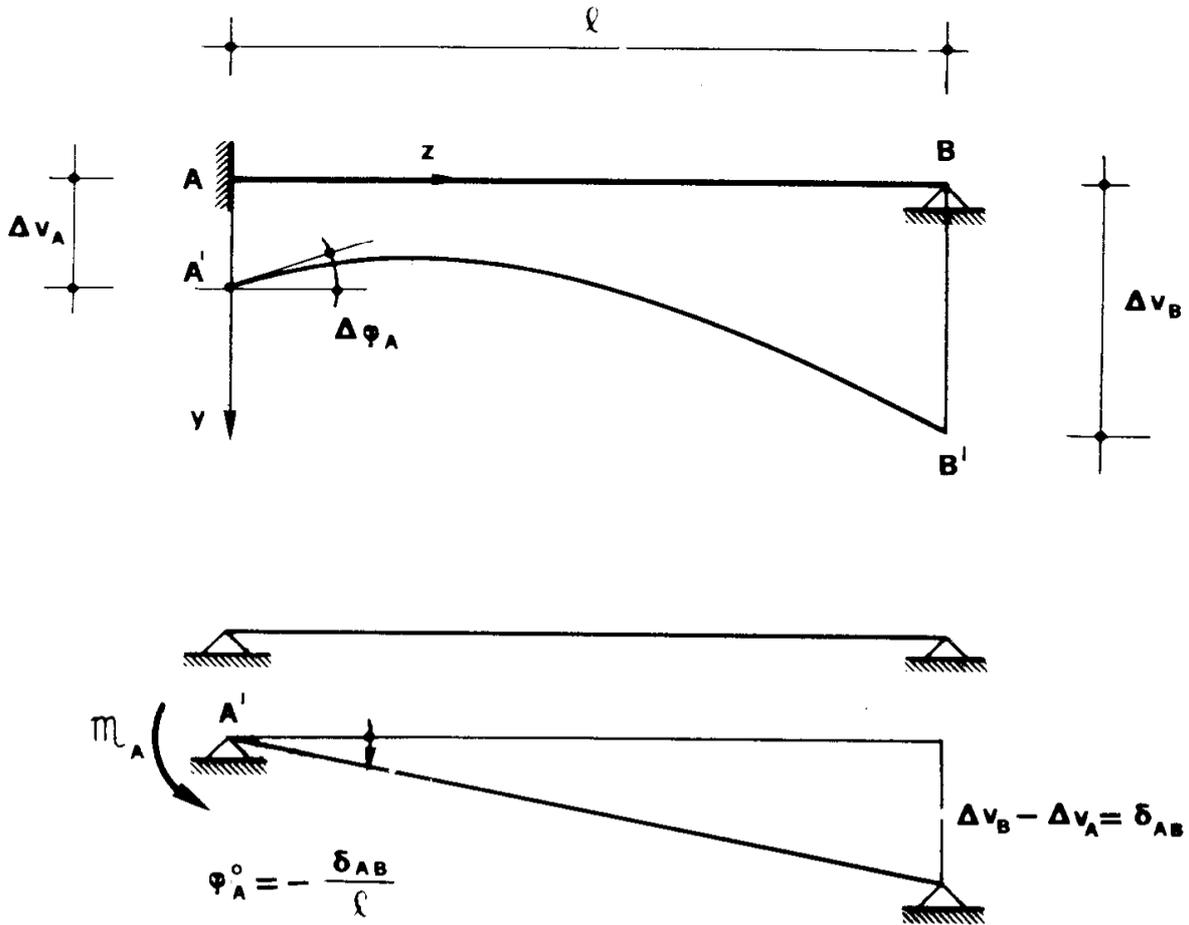


Figura 5

d'incastro deve generare una rotazione  $\varphi_{AX}$  che sommata a  $\varphi_A^o$  dia per risultato il cedimento angolare  $\Delta\varphi_A$ :

$$\frac{m_A l}{3 EI} - \frac{\delta_{AB}}{l} = \Delta\varphi_A .$$

E' perciò

$$\begin{aligned} m_A &= \frac{3EI}{l} \Delta\varphi_A + \frac{3EI}{l^2} \delta_{AB}, \\ M_A &= -\frac{3EI}{l} \Delta\varphi_A - \frac{3EI}{l^2} \delta_{AB}. \end{aligned} \quad (9)$$

### Problema n. 6.

La struttura della fig. 6 è costituita da due travi  $AB$  e  $CD$  identiche, di materiale omogeneo e sezione costante. Gli appoggi  $AC$  e  $BD$  sono sulle stesse verticali; all'ascissa  $z = a$  un pendolo  $HK$  ad asse verticale collega le due travi. La trave inferiore è soggetta ad una forza  $F$  all'ascissa  $z = 2a$ . La luce è  $3a$ ; il pendolo è di materiale omogeneo (diverso da quello delle due travi), e di sezione costante; la sua lunghezza è  $b$ . Si rende la struttura isostatica eliminando il pendolo; se  $X$  è lo sforzo normale in  $HK$  (positivo se di trazione) occorre, per ripristinare le condizioni reali, far agire una forza  $X$  in  $H$  sulla trave superiore, ed una forza  $-X$  in  $K$  sulla trave inferiore.

La condizione di congruenza è che la variazione di distanza tra  $H$  e  $K$ , e cioè la differenza tra lo spostamento  $KK'$  di  $K$  e quello  $HH'$  di  $H$ , sia uguale alla variazione di lunghezza del pendolo.

Si ha (cap. 1, for. 16)

$$\begin{aligned} HH' = v_H &= \frac{8}{18} \frac{Xa^3}{E_t I_t} \\ KK' = v_K &= -\frac{8}{18} \frac{Xa^3}{E_t I_t} + \frac{7}{18} \frac{Fa^3}{E_t I_t}, \end{aligned}$$

e quindi la condizione di congruenza si scrive

$$\frac{7}{18} \frac{Fa^3}{E_t I_t} - \frac{16}{18} \frac{Xa^3}{E_t I_t} = \frac{Xb}{E_p A_p}$$

da cui

$$X = F \frac{7a^3 E_p A_p}{16a^3 E_p A_p + 18b E_t I_t}$$

Il diagramma del momento sulla trave  $AB$  è quello dovuto alla  $X$ ; il diagramma del momento sulla trave  $CD$  è somma di quello dovuto ad  $F$  e di quello dovuto a  $-X$ . Si osservi che le due variazioni di inclinazione

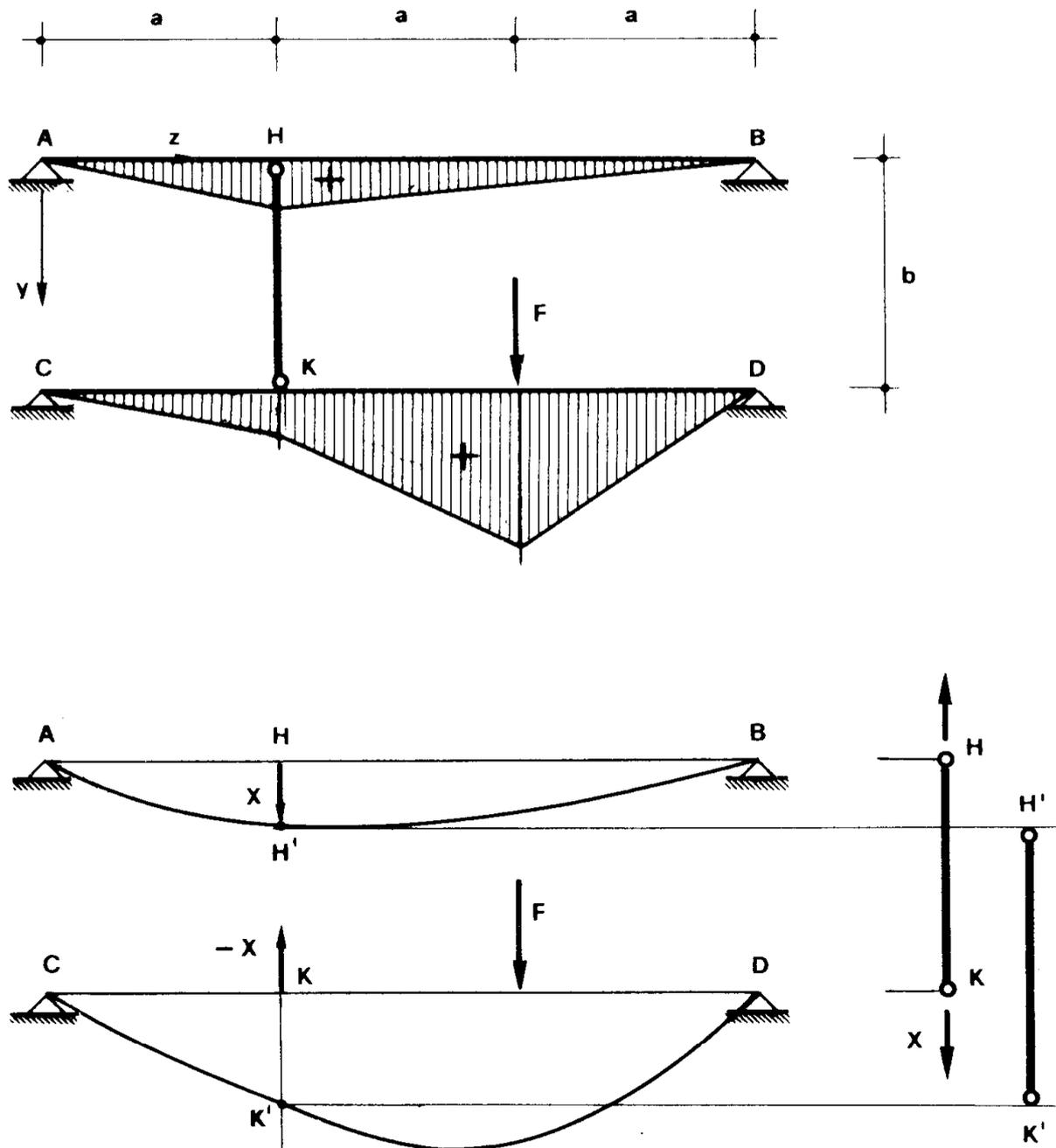


Figura 6

in  $H$  e  $K$  sono uguali e contrarie, perchè pari ad  $X$  e a  $-X$ . Si osservi pure che sommando i due diagrammi del momento in  $AB$  e  $CD$  si ottiene il diagramma del momento generato da  $F$  su una trave appoggiata. Sono

interessanti due casi limite. Per  $E_p A_p \rightarrow 0$  (tirante molto cedevole) è  $X \rightarrow 0$ ; per  $E_p A_p \rightarrow \infty$  (tirante molto rigido) è

$$X \rightarrow \frac{7}{16} F .$$

In quest'ultimo caso si ha, sulla trave  $AB$ ,

$$M_H = \frac{14}{48} F a ,$$

e sulla trave  $CD$

$$M_K = \frac{2}{48} F a$$

$$M_F = \frac{25}{48} F a ;$$

se ne trae che comunque il momento in  $AB$  e  $CD$  è positivo in ogni sezione. Inoltre, il momento sotto  $F$  varia da

$$\frac{2}{3} F a = \frac{32}{48} F a$$

per  $E_p A_p \rightarrow 0$ , a

$$\frac{25}{48} F a$$

per  $E_p A_p \rightarrow \infty$ , mentre il momento sotto il pendolo varia da

$$\frac{16}{48} F a$$

per  $E_p A_p \rightarrow 0$ , a

$$\frac{2}{48} F a$$

per  $E_p A_p \rightarrow \infty$ .

**Problema n. 7.**

La stessa struttura della fig. 6 è soggetta (fig. 7) ad una variazione termica alla Navier  $\overline{\Delta t}$  lungo tutta la trave  $CD$ , di valore costante con la ascissa, e ad una variazione termica uniforme  $\Delta t$  lungo tutto il pendolo, di valore costante anch'essa. Si rende anche adesso la struttura isostatica allontanando il pendolo. Sulla trave  $CD$  appoggiata in  $C$  e  $D$  il valore di  $v_K$  dovuto a  $\overline{\Delta t}$  si può calcolare attraverso il procedimento di Mohr; la trave ausiliaria è ancora appoggiata in  $C$  e  $D$ , e caricata da un carico  $q^*$  uniforme pari ad  $\alpha \frac{\Delta t}{h}$ . E' perciò

$$v_K^o = M_K^* = R_C^* \cdot a - \frac{q^* a^2}{2} =$$

$$= \frac{3 q^* a}{2} \cdot a - q^* \frac{a^2}{2} = q^* a^2 = \frac{\alpha \overline{\Delta t} a^2}{h}$$

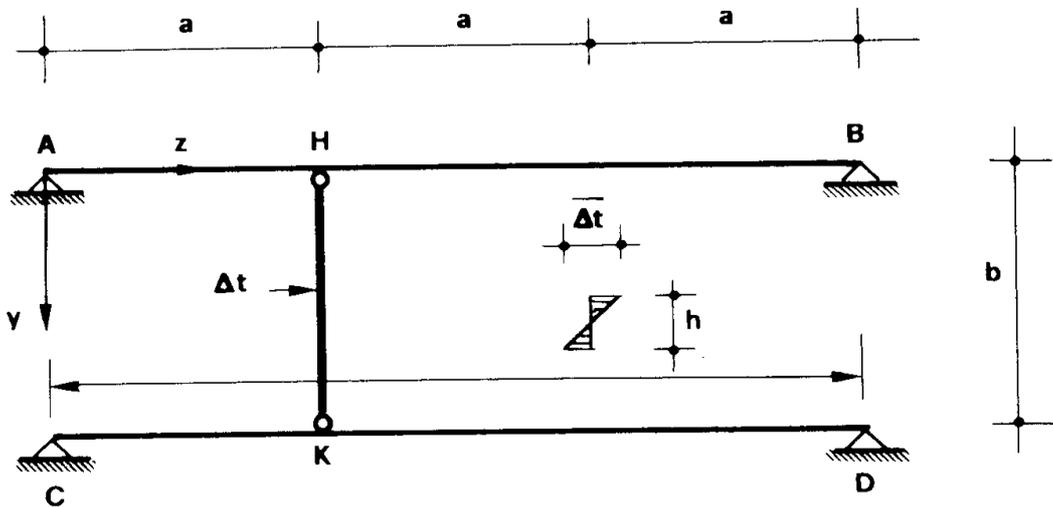


Figura 7

La condizione di congruenza si scrive

$$v_K - v_H = \frac{Xb}{E_p A_p} ;$$

poichè è

$$v_K = \frac{\alpha \overline{\Delta t} a^2}{h} - \frac{8}{18} \frac{X a^3}{E_t I_t}$$

$$v_H = \frac{8}{18} \frac{X a^3}{E_t I_t},$$

si ha

$$\frac{\alpha \overline{\Delta t} a^2}{h} - \frac{16}{18} \frac{X a^3}{E_t I_t} = \frac{X b}{E_p A_p} + \alpha \Delta t b$$

da cui

$$X = \frac{18 E_t E_p I_t A_p}{18 b E_t I_t + 16 a^3 E_p A_p} \left( \frac{\alpha \overline{\Delta t} a^2}{h} - \alpha \Delta t b \right).$$

Per  $E_p A_p \rightarrow 0$  è pure  $X \rightarrow 0$ . Per  $E_p A_p \rightarrow \infty$  è

$$X \rightarrow \frac{9}{8} \frac{E_t I_t}{a^3} \left( \frac{\alpha \overline{\Delta t} a^2}{h} - \alpha \Delta t b \right)$$

### Problema n. 8.

La trave della fig. 8a è di sezione costante e materiale omogeneo, appoggiata in  $ABC$  su vincoli rigidi. Si sceglie come struttura isostatica quella ottenuta eliminando in  $B$  la continuità delle rotazioni, e cioè considerando le due travi appoggiate  $AB$  e  $BC$  separatamente. Per ripristinare le condizioni di congruenza, e cioè di continuità delle rotazioni, occorre far agire in  $B$ , sulle due travi, la caratteristica dello sforzo interno eliminata nel processo di isostaticizzazione, vale a dire il momento flettente; quindi su  $AB$  agisce in  $B$  una coppia

$$\mathfrak{M}_B^s = M_B,$$

e su  $BC$  in  $B$  una coppia

$$m_B^d = - M_B .$$

Si osservi che nella fig. 8a le coppie sono state disegnate con il loro segno effettivo, e cioè corrispondenti ad un momento  $M_B$  negativo.

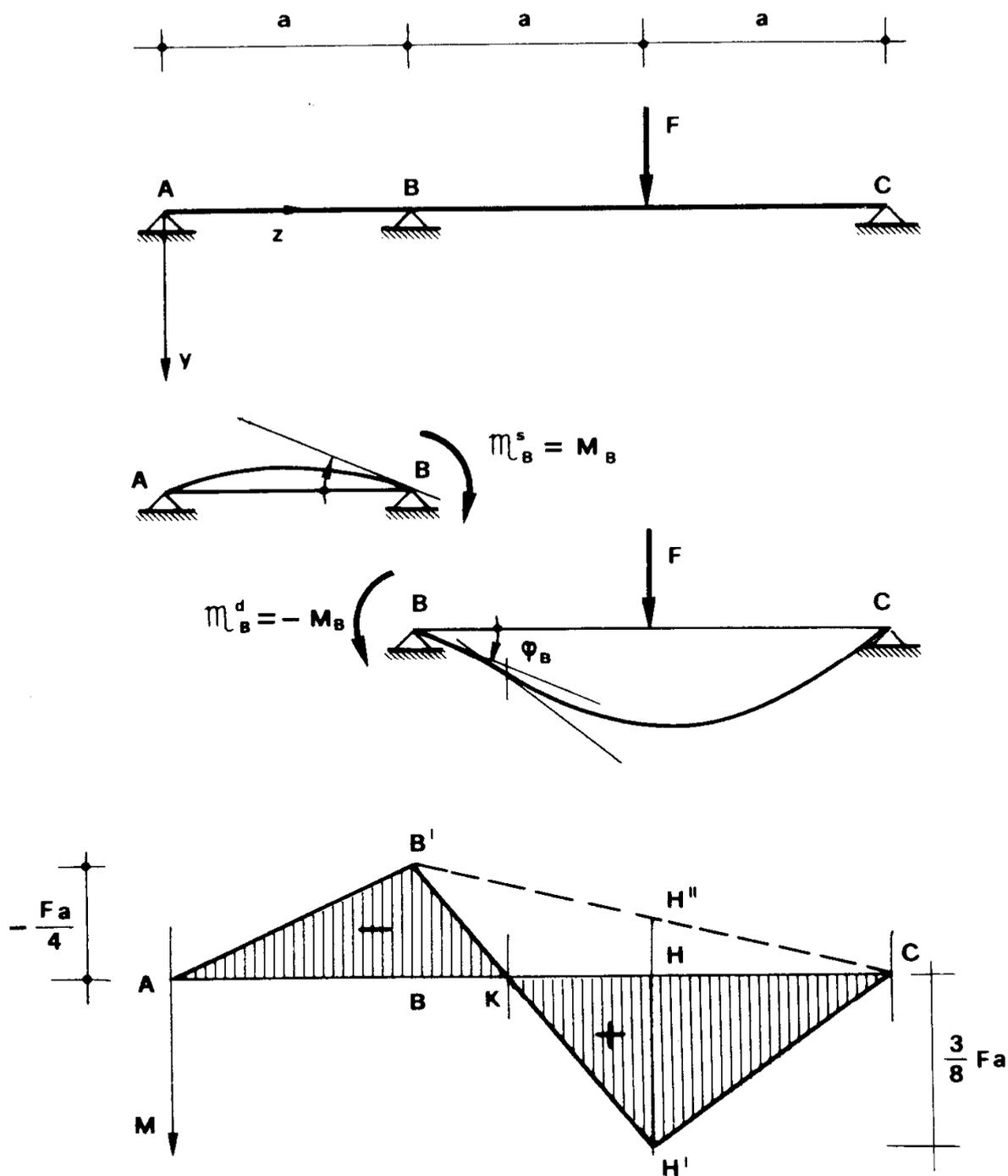


Figura 8a

La condizione di congruenza in B è che le due rotazioni  $\varphi_B^s$  e  $\varphi_B^d$ , della sezione B considerata appartenente ad AB o a BC, siano uguali.

Si ha (cap. 1, for. 39)

$$\varphi_B^s = \frac{\mathfrak{m}_B^s a}{3EI} = \frac{M_B a}{3EI}$$

e ancora (cap. 1, for. 36)

$$\varphi_B^{do} = -\frac{F(2a)^2}{16EI} = -\frac{Fa^2}{4EI}$$

$$\varphi_{BX}^d = \frac{\mathfrak{m}_B^d \cdot 2a}{3EI} = -\frac{2}{3} \frac{M_B a}{EI}$$

La condizione di congruenza si traduce perciò in

$$\frac{M_B a}{3EI} = -\frac{Fa^2}{4EI} - \frac{2}{3} \frac{M_B a}{EI} \quad (10)$$

da cui

$$M_B = -\frac{Fa}{4} \quad (11)$$

Il diagramma del momento si ha disegnando in  $B$  il segmento  $BB' = M_B$ , unendo  $B'$  con  $C$ , e riportando da  $H''$  verso il basso il segmento

$$H''H' = M_H^o = \frac{Fa}{2} = -2BB'$$

Il punto di flesso della deformata è in corrispondenza del punto  $K$  di momento nullo.

Lo stesso esercizio può eseguirsi scegliendo come struttura isostatica la trave appoggiata in  $A$  e  $C$  (fig. 8b); l'incognita iperstatica è così la reazione  $R_B$ . Tale reazione è ovviamente positiva verso il basso; nella figura essa è disegnata con il suo segno effettivo, e cioè negativa. La condizione di congruenza è  $v_B = 0$ , e cioè (cap. 1, for. 16)

$$\frac{7}{18} \frac{Fa^3}{EI} + \frac{8}{18} \frac{R_B a^3}{EI} = 0 \quad (12)$$

da cui

$$R_B = -\frac{7}{8}F. \quad (13)$$

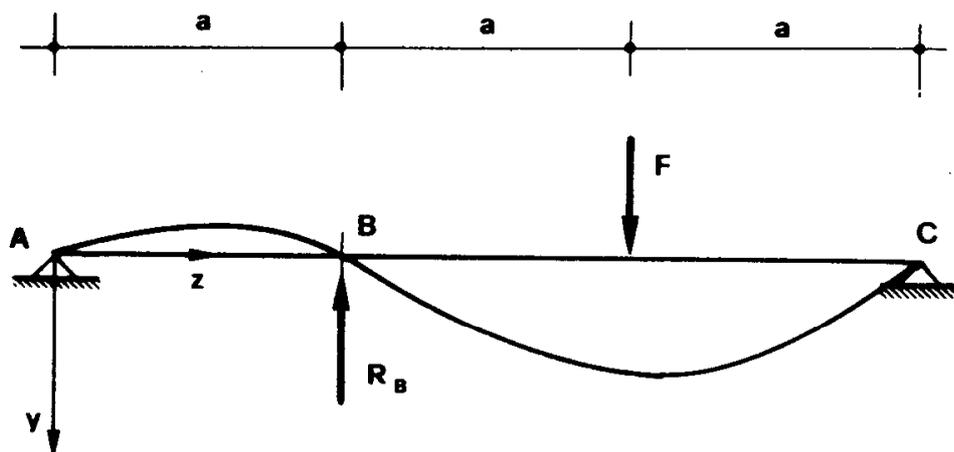


Figura 8b

Si ha poi

$$R_A = -\frac{F}{3} - \frac{2}{3}R_B = -\frac{F}{3} + \frac{7}{12}F$$

e cioè

$$R_A = \frac{F}{4}$$

da cui si ritrova

$$M_B = -\frac{Fa}{4}.$$

### Problema n. 9.

Si è in presenza della stessa trave della fig. 8, con la sola differenza che il vincolo in B è elasticamente cedevole:

$$\Delta_B = -cR_B ;$$

nella fig. 9 si è disegnato il cedimento dovuto ad una reazione negativa (reazione verso l'alto sulla trave, verso il basso sul vincolo).

Il cedimento  $\Delta_B$  provoca sulla sezione  $B$  considerata appartenente ad  $AB$  una rotazione

$$\varphi_{B\Delta}^s = - \frac{\Delta_B}{a},$$

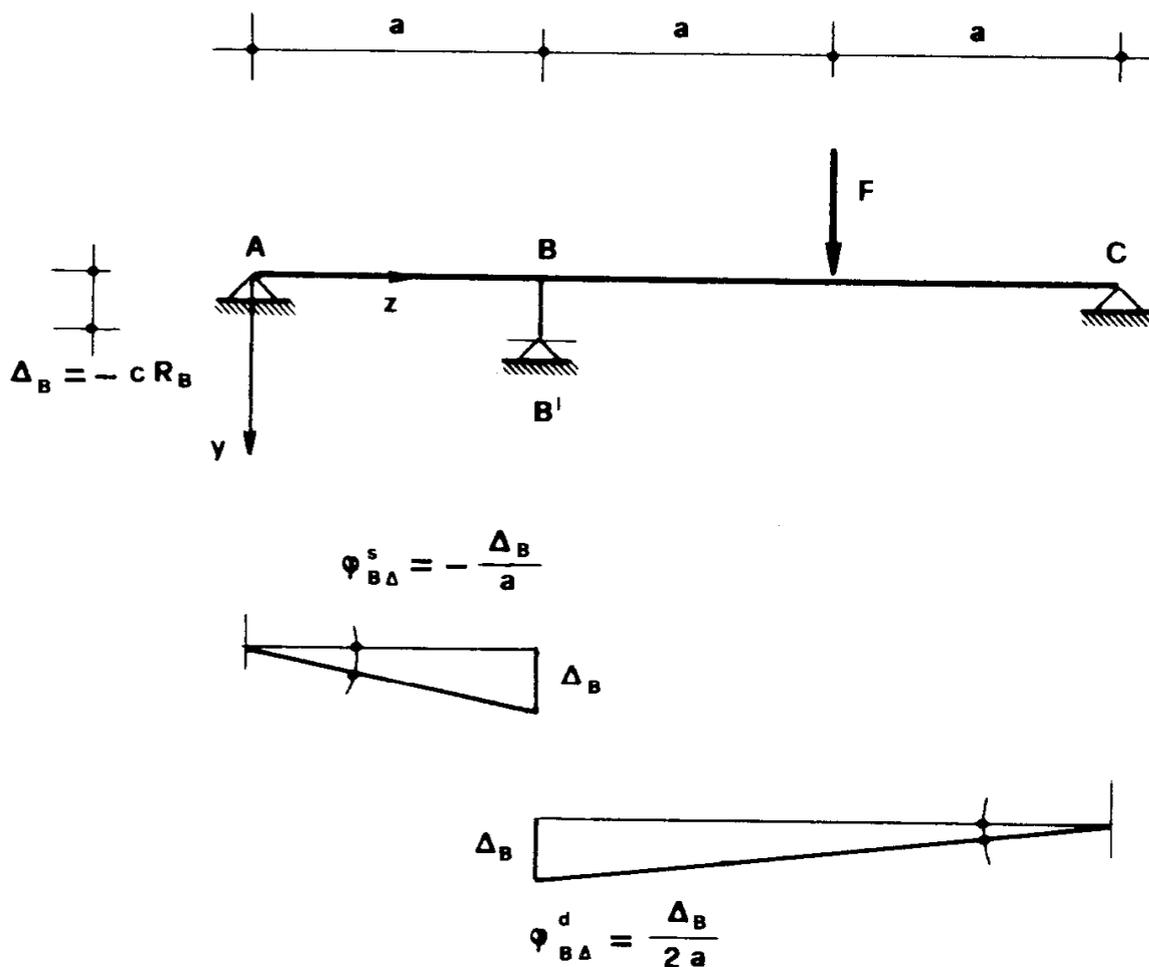


Figura 9

e sulla sezione  $B$  considerata appartenente a  $BC$  una rotazione

$$\varphi_{B\Delta}^d = \frac{\Delta_B}{2a}.$$

La (10) si modifica perciò in

$$\frac{M_B a}{3 EI} - \frac{\Delta_B}{a} = - \frac{F a^2}{4 EI} - \frac{2}{3} \frac{M_B a}{EI} + \frac{\Delta_B}{2a} \tag{14}$$

Occorre adesso esprimere  $\Delta_B$  in funzione di  $M_B$ . Si può scrivere, in relazione alla trave  $AB$  (fig. 8a),

$$R_B^s = \frac{M_B}{a},$$

ed in relazione alla trave  $BC$

$$R_B^d = -\frac{F}{2} + \frac{M_B}{2a}$$

Quindi è

$$R_B = -\frac{F}{2} + \frac{3}{2} \frac{M_B}{a}$$

$$\Delta_B = c \left( \frac{F}{2} - \frac{3}{2} \frac{M_B}{a} \right).$$

La (14) si scrive perciò

$$\frac{M_B a}{EI} + \frac{F a^2}{4EI} - \frac{3c}{2a} \left( \frac{F}{2} - \frac{3}{2} \frac{M_B}{a} \right) = 0$$

da cui

$$M_B = F a \frac{3EIc - a^3}{9EIc + 4a^3}. \quad (15)$$

Si verifica, che per  $c \rightarrow 0$  (vincolo in  $B$  rigido) è

$$M_B \rightarrow -\frac{F a}{4};$$

per  $c \rightarrow \infty$  (vincolo in  $B$  inesistente) è

$$M_B \rightarrow \frac{F a}{3}.$$

Assumendo come struttura isostatica la trave appoggiata in  $A$  e  $C$ , e quindi come incognita iperstatica la reazione  $R_B$ , l'equazione (12) si modifica come segue:

$$\frac{7}{18} \frac{F a^3}{EI} + \frac{8}{18} \frac{R_B a^3}{EI} = - c R_B$$

da cui

$$R_B = - F \frac{7 a^3}{2 (9 E I c + 4 a^3)} . \quad (16)$$

Per  $c \rightarrow 0$  è

$$R_B \rightarrow - \frac{7}{8} F ;$$

per  $c \rightarrow \infty$  è

$$R_B \rightarrow 0 .$$

Il momento in  $B$  è

$$M_B = \frac{1}{3} F a + \frac{2}{3} R_B a = F a \frac{3 E I c - a^3}{9 E I c + 4 a^3} ,$$

e quindi si ritrova il valore (15).

### Problema n. 10.

La trave della fig. 10, di sezione costante e materiale omogeneo, di luce  $l$ , è incastrata in  $A$  ed appoggiata in  $B$ ; l'incastro è angolarmente ed elasticamente cedevole, e si può scrivere

$$\varphi_A = - c \mathfrak{M}_A .$$

La trave è soggetta ad una variazione termica alla Navier uniformemente distribuita su tutta la luce. Assumendo come struttura isostatica la trave appoggiata  $AB$ , e cioè come incognita iperstatica la coppia  $\mathfrak{M}_A$  di incastro in  $A$ , la condizione di congruenza si scrive (cap. 1, for. 46)

$$\frac{\mathfrak{M}_A l}{3 EI} - \frac{\alpha \overline{\Delta t} l}{2 h} = c \mathfrak{M}_A$$

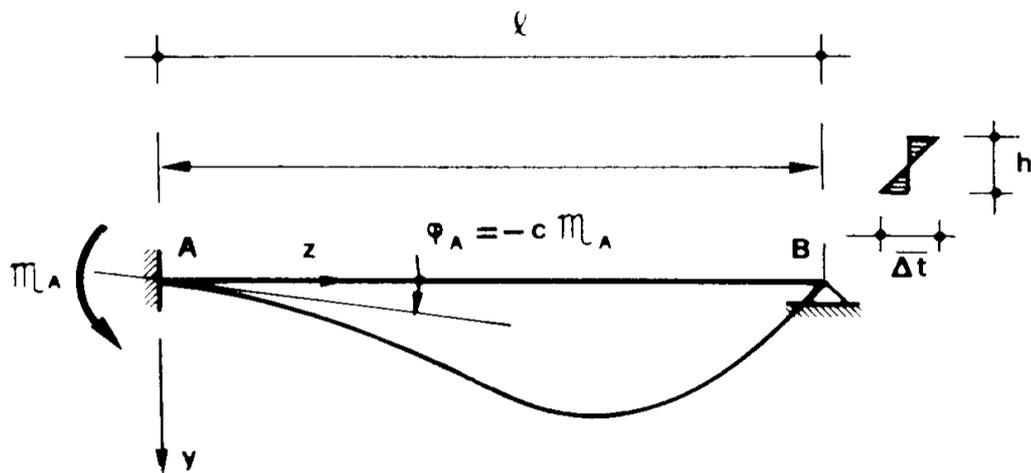


Figura 10

da cui

$$\mathfrak{M}_A = \frac{\alpha \overline{\Delta t} l}{2 h} \frac{3 EI}{l + 3 EI c} \quad (17)$$

Si verifica che per  $c \rightarrow 0$  è

$$\mathfrak{M}_A = \frac{3}{2} \frac{\alpha \overline{\Delta t} EI}{h}$$

$$M_A = - \frac{3}{2} \frac{\alpha \overline{\Delta t} EI}{h} ; \quad (18)$$

per  $c \rightarrow \infty$ , è invece  $\mathfrak{M}_A \rightarrow 0$ .

Nel caso della (18), e cioè per incastro rigido, è

$$\varphi_B = \frac{\alpha \overline{\Delta t} l}{2h} - \frac{3}{2} \frac{\alpha \overline{\Delta t} EI}{h} \cdot \frac{l}{6EI}$$

e cioè

$$\varphi_B = \frac{\alpha \overline{\Delta t} l}{4h} \quad (19)$$

Si osservi che la rotazione  $\varphi_B$  (19) non dipende dalla rigidità flessionale  $EI$  della trave, mentre la coppia d'incastro (18) è ad essa proporzionale. Ciò è conforme alla proposizione generale, che può così articolarsi:

a) se sulla struttura agiscono *forze*, le caratteristiche della sollecitazione interna dipendono soltanto dai rapporti tra le rigidità  $\rho$  delle varie sezioni della struttura, ma *non* dal loro valore assoluto; invece le deformazioni (spostamenti, rotazioni etc.) sono *inversamente* proporzionali al valore assoluto della rigidità di una qualsiasi sezione presa come sezione di riferimento (rigidità caratteristica  $\rho_c$  della struttura).

b) se sulla struttura agiscono *distorsioni* (variazioni termiche, cedimenti vincolari anelastici etc.) le caratteristiche della sollecitazione interna sono *direttamente* proporzionali al valore assoluto di  $\rho_c$ , mentre le deformazioni dipendono soltanto dai rapporti tra le rigidità  $\rho$  delle varie parti, ma *non* dal loro valore assoluto.

Quanto detto vale anche se i vincoli sono elasticamente cedevoli, rientrando la loro cedibilità (o, il che è lo stesso, la rigidità) in quella delle altre parti della struttura. Se, per esempio, con riferimento alla for. 17,  $EI$  raddoppia e la rigidità del vincolo raddoppia (cioè  $c$  si dimezza),  $m_A$  raddoppia anch'essa, e così tutte le altre caratteristiche della sollecitazione interna; analoga constatazione può farsi esaminando la (15) e la (16), e cioè si vede che, raddoppiando  $EI$  e dimezzando  $c$ ,  $M_B$  e la  $R_B$  (che dipendono questa volta da una forza applicata) restano inalterati.

### Problema n. 11.

La trave della fig. 11 è di sezione costante e di materiale omogeneo; gli appoggi  $ABC$  sono rigidi, la luce della trave  $AB$  è  $\alpha l$ , quella della trave  $BC$  è  $l$ . Un carico uniforme  $q$  agisce lungo tutta la trave.

Si assume come struttura isostatica quella costituita dalle due travi appoggiate  $AB$  e  $BC$ , e quindi come incognita iperstatica il momento in  $B$ .

La condizione di congruenza si scrive (cap. 1, for. 40)

$$M_B \frac{\alpha l}{3 EI} + \frac{q (\alpha l)^3}{24 EI} = - \frac{M_B l}{3 EI} - \frac{q l^3}{24 EI}$$

da cui

$$M_B = - \frac{q l^2}{8} \frac{1 + \alpha^3}{1 + \alpha} \quad (20)$$

Si osservi che nella fig. 11 la caratteristica  $M_B$  è disegnata con il suo segno effettivo, e cioè negativa.

Si nota che, per  $\alpha \rightarrow 1$  (luci eguali) è

$$M_B \rightarrow - \frac{q l^2}{8} ;$$

per  $\alpha \rightarrow 0$  (trave  $BC$  incastrata in  $B$ ) è ancora

$$M_B \rightarrow - \frac{q l^2}{8} .$$

Si ha poi

$$R_A = - \frac{q \alpha l}{2} - \frac{M_B}{\alpha l} = - \frac{q l}{2} \frac{3 \alpha^3 + 4 \alpha^2 - 1}{4 \alpha (1 + \alpha)}$$

$$R_B = - \frac{q \alpha l}{2} + \frac{M_B}{\alpha l} - \frac{q l}{2} + \frac{M_B}{l} = - \frac{q l}{2} \frac{\alpha^4 + 5 \alpha^3 + 8 \alpha^2 + 5 \alpha + 1}{4 \alpha (1 + \alpha)}$$

$$R_C = - \frac{q l}{2} - \frac{M_B}{l} = - \frac{q l}{2} \frac{- \alpha^3 + 4 \alpha + 3}{4 (1 + \alpha)} .$$

Per  $\alpha \rightarrow 1$  è

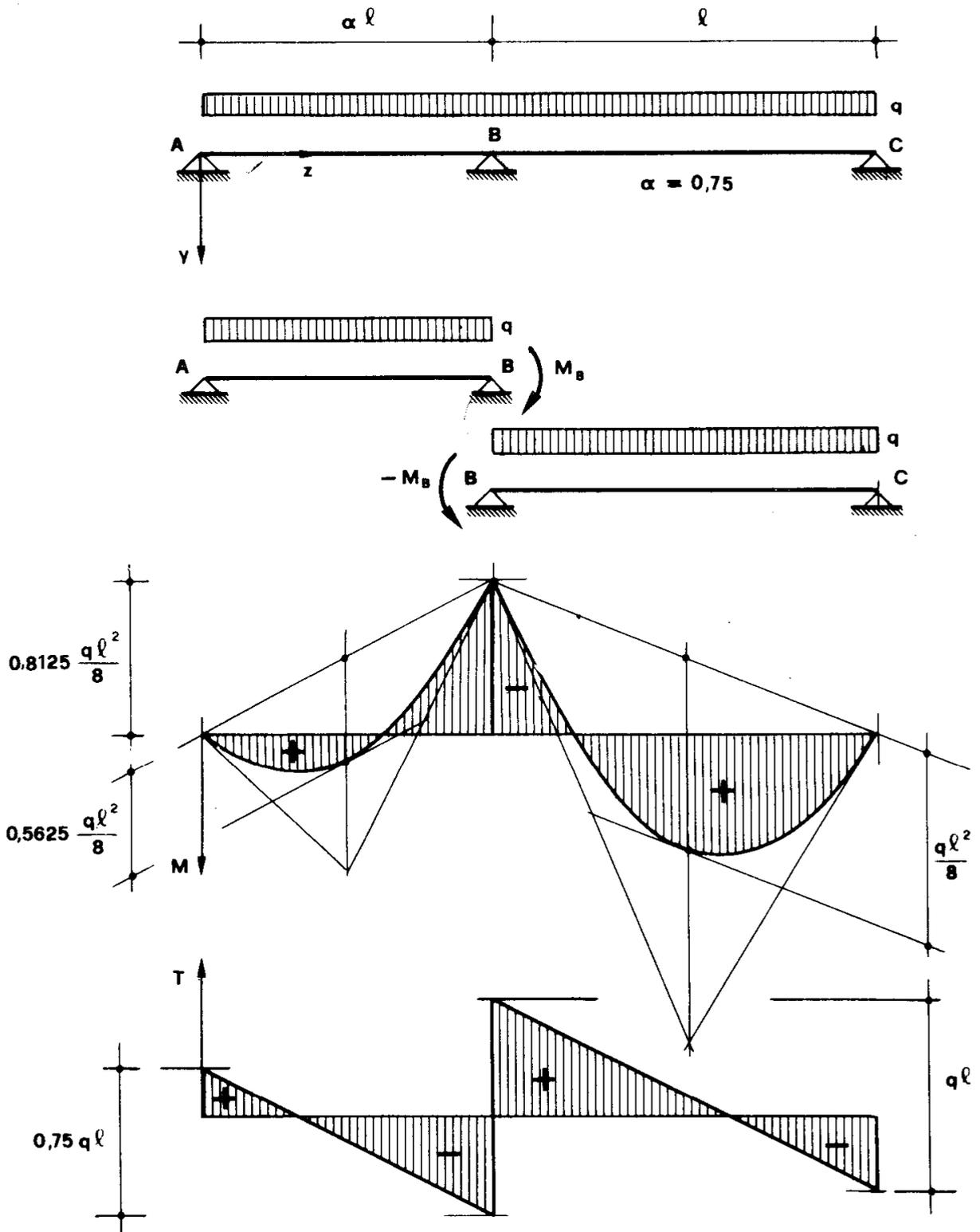


Figura 11

$$R_A \rightarrow -\frac{3}{8} ql$$

$$R_C \rightarrow -\frac{3}{8} ql$$

$$R_B \rightarrow -\frac{10}{8} ql ;$$

per  $\alpha \rightarrow 0$  è

$$R_A \rightarrow -\infty$$

$$R_B \rightarrow +\infty$$

$$R_C \rightarrow -\frac{3}{8} ql .$$

Per  $\alpha = \frac{3}{4}$ , è

$$M_B = -\frac{ql^2}{8} \cdot 0,8125$$

$$R_A = -\frac{ql}{2} \cdot 0,4792$$

$$R_B = -\frac{ql}{2} \cdot 2,2239$$

$$R_C = -\frac{ql}{2} \cdot 0,7969 ,$$

e si verifica che

$$R_A + R_B + R_C = -1,75 ql .$$

Per tale valore di  $\alpha$  sono stati disegnati nella fig. 11 i diagrammi  $M(z)$  e  $T(z)$ .

**Problema n. 12.**

La trave della fig. 12a è di sezione costante e di materiale omogeneo; essa è appoggiata in  $A$  e  $C$ , vincolata con bipendolo esterno in  $B$ . Un carico uniformemente ripartito  $q$  impegna l'intera luce. Si rende la struttura isostatica sopprimendo l'appoggio  $A$ ; la reazione iperstatica è quindi  $R_A$ . Si calcolano separatamente gli spostamenti  $v_A^{\circ'}$ ,  $v_A^{\circ''}$  e  $v_{AX}$  dovuti al carico  $q$  agente tra  $AB$ , al carico  $q$  agente su  $BC$ , ed alla forza  $X$  agente in  $A$  (fig. 12a, b, c).

Se il carico  $q$  agisce tra  $A$  e  $B$  (fig. 12a) il diagramma del momento è quello di una mensola nella parte  $AB$ ; nella parte  $BC$  è determinato dalla condizione di equipendenza in  $B$ . E' perciò

$$M_B^s = - \frac{qa^2}{2}$$

$$M_B^d = \frac{qa^2}{2} \cdot \frac{2}{a} \cdot b = qab.$$

Il tratto  $BC$  si deforma in modo da rispettare le condizioni

$$v_C = 0$$

$$\left( \frac{dv}{dz} \right)_B = 0.$$

Poichè il diagramma del momento è quello di una trave  $BC$  appoggiata in  $B$  e  $C$ , e soggetta alla coppia  $-qab$  in  $B$ , la deformata, riferita alla retta  $B'C$ , deve essere la deformata di tale trave riferita alla congiungente gli estremi; quindi è

$$HB'C = qab \cdot \frac{b}{3EI}$$

$$CH = AA' = \frac{qab^3}{3EI}.$$

Si è tenuto così conto delle deformazioni del tratto  $BC$ ; resta da prendere in esame l'effetto su  $v_A$  delle deformazioni del tratto  $AB$ . La deformata di  $AB$ , poichè in  $B$  l'inclinazione è nulla, è quella di una men-

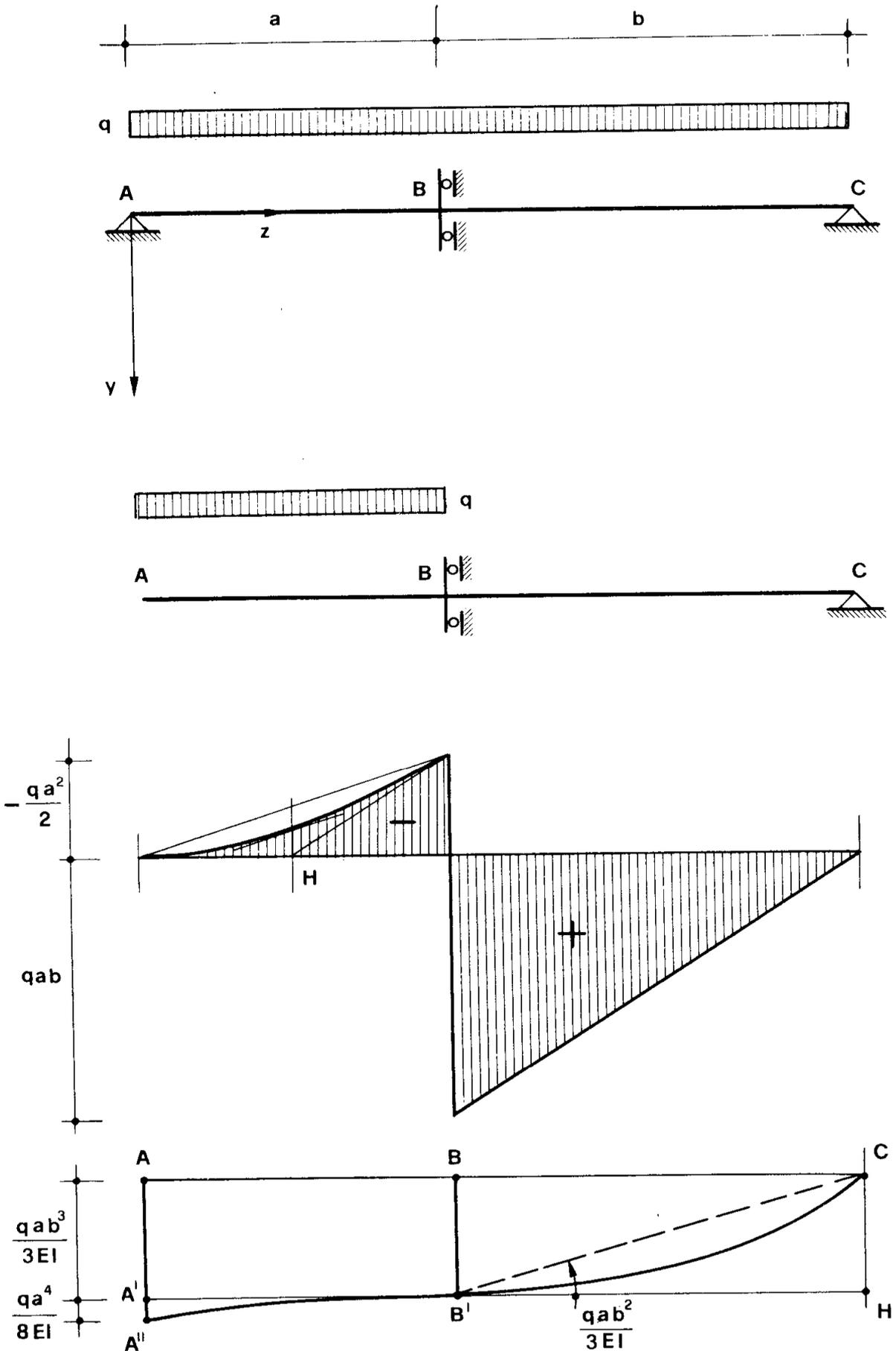


Figura 12a

sola  $AB$  incastrata in  $B$ , e quindi (cap. 1, for. 33)

$$A'A'' = \frac{qa^4}{8EI}.$$

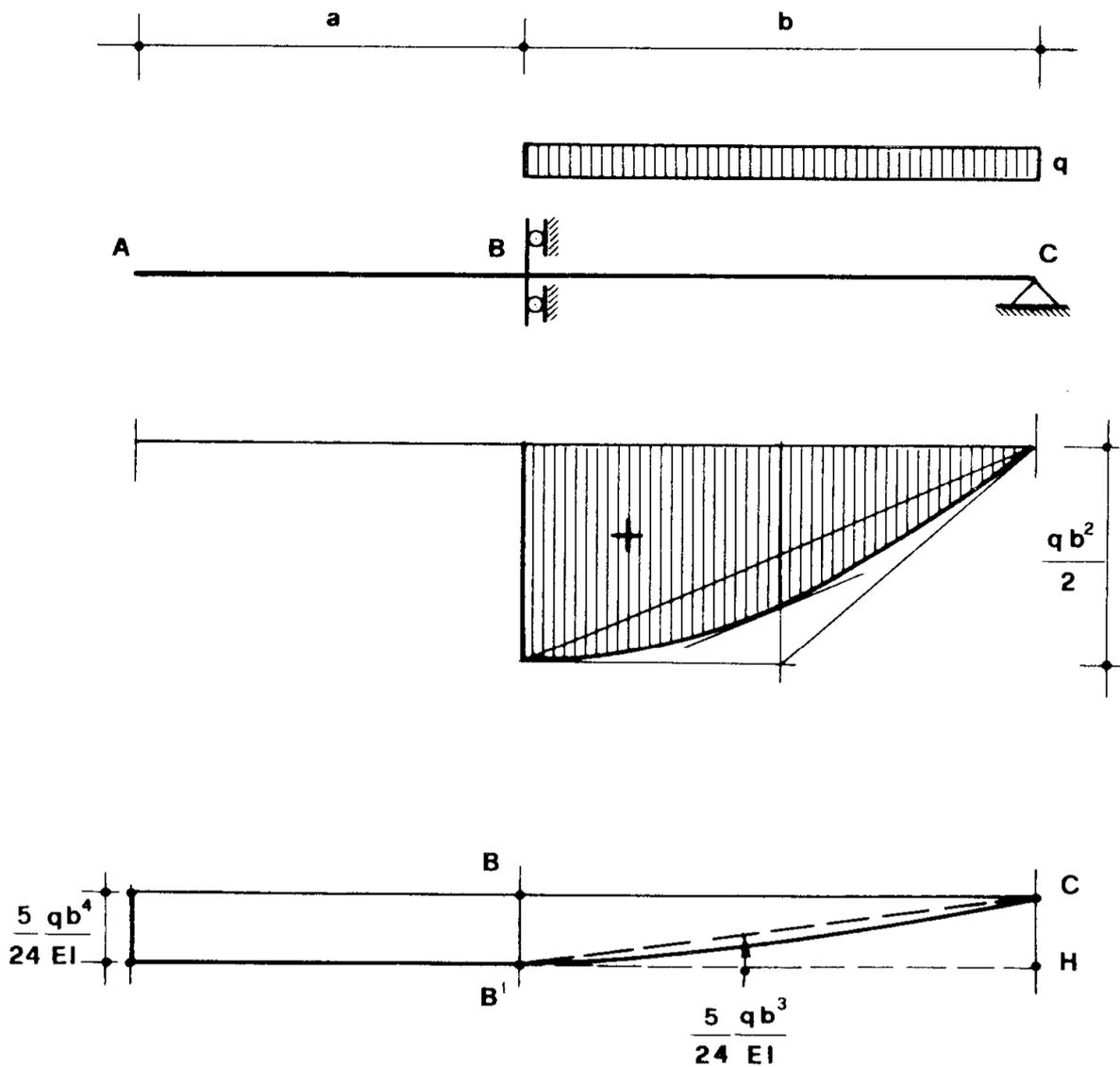


Figura 12b

E' perciò

$$v_4^{o'} = \frac{q}{24EI} (3a^4 + 8ab^3).$$

Si considera poi la trave isostatica soggetta al carico  $q$  tra  $B$  e  $C$  (fig. 12b); il diagramma del momento, di ovvio disegno, interessa solo

il tratto  $BC$ ; in  $B$  si ha

$$M_B^d = \frac{q b^2}{2}$$

Il diagramma del momento è somma di quello generato da una cop-

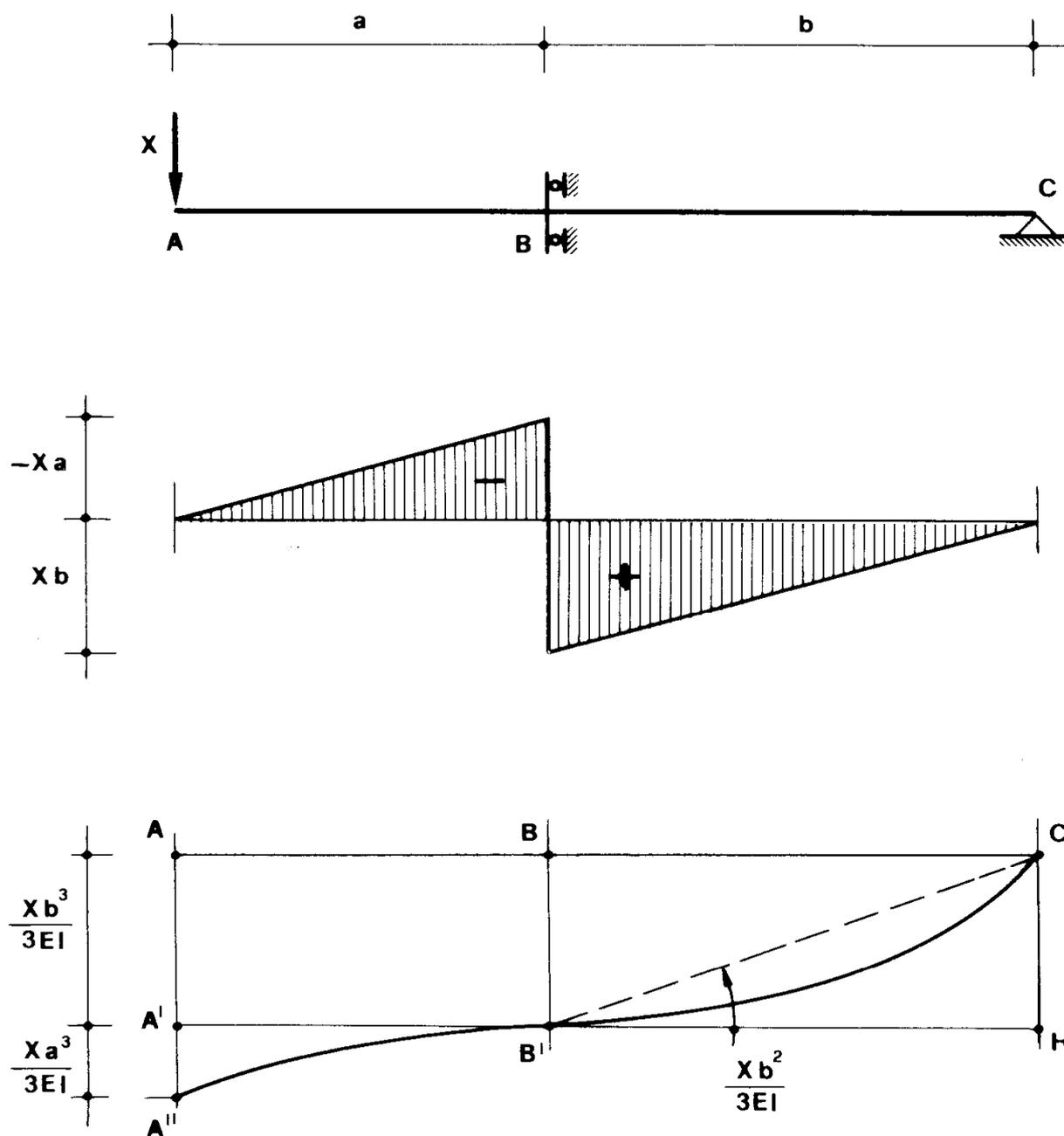


Figura 12c

pia  $-\frac{q b^2}{2}$  agente in  $B$ , e di quello generato da un carico  $q$ , ambedue sulla trave  $BC$  appoggiata agli estremi. Quindi risulta (cap. 1 for. 40)

$$\begin{aligned}
 HB'C &= = \frac{qb^2}{2} \cdot \frac{b}{3EI} + \frac{qb^3}{24EI} = \\
 &= = \frac{5}{24} \frac{qb^3}{EI} \\
 CH &= v_A^{o''} = \frac{5}{24} \frac{qb^4}{EI} .
 \end{aligned}$$

Si prende in esame infine la trave isostatica (fig. 12c) soggetta in  $A$  alla forza  $X$ ; il diagramma del momento è costituito da due rette parallele per  $A$  e per  $C$ , ed è

$$\begin{aligned}
 M_B^s &= -Xa \\
 M_B^d &= Xb .
 \end{aligned}$$

Ragionando come sulla struttura della fig. 12a, si ottiene

$$\begin{aligned}
 HB'C &= Xb \cdot \frac{b}{3EI} \\
 CH &= AA' = \frac{Xb^3}{3EI} ;
 \end{aligned}$$

così pure è

$$A'A'' = -\frac{Xa^3}{3EI} ,$$

e quindi

$$v_{AX} = \frac{X}{3EI} (a^3 + b^3) .$$

La condizione di congruenza si scrive così

$$v_A^{o'} + v_A^{o''} + v_{AX} = 0$$

e cioè

$$\frac{q}{24 EI} (3a^4 + 8ab^3 + 5b^4) + \frac{X}{3 EI} (a^3 + b^3) = 0$$

da cui

$$X = R_A = -q \frac{3a^4 + 8ab^3 + 5b^4}{8(a^3 + b^3)}$$

Si osserva che, per  $a \rightarrow 0$ , è

$$R_A \rightarrow -\frac{5}{8} qb ;$$

infatti la trave tende, per  $a \rightarrow 0$ , allo schema di  $BC$  incastrata in  $B$  ( $v_B \rightarrow 0$ ) e appoggiata in  $C$ .

### Problema n. 13.

Il portale della fig. 13a è caratterizzato da  $EI = cost$ ; come struttura isostatica si assume quella della fig. 13b; l'incognita iperstatica è perciò la reazione  $R_A$  dell'appoggio in  $A$ . Se  $v_{Aq}^\circ$  e  $v_{AF}^\circ$  sono le componenti secondo  $y$  degli spostamenti in  $A$  dovuti al carico  $q$  ed alla forza  $F$ , e  $v_{AX}$  è quella dovuta ad  $R_A$ , la condizione di congruenza per vincolo rigido è

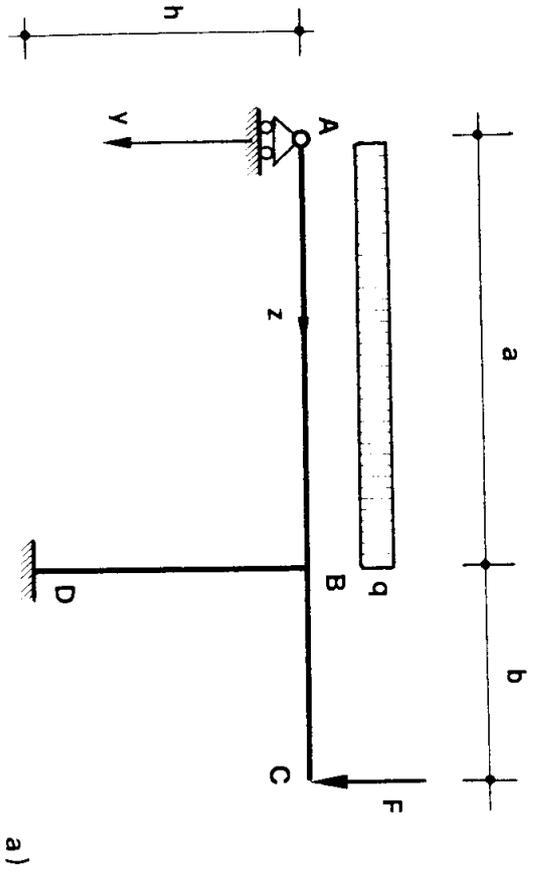
$$v_{Aq}^\circ + v_{AF}^\circ + v_{AX} = 0 .$$

Per il calcolo di  $v_{Aq}^\circ$  (fig. 13b) l'esame del diagramma del momento permette di scrivere

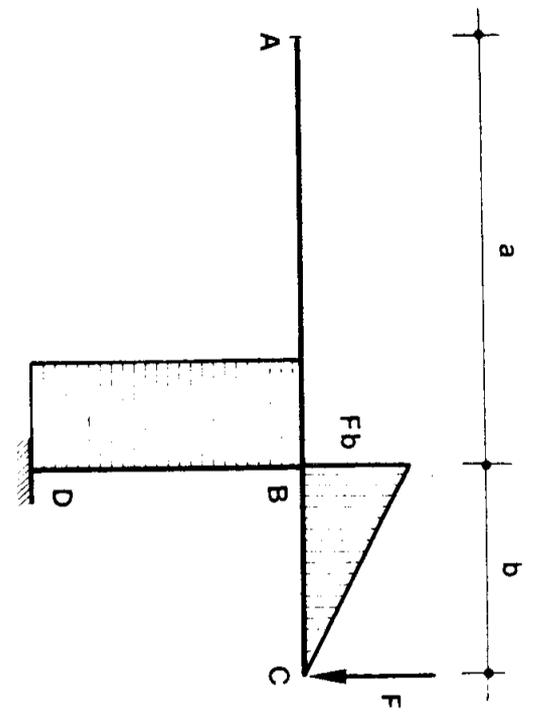
$$\varphi_B = \frac{qa^2}{2} \cdot \frac{h}{EI}$$

$$v_{Aq}^\circ = \varphi_B a + \frac{qa^4}{8EI} = \frac{q}{8EI} (a^4 + 4a^3 h) .$$

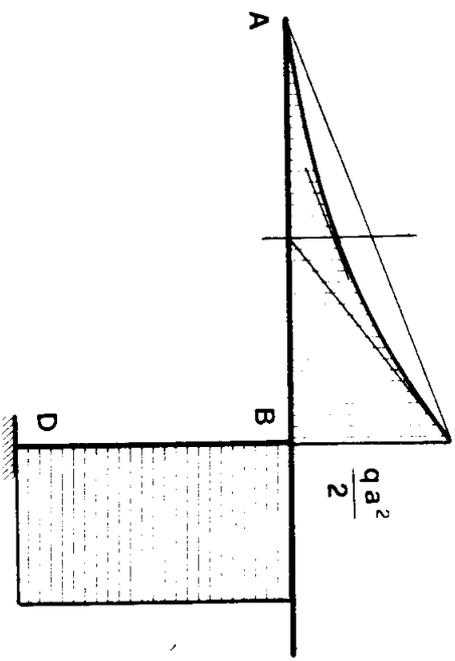
Per il calcolo di  $v_{AF}^\circ$  (fig. 13c) si procede analogamente:



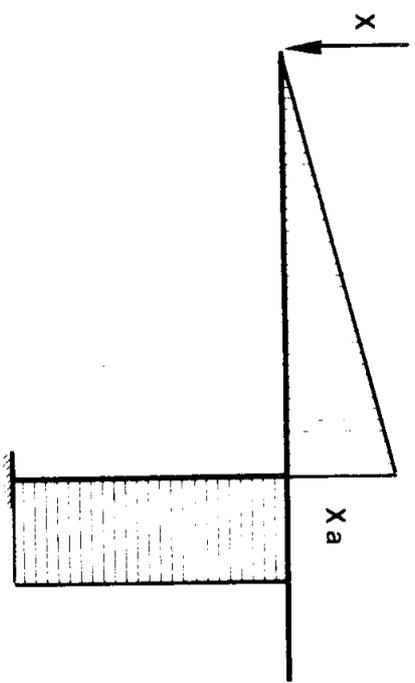
a)



c)



b)



d)

Figura 13a, b, c, d

$$\varphi_B = -Fb \cdot \frac{h}{EI}$$

$$v_{AF}^{\circ} = \varphi_B a = -\frac{F}{EI} abh .$$

Così pure (fig. 13d) è, per effetto della  $X$ ,

$$\varphi_B = Xa \cdot \frac{h}{EI}$$

$$v_{AX} = \varphi_B a + \frac{Xa^3}{3EI} = \frac{X}{3EI} (a^3 + 3a^2 h) .$$

La condizione di congruenza porge

$$\frac{q}{8EI} (a^4 + 4a^3 h) - \frac{F}{EI} abh + \frac{X}{3EI} (a^3 + 3a^2 h) = 0$$

da cui

$$X = \frac{24Fabh - 3qa^3(a + 4h)}{8a^2(a + 3h)} .$$

Si verifica che per  $h \rightarrow 0$  (incastro in  $B$ ) è

$$X \rightarrow -\frac{3}{8} qa ;$$

per  $h \rightarrow \infty$  (appoggio in  $B$ ) è

$$X \rightarrow F \frac{b}{a} - q \frac{a}{2} .$$

**Problema n. 14.**

Il portale della fig. 14a, con  $EI = cost$ , è vincolato in  $A$  con un appoggio rigido, il cui piano di scorrimento è inclinato di  $45^\circ$  sull'orizzontale. Si elimina tale vincolo per rendere la struttura isostatica (fig. 14b).

La retta d'azione  $a$  di  $X = R_A$  si orienta come nella fig. 14a; se un qualsiasi spostamento  $s_A$  ha componenti  $v_A$  e  $w_A$  secondo  $y$  e  $z$  (fig. 14e), la componente  $s_{Aa}$  di  $s_A$  su  $a$  è

$$s_{Aa} = \frac{1}{\sqrt{2}} (w_A - v_A) . \quad (21)$$

Così pure, le componenti di  $X$  secondo  $y$  e  $z$  sono rispettivamente  $-\frac{X}{\sqrt{2}}$  e  $+\frac{X}{\sqrt{2}}$ .

Se perciò  $v_A^\circ$  e  $w_A^\circ$  sono le componenti dello spostamento  $s_A^\circ$  dovuto ad  $F$ ,  $v_A'$  e  $w_A'$  le componenti dello spostamento  $s_A'$  dovuto ad una forza  $X_y = 1$  agente in  $A$ ,  $v_A''$  e  $w_A''$  le componenti dello spostamento  $s_A''$  dovuto ad una forza  $X_z = 1$  agente in  $A$ , la condizione di congruenza

$$s_{Aa}^\circ + s_{Aa}' X_y + s_{Aa}'' X_z = 0$$

si scrive

$$s_{Aa}^\circ - \frac{X}{\sqrt{2}} s_{Aa}' + \frac{X}{\sqrt{2}} s_{Aa}'' = 0 , \quad (22)$$

e ancora

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (w_A^\circ - v_A^\circ) - \frac{X}{2} (w_A' - v_A') + \frac{X}{2} (w_A'' - v_A'') = 0 .$$

Per il calcolo di  $w_A^\circ$  e  $v_A^\circ$  (fig. 14b) il diagramma dei momenti consente di scrivere

$$\varphi_C = \frac{Fa}{2} \cdot \frac{h}{EI} = \frac{F}{2EI} ah$$

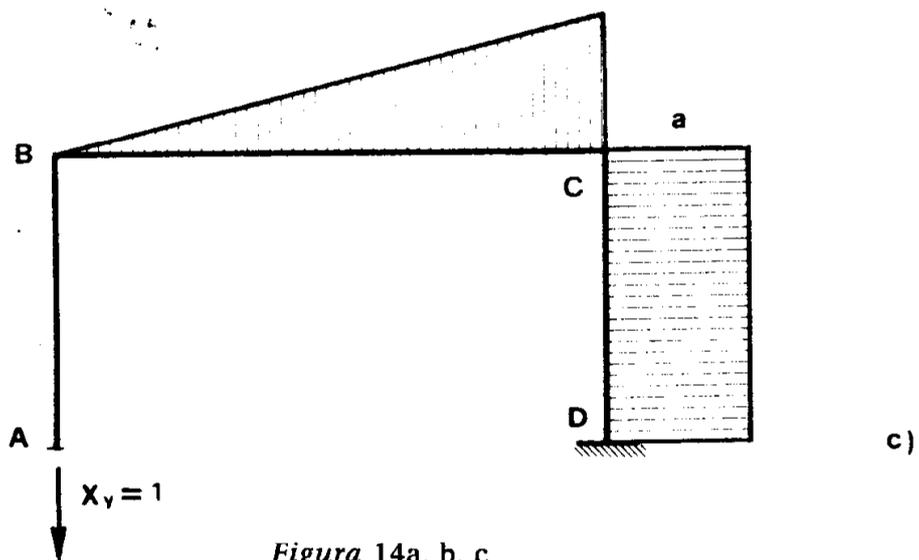
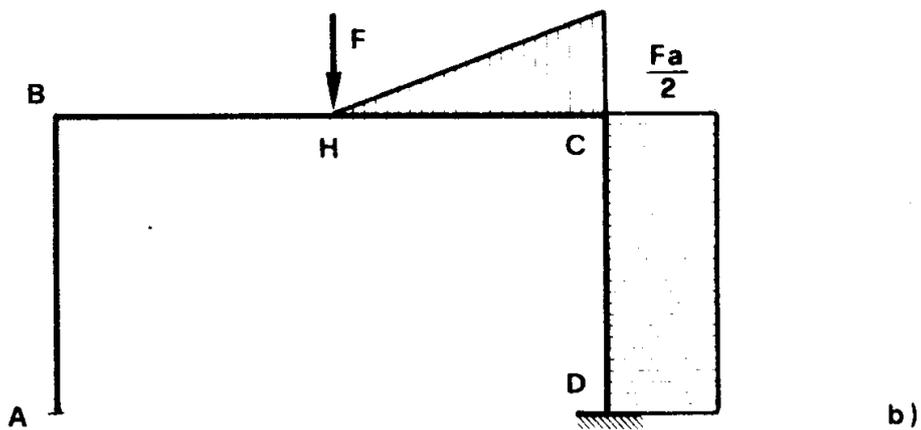
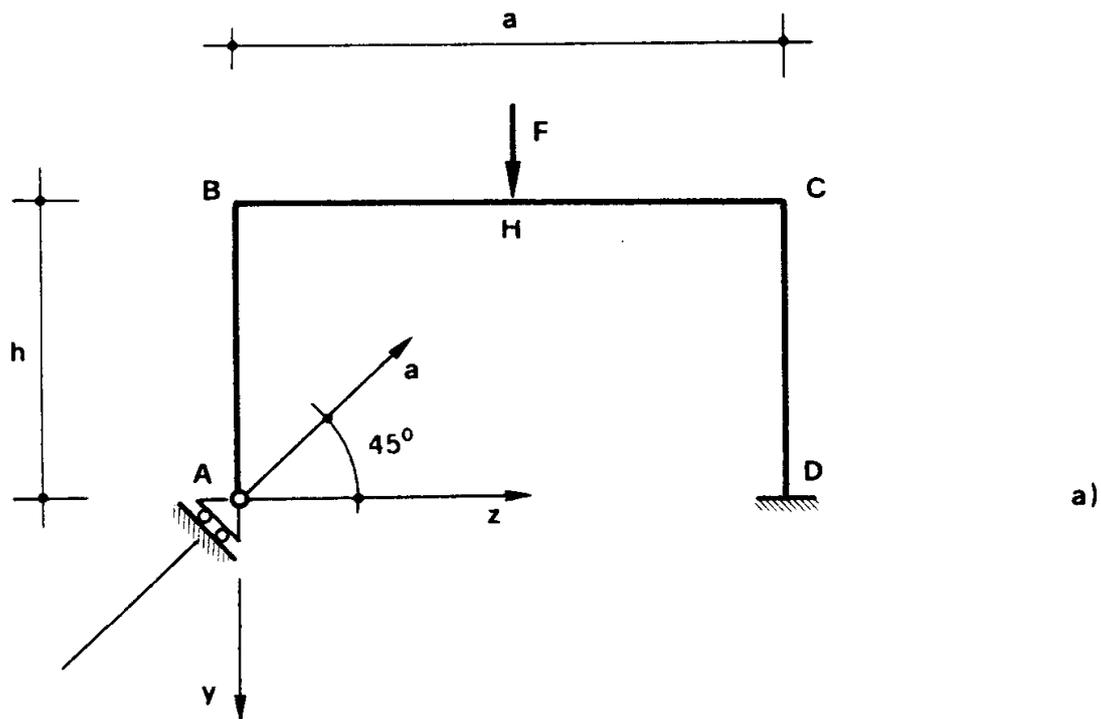


Figura 14a, b, c

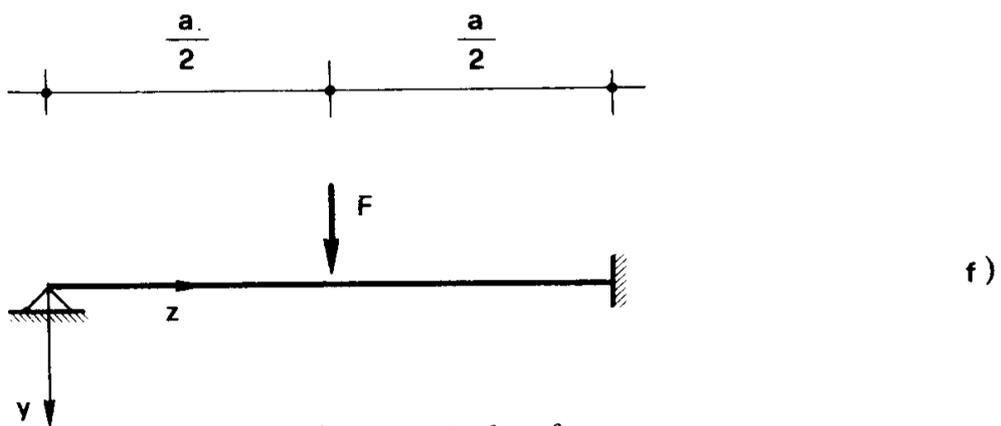
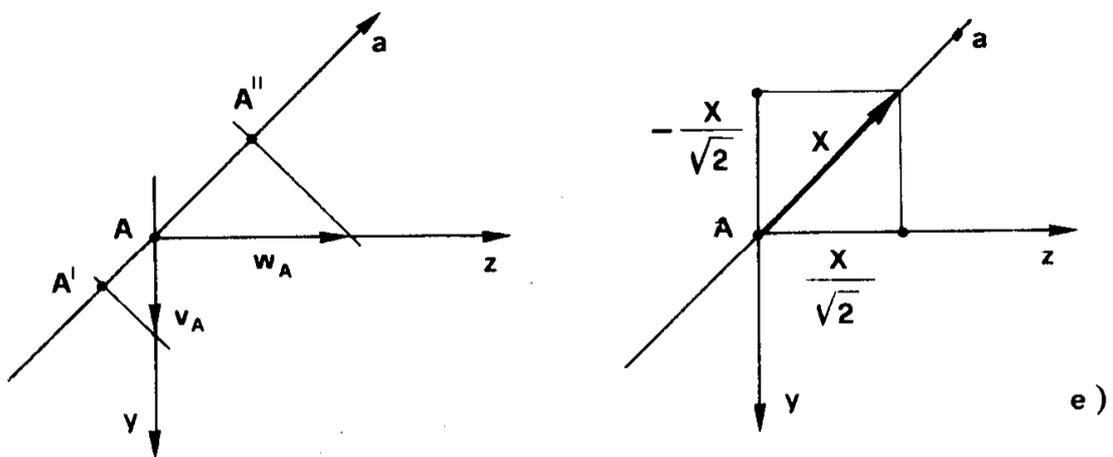
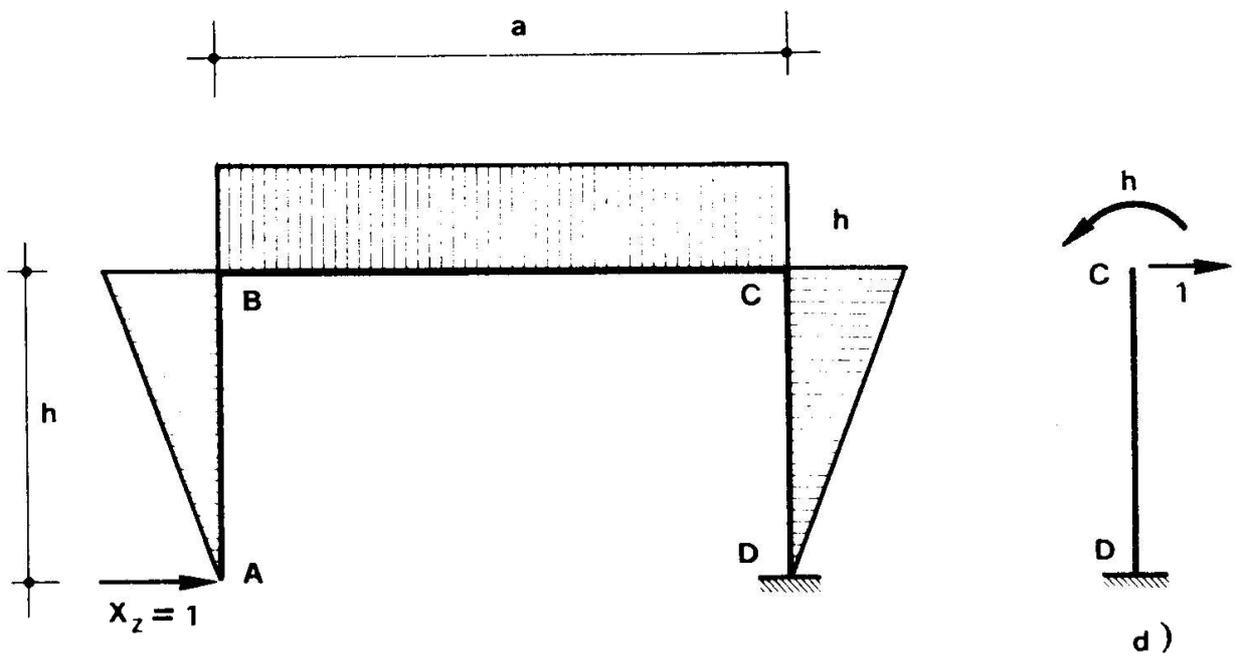


Figura 14d, e, f

$$w_C = -\frac{Fa}{2} \cdot \frac{h^2}{2EI} = -\frac{F}{4EI} ah^2$$

$$\varphi_H = \varphi_C + \frac{F}{2EI} \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{F}{8EI} (a^2 + 4ah)$$

$$w_H = w_C = -\frac{F}{4EI} ah^2$$

$$v_H = \varphi_C \cdot \frac{a}{2} + \frac{F}{3EI} \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{F}{24EI} (a^3 + 6a^2h)$$

$$w_A^o = w_H + \varphi_H h = \frac{F}{8EI} (a^2 h + 2ah^2)$$

$$v_A^o = v_H + \varphi_H \frac{a}{2} = \frac{F}{48EI} (5a^3 + 24a^2h)$$

Per il calcolo di  $w'_A$  e  $v'_A$  (fig. 14c) si ha, analogamente,

$$\varphi_C = a \cdot \frac{h}{EI} = \frac{1}{EI} ah$$

$$w_C = -a \cdot \frac{h^2}{2EI} = -\frac{1}{2EI} ah^2$$

$$\varphi_B = \varphi_C + 1 \cdot \frac{a^2}{2EI} = \frac{1}{2EI} (a^2 + 2ah)$$

$$w_B = w_C = -\frac{1}{2EI} ah^2$$

$$v_B = \varphi_C a + 1 \cdot \frac{a^3}{3EI} = \frac{1}{3EI} (a^3 + 3a^2h)$$

$$\varphi_A = \varphi_B = \frac{1}{2 EI} (a^2 + 2 ah)$$

$$w'_A = w_B + \varphi_B h = \frac{1}{2 EI} (a^2 h + ah^2)$$

$$v'_A = v_B = \frac{1}{3 EI} (a^3 + 3a^2 h)$$

Per il calcolo di  $w''_A$  e  $v''_A$  (fig. 14d) si ha

$$\varphi_C = h \cdot \frac{h}{EI} - 1 \cdot \frac{h^2}{2 EI} = \frac{1}{2 EI} h^2$$

$$w_C = -h \cdot \frac{h^2}{2 EI} + 1 \cdot \frac{h^3}{3 EI} = -\frac{1}{6 EI} h^3$$

$$\varphi_B = \varphi_C + h \cdot \frac{a}{EI} = \frac{1}{2 EI} (2ah + h^2)$$

$$w_B = w_C = -\frac{1}{6 EI} h^3$$

$$v_B = \varphi \cdot a + h \cdot \frac{a^2}{2 EI} = \frac{1}{2 EI} (a^2 h + ah^2)$$

$$\varphi_A = \varphi_B + 1 \cdot \frac{h^2}{2 EI} = \frac{1}{EI} (ah + h^2)$$

$$w''_A = w_B + \varphi_B h + 1 \cdot \frac{h^3}{3 EI} = \frac{1}{6 EI} (6ah^2 + 4h^3)$$

$$v''_A = v_B = \frac{1}{2 EI} (a^2 h + ah^2)$$

La (22) si scrive perciò come segue:

$$\frac{F\sqrt{2}}{EI} \left( \frac{a^2h + 2ah^2}{8} - \frac{5a^3 + 24a^2h}{48} \right) +$$

$$+ \frac{X}{EI} \left( \frac{a^3 + 3a^2h}{3} - \frac{a^2h + ah^2}{2} + \frac{6ah^2 + 4h^3}{6} - \frac{a^2h + ah^2}{2} \right) = 0,$$

da cui si ottiene

$$X = F \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{5a^3 + 18a^2h - 12ah^2}{2a^3 + 4h^3}.$$

Si verifica che, per  $h \rightarrow 0$  (trave  $BC$  incastrata in  $C$ , e con appoggio a  $45^\circ$  in  $B$ ), è

$$X \rightarrow \frac{5}{16} \sqrt{2} F. \quad (*)$$

### Problema n. 15.

La trave della fig. 15, con  $EI = cost$ , è doppiamente iperstatica; si assume come trave isostatica quella appoggiata in  $A$  e  $B$ , le iperstatiche sono quindi le coppie d'incastro  $\mathfrak{M}_A$  ed  $\mathfrak{M}_B$ . Le condizioni di congruenza sono, pur esse, due:

$$\varphi_A = 0$$

$$\varphi_B = 0.$$

Si ha quindi (cap. 1, for. 34)

(\*) Nella trave della fig. 14f si ha, scegliendo  $R_B$  come incognita,

$$\frac{F}{3EI} \left( \frac{a}{2} \right)^3 + \frac{F}{2EI} \left( \frac{a}{2} \right)^2 \cdot \frac{a}{2} + \frac{R_B a^3}{3EI} = 0$$

da cui

$$R_B = -\frac{5}{16} F.$$

$$-\frac{\beta(1-\beta^2)}{6} \frac{Fl^2}{EI} + \frac{m_A l}{3EI} - \frac{m_B l}{6EI} = 0$$

$$\frac{\alpha(1-\alpha^2)}{6} \frac{Fl^2}{EI} - \frac{m_A l}{6EI} + \frac{m_B l}{3EI} = 0$$

e cioè

$$2m_A - m_B = \beta(1-\beta^2) Fl$$

$$-m_A + 2m_B = -\alpha(1-\alpha^2) Fl$$

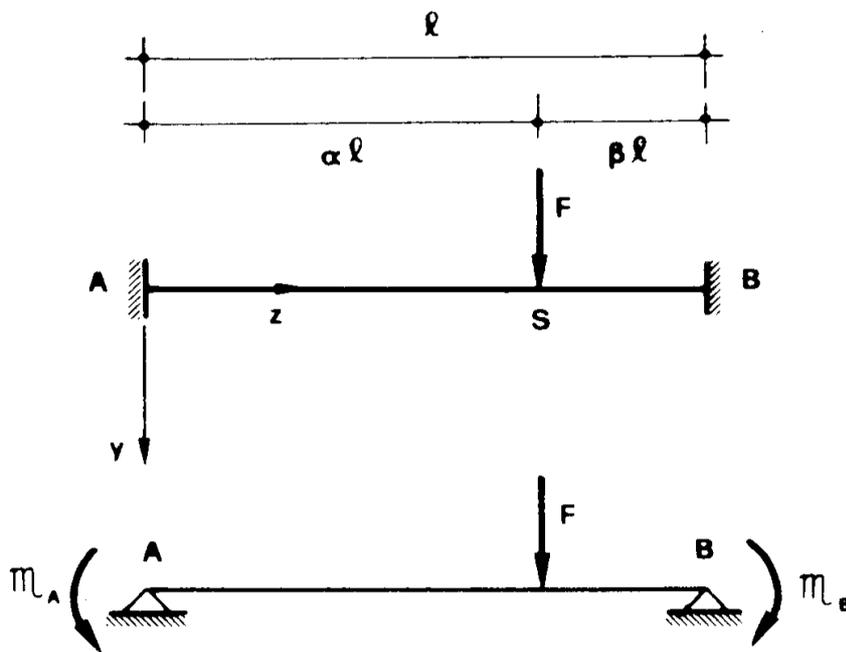


Figura 15

da cui

$$m_A = Fl \frac{\begin{vmatrix} \beta(1-\beta^2) & -1 \\ -\alpha(1-\alpha^2) & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{Fl}{3} [2\beta(1-\beta^2) - \alpha(1-\alpha^2)]$$

$$m_B = Fl \frac{\begin{vmatrix} 2 & \beta(1-\beta^2) \\ -1 & -\alpha(1-\alpha) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{Fl}{3} [-2\alpha(1-\alpha^2) + \beta(1-\beta^2)].$$

Dalla relazione  $\alpha + \beta = 1$  si trae infine

$$\begin{aligned} m_A &= Fl\beta^2 (1 - \beta) \\ m_B &= -Fl\alpha^2 (1 - \alpha) \end{aligned} \quad (23)$$

e quindi

$$\begin{aligned} M_A &= -Fl\beta^2 (1 - \beta) \\ M_B &= -Fl\alpha^2 (1 - \alpha) \end{aligned} \quad (24)$$

Si verifica

$$\begin{aligned} \alpha = 0 & \quad m_A = m_B = 0 \\ \alpha = 1 & \quad m_A = m_B = 0 \\ \alpha = \frac{1}{2} & \quad M_A = -\frac{Fl}{8} \\ & \quad M_B = -\frac{Fl}{8} \end{aligned} \quad (25)$$

### Problema n. 16.

La stessa trave del problema precedente è soggetta ad una coppia (fig. 16).

Le condizioni di congruenza si scrivono in tal caso (cap. 1, for. 37)

$$\begin{aligned} \frac{3\beta^2 - 1}{6} \frac{ml}{EI} + \frac{m_A l}{3EI} - \frac{m_B l}{6EI} &= 0 \\ \frac{3\alpha^2 - 1}{6} \frac{ml}{EI} - \frac{m_A l}{6EI} + \frac{m_B l}{3EI} &= 0 \end{aligned}$$

e cioè

$$\begin{aligned} 2 m_A - m_B &= - (3\beta^2 - 1) m \\ - m_A + 2 m_B &= - (3\alpha^2 - 1) m \end{aligned}$$

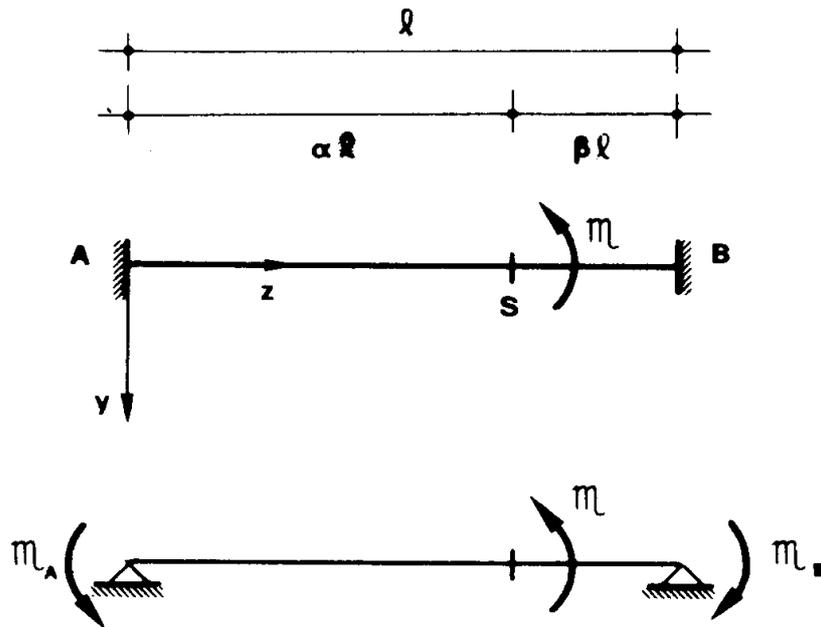


Figura 16

da cui

$$m_A = \frac{\begin{vmatrix} 1 - 3\beta^2 & -1 \\ 1 - 3\alpha^2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{m}{3} (3 - 3\alpha^2 - 6\beta^2)$$

$$m_B = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 - 3\beta^2 \\ -1 & 1 - 3\alpha^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{m}{3} (3 - 3\beta^2 - 6\alpha^2)$$

Dalla relazione  $\alpha + \beta = 1$  si trae infine

$$m_A = m\beta(2 - 3\beta)$$

$$m_B = m\alpha(2 - 3\alpha)$$

(26)

e quindi

$$\begin{aligned} M_A &= -m\beta(2 - 3\beta) \\ M_B &= m\alpha(2 - 3\alpha) \end{aligned} \quad (27)$$

Si verifica

$$\begin{aligned} \alpha = 0 & \quad m_A = 0 & \quad m_B = 0 \\ \alpha = 1 & \quad m_A = 0 & \quad m_B = 0 \\ \alpha = \frac{1}{2} & \quad M_A = -\frac{m}{4} & \quad M_B = \frac{m}{4} \end{aligned} \quad (28)$$

#### Problema n. 17.

La trave della fig. 17, con  $EI = cost$  e due incastri rigidi alle estremità, è soggetta ad un carico  $q$  su tutta la luce. Assumendo sempre come struttura isostatica la trave appoggiata, si può scrivere (cap. 1, for. 40)

$$-\frac{ql^3}{24EI} + \frac{m_A l}{3EI} - \frac{m_B l}{6EI} = 0$$

$$\frac{ql^3}{24EI} - \frac{m_A l}{6EI} + \frac{m_B l}{3EI} = 0$$

$$2m_A - m_B = \frac{ql^2}{4}$$

$$-m_A + 2m_B = -\frac{ql^2}{4}$$

da cui

$$m_A = \frac{ql^2}{4} \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{ql^2}{12}$$

$$m_B = \frac{ql^2}{4} \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = -\frac{ql^2}{12}$$

e quindi

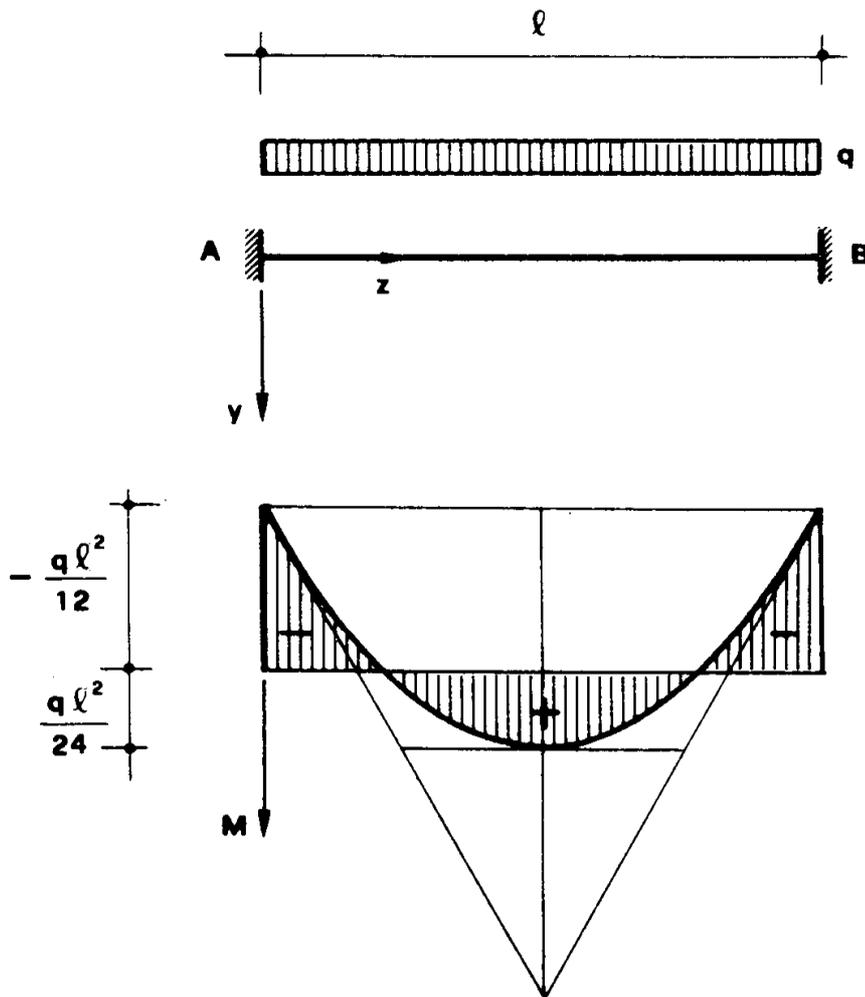


Figura 17

$$M_A = M_B = -\frac{ql^2}{12} \quad (29)$$

**Problema n. 18.**

La stessa trave dei tre problemi precedenti è soggetta ad una varia-

zione termica alla Navier  $\overline{\Delta t}$  (fig. 18). Si può scrivere, sulla trave appoggiata agli estremi, (cap. 1, for. 46)

$$-\frac{\alpha \overline{\Delta t}}{2h} l + \frac{m_A l}{3EI} - \frac{m_B l}{6EI} = 0$$

$$\frac{\alpha \overline{\Delta t}}{2h} l - \frac{m_A l}{6EI} + \frac{m_B l}{3EI} = 0$$

e cioè

$$2 m_A - m_B = 3 \frac{\alpha \overline{\Delta t}}{h} EI$$

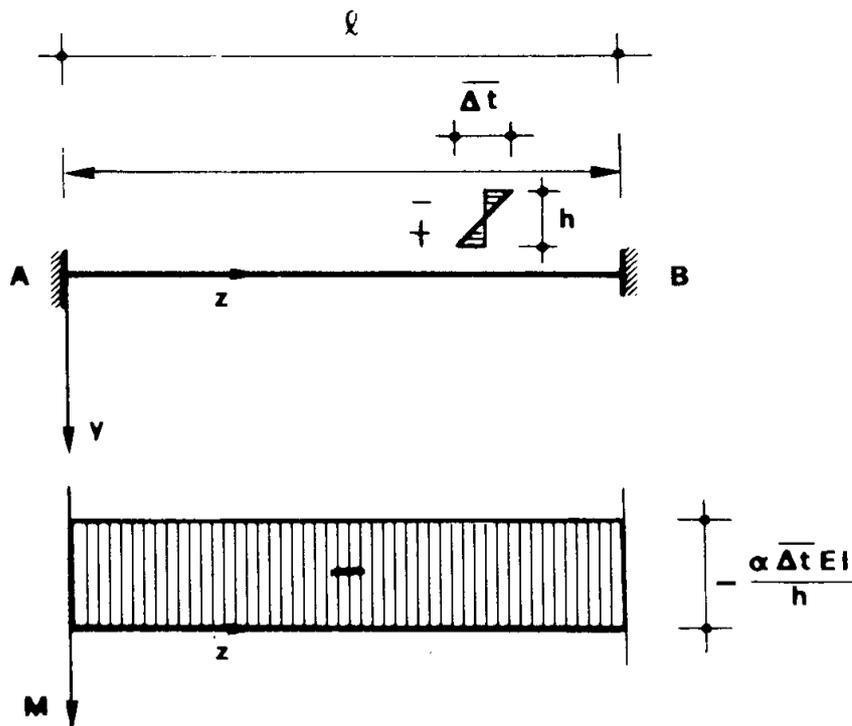


Figura 18

$$-m_A + 2m_B = -3 \frac{\alpha \overline{\Delta t}}{h} EI$$

da cui

$$\mathfrak{M}_A = \frac{3 \alpha \overline{\Delta t} EI}{h} \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{\alpha \overline{\Delta t} EI}{h}$$

$$\mathfrak{M}_B = \frac{3 \alpha \overline{\Delta t} EI}{h} \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = -\frac{\alpha \overline{\Delta t} EI}{h}$$

e quindi

$$M_A = M_B = -\frac{\alpha \overline{\Delta t} EI}{h} \quad (30)$$

### Problema n. 19.

Si è ancora in presenza della trave  $AB$ , con  $EI = cost$ , incastrata in  $A$  e  $B$ ; si verificano i cedimenti anelastici  $\Delta v_A$ ,  $\Delta v_B$ ,  $\Delta \varphi_A$ ,  $\Delta \varphi_B$ . Come già fatto nel problema 5, si pone (8)

$$\delta_{AB} = \Delta v_B - \Delta v_A$$

Nella trave appoggiata è (fig. 19a)

$$\varphi_A^{\circ} = \varphi_B^{\circ} = -\frac{\delta_{AB}}{l};$$

le coppie d'incastro  $\mathfrak{M}_A$  ed  $\mathfrak{M}_B$  devono generare due rotazioni in  $A$  e  $B$  tali che, sommate rispettivamente a  $\varphi_A^{\circ}$  e  $\varphi_B^{\circ}$ , diano per risultato  $\Delta \varphi_A$  e  $\Delta \varphi_B$ .

E' perciò

$$-\frac{\delta_{AB}}{l} + \frac{\mathfrak{M}_A l}{3EI} - \frac{\mathfrak{M}_B l}{6EI} = \Delta \varphi_A$$

$$-\frac{\delta_{AB}}{l} - \frac{m_A l}{6EI} + \frac{m_B l}{3EI} = \Delta\varphi_B$$

da cui

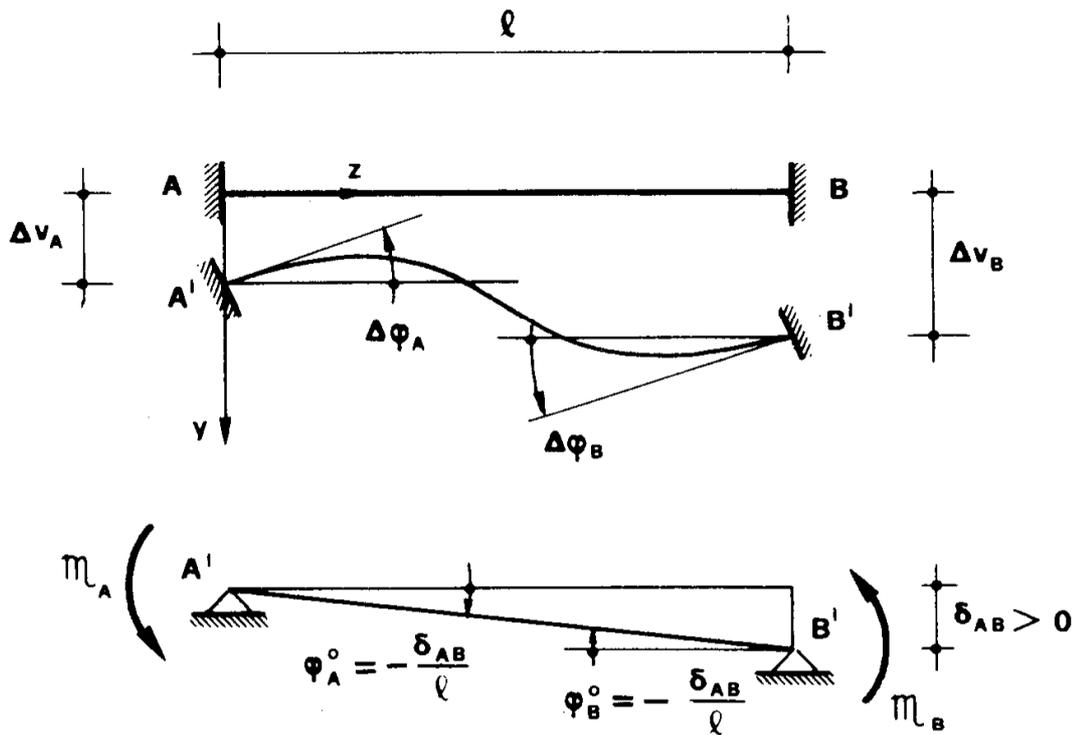


Figura 19a

$$2 m_A - m_B = \frac{6EI}{l} \left( \Delta\varphi_A + \frac{\delta_{AB}}{l} \right)$$

$$-m_A + 2m_B = \frac{6EI}{l} \left( \Delta\varphi_B + \frac{\delta_{AB}}{l} \right)$$

che porge

$$m_A = \frac{6EI}{l} \frac{\begin{vmatrix} \Delta\varphi_A + \frac{\delta_{AB}}{l} & -1 \\ \Delta\varphi_B + \frac{\delta_{AB}}{l} & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2EI}{l} \left( \Delta\varphi_A + 2\Delta\varphi_B + 3\frac{\delta_{AB}}{l} \right)$$

$$M_B = \frac{6EI}{l} \frac{\begin{vmatrix} 2 & \Delta\varphi_A + \frac{\delta_{AB}}{l} \\ -1 & \Delta\varphi_B + \frac{\delta_{AB}}{l} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2EI}{l} \left( \Delta\varphi_A + 2\Delta\varphi_B + 3 \frac{\delta_{AB}}{l} \right)$$

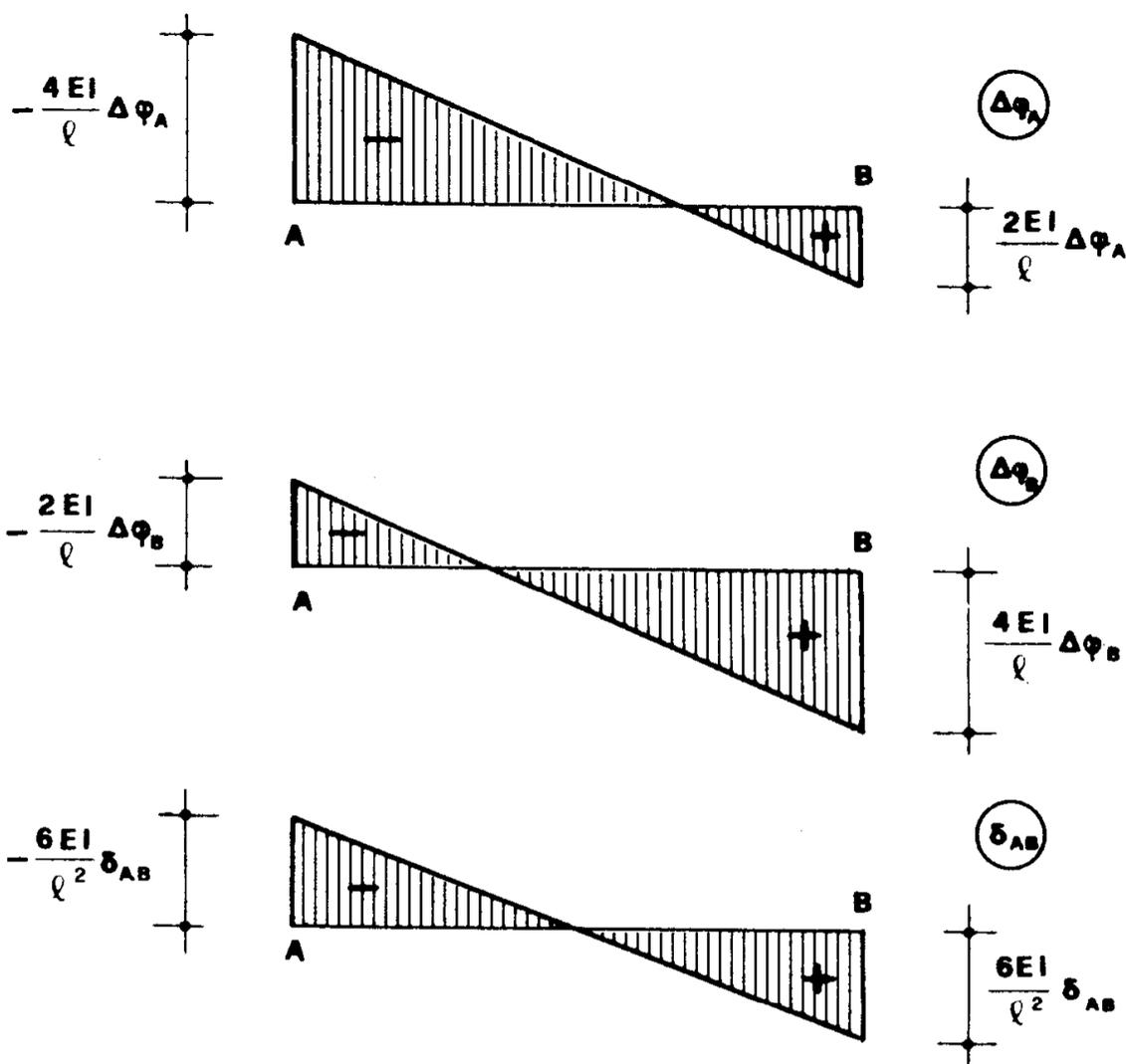


Figura 19b

e quindi

$$M_A = -\frac{2EI}{l} \left( 2\Delta\varphi_A + \Delta\varphi_B + 3 \frac{\delta_{AB}}{l} \right)$$

(31)

$$M_B = \frac{2EI}{l} \left( \Delta\varphi_A + 2\Delta\varphi_B + 3\frac{\delta_{AB}}{l} \right)$$

Nella fig. 19b sono riportati i diagrammi dei momenti generati separatamente da  $\Delta\varphi_A$ ,  $\Delta\varphi_B$  e  $\delta_{AB}$ .

### Problema n. 20.

La struttura della fig. 20 è un portale identico a quello già studiato nel problema 13, varia soltanto il vincolo in  $A$ , che è una cerniera invece di un appoggio.

La struttura isostatica è ancora quella della fig. 13 b, ottenuta sopprimendo il vincolo in  $A$ ; le due reazioni iperstatiche sono le due componenti  $X_1$  ed  $X_2$  della reazione in  $A$  secondo gli assi  $y$  e  $z$ . Naturalmente, poteva scegliersi anche un altro tipo di struttura isostatica; è convenuto però riafferarsi a quella del prob. 13, per poter utilizzare i dati già in essa calcolati.

Si indicano con l'esponente zero gli spostamenti provocati da  $q$  ed  $F$  (carichi applicati) sulla struttura isostatica; con un apice e due apici gli spostamenti provocati, sempre sulla struttura isostatica, da  $X_1 = 1$  e da  $X_2 = 1$  rispettivamente. Tale nomenclatura sarà sempre adottata nel seguito.

Si può perciò scrivere

$$v_{Aq}^{\circ} = \frac{q}{8EI} (a^4 + 4a^3h) \quad (\text{prob. 13})$$

$$v_{AF}^{\circ} = -\frac{F}{EI} abh \quad (\text{prob. 13})$$

$$w_{Aq}^{\circ} = -\frac{qa^2}{2} \cdot \frac{h^2}{2EI} = -\frac{q}{4EI} a^2 h^2$$

$$w_{AF}^{\circ} = Fb \cdot \frac{h^2}{2EI} = \frac{F}{2EI} bh^2$$

$$v'_A = \frac{1}{3EI} (a^3 + 3a^2h) \quad (\text{prob. 13})$$

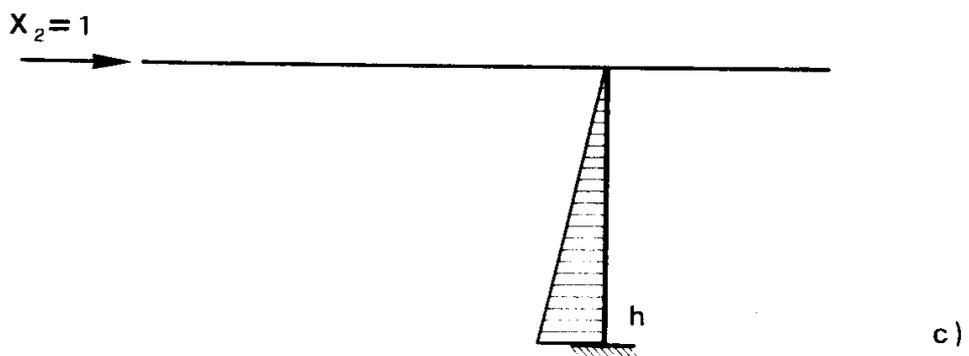
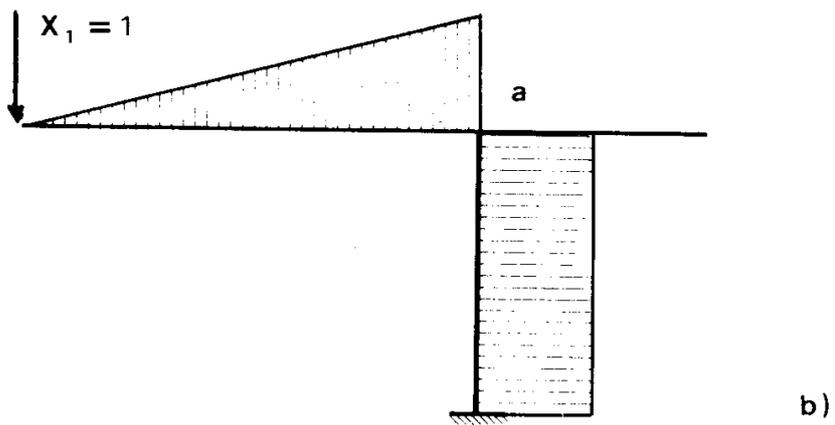
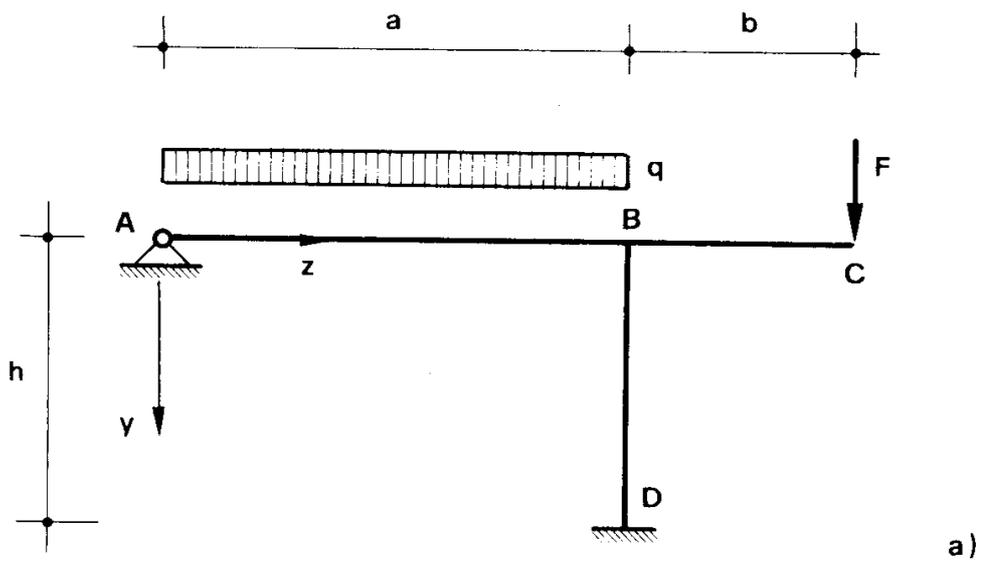


Figura 20

$$w'_A = -a \cdot \frac{h^2}{2EI} = -\frac{1}{2EI} ah^2$$

$$v''_A = \varphi_B \cdot a = -1 \cdot \frac{h^2}{2EI} \cdot a = -\frac{1}{2EI} ah^2$$

$$w''_A = 1 \cdot \frac{h^3}{3EI} = \frac{1}{3EI} h^3$$

Le due condizioni di congruenza

$$v_A = 0$$

$$w_A = 0$$

si scrivono perciò come segue:

$$\frac{q}{8EI} (a^4 + 4a^3h) - \frac{F}{EI} abh + \frac{X_1}{3EI} (a^3 + 3a^2h) - \frac{X_2}{2EI} ah^2 = 0$$

$$-\frac{q}{4EI} a^2h^2 + \frac{F}{2EI} bh^2 - \frac{X_1}{2EI} ah^2 + \frac{X_2}{3EI} h^3 = 0$$

e, semplificando,

$$X_1 (8a^3 + 24a^2h) - X_2 \cdot 12ah^2 = -3q (a^4 + 4a^3h) + 24Fabh$$

$$-X_1 \cdot 12ah^2 + X_2 \cdot 8h^3 = 6qa^2h^2 - 12Fbh^2$$

da cui

$$X_1 = \frac{6Fabh^4 - 3qa^3(ah^3 + h^4)}{a^2(8ah^3 + 6h^4)}$$

$$X_2 = \frac{-48Fa^3bh^2 + 6qa^5h^2}{8a^2h^3(4a + 3h)}$$

Si osserva che, per  $h \rightarrow \infty$ , è

$$X_1 \rightarrow -\frac{qa}{2} + F \frac{b}{a}$$

$$X_2 \rightarrow 0 ;$$

per  $h \rightarrow 0$ , è invece

$$X_1 \rightarrow -\frac{3}{8} qa$$

$$X_2 \rightarrow \infty .$$

Nella fig. 20 sono disposti solo i diagrammi per  $X_1 = 1$  e per  $X_2 = 1$ , poichè quelli relativi ai carichi applicati sono già consegnati nella fig. 13b e 13c.

#### Problema n. 21.

Si studia ancora il portale del prob. 13, in cui però la sezione  $A$  è perfettamente incastrata; per i motivi già esposti nel problema precedente, si sceglie come struttura isostatica quella ottenuta sopprimendo il vincolo in  $A$ . Le incognite iperstatiche sono le due componenti  $X_1$  e  $X_2$  della reazione in  $A$  secondo gli assi  $y$  e  $z$ , e la coppia d'incastro  $X_3$  in  $A$ ; si indicano con tre apici gli spostamenti provocati sulla struttura isostatica da  $X_3 = 1$ .

Oltre ai valori calcolati nell'esercizio precedente, occorrono i seguenti:

$$\varphi_{Aq}^{\circ} = \frac{qa^2}{2} \cdot \frac{h}{EI} + \frac{qa^3}{6EI} = \frac{q}{6EI} (a^3 + 3a^2h)$$

$$\varphi_{AF}^{\circ} = -Fb \cdot \frac{h}{EI} = -\frac{F}{EI} bh$$

$$\varphi_A' = a \cdot \frac{h}{EI} + 1 \cdot \frac{a^2}{2EI} = \frac{1}{2EI} (a^2 + 2ah)$$

$$\varphi_A'' = -1 \cdot \frac{h^2}{2EI} = -\frac{1}{2EI} h^2$$

$$\varphi_A''' = 1 \cdot \frac{h}{EI} + 1 \cdot \frac{a}{EI} = \frac{1}{EI} (a + h)$$

$$v_A''' = \varphi_B \cdot a + 1 \cdot \frac{a^2}{2EI} = \frac{1}{2EI} (a^2 + 2ah)$$

$$w_A''' = -1 \cdot \frac{h^2}{2EI} = -\frac{1}{2EI} h^2$$

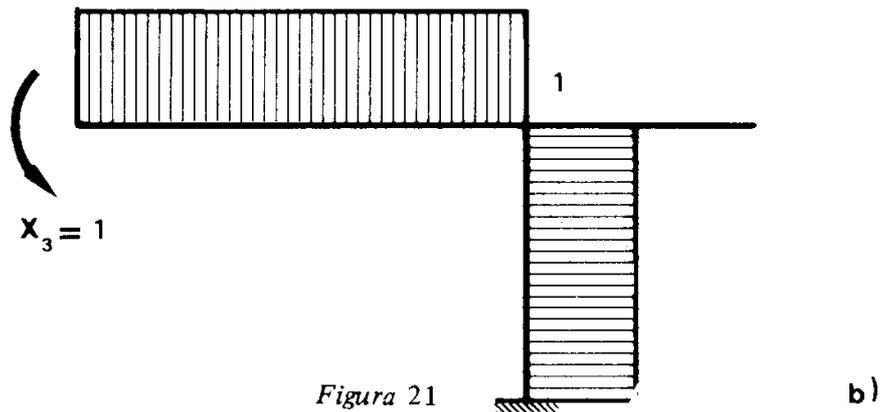
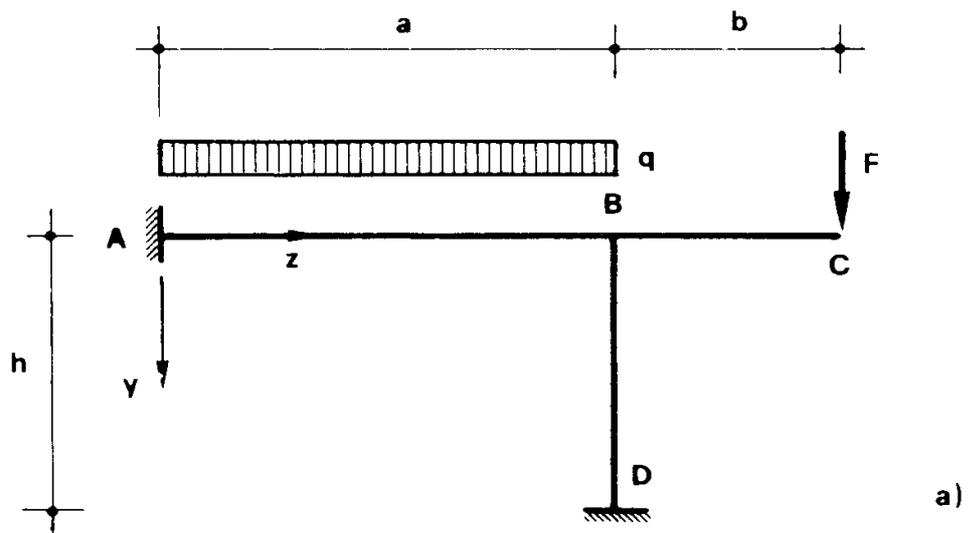


Figura 21

Le equazioni di congruenza sono

$$\begin{aligned} v_A' X_1 + v_A'' X_2 + v_A''' X_3 &= -v_A^\circ \\ w_A' X_1 + w_A'' X_2 + w_A''' X_3 &= -w_A^\circ \\ \varphi_A' X_1 + \varphi_A'' X_2 + \varphi_A''' X_3 &= -\varphi_A^\circ \end{aligned} \quad (32)$$

Si è in presenza di un sistema algebrico lineare non omogeneo nelle tre incognite  $X_1 X_2 X_3$ ; il determinante dei coefficienti è non nullo, come può verificarsi, e quindi la soluzione è definita.

Si osservi che, variando le condizioni di carico, lo studio della struttura caricata da  $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 1$  ed  $X_3 = 1$  (fig. 20b, 20c, 21b) resta ovviamente inalterato, mentre occorre soltanto variare lo studio della struttura caricata dalle forze applicate (fig. 13b, e 13c).

Si osservi pure che, a norma del principio di Betti, si verifica

$$v''_A = w'_A = -\frac{1}{2EI} ah^2 \qquad v'''_A = \varphi'_A = \frac{1}{2EI} (a^2 + 2ah)$$

$$w'''_A = \varphi''_A = -\frac{1}{2EI} h^2, \qquad (33)$$

e quindi il determinante dei coefficienti è *simmetrico* rispetto alla diagonale principale; questa circostanza è caratteristica delle equazioni di congruenza.

Si vuole adesso mostrare come allo stesso sistema (32) si possa pervenire scrivendo le relazioni di Betti con riferimento ai seguenti sistemi di forze

- a)  $q, F, X_1, X_2, X_3$  ed  $X_1 = 1$
- b)  $q, F, X_1, X_2, X_3$  ed  $X_2 = 1$
- c)  $q, F, X_1, X_2, X_3$  ed  $X_3 = 1$

agenti sulla struttura isostatica.

Per i due sistemi a) (fig. 21a e 20b) si ha

$$L_{12} = F v'_c + \int_A^B q v' dz + X_1 v'_A + X_2 w'_A + X_3 \varphi'_A$$

$$L_{21} = 0$$

da cui

$$X_1 v'_A + X_2 w'_A + X_3 \varphi'_A = -F v'_c - \int_A^B q v' dz. \qquad (34)$$

Scrivendo la relazione di Betti per i due sistemi di forze

$$q, F \quad \text{ed} \quad X_1$$

agenti sulla struttura isostatica si ha

$$L_{12} = F v'_c + \int_A^B q v' dz$$

$$L_{21} = 1 \cdot v_A^\circ ;$$

la (34) si scrive perciò

$$X_1 v'_A + X_2 w'_A + X_3 \varphi'_A = - v_A^\circ$$

e, per le (33),

$$X_1 v'_A + X_2 v''_A + X_3 v'''_A = - v_A^\circ ,$$

che coincide con la prima delle (32).

Operando analogamente sui due sistemi b) si perviene alla seconda delle (32), e sui due sistemi c) alla terza delle (32).

Il procedimento di Betti a volte è conveniente, perchè evita il calcolo delle deformate relative ai carichi applicati; ciò accade specialmente quando si è in presenza di più condizioni di carico, ciascuna da studiare separatamente.

### Problema n. 22.

Il portale della fig. 22 è lo stesso già studiato nel problema 14; in  $A$  esiste però una cerniera invece di un appoggio. La struttura è due volte iperstatica; si assume come struttura isostatica la stessa del problema 14, per potere utilizzare i risultati già in questo ottenuti.

Le incognite sono le due componenti  $X_1$  ed  $X_2$  della reazione in  $A$ , secondo i due assi  $y$  e  $z$ . Si può scrivere

$$v_A^\circ = \frac{F}{48 EI} (5a^3 + 24a^2h)$$

$$w_A^\circ = \frac{F}{8 EI} (a^2h + 2ah^2)$$

$$v'_A = \frac{1}{3EI} (a^3 + 3a^2h)$$

$$w'_A = \frac{1}{2EI} (a^2h + ah^2)$$

$$v''_A = \frac{1}{2EI} (a^2h + ah^2)$$

$$w''_A = \frac{1}{3EI} (3ah^2 + 2h^3) .$$

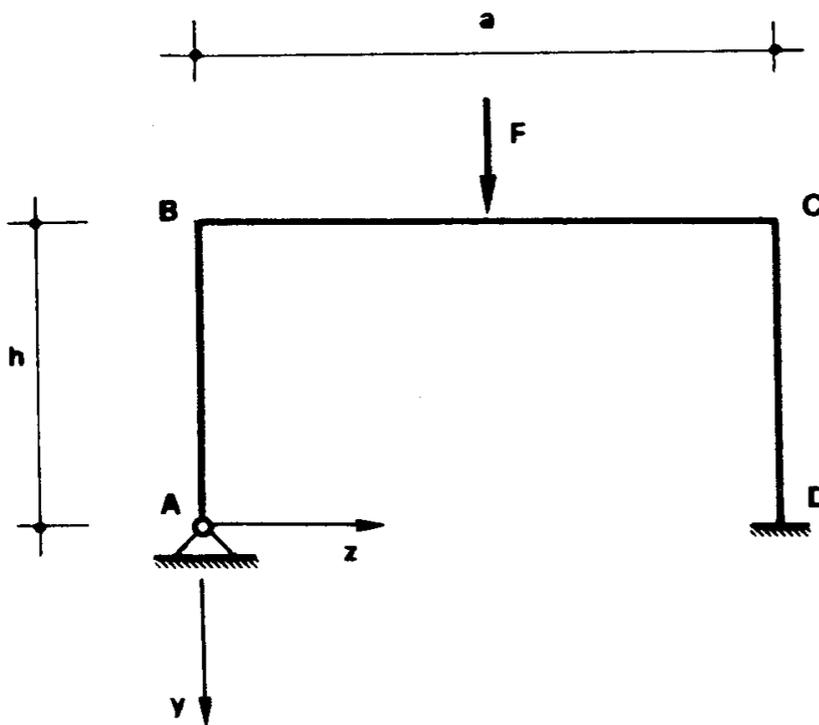


Figura 22

Le due equazioni di congruenza

$$v_A^o - v'_A X_1 + v''_A X_2 = 0$$

$$w_A^o + w'_A X_1 + w''_A X_2 = 0$$

si scrivono esplicitamente come segue:

$$\frac{X_1}{3EI} (a^3 + 3a^2h) + \frac{X_2}{2EI} (a^2h + ah^2) = -\frac{F}{48EI} (5a^3 + 24a^2h)$$

$$\frac{X_1}{2EI} (a^2h + ah^2) + \frac{X_2}{3EI} (3ah^2 + 2h^3) = -\frac{F}{8EI} (a^2h + 2ah^2)$$

e, semplificando,

$$2X_1 (a^3 + 3a^2h) + 3X_2 (a^2h + ah^2) = -\frac{F}{8} (5a^3 + 24a^2h)$$

$$3X_1 (a^2h + ah^2) + 2X_2 (3ah^2 + 2h^3) = -\frac{F}{4} (3a^2h + 6ah^2)$$

Si ha

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2(a^3 + 3a^2h) & 3(a^2h + ah^2) \\ 3(a^2h + ah^2) & 2(3ah^2 + 2h^3) \end{vmatrix} =$$

$$= 4(3a^4h^2 + 2a^3h^3 + 9a^3h^3 + 6a^2h^4) +$$

$$- 9(a^4h^2 + a^2h^4 + 2a^3h^3) =$$

$$= 3a^4h^2 + 26a^3h^3 + 15a^2h^4$$

$$\Delta_1 = -\frac{F}{8} \begin{vmatrix} 5a^3 + 24a^2h & 3(a^2h + ah^2) \\ 6a^2h + 12ah^2 & 2(3ah^2 + 2h^3) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{F}{8} (30a^4h^2 + 20a^3h^3 + 144a^3h^3 + 96a^2h^4 + \\
&\quad - 18a^4h^2 - 18a^3h^3 - 36a^3h^3 - 36a^2h^4) = \\
&= -\frac{F}{8} (12a^4h^2 + 110a^3h^3 + 60a^2h^4)
\end{aligned}$$

$$\Delta_2 = -\frac{F}{8} \begin{vmatrix} 2(a^3 + 3a^2h) & 5a^3 + 24a^2h \\ 3(a^2h + ah^2) & 6a^2h + 12ah^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{F}{8} (12a^5h + 24a^4h^2 + 36a^4h^2 + 72a^3h^3 + \\
&\quad - 15a^5h - 72a^4h^2 - 15a^4h^2 - 72a^3h^3) = \\
&= \frac{F}{8} (3a^5h + 27a^4h^2) .
\end{aligned}$$

E' perciò

$$\begin{aligned}
X_1 &= -\frac{F}{4} \frac{6a^4h^2 + 55a^3h^3 + 30a^2h^4}{3a^4h^2 + 26a^3h^3 + 15a^2h^4} \\
X_2 &= \frac{F}{8} \frac{3a^5h + 27a^4h^2}{3a^4h^2 + 26a^3h^3 + 15a^2h^4} .
\end{aligned}$$

Si osserva che per  $h \rightarrow \infty$  (trave appoggiata in  $B$  e  $C$ ) risulta

$$X_1 \rightarrow -\frac{F}{2}$$

$$X_2 \rightarrow 0 ;$$

per  $h \rightarrow 0$  (trave incastrata in  $B$  ed in  $C$ ) risulta invece

$$X_1 \rightarrow -\frac{F}{2}$$

$$X_2 \rightarrow \infty .$$