

CAPITOLO SESTO
LE TRAVATURE RETICOLARI

Problema n. 1.

La travatura della Fig. 1 è un esempio elementare di trave da ponte Warren, detta anche Neville. Si ricordi che una travatura reticolare a nodi-cerniera può essere considerata come costituita da un insieme di c elementi puntiformi, ognuno coincidente con una cerniera, collegati da a pendoli, ognuno coincidente con un'asta. Ogni elemento puntiforme possiede due gradi di libertà; quindi, se v è il numero dei vincoli esterni semplici o equivalenti, la relazione classica $3t - s = l - i$ si scrive

$$2c - v - a = l - i. \quad (1)$$

Nelle travature reticolari è in genere immediato assicurarsi che $l = 0$; infatti si è quasi sempre in presenza di una struttura costruibile unendo tre aste a forma di triangolo equilatero, schema chiaramente isostatico, e montando poi altre due aste su un lato del primo triangolo, e così via.

Il calcolo delle reazioni esterne si esegue come nel capitolo 3, poichè la struttura è costituita da tanti tratti reticolari uniti tra loro ed al suolo da opportuni vincoli; sovente la verifica di isostaticità si esegue controllando prima l'isostaticità o il grado di iperstaticità di ciascuno di questi tratti reticolari, e utilizzando poi la $3t - s = l - i$.

Nella trave in esame è

$$\begin{aligned} c &= 7 \\ a &= 11 \\ v &= 3 \end{aligned}$$

e quindi

$$3c - v - a = 0.$$

Poichè è $l = 0$, è $i = 0$.

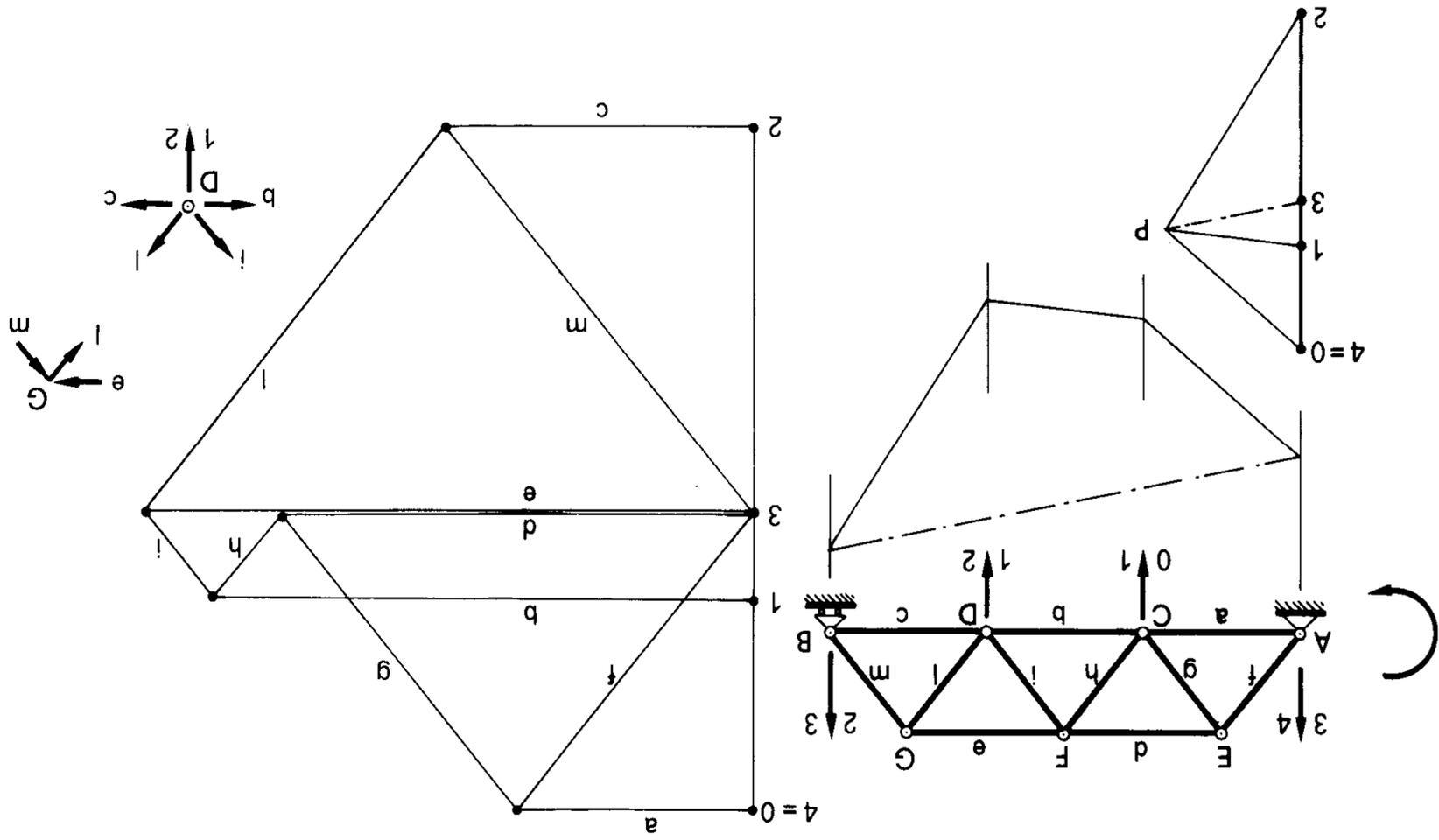


Figura 1

La ricerca grafica degli sforzi in tutte le aste può essere eseguita con un *diagramma cremoniano*, poichè le forze agiscono soltanto sui nodi (in particolare non esistono nodi interni al contorno della figura, che dovrebbero essere non soggetti a forze applicate). Innanzitutto si determinano le reazioni vincolari, e ciò è stato fatto attraverso il poligono funicolare. Si è così in possesso del poligono delle forze, che nel nostro caso è una punteggiata; 0.1 e 1.2 sono le forze applicate, 2.3 e 3.4 le reazioni.

Scelto un verso di rotazione (nel caso in esame esso è antiorario) le forze applicate e reattive devono succedersi nel poligono delle forze così come si incontrano i nodi in cui esse sono applicate, percorrendo, nel suddetto verso, il contorno della figura. Ciò accade spontaneamente nel caso in esame; in caso contrario, occorre ridisegnare il poligono.

I poligoni chiusi delle forze per ogni nodo si eseguono in modo che le forze si susseguano in ogni poligono così come si incontrano le forze e le aste girando intorno al nodo nel verso prescelto; le forze, in tale intento, vanno comunque disegnate dalla parte esterna del contorno della struttura.

Si deve disegnare per primo il poligono relativo ad un nodo in cui concorrono due sole aste, e quindi le incognite sono soltanto due; per esempio, si parte dal nodo A in cui concorrono le aste a e f . Dall'estremo 4 di 3.4 si traccia la parallela ad a , dall'estremo 3 la parallela ad f ; si ha così il poligono relativo al nodo suddetto. Da questo poligono si osserva che a ed f , agenti su A, sono orientate rispettivamente verso destra e verso il basso, quindi f è un puntone, a un tirante.

Si passa poi al nodo E ove concorrono f , g e d , poichè la forza f è nota, e quindi sono incognite le sole forze d e g . La forza f sul nodo A è diretta verso il basso, su E quindi è diretta verso l'alto; dall'estremo superiore di f si traccia perciò la parallela a g , dall'estremo inferiore la parallela a d . Sul nodo E, g e d sono rispettivamente agenti verso il basso e verso sinistra; quindi g è un tirante, d un puntone.

Si può adesso passare al nodo C ove è applicata la 0.1, poichè in esso sono noti a e g ; dall'estremo 1 si porta la parallela a b , e dall'estremo di g non appartenente ad a la parallela ad h .

Nel nodo F sono noti d ed h ; la forza h sul nodo C era diretta verso il basso, quindi su F è diretta verso l'alto. Nel poligono relativo ad F le forze devono perciò succedersi nel verso in cui h è diretta verso l'alto; quindi dall'estremo superiore di h si traccia la parallela ad i , e dall'estremo di d che non appartiene ad h la parallela ad e . Si osserva dal poligono di F che, su F stesso, h agisce verso l'alto (puntone), i verso il basso (tirante), e verso sinistra (puntone), d verso destra (puntone).

In D sono incognite l e c ; nell'ordine antiorario le forze note che si seguono girando intorno al nodo D sono i , b , 1.2; quindi da 2 si traccia la parallela a c , dall'estremo di i non appartenente a b si traccia la parallela ad l . Su D la c agisce verso destra (tirante), la l verso l'alto (tirante).

In G non resta che da fare delle verifiche. Il poligono di G è costituito dalle forze e , l , m , di cui solo m è incognita; quindi la risultante di e ed l deve essere parallela all'asta BG , e rappresenta m . Poichè m su G agisce verso l'alto, è un puntone.

Il triangolo relativo al nodo B è già costruito; esso è formato dalla 2.3, e dalle forze m e c .

Problema n. 2.

La travatura della Fig. 2 è un esempio elementare di struttura da gru.

Si ha $c = 7$, $a = 11$, $v = 3$, e quindi (1)

$$2c - v - a = 0$$

Anch'essa è risolta con un cremoniano, dopo aver calcolato le reazioni; il verso prescelto è quello orario.

Si parte dal nodo D , ottenendo d (puntone) e c (tirante); si passa poi al nodo C , ottenendo m (puntone) e b (tirante); al nodo E , ottenendo e (puntone) ed l (puntone); al nodo F , ottenendo f (puntone) ed i (puntone); al nodo B , ottenendo h (tirante) ed a (tirante). Per il nodo G deve ottendersi, come verifica, che la risultante di 2.3 e a deve essere orizzontale, e rappresenta g . Il quadrilatero relativo a G è già sul disegno, ed è costituito dalle 1.2, g , h , f .

Problema n. 3.

Si è in presenza (Fig. 3) di un arco a tre cerniere reticolare ABC , costituito da due tratti AB e BC ciascuno isostatico (perchè ottenibili per generazione triangolare), vincolati tra loro in B , ed al suolo in A e C .

Si ha $c = 17$, $a = 30$, $v = 4$, e quindi

$$2c - v - a = 0 .$$

Le aste di parete sono rettilinee, quelle dei due correnti sono curvilinee; ogni asta di corrente è un pendolo, e ad essa si associa il valore delle reazioni ai suoi due estremi, che sono uguali e contrarie, e si assumono positive se corrispondono ad una trazione dell'asta.

Si calcolano nella Fig. 3 le reazioni delle tre aste a b c impegnate da una recisione ideale SS che separi in due parti la struttura. Una delle

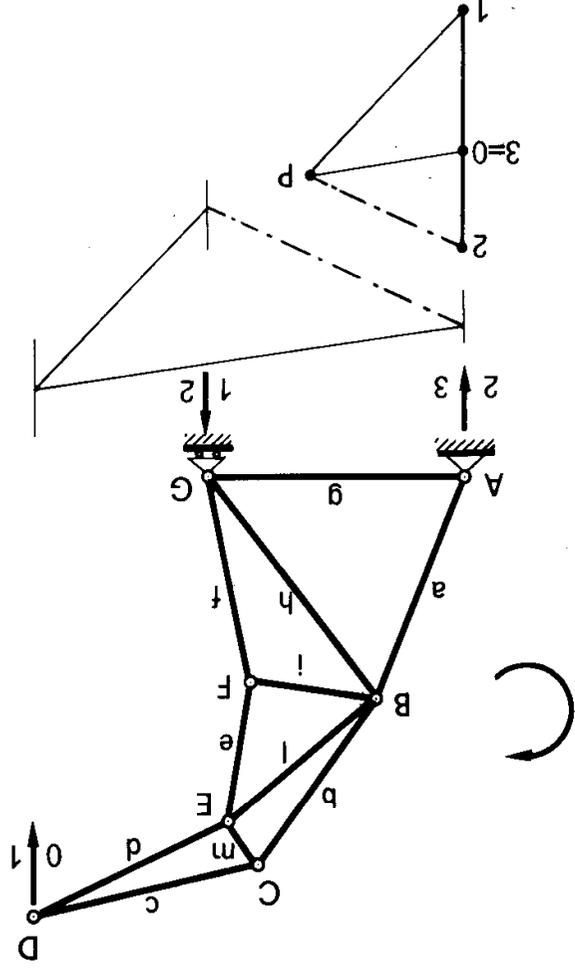
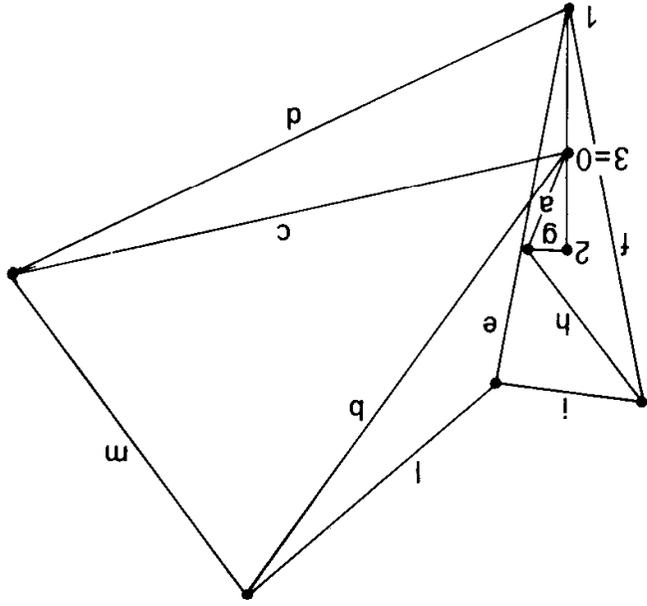


Figura 2

due parti, per esempio quella alla sinistra di SS , è in equilibrio sotto la reazione 1 e le tre reazioni a b c ; quindi non resta che scomporre la forza 1 secondo le tre direzioni di a b e c . Si è prima ottenuto

$$r_{a+b} = r_{1+c} \ni a \cap b, 1 \cap c;$$

poi si è scomposto 1 secondo r_c ed r_{a+b} , e infine $a + b$ secondo r_a ed r_b . Percorrendo il poligono 1 c b a nel verso di 1 si osserva che c e b agiscono,

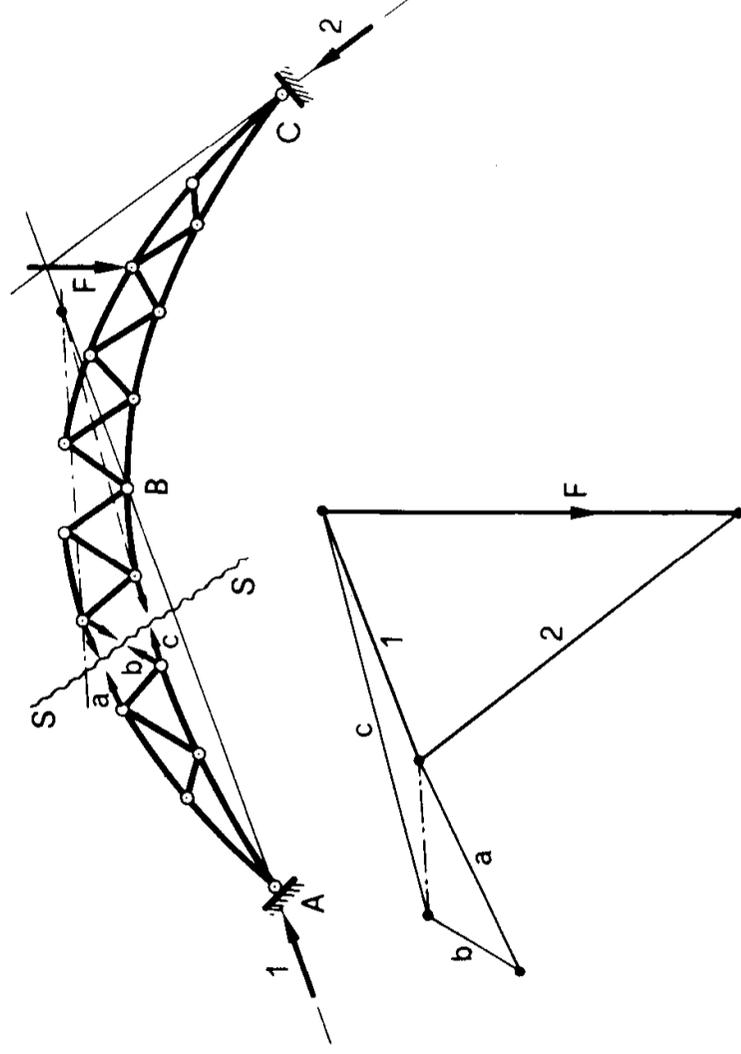


Figura 3

sulla parte presa in esame, verso sinistra, ed a verso destra; quindi c e b sono puntoni, a è un tirante.

Il metodo adottato è quello di *Culmann*; esso permette di ottenere gli sforzi in tutte le aste recidibili a gruppi di tre non concorrenti. Si osservi che nella Fig. 3 gli sforzi in a , b e c sono stati disegnati con il verso che ad essi competerebbe se fosse positivo.

Problema n. 4.

La Fig. 4 ripropone l'esercizio precedente. Si vuole ottenere la reazione in b ; sia P_b il polo dell'asta b , e cioè il punto $a \cap c$.

Le forze 1 a b c devono fornire momento nullo rispetto a qualsiasi punto del piano, in particolare rispetto a P_b ; in tale equazione a e c non

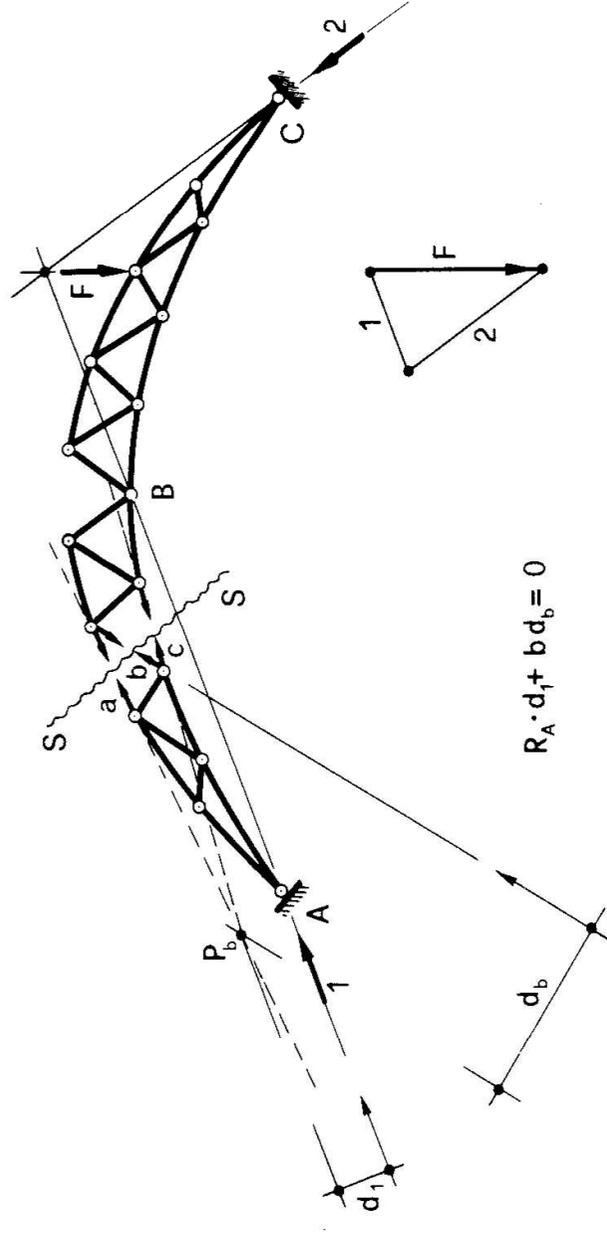


Figura 4

giocano, poichè esse contengono P_b . Quindi si ottiene un'equazione nell'unica incognita b :

$$1 \cdot d_1 + b d_2 = 0 ; \tag{2}$$

da cui

$$b = - 1 \cdot \frac{d_1}{d_2} .$$

Più in generale, se M_e è il momento rispetto a P_b di tutte le forze esterne agenti sulla parte a sinistra di SS (positivo se antiorario), e la retta d'azione di b si orienta come è d'obbligo dalla parte di sinistra alla parte di destra di SS, risulta

$$M_e + b d_2 = 0 \tag{3}$$

da cui

$$b = - \frac{M_e}{d_2} . \tag{4}$$

La b positiva è una trazione (tirante); d_b è positivo se P_b è alla sinistra della retta d'azione orientata di b .

Il metodo adottato è quello di *Ritter*; esso permette di ottenere lo sforzo in un'asta se, con una recisione *SS* di tre aste non concorrenti, di cui una sia quella in discorso, si riesce a separare in due parti la struttura.

Il metodo di *Ritter* ha il doppio pregio di essere analitico, e di consentire il calcolo dello sforzo per una sola asta.

Problema n. 5.

La travatura reticolare della Fig. 5a è soggetta al vento sulla falda di sinistra; il vento equivalga ad un carico statico q di 400 kg/m , in direzione orizzontale, e quindi la sua risultante è data dal prodotto di q (carico) per h (altezza dell'incavallatura)

$$F_v = 400 \cdot 3 = 1200 \text{ kg,}$$

ed è diretta secondo l'orizzontale che biseca l'asta *AC*. Si calcolano le reazioni in *A* e *B* al solito modo, e si fanno succedere le forze girando intorno alla travatura nel senso antiorario:

$$F_v^* = 0.1$$

$$R_A = 1.2$$

$$R_B = 2.3 = 2.0 .$$

Si eseguono poi i poligoni dei nodi girando sempre in senso antiorario. Si fanno così le scomposizioni in *B*

$$2.3 + b + e = 0$$

ed in *D*

$$e + c + d = 0 .$$

La reazione in *C* su a (forza a') è la risultante di b e c ; la reazione in *A* su a (forza a'') è la risultante di 1.2 e d .

Si controlla che

$$0.1 + a' + a'' = 0$$

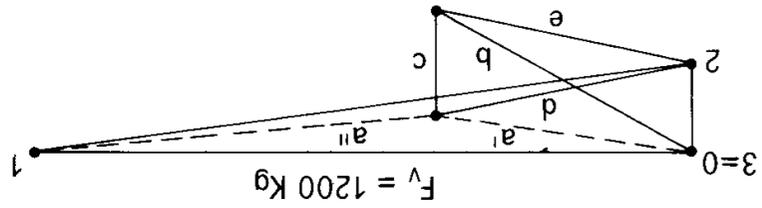
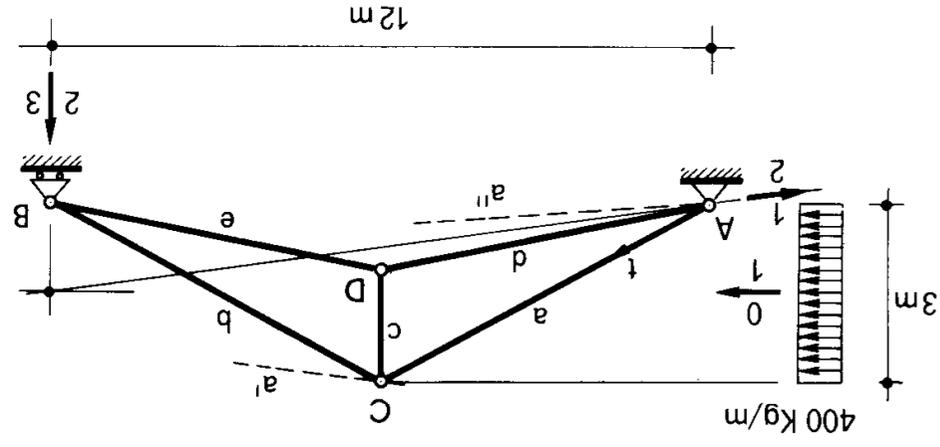
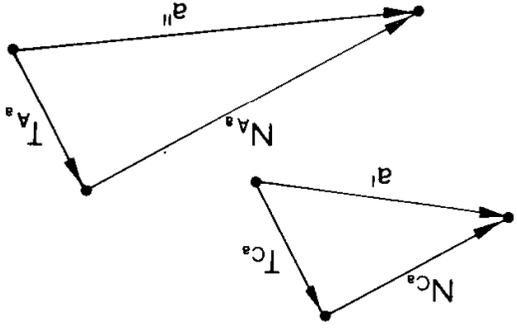
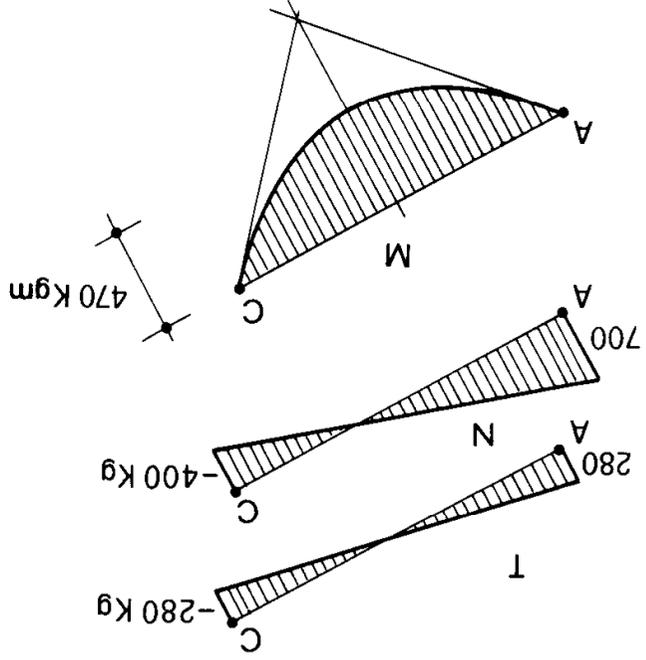


Figura 5a

Scomponendo la a' secondo la direzione dell'asta a e la sua normale, si hanno lo sforzo normale N_{Ca} e lo sforzo di taglio T_{Ca} nell'estremo C di a ; scomponendo la a'' secondo le stesse direzioni si hanno lo sforzo normale N_{Aa} e lo sforzo di taglio T_{Aa} nell'estremo A di a .

I due diagrammi di N e T lungo l'asta a variano linearmente, e sono quindi facilmente costruibili. Il momento flettente nell'asta a è una parabola quadratica, il cui valore massimo si ottiene moltiplicando il taglio in A o in C (moduli uguali) per $\frac{l_a}{4}$.

L'asta a è soggetta ad M, N e T; le altre invece solo ad N. Si osserva che la b è un puntone, mentre c , d ed e sono tiranti.

Nella Fig. 5b si suppone invece che il vento venga da destra, gravando quindi sulla falda b , da destra a sinistra.

Questa volta il cremoniano si traccia scomponendo prima in A

$$1.2 + d + a = 0$$

e poi in D

$$d + c + a = 0.$$

La reazione in C su b è la risultante (forza b') di a e c ; la reazione in B su b è la risultante (forza b'') di 2.3 e di e .

Questa volta è l'asta b ad essere soggetta ad M, N e T; i diagrammi

	a	b	d	e	c
 M (Kgm) 	+ 470	0	0	0	0
 N (Kg) 	+ 700 - 400 + 250	- 540 + 1480 - 400	+ 480 - 1450	+ 480 - 1450	+ 190 - 570
 T (Kg) 	+ 280 - 280 0	0 + 280 - 280	0 0	0 0	0 0

M e T risultano identici a quelli sull'asta a della Fig. 5a. Risultano puntoni le aste d , c , ed e , e cioè tutte le aste concorrenti in D, e tirante l'asta a .

Nella tabella sono riassunti per le varie aste i valori di M, N e T nelle

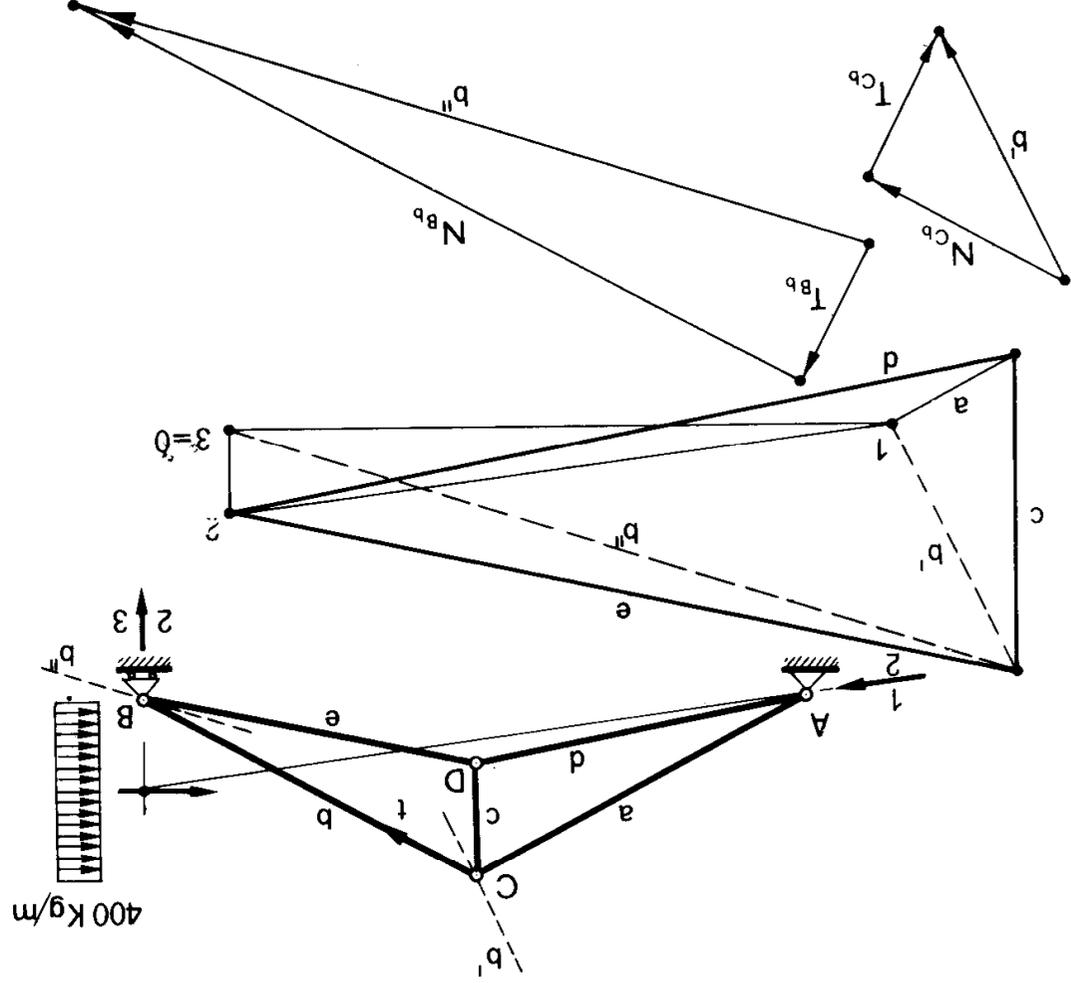
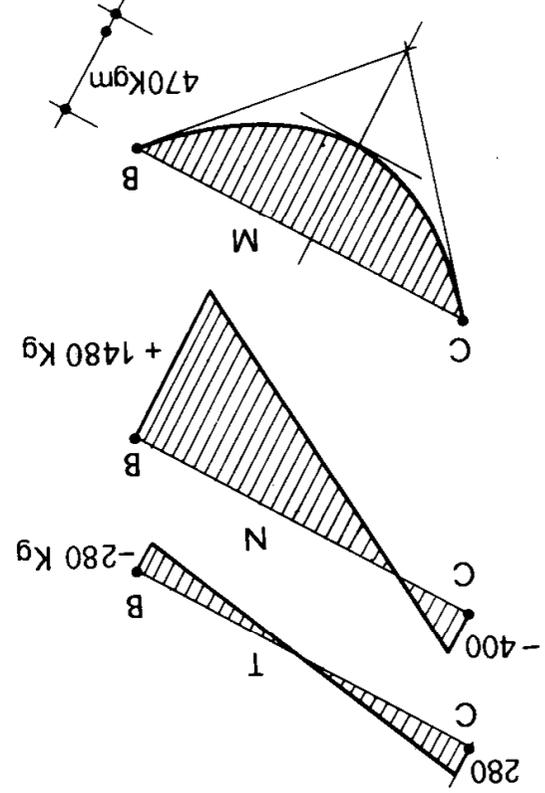


Figura 5b



due condizioni di carico. Si osserva come in tutte le aste gli sforzi normali si invertono di segno; si osserva pure che le stesse variazioni si avrebbero se, fermo restando il carico, si scambiassero carrello con cerniera. Ciò dimostra la grande importanza delle condizioni di vincolo.

Problema n. 6.

Il precedente esercizio è un caso particolare di travatura reticolare *ad aste caricate*, e cioè soggetta a forze applicate sulle aste.

Tale problema si risolve in generale sostituendo, alle forze agenti sulla generica asta, un sistema equivalente, costituito da due forze passanti per le sue estremità. Le reazioni trasmesse dai nodi alle aste non vengono alterate dalle suddette sostituzioni, e quindi a prima vista non viene conseguito alcun vantaggio. Però ogni asta è così soggetta a solo sforzo assiale. Questi sforzi possono essere calcolati operando sulla travatura reticolare soggetta a forze soltanto sui nodi; tali forze sono proprio quelle del sistema di forze equivalente.

Calcolati così tali sforzi, ad ogni estremità la reazione sull'asta è data dalla composizione della forza assiale agente sull'asta, e della forza equivalente cambiata di segno; infatti se \mathbf{F}_e è la forza del sistema equivalente, \mathbf{R} la reazione sull'asta ed \mathbf{R}_n l'azione (assiale) del nodo sull'asta, si ha (considerando l'equilibrio della parte elementare di trave adiacente al nodo, e comprendente \mathbf{F}_e)

$$\mathbf{F}_e + \mathbf{R} - \mathbf{R}_n = 0$$

da cui

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_n - \mathbf{F}_e .$$

La struttura della Fig. 6a è caricata sulle aste HG, AH e GC. Nella Fig. 6b sono riportate le forze equivalenti \mathbf{F}_e agenti alle estremità delle suddette aste (è ovvio che tale sistema può essere scelto in infiniti modi). Le \mathbf{R}_n sono gli sforzi normali sulle aste della travatura reticolare della figura 6b, caricata nei nodi; tali sforzi normali, da non confondere con quelli reali (sono sicuramente tali solo nelle aste scariche), si possono calcolare con uno dei metodi ben noti. Per esempio, nel caso in esame lo sforzo in CD è fornito dall'equazione di equilibrio intorno ad E dell'asta ED.

Si ha così

$$- N_{CD} \cdot 8a + \frac{34}{36} F \cdot 6a = 0$$

da cui

$$N_{CD} = \frac{34}{36} \cdot \frac{3}{4} F.$$

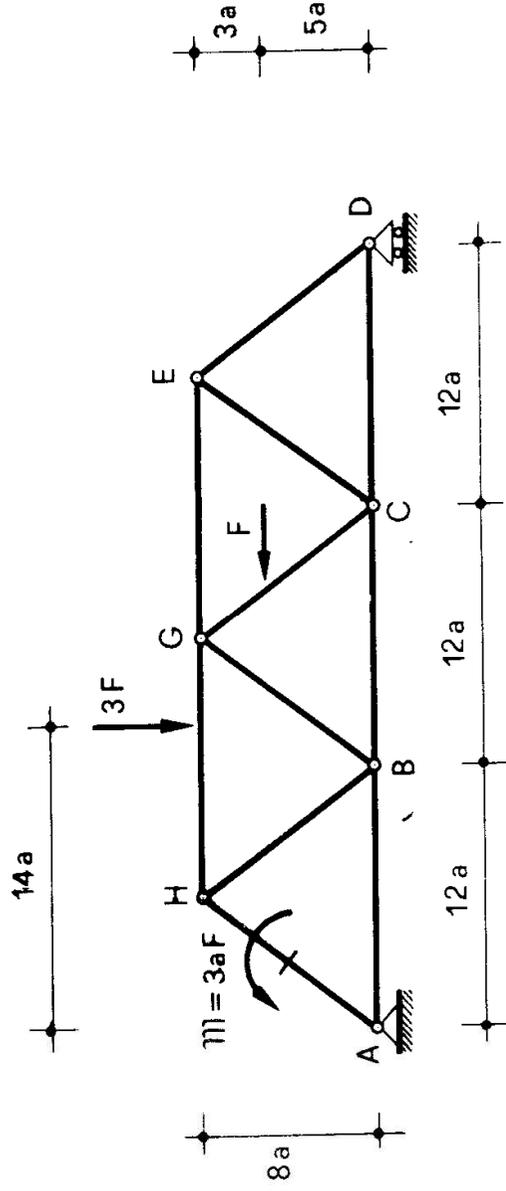


Figura 6a

Nell'asta ED è invece, dal poligono di equilibrio di D,

$$\frac{N_{ED}}{R_D} = \frac{ED}{8a} = \frac{\sqrt{100}a}{8a}$$

da cui

$$|N_{ED}| = \frac{34}{36} \frac{5}{4} F.$$

Sempre dal poligono di equilibrio di D, risulta poi $N_{ED} < 0$.

Nelle aste CE e GC lo sforzo normale è pari in modulo ad N_{ED} , poichè, effettuata la relativa *sezione di Ritter*, il polo è improprio, e quindi occorre ricorrere all'equilibrio alla *traslazione* secondo y della parte a destra. Risulta così

$$N_{ED} = N_{CG} < 0$$

$$N_{EC} = -N_{ED} > 0.$$

Gli sforzi normali nelle altre aste possono essere ricavati tutti con il metodo di Ritter; se ne lascia la cura al lettore.

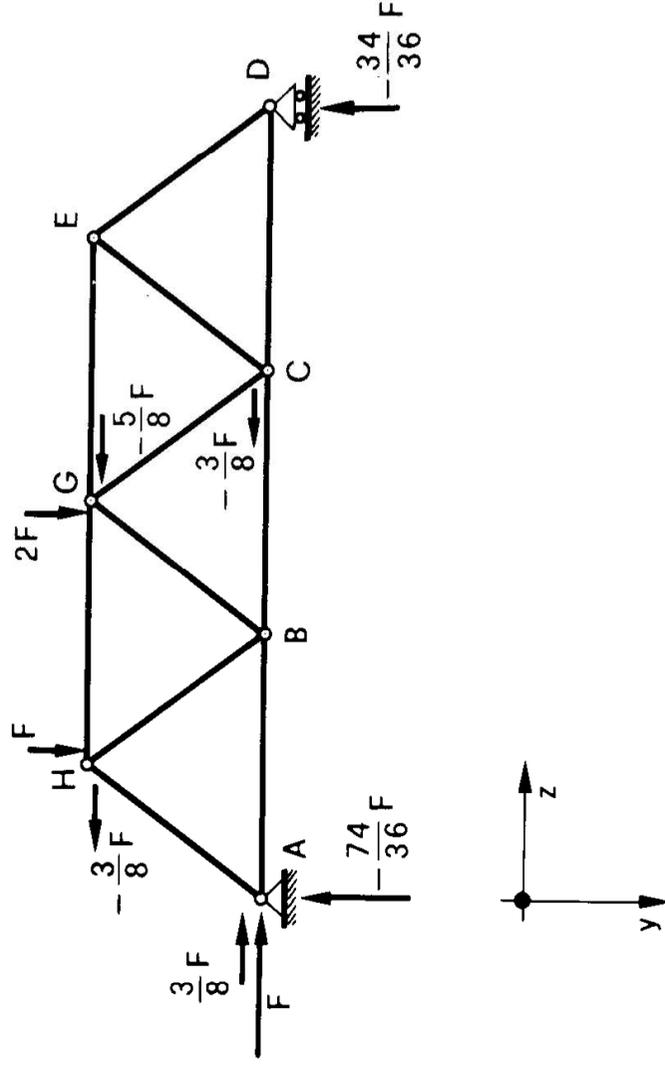


Figura 6b

Nelle aste AB, BC, CD, GE, HB, GB, EC, ED non esiste che sforzo normale, ed esso coincide con quello calcolato sulla struttura della Fig. 6b.