

Si deve quindi studiare la trave AC, soggetta al carico q nell'intervallo $]6m, 12m[$, ed alla forza $12t$ in C. L'equilibrio alla traslazione verticale impone

$$R_A = -24t ;$$

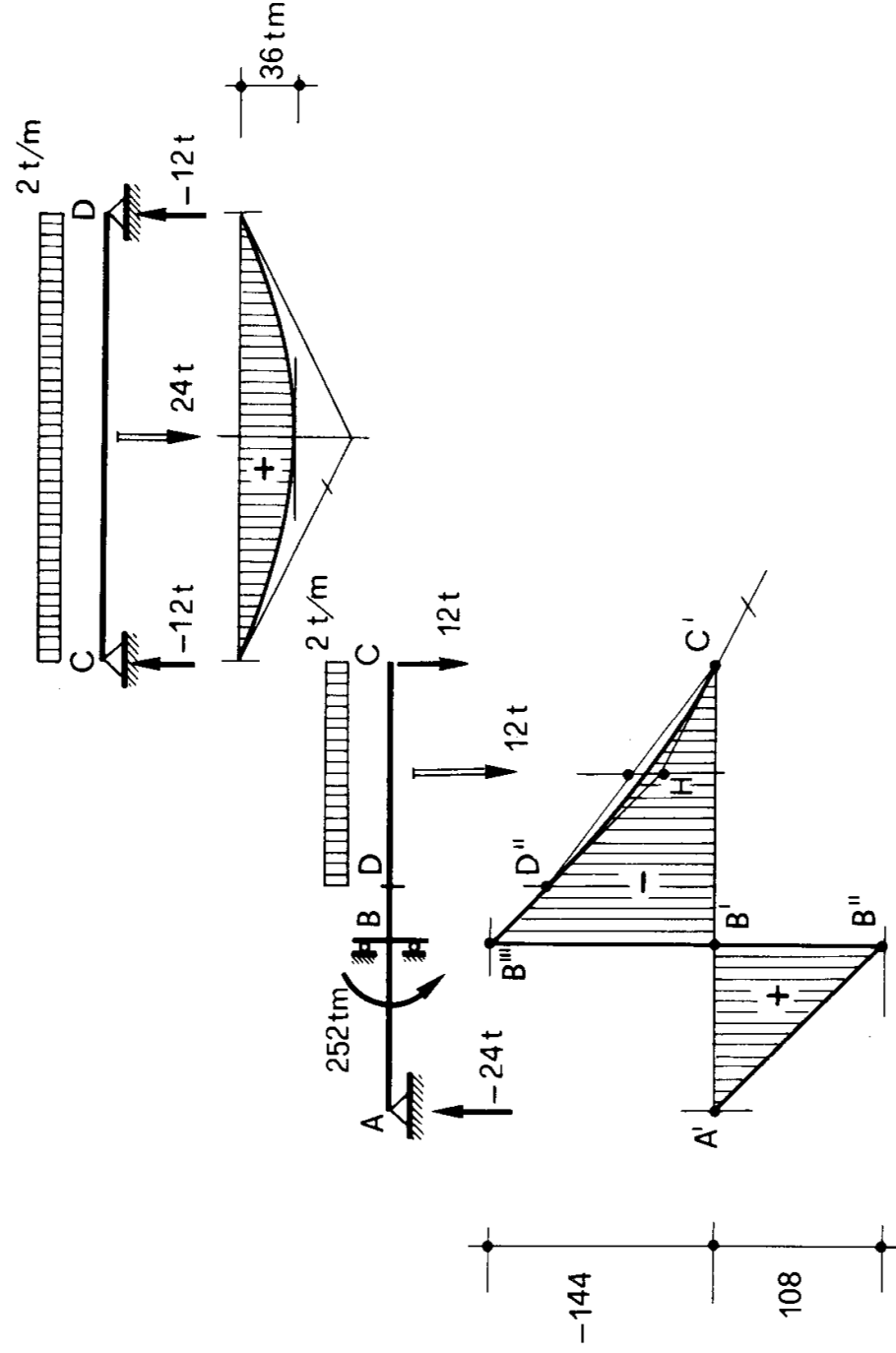


Figura 11b

l'equilibrio alla rotazione intorno ad A si traduce nella relazione

$$M_B - 12 \cdot 12 - 12 \cdot 9 = 0$$

da cui

$$M_B = 252 \text{ tm} .$$

Il valore di M_{B_s} (momento nella sezione immediatamente a sinistra di B) è

$$M_{B_s} = 24 \cdot 4,5 = 108 \text{ tm} ;$$

poichè per l'equilibrio del nodo B è

$$\mathfrak{M}_B - M_{Bs} + M_{Bd} = 0, \quad (28)$$

si ha pure

$$M_{Bd} = -252 + 108 = -144 \text{ tm}.$$

Il diagramma m_{AB} e quello m_{CD} sono di ovvia costruzione; per m_{BC} si noti che la tangente in B'' deve essere parallela a quella in B'' , e le due tangenti in B''' e C' devono intersecarsi sulla verticale di mezzzeria del carico q . L'inserimento della parabola tra D'' e C' è immediato.

Problema n. 12.

1) Procedimento grafico.

La struttura della Fig. 12a esige due fondamentali, per le due parti AB e BD. La fondamentale $D'B'''$ di BD si costruisce attraverso le due condizioni $M = 0$ in D, e $\frac{dM}{dz} = 0$ in C; dunque $D'B'''$ taglia il funicolare sulla verticale per D, ed è parallela alla tangente al funicolare nel punto C'' dove questo interseca la verticale per C. La costruzione della parallela si esegue, come negli es. 7 e 9, senza tracciare la tangente in C'' ; e cioè disegnando le intersezioni H e K della parabola con due verticali qualsiasi equidistanti da C, e riconoscendo che la tangente in C'' è parallela ad HK.

La fondamentale $A'B''$ si traccia utilizzando la condizione $M = 0$ in A, e la condizione di parallelismo tra $A'B''$ e $B''D'$. Il segmento $B''B'''$ fornisce la reazione \mathfrak{M}_B in B, che risulta antioraria; la parallela per P alla comune direzione delle due fondamentali fornisce poi

$$R_D = 1.2$$

$$R_A = 2.3 = 2.0.$$

Il diagramma del taglio è immediato; esso è costante in $[0,4\text{m}]$, definito in $z = 4\text{m}$, lineare in $[4\text{m}, 16\text{m}]$, definito in $z = 16\text{m}$, ancora costante in $[16\text{m}, 20\text{m}]$; sotto C è $T = 0$.

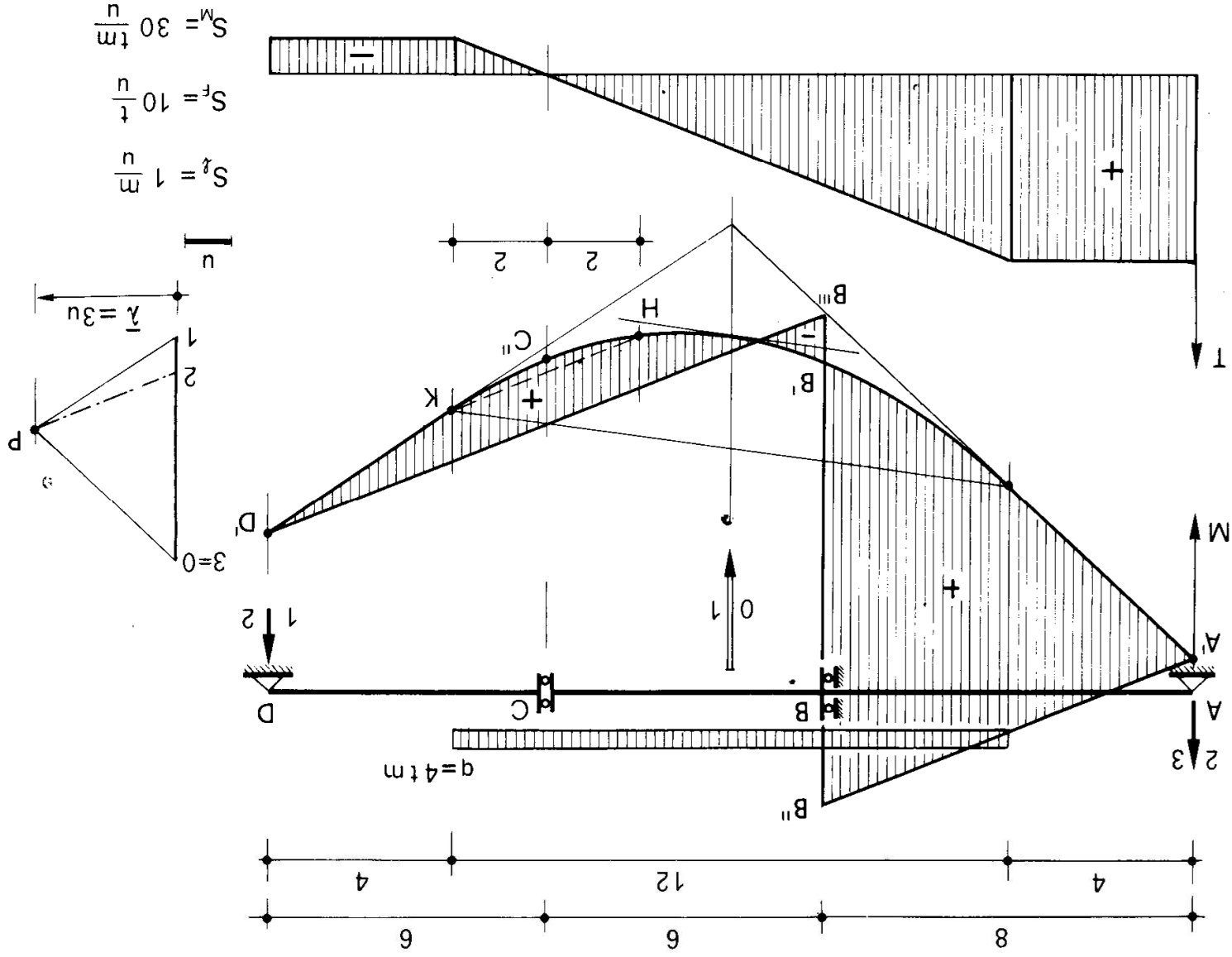


Figura 12a

2) *Procedimento per scomposizione.*

Lo studio della parte CD (Fig. 12b) fornisce, per l'equilibrio alla traslazione,

$$R_D = - 8 t$$

e, per l'equilibrio alla rotazione

$$M_C = - 40 tm .$$

La trave AC è perciò soggetta, oltre che al carico q alla coppia $40 tm$ in C.

Per l'equilibrio alla rotazione intorno al punto A si può scrivere

$$M_B + 40 - 40 \cdot 9 = 0$$

da cui

$$M_B = 320 tm .$$

Per l'equilibrio alla traslazione si ha

$$R_A + 40 = 0$$

da cui

$$R_A = - 40 t .$$

Si ha poi

$$M_{Bd} = 40 - 4 \cdot \frac{6^2}{2} = - 32 tm ;$$

dalla relazione (28) si trae

$$M_{Bs} = M_B + M_{Bd} = 288 tm .$$

La costruzione di m_{CD} si esegue conducendo da C'' l'orizzontale e determinando l'intersezione K di questa con la verticale per la mezzeria

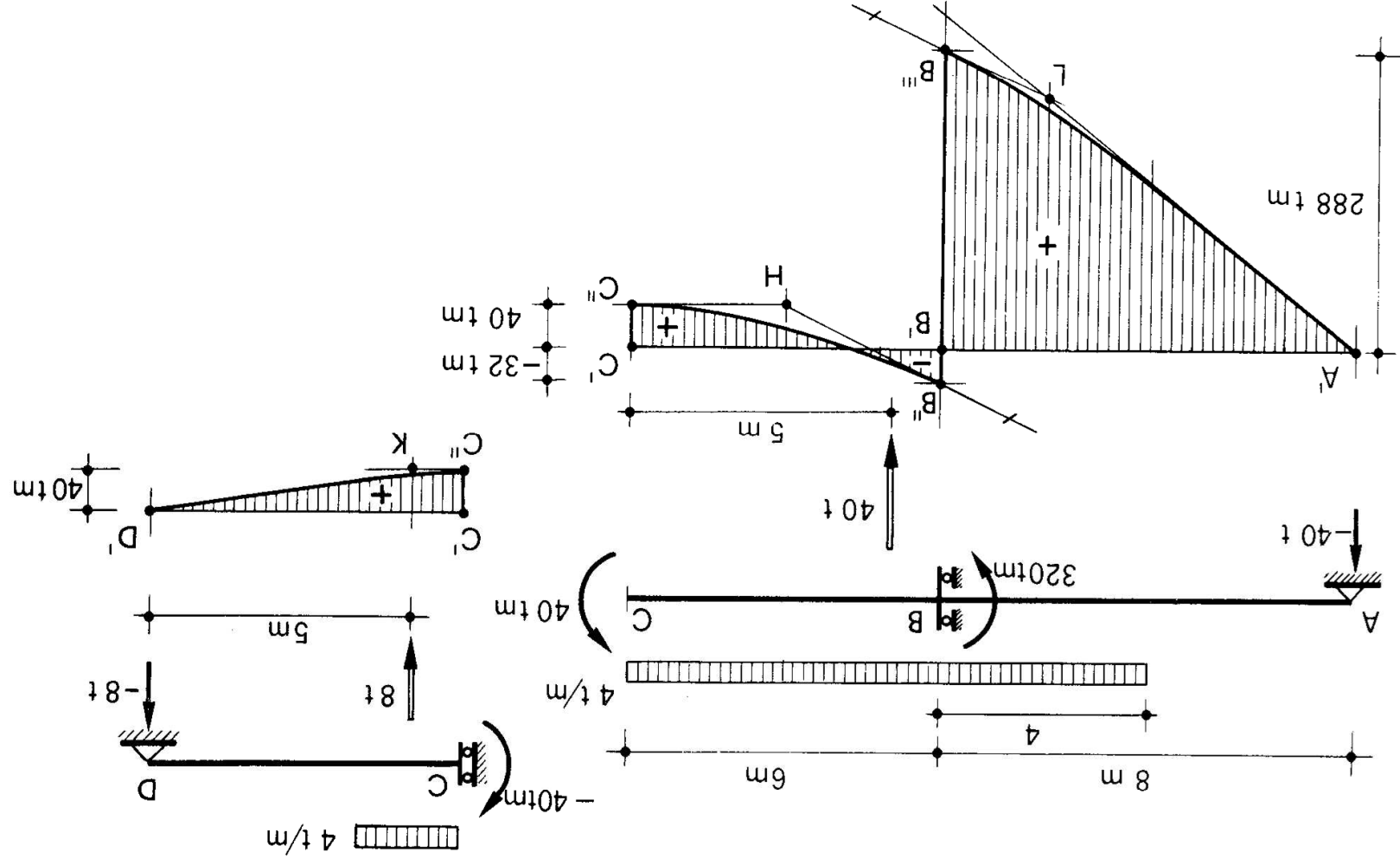


Figura 12b

del carico q agente su CD; C''K e D'K sono le tangenti alla parabola in corrispondenza dei due estremi del carico q ; D'K coincide con il diagramma m_{CD} nella parte scarica, mentre sotto il carico q deve essere inserita nel modo noto la parabola.

Il diagramma m_{BC} si costruisce conducendo da C'' l'orizzontale, e determinando la sua intersezione H con la verticale per la mezzera di BC; C''H e B''H sono le due tangenti in B'' e C'' alla parabola, che così è definita.

Il diagramma m_{AB} si costruisce conducendo da B''' la parallela alla B''H, e determinando l'intersezione L con la verticale di mezzera del carico q agente su AB; la retta A'L coincide con m_{AB} nella parte scarica di AB; A'L e B'''L sono le tangenti alla parabola in corrispondenza dei due estremi del carico q .

Problema n. 13.

Le travi delle Figg. 13, 14 e 15 si studiano, come nell'es. 10, proiettando da tre poli diversi (ma con la stessa base polare) le forze relative alle tre parti AB, BC e CD comprese ciascuna tra due vincoli esterni successivi. Tracciate così (Fig. 13) le tre parabole funicolari, si disegnano

a) la fondamentale sotto CD con le condizioni

$$M_D = 0$$

$$M_L = 0 ;$$

b) la fondamentale sotto BC con le condizioni

$$M_{Cs} = M_{Cd}$$

$$M_K = 0 ;$$

c) la fondamentale sotto AB con le condizioni

$$M_{Bs} = M_{Bd}$$

$$M_H = 0 .$$

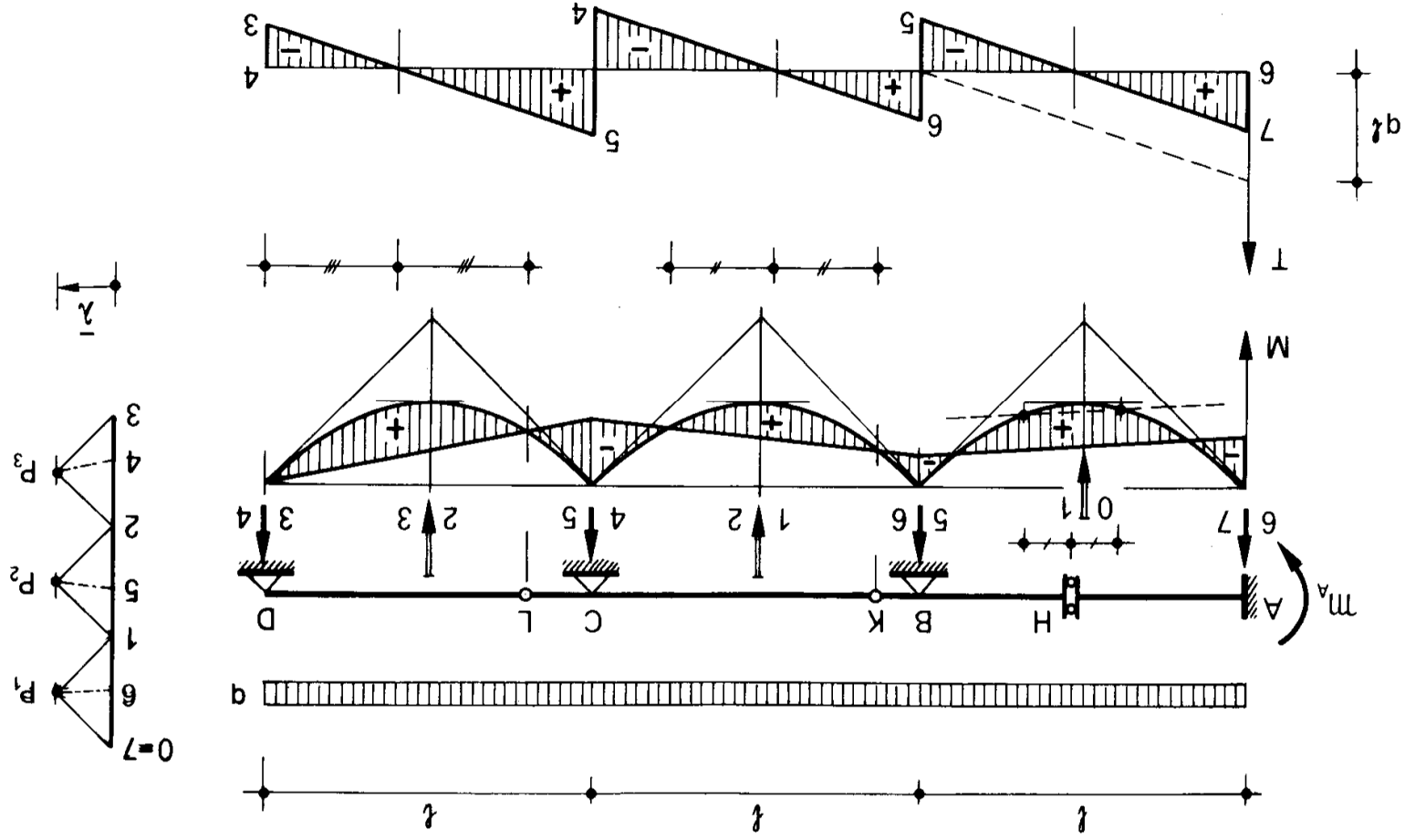


Figura 13

Le reazioni sono

$$R_D = 3.4$$

$$R_C = 4.5$$

$$R_B = 5.6$$

$$R_A = 6.7 = 6.0$$

così pure è (27)

$$T_{Cd} = 2.4 > 0$$

$$T_{Cs} = 2.5 > 0$$

$$T_{Bd} = 1.5 > 0$$

$$T_{Bs} = 1.6 < 0$$

Il diagramma del taglio è disegnato nella stessa Fig. 13; la pendenza comune dei tre tratti si può ottenere come nell'es. 5, operando sulla parte AB, e cioè si riporta in A il carico ql , e si unisce il suo estremo con B. I punti di nullo del taglio sono ubicati in corrispondenza delle mezzerie degli intervalli compresi tra due successivi punti di nullo del momento in ciascuna campata.

Problema n. 14.

La struttura della Fig. 14 è analoga a quella della figura 13; le condizioni che si utilizzano per tracciare le fondamentali sono:

a) per la parte CD

$$M_D = 0$$

$$M_L = 0 ;$$

b) per la parte BC

$$M_{Cs} = M_{Cd}$$

$$M_K = 0 ;$$

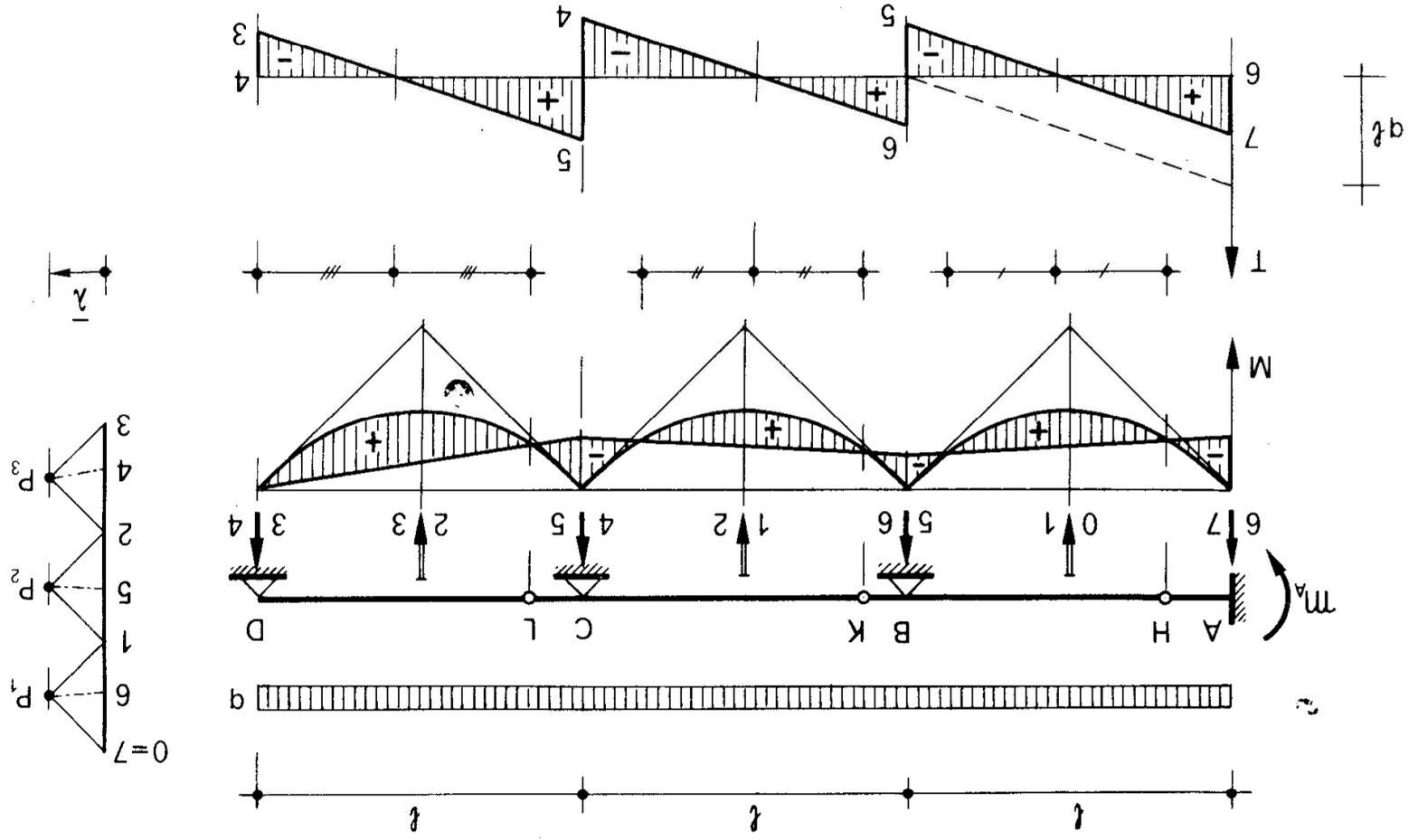


Figura 14

c) per la parte AB

$$M_{Bs} = M_{Bd}$$

$$\left(\frac{dM}{dz}\right)_H = 0 .$$

Si osservi che, come già fatto ripetute volte, la tangente alla parabola sotto H non si è in realtà costruita, e si è disegnata in sua vece la congiungente i punti di intersezione della parabola con due qualsiasi verticali equidistanti da H; la tangente in H alla parabola, e quindi la fondamentale della parte AB, sono parallele a tale congiungente.

I tagli si annullano sotto H, e sotto le mezzerie dei tratti positivi di parabola in BC e CD.

Problema n. 15.

Anche la trave della Fig. 15 è analoga a quella della Fig. 13. Le condizioni che si utilizzano per tracciare le fondamentali sono:

a) per la parte CD

$$M_D = 0$$

$$M_L = 0 ;$$

b) per la parte BC

$$\left(\frac{dM}{dz}\right)_{Cs} = \left(\frac{dM}{dz}\right)_{Cd}$$

$$M_K = 0 ;$$

c) per la parte AB

$$M_{Bs} = M_{Bd}$$

$$M_H = 0 .$$

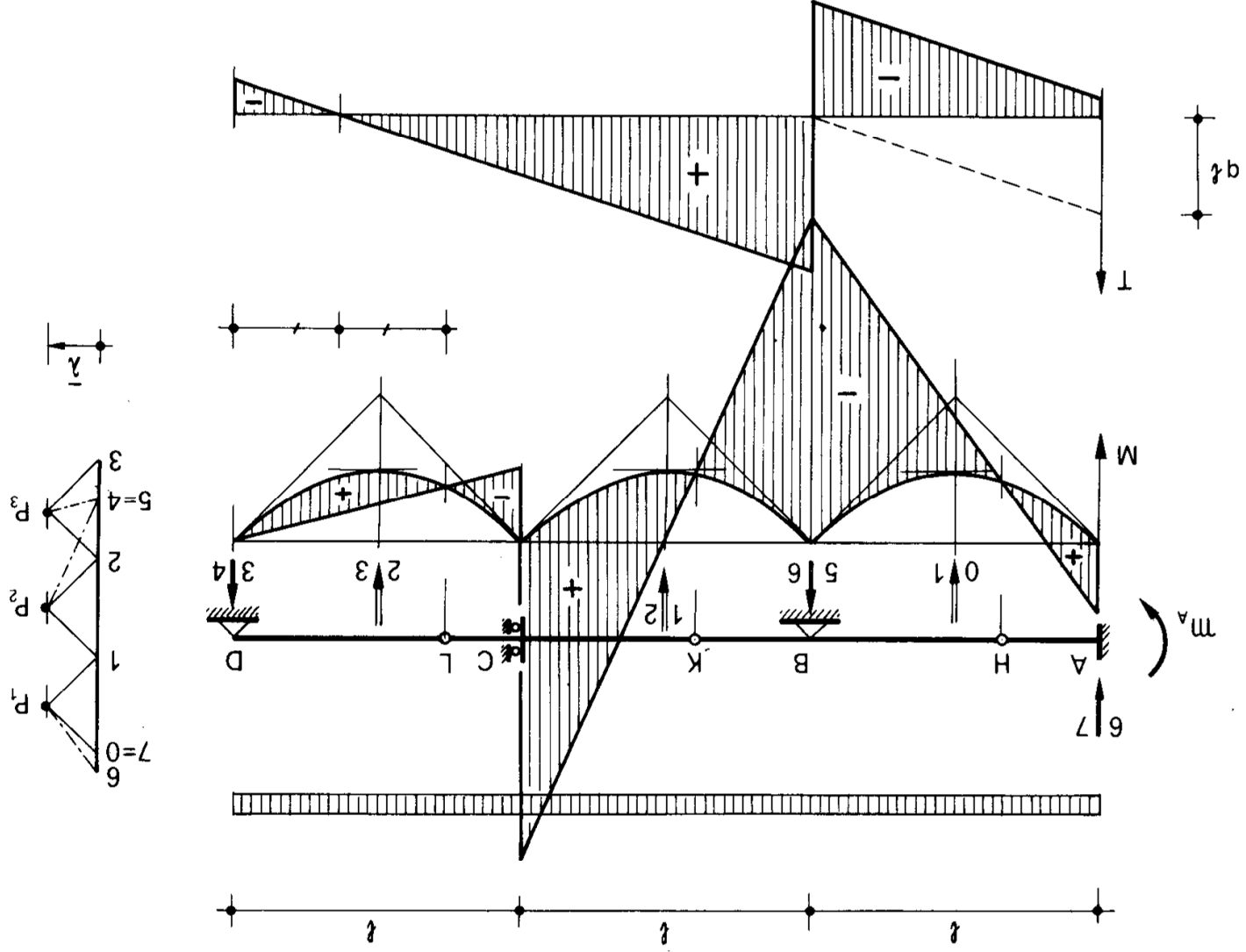


Figura 15

La prima delle condizioni sub b) si traduce nel dire che la fondamentale sotto BC è parallela alla proiettante $P_24 = P_25$; in tal modo infatti è

$$R_C = 4 \cdot 5 = 0$$

e cioè

$$T_{Cs} = T_{Cd} .$$

Problema n. 16.

La trave della Fig. 16 è soggetta ad un insieme di coppie m uniformemente distribuite su tutta la luce.

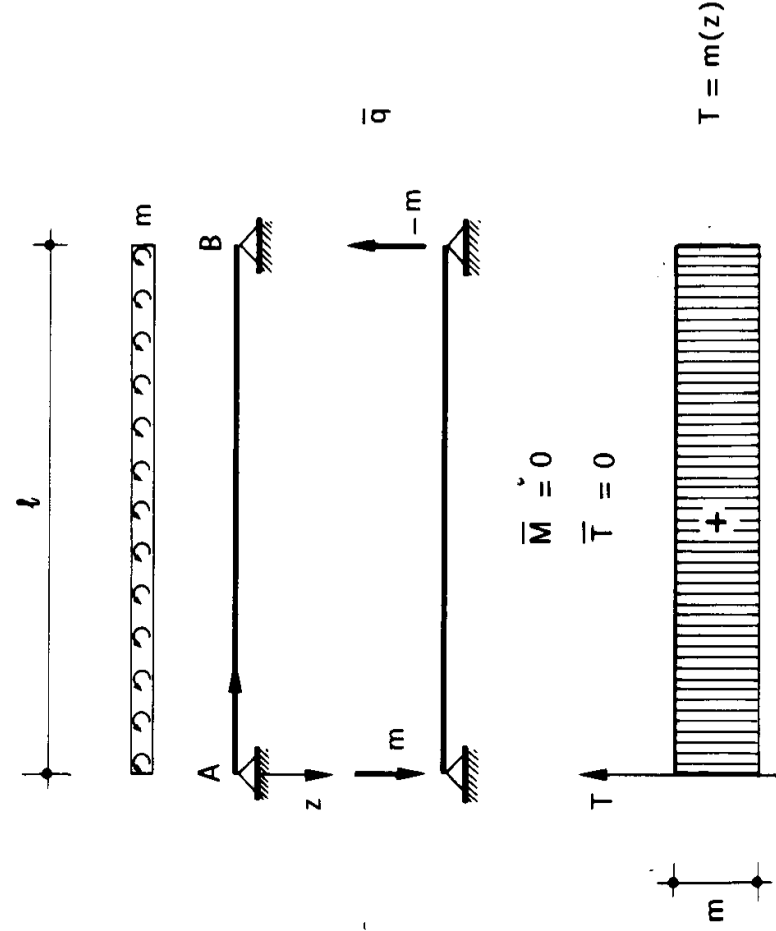


Figura 16

In presenza di coppie distribuite le (1), (2) e (3) si generalizzano in

$$\frac{dT}{dz} = -q \tag{29}$$

$$\frac{dM}{dz} = T - m \quad (30)$$

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = -q - \frac{dm}{dz} . \quad (31)$$

Dalla (30), ponendo

$$\frac{dm}{dz} = \bar{q} ,$$

si ha

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = \frac{dT}{dz} - \bar{q}$$

e, per la (29)

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = - (q + \bar{q}) . \quad (32)$$

Quindi, paragonando la (32) con la (3), il momento $M(z)$ in presenza di q ed m si ottiene operando alla maniera solita su un'unica forza distribuita, pari alla somma di quella effettiva q , e di un'altra \bar{q} , fittizia, fornita da $\frac{dm}{dz}$. Si osservi che $\frac{dm}{dz}$ ha le dimensioni di q .

Quanto sopra vale negli intervalli in cui m è definito e derivabile. Se all'ascissa z_s si verifica che m è discontinuo, ed è definito immediatamente a sinistra ed a destra di z_s , si può sostituire alla effettiva distribuzione di $m(z)$ un'altra, cui nell'intervallo [$z_s - dz, z_s + dz$] si associa

$$m(z) = m(z_s - dz) + \frac{m(z_s + dz) - m(z_s - dz)}{2 dz} (z - z_s + dz) . \quad (33)$$

La distribuzione (33) nell'intervallo $[z_s - dz, z_s + dz]$ equivale ad un carico concentrato all'ascissa z_s pari a

$$\bar{F} = \frac{dm(z)}{dz} \cdot 2 dz = m(z_s + dz) - m(z_s - dz),$$

e cioè

$$\bar{F} = m_{Sd} - m_{Ss}. \quad (34)$$

dove m_{Sd} ed m_{Ss} sono i valori di m immediatamente a destra ed a sinistra della sezione S all'ascissa z_s .

Dalla (30) si ha poi

$$T = \frac{dM}{dz} + m; \quad (35)$$

quindi il diagramma del taglio si ha deducendolo da $M(z)$ per derivazione, al solito modo, ed aggiungendo ad esso il diagramma di m ; si osservi, a tal punto, che le dimensioni di m sono quelle di una forza.

Conosciuto il taglio, sono note anche le reazioni vincolari. Se esistono solo coppie distribuite ($q = 0$), il momento di \bar{q} , che si chiama \bar{M} , coincide con il momento effettivo:

$$\bar{M} = M; \quad (36)$$

il diagramma $\frac{d\bar{M}}{dz}$ si chiama \bar{T} , ed è

$$T = \bar{T} + m. \quad (37)$$

Nella trave in esame il carico fittizio \bar{q} è nullo in $]0, l[$ poichè in tale intervallo è $\frac{dm}{dz} = 0$; devono però, per la (34), considerarsi le forze fittizie

$$\begin{aligned} \bar{F}_A &= m \\ \bar{F}_B &= -m \end{aligned}$$

in $z = 0$ e $z = l$. E' quindi

$$M = \bar{M} = 0$$

$$\bar{T} = 0$$

e, per la (37),

$$T(z) = m \cdot$$

Problema n. 17.

Gli esercizi dal n. 17 al n. 23 sono tutti relativi a travi soggette sol-

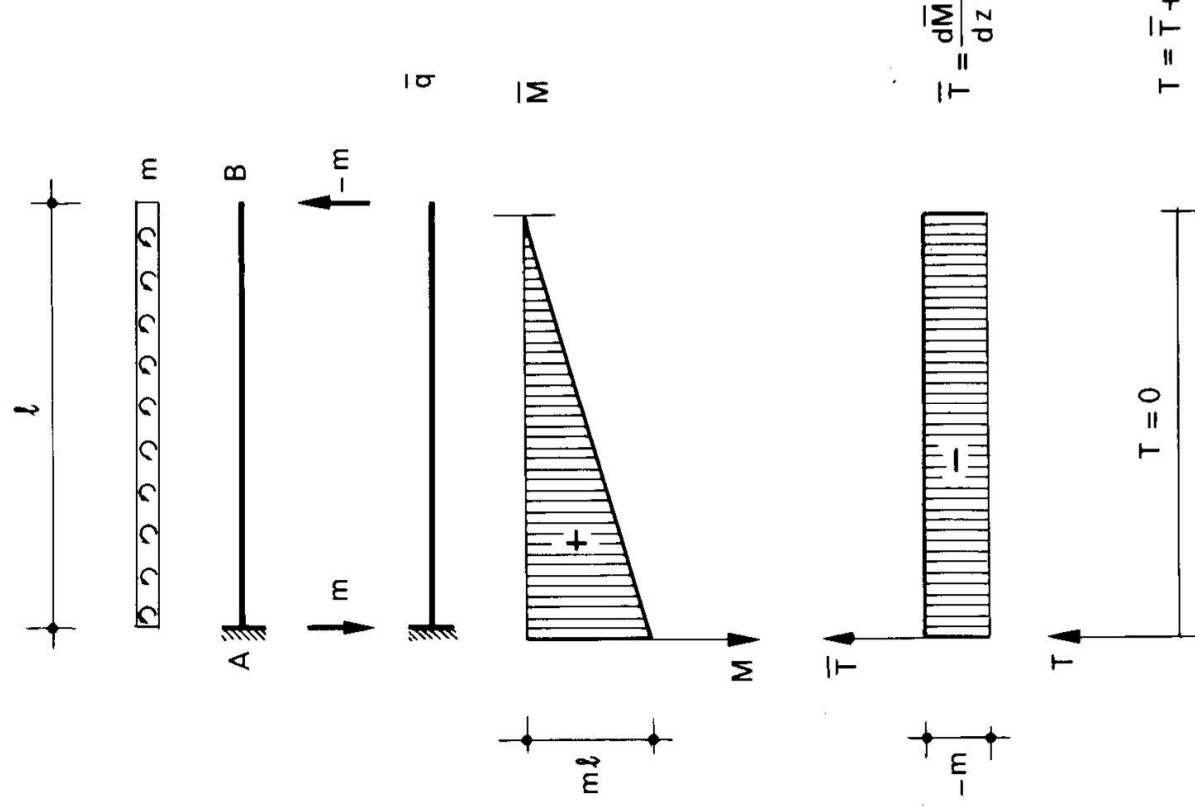


Figura 17

tanto a coppie distribuite. Non si creda che tali casi suscitino un interesse esclusivamente accademico; senza voler esemplificare appoggiandosi al-

le reazioni-coppie del terreno su un trave di fondazione, o alle forze di frenatura orizzontali e non assiali sui ponti e sui carro-ponti, basta osservare che qualsiasi azione assiale esterna distribuita lungo una trave non può che essere eccentrica, e quindi accompagnata da coppie flettenti distribuite.

Nella Fig. 17 appare una mensola AB soggetta alle coppie m uniformemente distribuite lungo tutta la luce; anche in questo caso il carico \bar{q} si riduce ad $\bar{F}_A = m$, $\bar{F}_B = -m$. Il diagramma $\bar{M} = \bar{M}$ è perciò lineare, ha un punto di nullo in B, ed il valore m in A. Il diagramma \bar{T} è costante, e pari a $-m$, quindi il taglio è nullo lungo tutta la mensola.

Problema n. 18, 19, 20.

Le travi delle Figg. 18, 19 e 20 sono di facile studio, ed esso si affida al lettore. Si osservi solo che il diagramma m è riportato indicativamente, e cioè non è connesso ad alcuna scala.

Problema n. 21.

Nella trave della Fig. 21a il carico m è linearmente variabile; quindi \bar{q} è costante; all'estremo di sinistra dell'intervallo in cui m è definito la forza fittizia è nulla, perchè non c'è discontinuità; all'estremo di destra invece deve agire una forza fittizia pari a $m_d - m_s = -m$. Lo studio per la ricerca di \bar{M} e di \bar{T} va eseguito prima sulla parte CD, poi sulla AC.

Sulla parte CD (Fig. 21b) è

$$\bar{R}_C = \frac{1}{5} m$$

$$\bar{R}_D = \frac{2}{5} m ;$$

il momento $\bar{M} = M$ è lineare in ED, ed in E si ha

$$E'E'' = \bar{M}_E = -\frac{2}{5} m a .$$

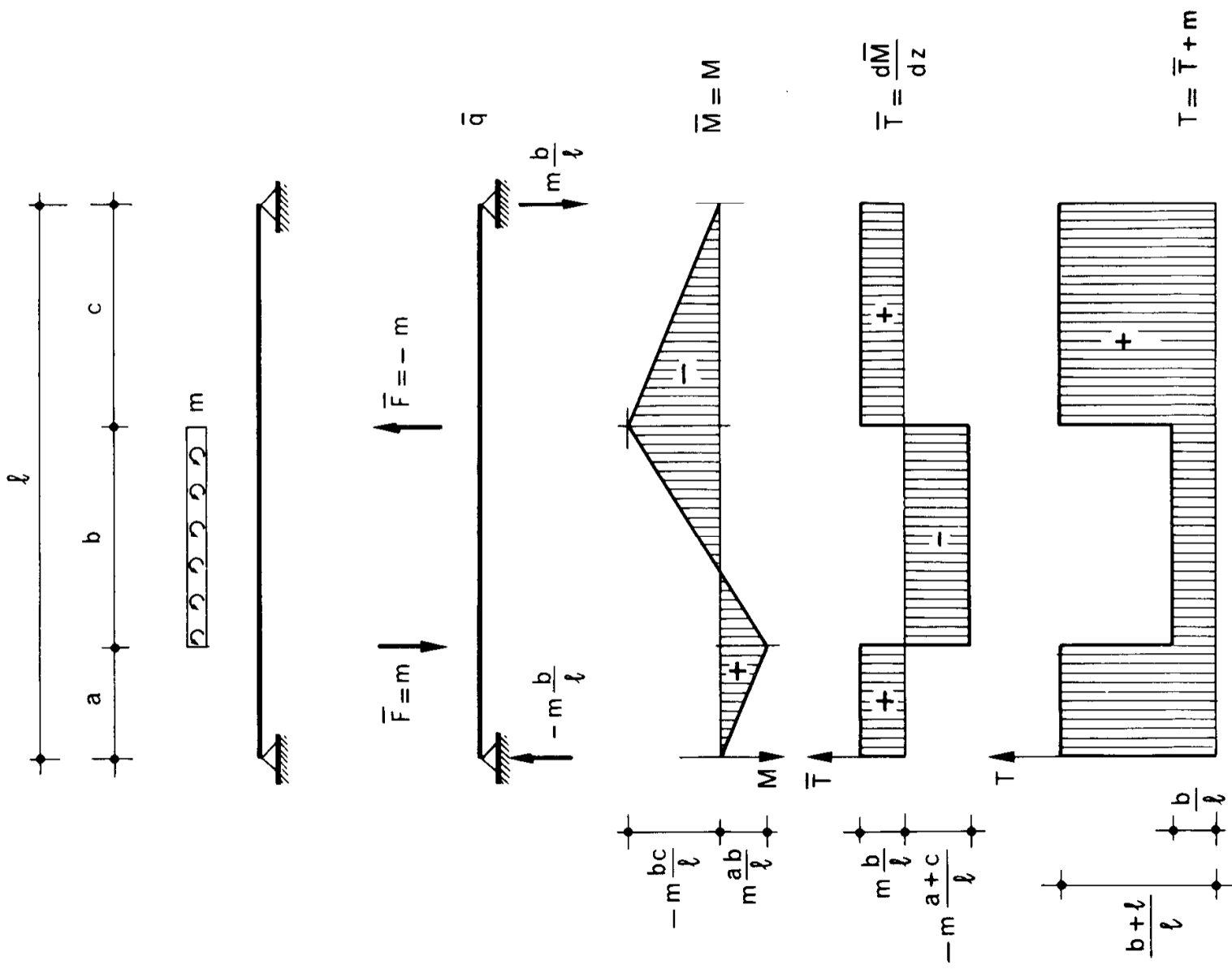


Figura 18

Figura 19

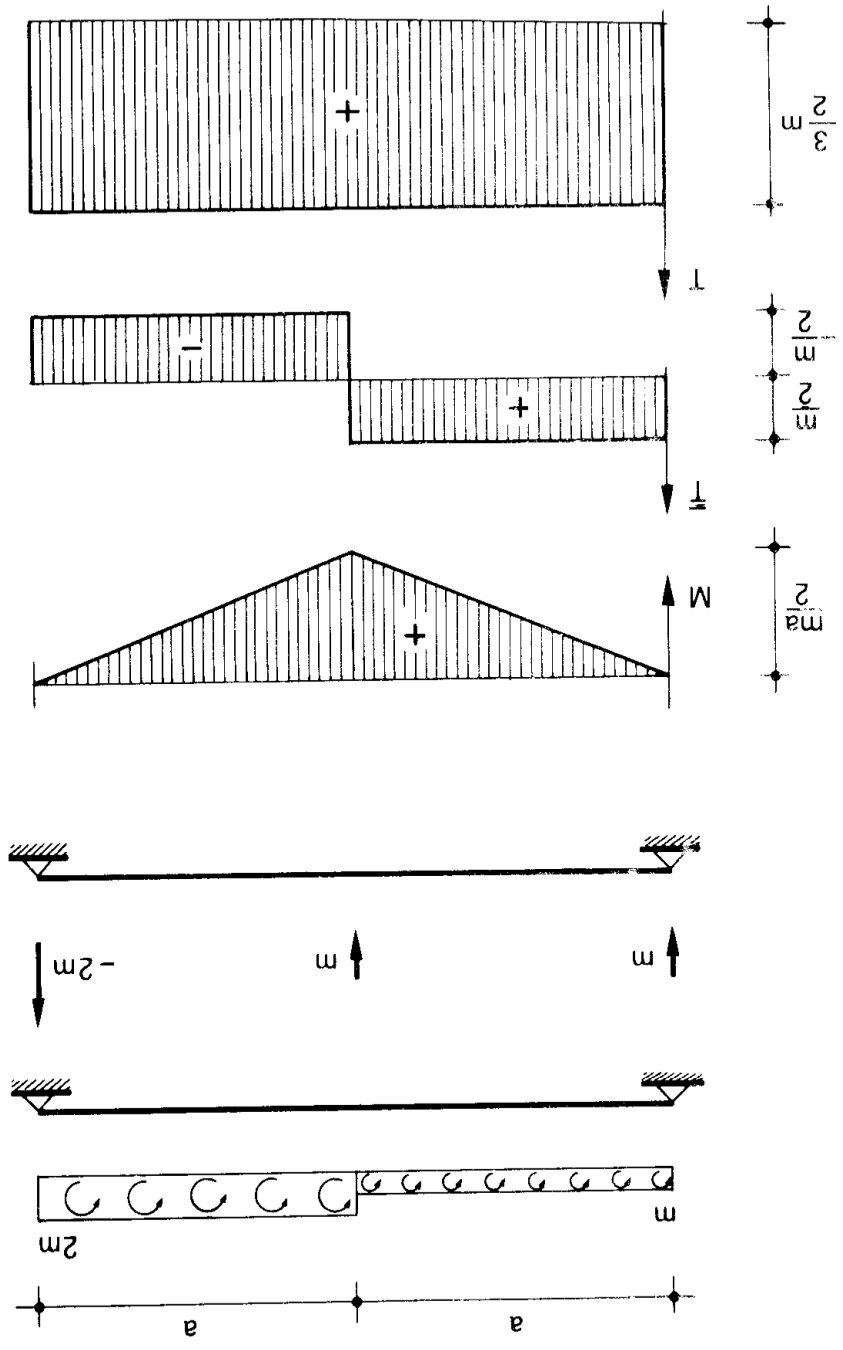
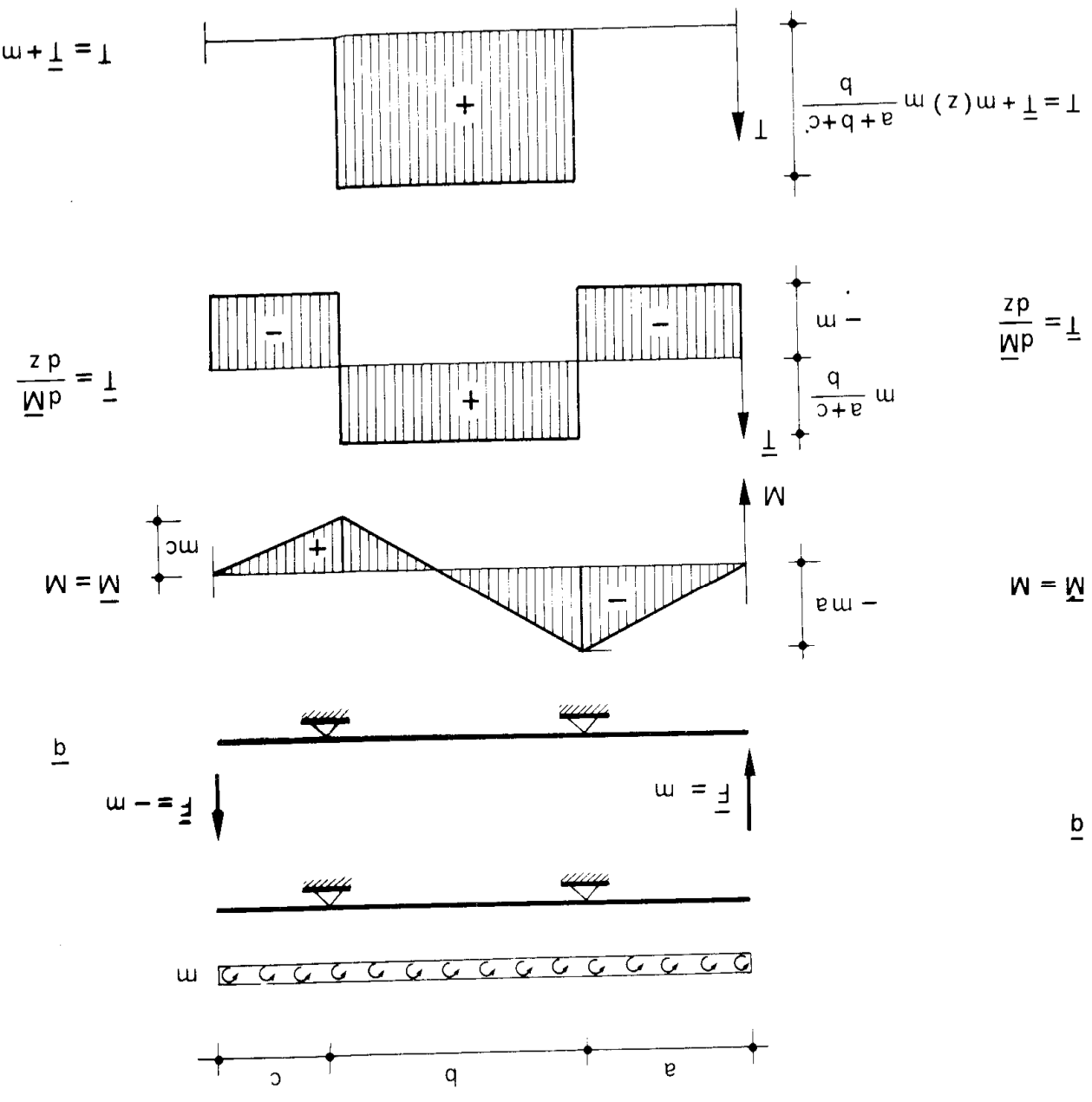


Figura 20



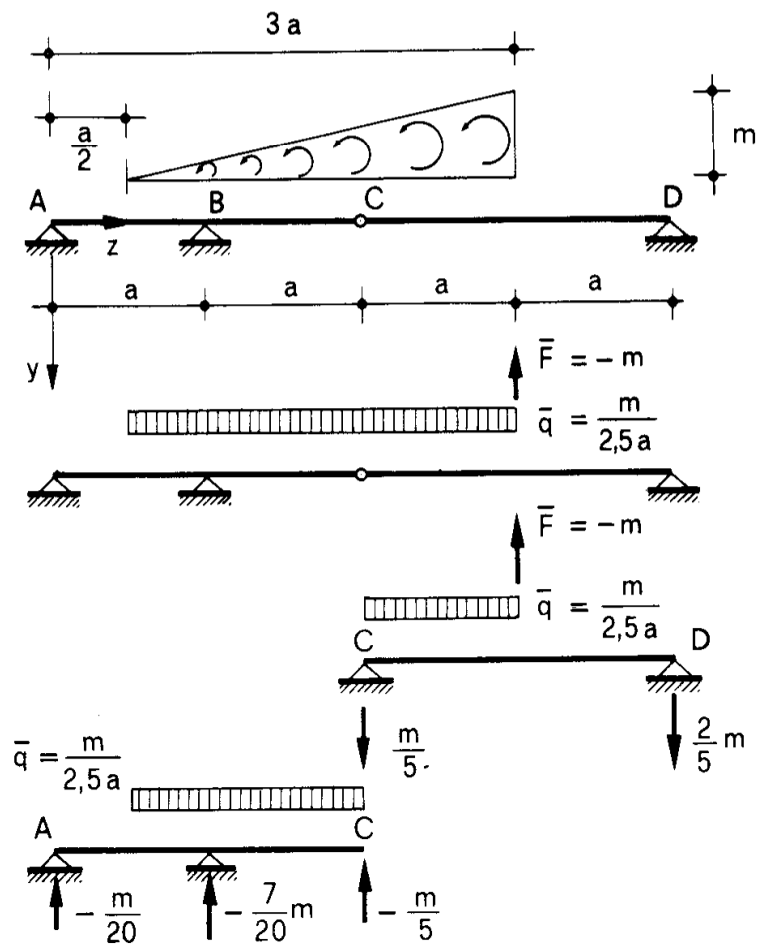


Figura 21a

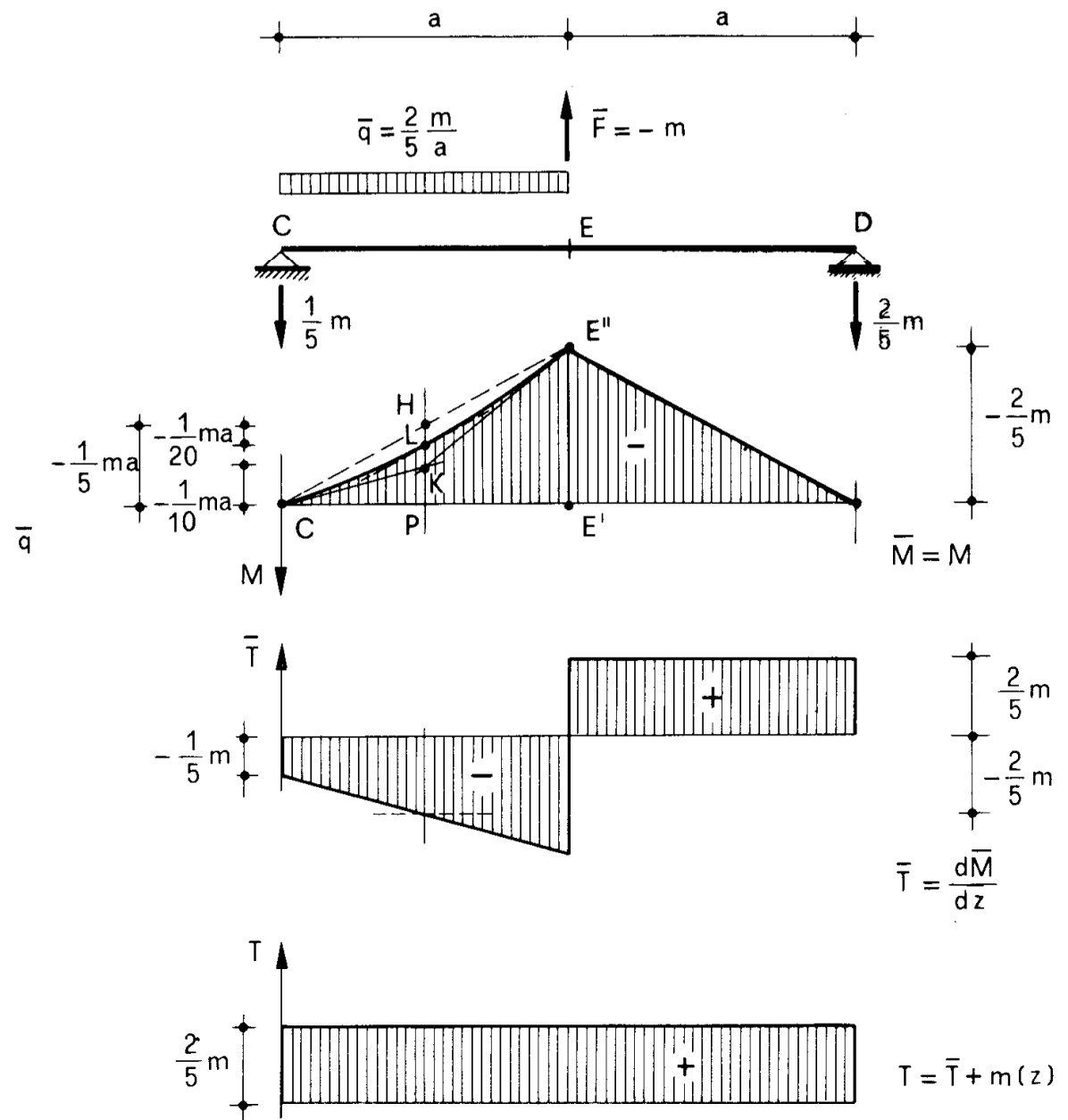


Figura 21b

In CE il momento varia con legge parabolica; la freccia della parabola è

$$HL = \bar{q} \frac{a^2}{8} = \frac{2}{5} \frac{m}{a} \frac{a^2}{8} = \frac{1}{20} m a ;$$

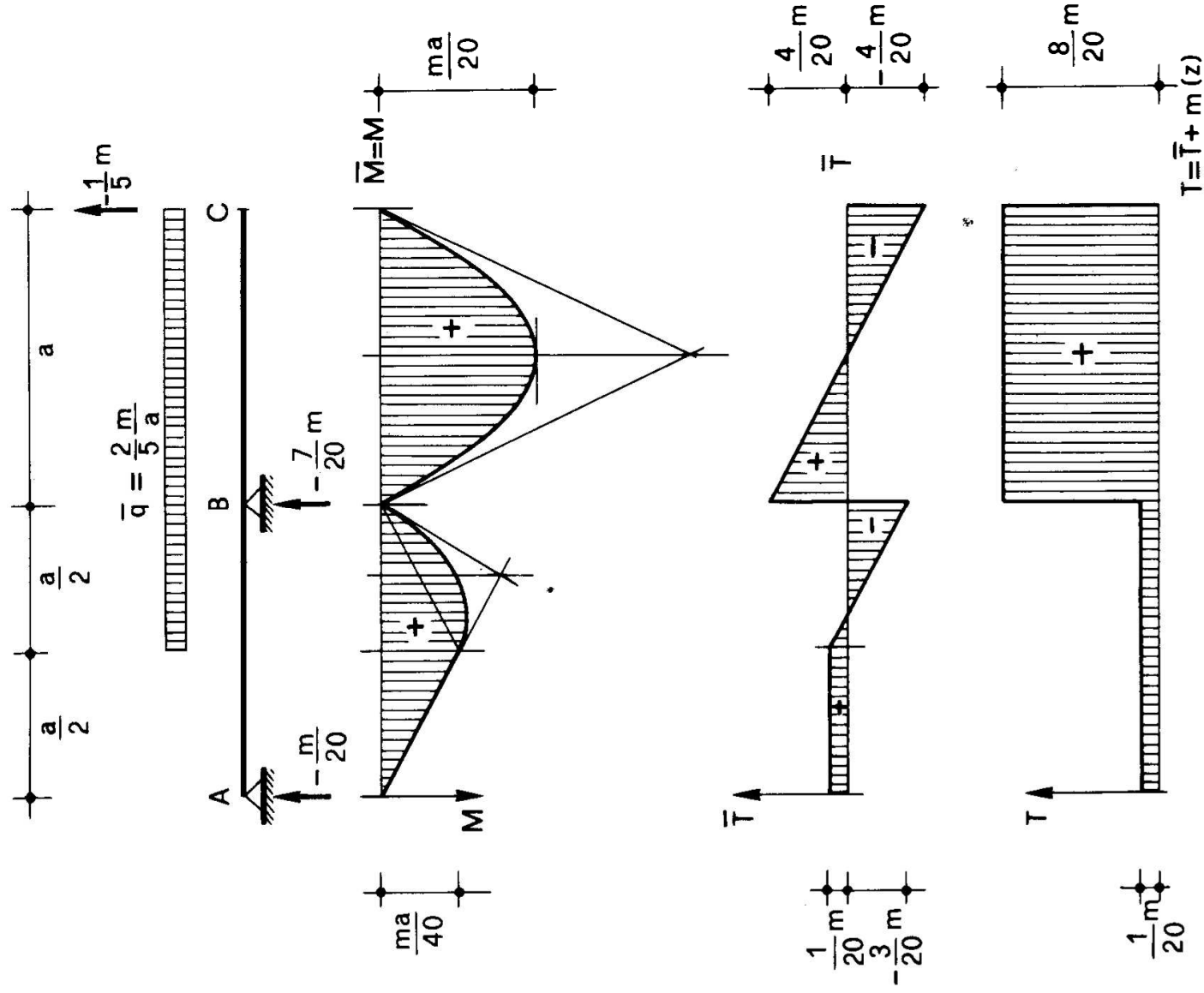


Figura 21c

quindi si disegna da H il segmento

$$HK = 2 HL = \frac{1}{10} m a ,$$

e le due rette C'K ed E''K sono le tangenti alla parabola. Poichè HP = $-\frac{2}{10} ma$, è pure KP = $-\frac{1}{10} ma$.

Il diagramma del taglio \bar{T} è costante sotto ED, e pari a $\bar{R}_D = \frac{2}{5} m$. Sotto CE invece \bar{T} varia linearmente; immediatamente a destra di C è

$$\bar{T}_C = -\bar{R}_C = -\frac{1}{5} m ,$$

ed immediatamente a sinistra di E è

$$\bar{T}_{Es} = -\frac{1}{5} m - \frac{2}{5} \frac{m}{a} a = -\frac{3}{5} m .$$

Poichè sotto ED è $m = 0$, e tra C ed E m varia linearmente da $\frac{3}{5} m$ ad m , il diagramma $T = \bar{T} + m(z)$ è costante lungo tutto CD, e pari a $\frac{2}{5} m$.

Sulla parte AC (Fig. 21c) agisce nell'intervallo] $\frac{a}{2}$, $2a$ [il carico $\bar{q} = \frac{2}{5} \frac{m}{a}$, ed una forza in C uguale e contraria alla reazione \bar{R}_C della trave CD, e cioè pari a $-\frac{m}{5}$. Risulta

$$\bar{M}_B = \frac{ma}{5} - \frac{2}{5} \frac{m}{a} \frac{a^2}{2} = 0$$

L'ulteriore studio della struttura è lasciato al lettore.

Problema n. 22.

La trave della Fig. 22a non è studiata con l'aiuto delle (36) e (37), ma direttamente attraverso le equazioni della statica.

La condizione di equilibrio alla rotazione intorno ad A fornisce

$$- R_B l + m(l + a) = 0$$

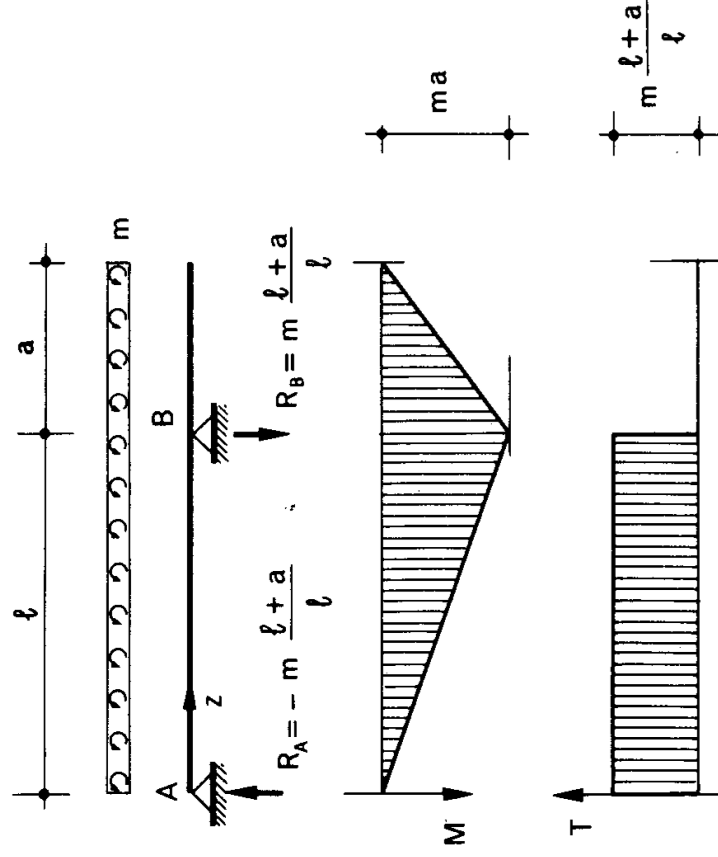


Figura 22a

da cui

$$R_B = m \frac{l + a}{l} .$$

La condizione di equilibrio alla traslazione è

$$R_A + R_B = 0$$

da cui

$$R_A = - m \frac{l + a}{l} .$$

Il momento in una sezione generica compresa tra A e B è

$$M = -R_A z - mz = \frac{ma}{l} z \quad z \in [0, l];$$

per una sezione generica compresa tra B e C è invece

$$M = m(l + a - z) \quad z \in [l, l + a].$$

Il taglio è

$$T(z) = \begin{cases} m \frac{l+a}{l} & z \in]0, l[\\ 0 & z \in]l, l+a]. \end{cases}$$

Nella Fig. 22b è studiata la stessa trave, ma soggetta alle coppie m

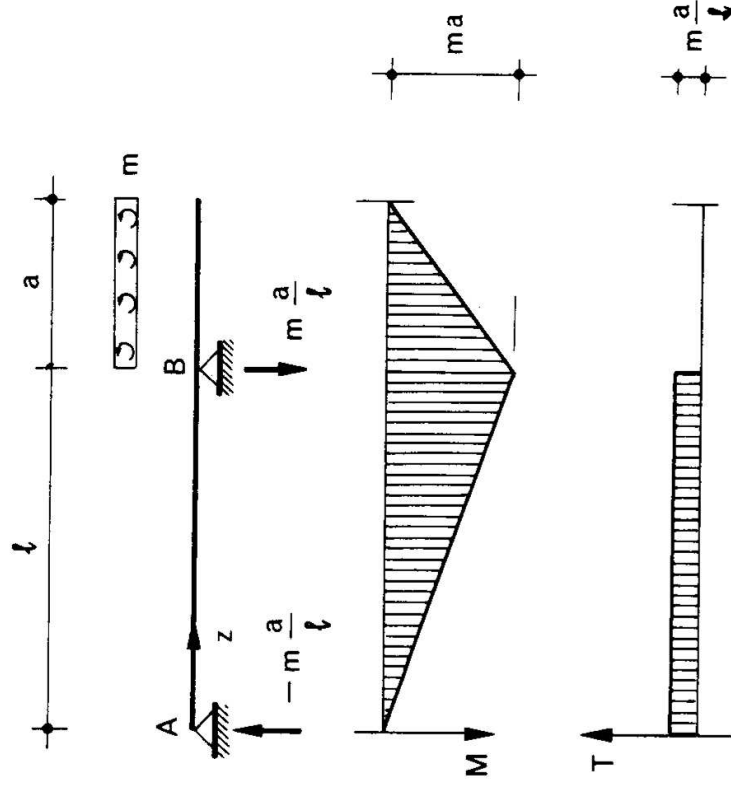


Figura 22b

soltanto sulla mensola. Si ha, per la rotazione intorno ad A,

$$-R_B l + ma = 0$$

da cui

$$R_B = m \frac{a}{l};$$

per l'equilibrio alla traslazione è poi

$$R_A = -m \frac{a}{l}.$$

Il momento M è

$$M(z) = \begin{cases} m \frac{a}{l} z & z \in [0, l] \\ m(l + a - z) & z \in [l, l + a] \end{cases}$$

Il taglio T è

$$T(z) = \begin{cases} m \frac{a}{l} & z \in]0, l[\\ 0 & z \in]l, l + a]. \end{cases}$$

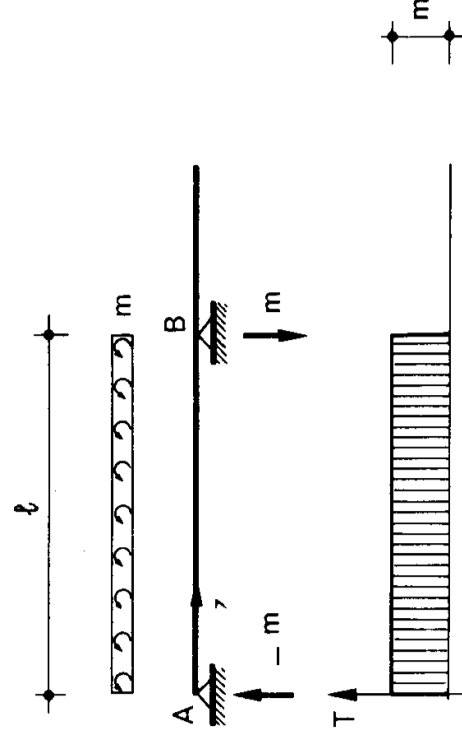


Figura 22c

Nella Fig. 22c è studiata ancora la trave della Fig. 22a, ma soggetta alle coppie m solo fra A e B; risulta

$$R_B = -R_A = m$$

$$M(z) = mz - mz = 0$$

$$T(z) = \begin{matrix} m \\ \diagdown \\ \diagup \\ 0 \end{matrix}$$

$$z \in]0, l[$$

$$z \in]l, l + a].$$

Si osserva che vale il principio di sovrapposizione degli effetti, e che il momento in AB nella trave della Fig. 22a è dovuto soltanto alla presenza delle coppie m sulla mensola.

Problema n. 23.

Anche la trave della Fig. 23 è studiata attraverso le equazioni della statica.

Per la trave EF si ha

$$M_F = -m(b - 2c)$$

$$R_E = R_F = 0;$$

il diagramma del momento è lineare, si annulla in E, ed ha valore $-m(b - 2c)$ in F.

Per la trave AE è

$$R_B = -R_A = m \frac{a+c}{a};$$

risulta

$$M_B = mc,$$

ed il diagramma del momento è lineare in AB e BE, annullandosi in A ed E.

Per la trave FD è

$$R_D = -R_C = \frac{m(b-2c)}{a};$$

il diagramma del momento è costante e pari a $m(b - 2c)$ in FC; lineare, con il punto di nullo in D, nella parte CD.

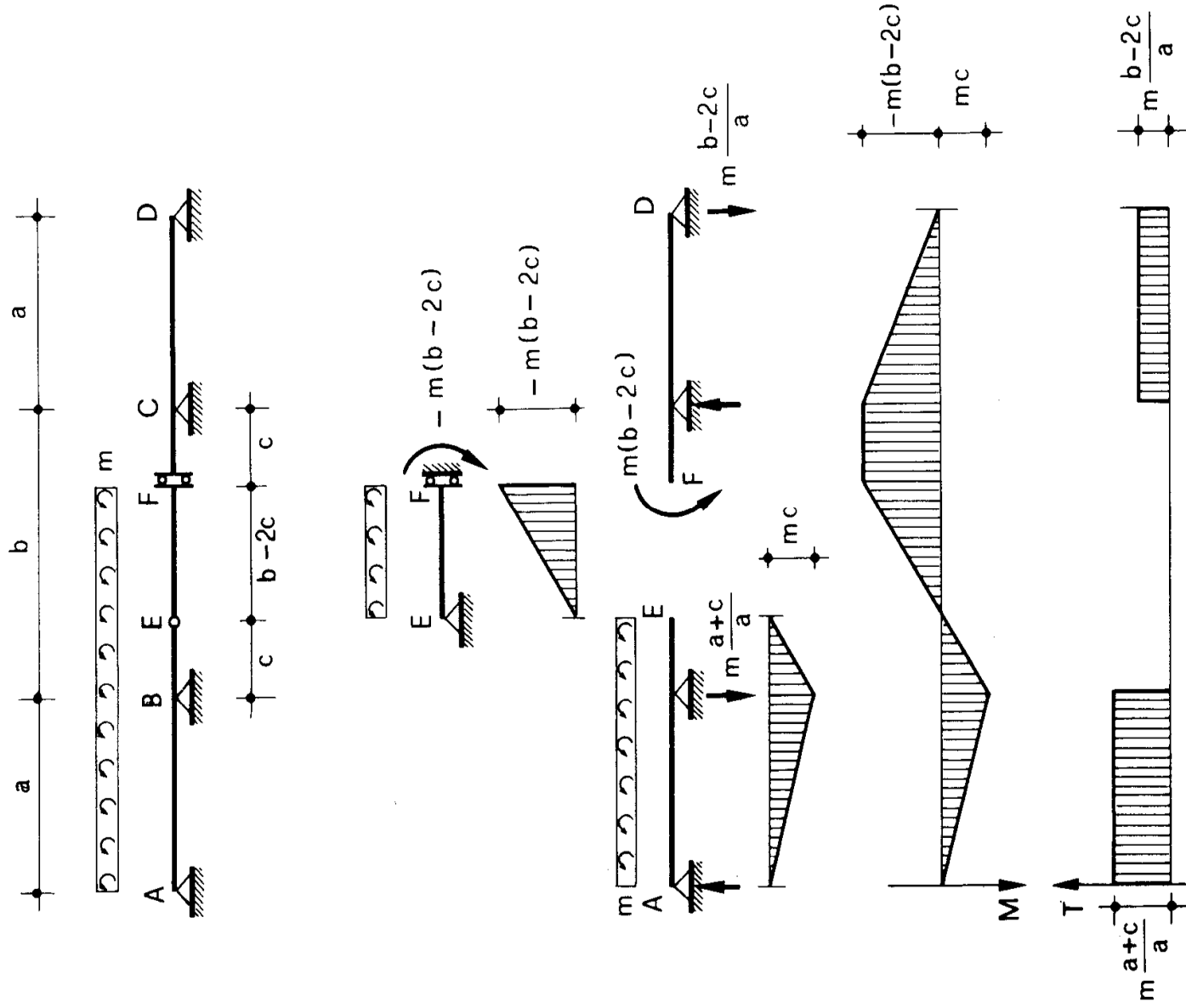


Figura 23

Il taglio è costante in AB e CD, nullo in BC; si ha precisamente

$$T_{AB} = m \frac{a+c}{a}$$

$$T_{CD} = m \frac{b - 2c}{a} .$$

Problema n. 24.

Negli esercizi che seguono si studiano travi in cui il carico agisce non direttamente sulla trave stessa, ma attraverso bracci. Questo caso si verifica, nella realtà, abbastanza frequentemente; basti citare i complessi di sollevamento con bracci di gru.

Nella Fig. 24a è riportato uno schema elementare di tale tipo strut-

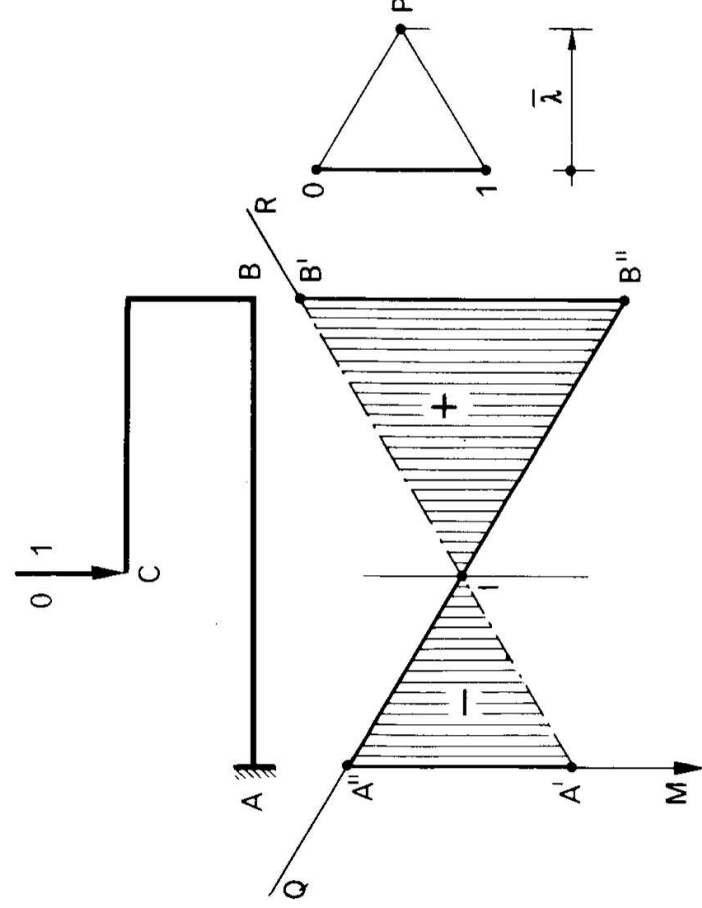


Figura 24a

turale, e cioè una trave a mensola AB soggetta in B ad una forza 0.1 agente secondo una verticale diversa da quella di B, attraverso il braccio BC.

Il poligono funicolare è formato dalle due rette QI ed IR; poichè la 0.1 agisce sulla trave in B, il primo lato è valido da A a B, il secondo soltanto in B; quindi occorre considerare la spezzata QB''B'R.

La fondamentale, come in ogni mensola (es. 3), è l'ultimo lato IR del poligono funicolare. Si osservi che in I il momento risulta nullo, e le due tangenti al diagramma di M immediatamente a sinistra ed a destra di B si intersecano sotto la forza 0.1 (vedi es. 5).

Nella Fig. 24b è disegnato il diagramma del momento di tutta la struttura, alla maniera seguita nel cap. 4; esso è lineare in CD, costante in DB, lineare ancora in AB, annullandosi in E.

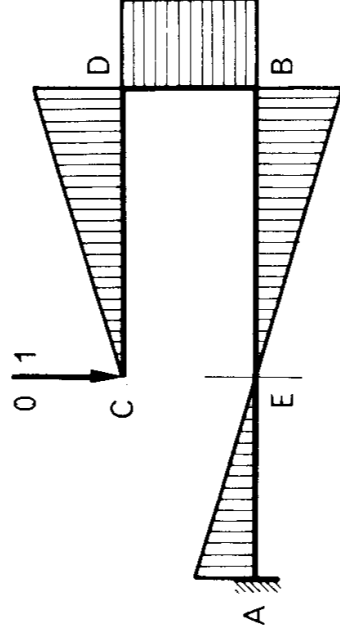


Figura 24b

Problema n. 25.

Nella trave della Fig. 25 le tre forze sono numerate nella successione

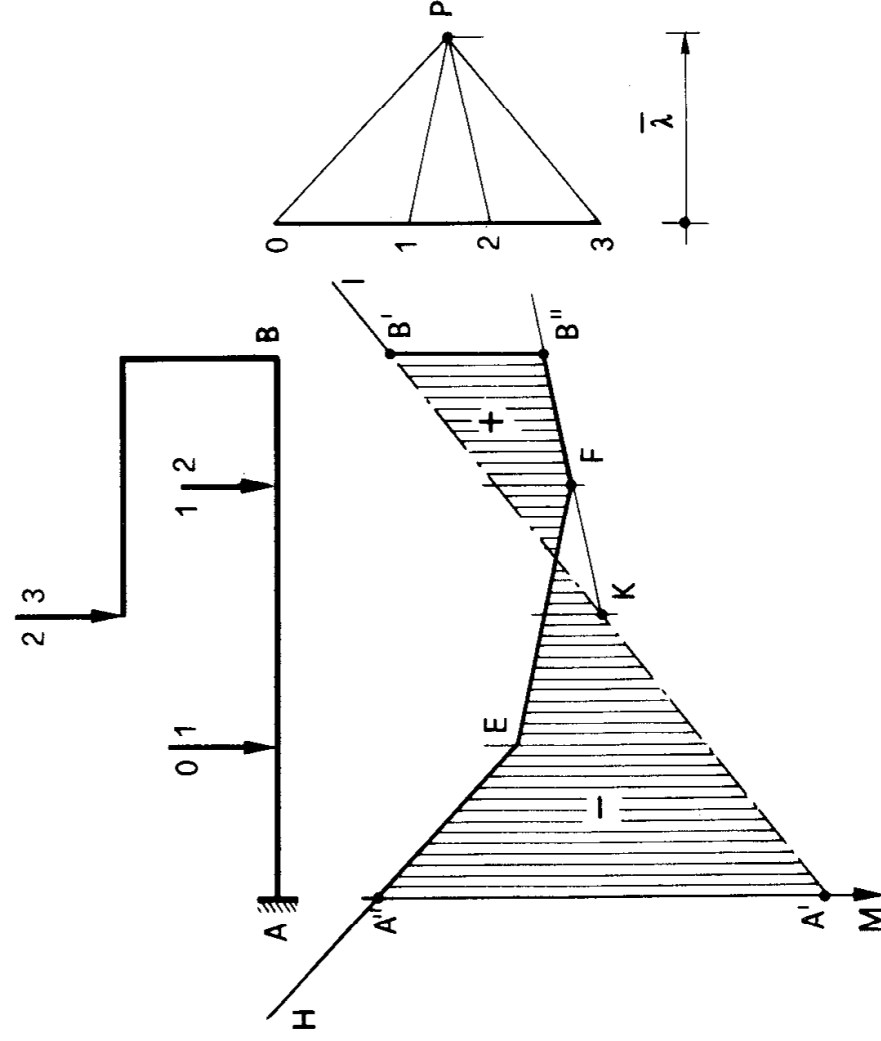


Figura 25

secondo cui si incontrano percorrendo la struttura da A a B; il poligono funicolare è formato dalle quattro rette HE, EF, FK, KI; la spezzata che

si considera è la $HEFB''B'I$. La fondamentale è l'ultimo lato del poligono, e cioè la retta KI .

Problema n. 26.

Nella trave della Fig. 26a il poligono funicolare è costituito dalle

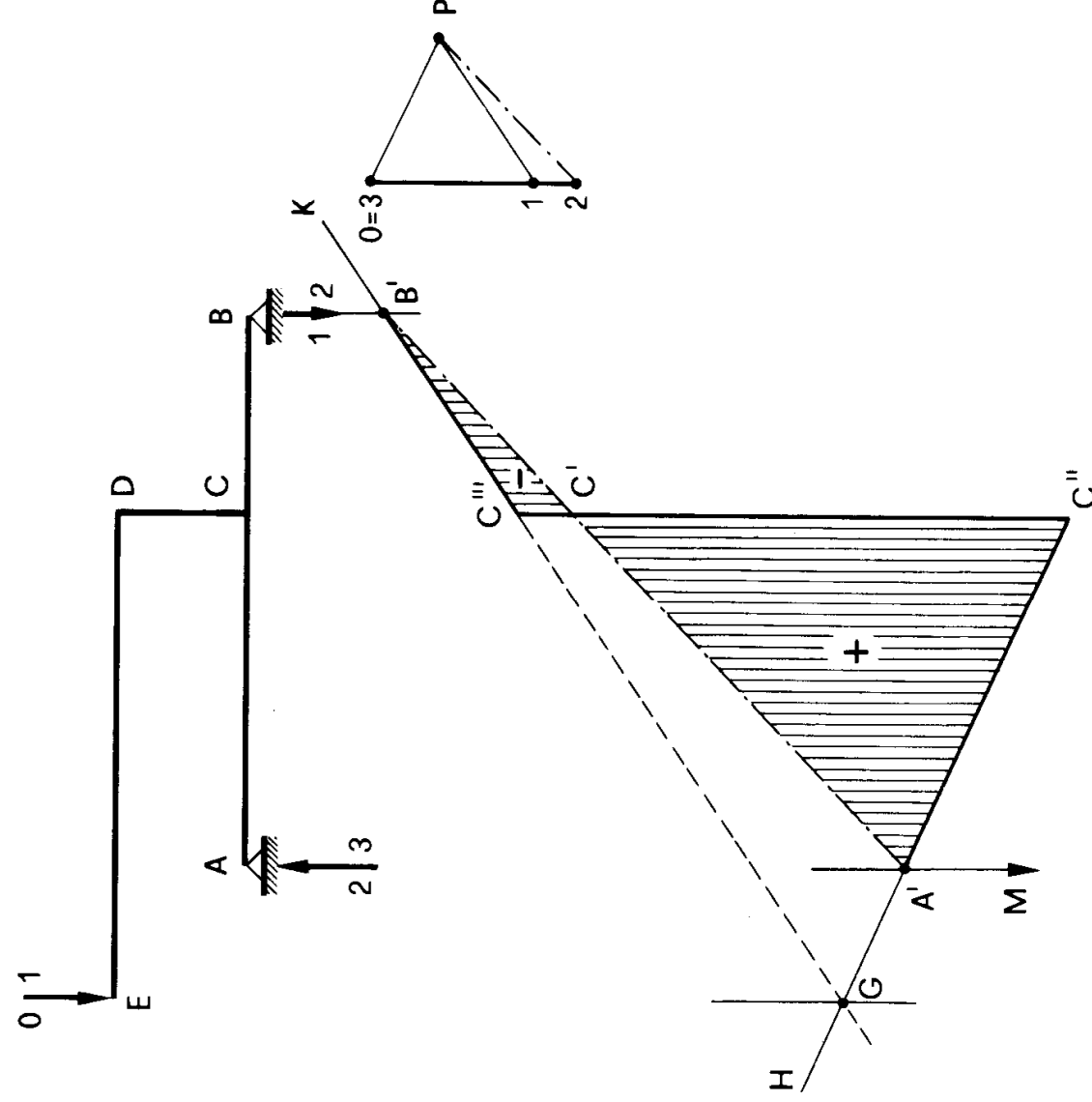


Figura 26a

due rette GH e GK , parallele a $P0$ e $P1$; la spezzata che si considera è la $HC''C'''K$; la fondamentale è la $A'B'$, dove A' e B' sono rispettivamente i punti di intersezione della suddetta spezzata con le verticali per A e B .

Nella Fig. 26b è disegnato il diagramma del momento alla maniera pedissequa del cap. 4; in ED il momento varia con legge lineare, in DC è

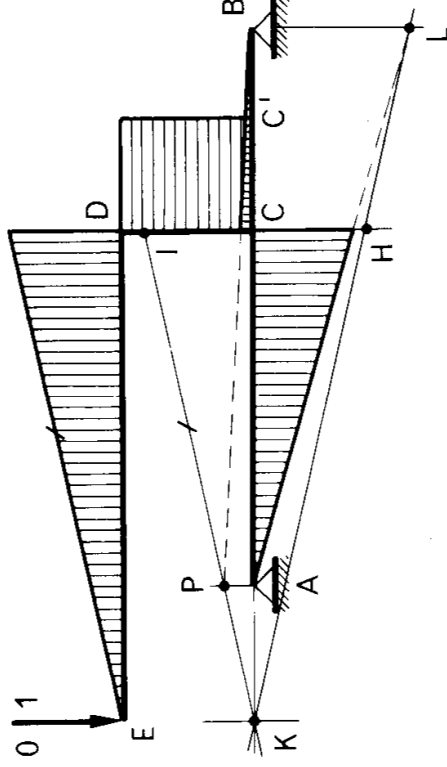


Figura 26b

costante. Se non ci fosse R_B , il diagramma m_{AC} si otterrebbe ribaltando C' in H, ed unendo H con K. Tale diagramma è falso ovunque, fatta eccezione per l'ordinata BL sotto B; quindi

$$m_{AC} \ni L, A.$$

Il diagramma m_{CB} si può ottenere sfruttando la condizione di equilibrio del nodo C, oppure ribaltando C' in senso orario su I, unendo I con K (parallela per K ad m_{ED}) ed utilizzando di tale diagramma la sola ordinata PA:

$$m_{BC} \ni P, B.$$

Problema n. 27.

Nella trave della Fig. 27 le forze si susseguono sulla trave da sinistra a destra nel seguente ordine: prima il carico q tra A e C, di risultante 0·1, poi la 1·2 e la 2·3, infine il carico q tra C e B, di risultante 3·4. Il poligono funicolare è formato dalle rette DE, EH, HK, KF, FG. Esso va corretto inserendo tra A e C, e tra C e B, le due parabole. La prima parabola ha per estremi i due punti A' e C'' dove il primo e il secondo lato del poligono (quelli cioè che si intersecano sulla verticale di 0·1) sono intersecati

dalle verticali per A e C, la seconda parabola ha per estremi i due punti C''' e B' dove il quarto e il quinto lato del poligono (e cioè quelli che

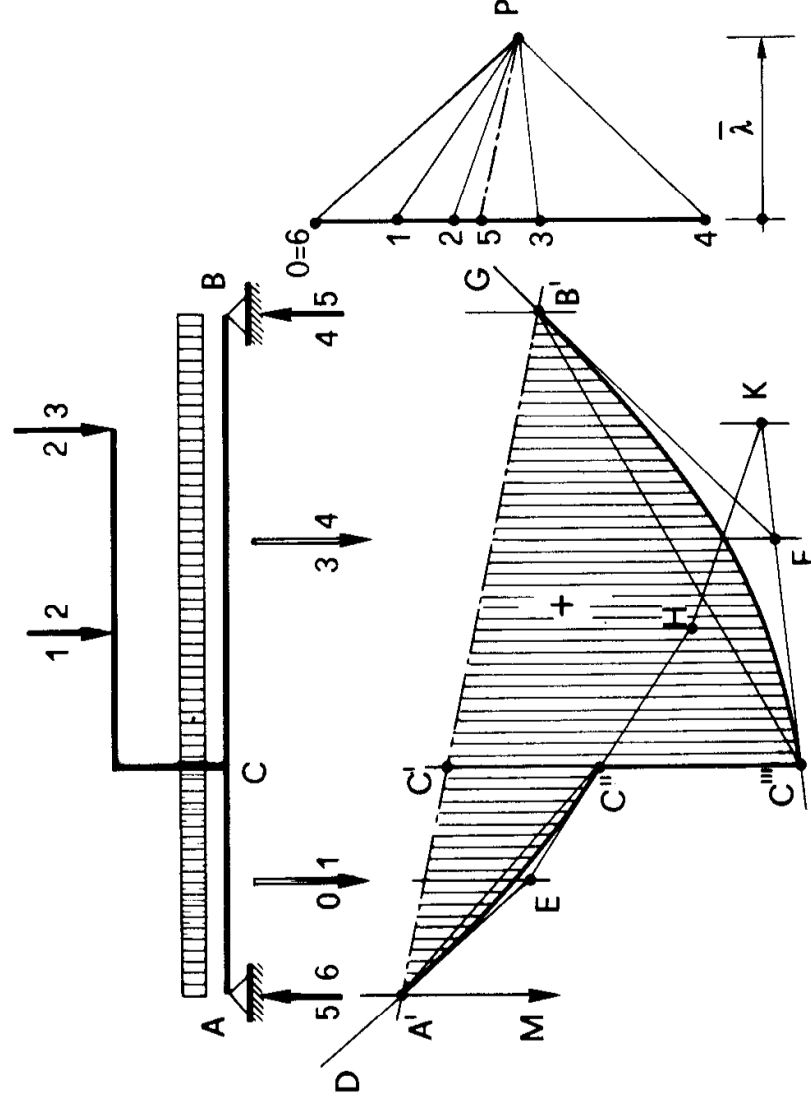


Figura 27

si intersecano su 3·4) sono intersecati dalle verticali per C e B.

Le rette DA' e C''H sono le tangenti in A' e C'' alla prima parabola, le rette KC''' e B'G le tangenti in C''' e B' alla seconda parabola.

La spezzata da considerare è formata dalla parabola A'C'', dal segmento C''C''', e dalla parabola C''B'; la fondamentale è la retta A'B'.

Problema n. 28.

Il poligono funicolare è formato dalle due rette HG e GK, la spezzata da considerare è la HD''D'''K.

Le fondamentali sono due: la retta E'C' per la parte BE, la retta A'B' per la parte AB.

Problema n. 29.

Le forze si succedono sulla trave nel seguente ordine, da sinistra a

destra: prima 0·1 e 1·3, poi 2·3 e 3·4 attraverso il braccio in D, infine la 4·5. Il poligono funicolare è costituito dalle rette HF, FG, GI, IL, LM,

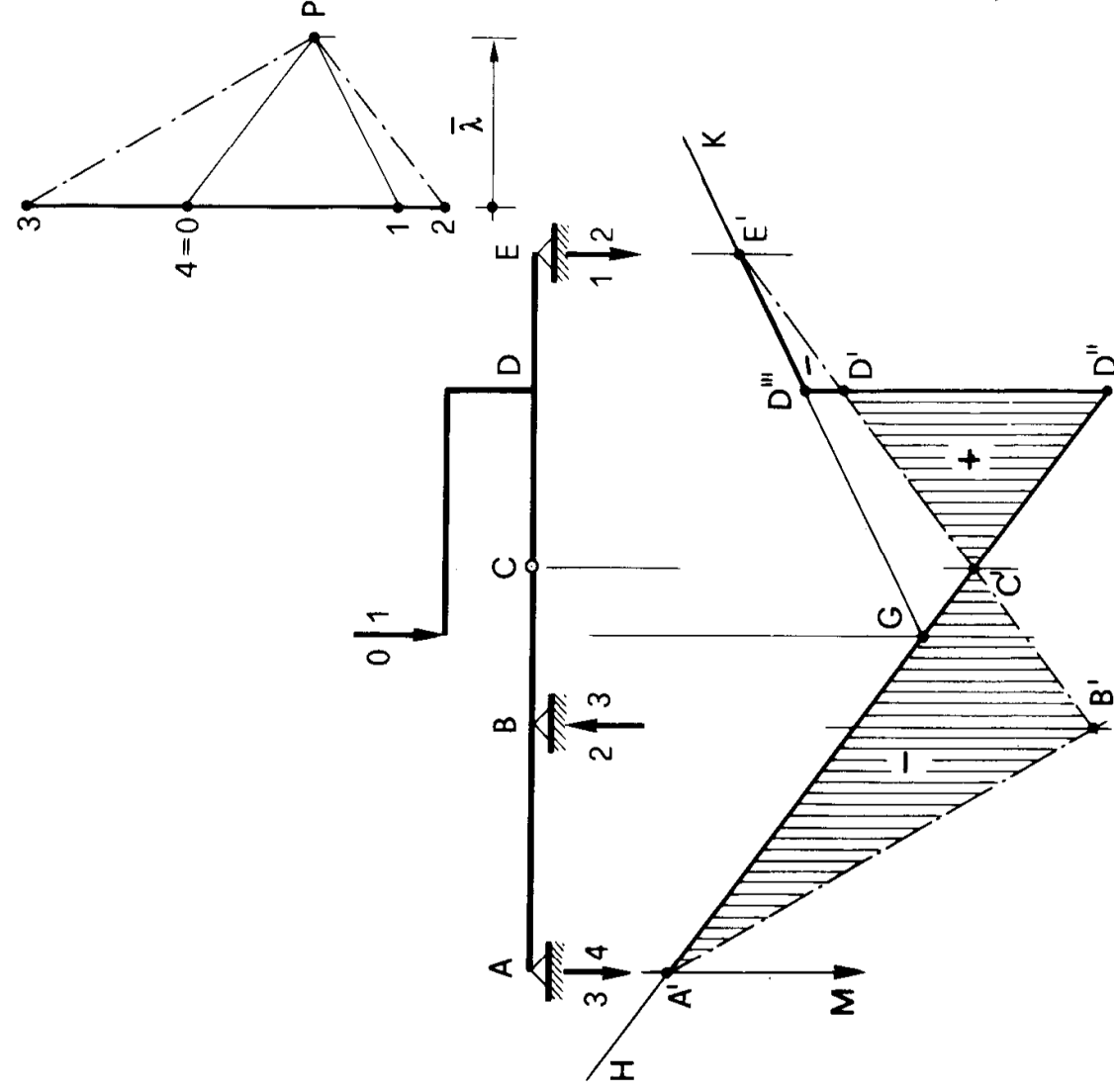


Figura 28

MK; la spezzata da considerare è la HFGD''D'''MK.

La fondamentale sotto BE è la E'B', che interseca l'ultimo lato MK del poligono funicolare nel punto E', assieme alla verticale per E,

e che è parallela al lato GD'' (il bipendolo in C impone momento costante tra la 1-2 e D).

La fondamentale sotto AB è la $B'A'$, dove A' è l'intersezione del primo lato HF del poligono funicolare con la verticale per A .

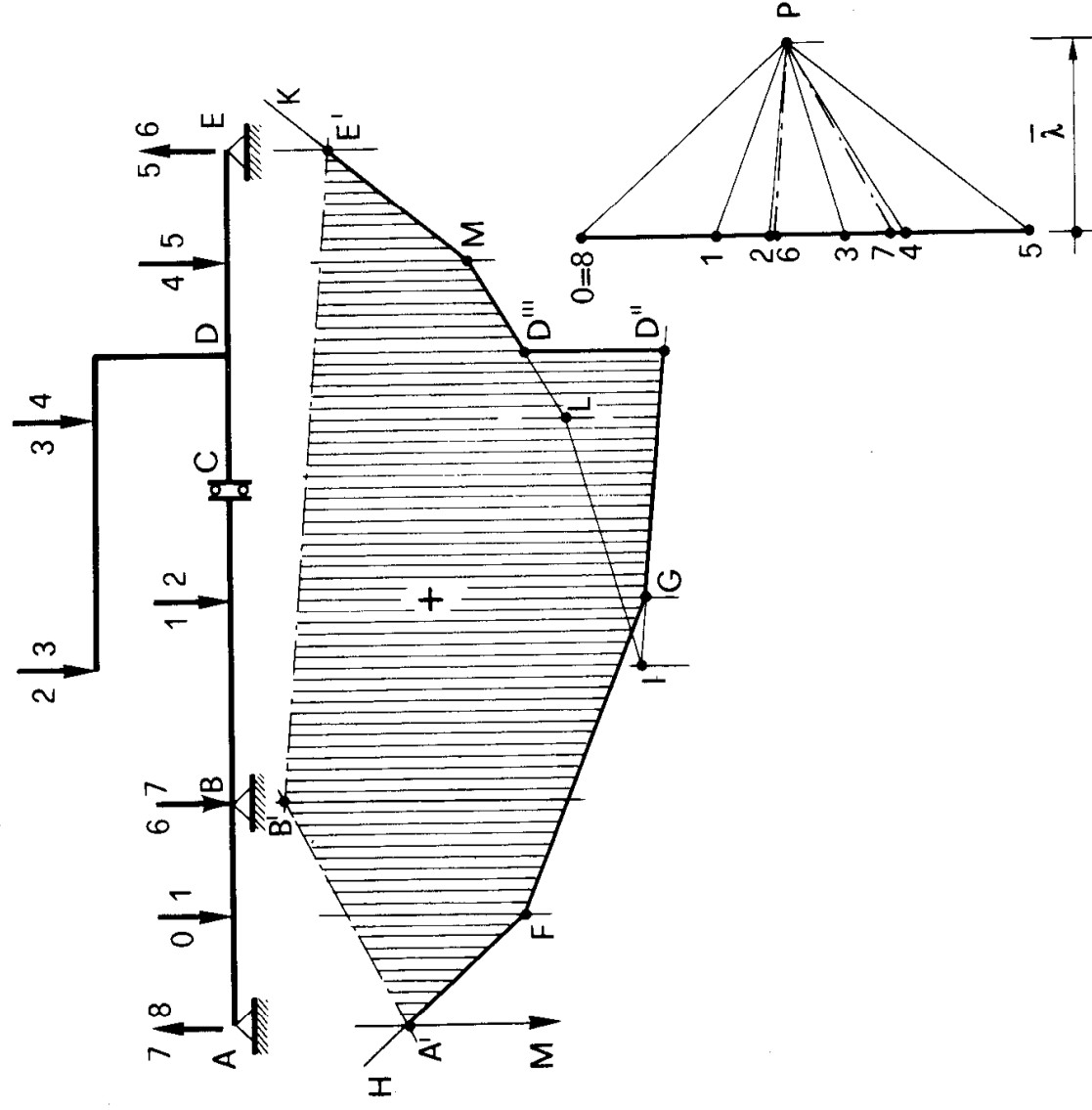


Figura 29