

CAPITOLO QUINTO

LE TRAVI ISOSTATICHE AD ASSE ORIZZONTALE

Premessa

Nei due precedenti gruppi di esercizi si è prevalentemente trattato di strutture isostatiche generiche soggette ad una sola forza concentrata, o ad una sola coppia, pur essa concentrata. E' evidente che tale caso particolare include quello generale; infatti, data una struttura comunque caricata, è lecito, agli effetti delle *reazioni esterne ed interne*, sostituire su ogni tratto rigido le forze applicate con la loro risultante, e quindi ottenere le suddette reazioni sovrapponendo gli effetti di ciascuna risultante. Così pure, le *caratteristiche* della sollecitazione interna variano soltanto nella parte del tratto rigido compresa tra le ascisse curvilinee dei punti d'applicazione della prima e dell'ultima forza dell'insieme di forze applicate sostituite dalla risultante; quindi si può tracciare il diagramma di una caratteristica sovrapponendo gli effetti delle risultanti, e poi effettuare le correzioni in ogni parte in cui si è sostituito un insieme di forze con la loro risultante. Tale correzione è particolarmente semplice nel caso, molto frequente, in cui le forze sono uniformemente distribuite; si tratta infatti dell'inserimento di una retta in $T(s)$, e di una parabola in $M(s)$.

In questo capitolo si tratta invece della soluzione diretta per più forze applicate su una trave isostatica ad asse orizzontale ed appoggi a scorrimento orizzontale. Le forze si considerano verticali, poichè le eventuali componenti orizzontali sono tutte equilibrate da un unico vincolo, in generale una cerniera; il diagramma degli sforzi normali connessi con le componenti orizzontali è di immediato disegno. La soluzione sarà perseguita per via grafica o analitica, spesso per ambedue contemporaneamente.

In presenza di un carico q , distribuito con legge qualsiasi, le relazioni fondamentali che si sfrutteranno sono le ben note

$$\frac{dT}{dz} = -q \quad (1)$$

$$\frac{dM}{dz} = T; \quad (2)$$

dalle (1) e (2) si trae

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = -q. \quad (3)$$

Si suppone l'origine del riferimento yz nell'estremo di sinistra, l'asse y verticale verso il basso, l'asse z orizzontale (asse della trave) verso destra. La terna xyz solidale ad S generica è parallela ed equiversa ad yz . Il momento positivo tende perciò le fibre inferiori. Al solito, se il diagramma M in un tratto dz è un segmento ruotato in senso orario, T è positivo, e viceversa. Si ricordi pure che M positivo è riportato verso il basso, T positivo verso l'alto.

Si può quindi determinare $T(z)$ ed $M(z)$ per *integrazione*, grafica o analitica; le costanti sono fornite dalle condizioni di vincolo. Quasi sempre si segue la via *analitica*; comunque tale procedimento è consigliabile solo nelle travi su una sola luce, soggette ad un carico q definito su tale luce da una sola espressione.

L'equazione del poligono funicolare del carico q con base λ è, chiamando η le ordinate del poligono,

$$\lambda \frac{d^2 \eta}{dz^2} = -q. \quad (4)$$

Dalle (3) e (4) si trae perciò che

$$M(z) = \lambda \cdot \eta(z). \quad (5)$$

Si può quindi ottenere il diagramma del momento $M(z)$ costruendo (vedi es. 1) il *poligono funicolare* del carico q , e da questo avere $T(z)$ per derivazione; il procedimento in genere è *grafico*.

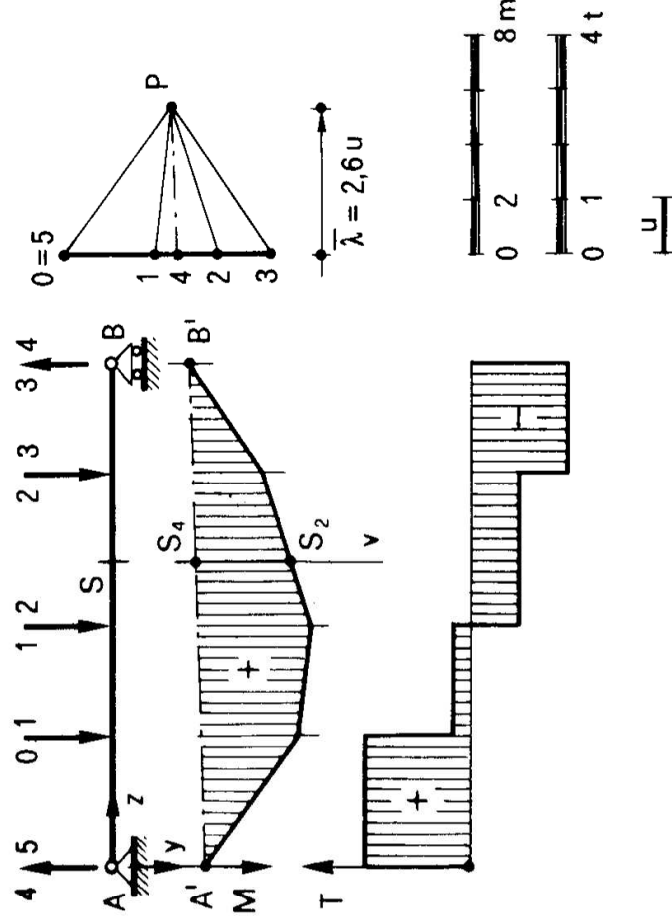
Spesso, per le travi isostatiche su più luci (travi Gerber), si procede per *scomposizione*, studiando prima i tratti vincolati ad altri tratti della struttura, e poi quelli vincolati al suolo; tale procedimento è generalmente di tipo *analitico-grafico*.

Problema n. 1.

La trave AB (Fig. 1) è vincolata con cerniera in A , con appoggio a piano di scorrimento orizzontale in B ; su di essa agiscono le forze O_1 , O_2 , O_3 .

Di tali forze appaiono sulla trave le rette d'azione, sul poligono delle forze (in questo caso *punteggiata* delle forze) i moduli.

Nella figura sono disegnate le scale grafiche delle lunghezze e delle forze. Sono consegnate anche le corrispondenti scale numeriche S_l ed



$$S_l = 2 \frac{m}{u}$$

$$S_F = 1 \frac{t}{u}$$

$$S_M = \bar{\lambda} S_l S_F = 5,2 \frac{tm}{u}$$

Figura 1

S_F ; più precisamente, è disegnato il segmento u (che si assumerà pari ad 1 cm) che è scelto come unità di misura dei segmenti da misurare sul disegno, e le quantità S_l ed S_F per cui si moltiplicano le misure dei segmenti, onde ottenere i valori delle lunghezze o delle forze rappresentate da tali segmenti.

Per esempio, la misura di AB effettuata sul disegno è pari a 9,2 cm, e quindi

$$l_{AB} = 9,2 \text{ cm} \cdot S_l = 9,2 \cdot 2 \text{ cm} \frac{m}{cm} = 18,4 \text{ m};$$

così pure, la misura del segmento 01 sulla punteggiata delle forze è pari a 1,65 cm, e quindi

$$F_{01} = 1,65 \text{ cm} \cdot S_F = 1,65 \cdot 1 \text{ cm} \frac{t}{cm} = 1,65 \text{ t.}$$

Le misure dei segmenti effettuate attraverso u si indicano con il soprassegno; quindi, per un generico ente E , se \bar{E} è la sua misura rispetto ad u , il suo modulo effettivo è

$$E = \bar{E} \cdot S_E . \quad (6)$$

La scala di E ha una dimensione fisica, fornita dal rapporto tra la dimensione fisica di E e quella di u , che è una lunghezza

$$[S_E] = [E l^{-1}] . \quad (7)$$

L'unità in cui è espressa S_E è quella di E divisa per u .

nicolare con polo P ; la base polare è data da

$$\bar{\lambda} = 2,6 \text{ cm}$$

$$\lambda = \bar{\lambda} \cdot S_F = 2,6 \cdot 1 t .$$

Poichè in A e in B è $M = 0$, e la fondamentale è unica, il momento è definito; basta infatti riferire il poligono funicolare alla retta $A'B'$, dove A' e B' sono i punti di incontro del primo lato del poligono funicolare con la verticale per A , e dell'ultimo lato del poligono funicolare con la verticale per B .

Si ricordi quanto segue:

- 1) Dato un insieme di n forze parallele, in particolare verticali, $01, 12, \dots, (n-1)n$, poste in relazione d'ordine in modo qualsiasi (e quindi non necessariamente succedentisi così come si incontrano le loro rette d'azione procedendo lungo l'orizzontale), e costruito il loro poligono funicolare di polo P , il segmento definito sulla generica verticale ν dai due punti $S_0 S_m$ di intersezione con il primo e l' m .esimo lato del poligono funicolare (il primo lato è parallelo alla proiettante $P \cdot 0$, l' m .esimo alla proiettante $P \cdot m$) fornisce in modulo, moltiplicato per la base polare λ , il momento M_ν , rispetto a qualsiasi punto di ν , delle forze da 01 ad $(n-1)n$:

$$M_\nu = \lambda \cdot S_0 S_m \quad (8)$$

Se λ è positivo (P alla sinistra della retta delle forze orientate come ν) ed $A_0 A_m$ è positivo (A_0 al disopra di A_m) il momento M_ν è orario.

- 2) Condizione necessaria e sufficiente di equilibrio di un generico insieme piano di forze è che il poligono delle forze ed il poligono funicolare siano chiusi. Se quindi si conoscono le reazioni vincolari, il poligono funicolare che connette forze applicate e reazioni è chiuso. È facile, nelle ipotesi fatte (forze e reazioni tutte verticali) dedurre da 1) che sulla verticale per la generica S i due lati del poligono relativi alla prima ed all'ultima delle forze a sinistra determinano un segmento che moltiplicato per λ fornisce M_S .

3) La proposizione 2) permette, attraverso le condizioni di vincolo relative al momento, di determinare sul poligono funicolare delle sole forze applicate, *ordinate nella successione secondo la quale interessano la trave*, i lati che completano tale poligono includendo in essi anche le reazioni, e quindi di ottenere, dopo il diagramma del momento, anche le reazioni vincolari. Conosciute queste ultime, è immediato il tracciamento diretto del diagramma del taglio.

I lati che completano il poligono, e che si incontrano sulle verticali delle reazioni, si chiamano *rette di chiusura* del poligono delle forze applicate; esse sono le *fondamentali* rispetto alle quali il poligono funicolare delle forze applicate va letto come diagramma del momento flettente. Ovviamente, esiste una fondamentale per ogni intervallo compreso tra due vincoli esterni successivi.

La parallela per P alla retta di chiusura A'B' determina sulla punteggiata delle forze un punto 4 tale che

$$R_A = 4.0$$

$$R_B = 3.4$$

così infatti il poligono delle forze ed il poligono funicolare sono ambedue chiusi.

Il momento in una sezione S è fornito, per la (8), da

$$M_S = \lambda \cdot S_4 S_2 \quad (9)$$

ed è positivo ($\lambda > 0$, $S_4 S_2 > 0$); infatti $\lambda \cdot S_4 S_2$ è il momento rispetto ad S delle forze 45, 01, 12, e cioè di tutte le forze a sinistra di S, compresa la reazione 45 in A.

La (9) si scrive pure

$$M_S = \bar{\lambda} \cdot \overline{S_4 S_2} \cdot S_F S_I \quad (10)$$

da cui si trae la scala S_M del diagramma dei momenti

$$S_M = \bar{\lambda} S_F S_I \quad (11)$$

Nel caso in esame è

$$S_M = 2,6 \text{ cm} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{cm}} \cdot 1 \frac{\text{t}}{\text{cm}} = 5,2 \frac{\text{tm}}{\text{cm}}$$

Si osservi che mentre la fondamentale A'B' è non orizzontale (*obliqua*), le ordinate M sono verticali; se M si vuole nel riferimento yz, occorre

ridisegnare (*raddrizzare*) il diagramma. Comunque, con le convenzioni fatte le ordinate M risultano sempre riportate, *rispetto alla fondamentale*, dal lato corrispondente alle fibre tese; l'asse delle M risulta orientato verso il basso.

Nella stessa Fig. 1 è riportato il diagramma del taglio, di ovvia costruzione: l'asse delle T è, al solito, orientato verso l'alto. Si osservi che, dove il diagramma M è ruotato in senso orario rispetto alla fondamentale, il taglio è positivo.

La scala del taglio coincide con quella delle forze.

Problema n. 2.

1) Procedimento grafico.

La trave della Fig. 2 è soggetta ad un carico q uniformemente ripartito da A a C . Il poligono funicolare di un carico uniforme è una parabola quadratica, come si trae dalla (4); poichè, sostituendo un insieme di forze con la loro risultante, il poligono funicolare varia soltanto nei lati compresi tra la prima e l'ultima delle forze interessate dalla sostituzione, si può tracciare il poligono $A'RB'$ relativo alla risultante $7 \cdot qa$ del carico distribuito, e poi tra A' e C'' inserire al solito modo la parabola.

Il diagramma $T(z)$ è costante (1) nell'intervallo

$$z \in [7a, 10a [$$

e pari ad R_B ; esso è negativo.

Nell'intervallo

$$z \in] 0, 7a]$$

$T(z)$ è invece funzione lineare di z ; immediatamente a destra di A (0), come spesso si dice con abuso di locuzione, in A) esso è pari ad R_A , ed è positivo.

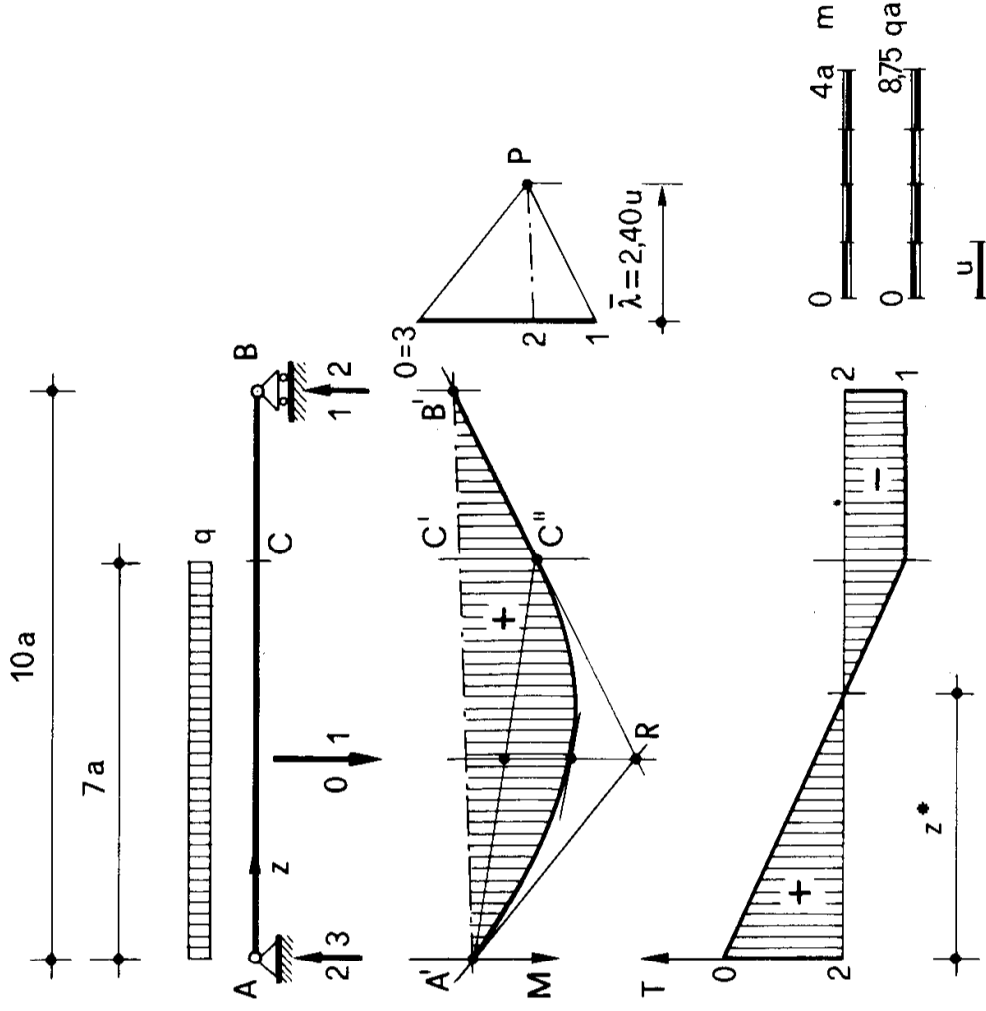
Nella sezione ove $T = 0$, il momento flettente (2) è massimo; in tale sezione è

$$\bar{M} = 1,97 \text{ cm}$$

e quindi

$$\begin{aligned} M &= \bar{M} \cdot S_M = 1,97 \text{ cm} \cdot \bar{\lambda} S_I S_F = \\ &= 1,97 \text{ cm} \cdot 2,4 \text{ cm} \cdot a \frac{m}{\text{cm}} \cdot 2,19 qa \frac{t}{\text{cm}} = 10,35 qa^2 \text{ tm} . \end{aligned}$$

2) Procedimento analitico.



$$M_{\max} = 1,97 u S_M = 10,35 qa^2 tm$$

$$S_T = a \frac{m}{u}$$

$$S_F = 2,19 qa \frac{t}{u}$$

$$S_M = \bar{\lambda} S_T S_F = 5,256 \frac{tm}{u}$$

Figura 2

Si procede per integrazione dalle (1) e (2). Poichè è

$$q = \begin{cases} q & \text{se } z \in [0, 7a] \\ 0 & \text{se } z \in [7a, 10a] \end{cases} \quad (12)$$

è pure, per (1),

$$T = \begin{cases} T_A - \int_0^z q \, dz = T_A - qz & z \in]0, 7a[\\ T_C = T_A - 7aq & z \in [7a, 10a[\end{cases} \quad (13)$$

infatti in C la funzione $T(z)$ è definita (poichè in C non sono agenti forze esterne) e le due espressioni devono dare lo stesso valore.

Per le (2) e (13) si ha poi

a) per $z \in [0, 7a]$:

$$M = \int_0^z (T_A - qz) \, dz = T_A z - q \frac{z^2}{2} \quad (14)$$

da cui

$$M_C = 7 T_A a - \frac{49}{2} q a^2 .$$

b) per $z \in [7a, 10a]$:

$$\begin{aligned} M &= 7 T_A a - \frac{49}{2} q a^2 + \int_{7a}^z (T_A - 7aq) \, dz = \\ &= \frac{49}{2} q a^2 + (T_A - 7aq) z . \end{aligned} \quad (15)$$

Poichè $M_B = 0$, dalla (15) si trae

$$T_A = \frac{91}{20} q a .$$

Le (13), (14) e (15) si scrivono così

$$T = \begin{cases} q \left(\frac{91}{20} a - z \right) & z \in] 0, 7 a [\\ - \frac{49}{20} q a & z \in [7 a, 10 a [\end{cases} \quad (16)$$

$$M = \begin{cases} \frac{qz}{2} \left(\frac{91}{10} a - z \right) & z \in [0, 7 a] \\ \frac{49}{20} q a (10 a - z) & z \in [7 a, 10 a] \end{cases} \quad (17)$$

Dalla prima delle (16) si ottiene l'ordinata z^* della sezione in cui $T = 0$, e quindi $\frac{dM}{dz} = 0$; essa è fornita da

$$\frac{91}{20} a - z^* = 0$$

da cui

$$z^* = \frac{91}{20} a. \quad (18)$$

Poichè in z^* è (3)

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = -q < 0$$

il momento in z^* è massimo; esso vale (17)

$$\begin{aligned} M_{max} &= \frac{q}{2} \frac{91}{20} a \left(\frac{91}{10} a - \frac{91}{20} a \right) = \\ &= \frac{8281}{800} q a^2 = 10,35125 q a^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Nel caso in cui un carico q su una trave AB appoggiata è uniformemente distribuito nell'intervallo $[0, a]$, una formula è molto in uso presso i tecnici per il calcolo di z^* e di M_{max} ; poichè nella sezione di ascissa z^* è $T = 0$, è pure

$$- R_A - q z^* = 0$$

da cui

$$z^* = - \frac{R_A}{q} \quad (20)$$

Calcolando con le forze a sinistra, in z^* è poi

$$M_{max} = - R_A z^* - q \frac{z^{*2}}{2}$$

da cui

$$M_{max} = \frac{R_A^2}{2q} \quad (21)$$

Se in A è applicata una coppia \mathfrak{M}_A , la (20) rimane inalterata — la presenza di \mathfrak{M}_A si risente ovviamente in R_A — mentre la (21) si modifica nella

$$M_{max} = - \mathfrak{M}_A + \frac{R_A^2}{2q} \quad (22)$$

Nel caso in esame è

$$R_A = - T_A = - \frac{91}{20} qa$$

$$z^* = \frac{91}{20} a$$

$$M_{max} = \left(\frac{91}{20} \right)^2 \frac{qa^2}{2} = \frac{8281}{800} qa^2 \quad .$$

Problema n. 3.

Si è in presenza di una mensola (Fig. 3) soggetta ad un insieme di forze concentrate. Si costruisce il poligono funicolare di tali forze; la retta

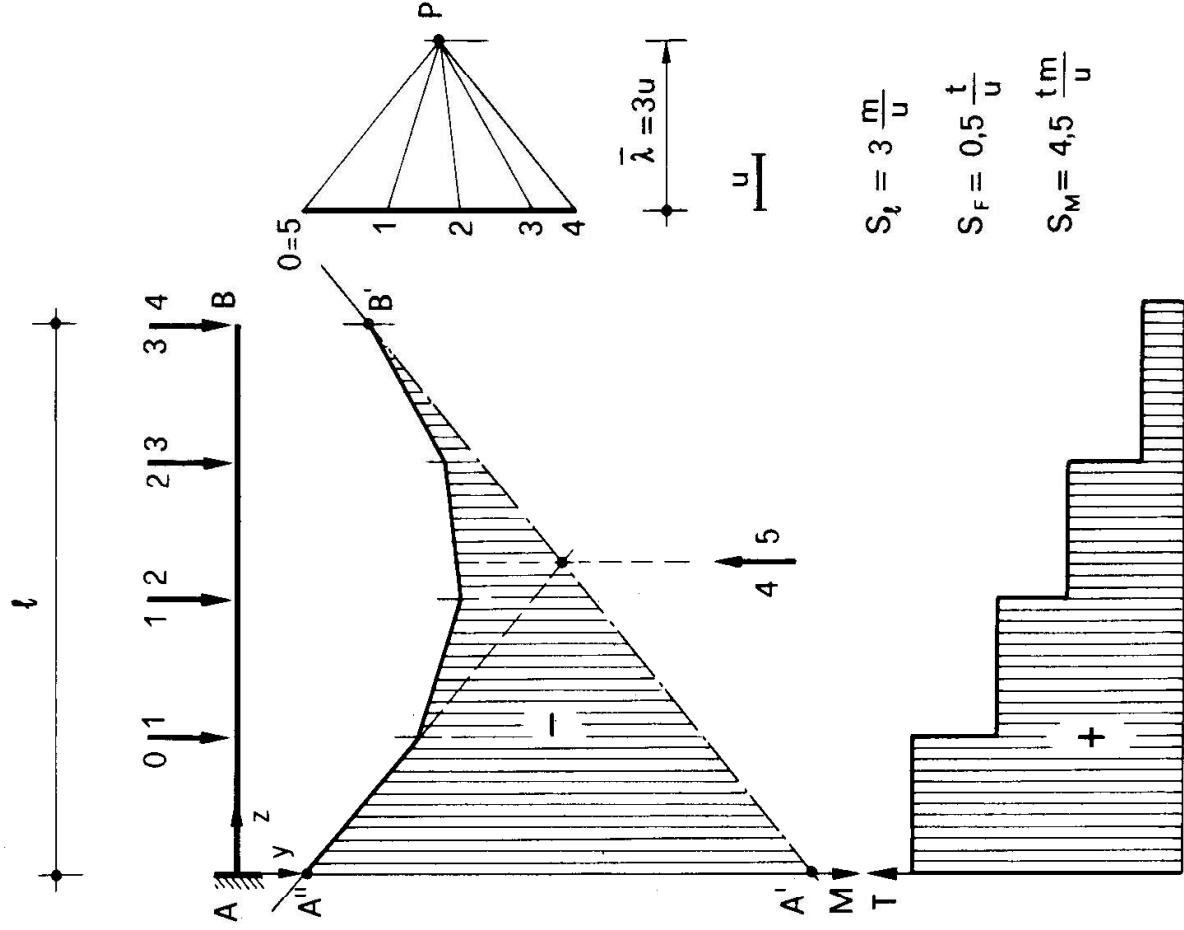


Figura 3

di chiusa A'B' coincide con l'ultimo lato del poligono funicolare; infatti la reazione dell'incastro è la 4.0, e passa per il punto d'incontro del primo e dell'ultimo lato.

La retta di chiusa può anche ottenersi considerando che in B deve essere

$$M = 0$$

$$T = \frac{dM}{dz} = 0,$$

e quindi il diagramma di M deve presentare in B ordinata nulla, e pendenza nulla sulla fondamentale.

Si osservi a tale proposito che M è definito nell'intervallo $]0, l[$, T nell'intervallo $]0, l[$, quindi in B la $\frac{dM}{dz}$ non è in rigore definita. Nulla cambia però se si suppone che la forza 3·4 sia realizzata con un carico distribuito q su un intervallo $[l - dz, l]$, tale che

$$q \cdot dz = 3 \cdot 4;$$

anzi, è proprio ciò che si verifica in realtà. Tale ipotesi modifica il poligono funicolare solo in $[l - dz, l]$; in particolare, l'ultimo lato resta inalterato. D'altro canto, con la ipotesi fatta T è definito in $]0, l[$, e cioè anche in $z = l$; in particolare, in $z = l$ è $T = 0$, e quindi $\frac{dM}{dz} = 0$.

Problema n. 4.

La trave AB della Fig. 4 è vincolata in A e B . Si noti che, come si farà generalmente nel seguito di questo capitolo, gli appoggi sono schematizzati senza i rulli di scorrimento; non è neppure specificato quale degli appoggi sia designato ad equilibrare le eventuali componenti orizzontali delle forze applicate. Sulla trave agiscono due forze 0.1 e 1.2, ed una coppia \mathfrak{M} nella sezione S . La presenza di una coppia in S si risente nel poligono funicolare con una discontinuità, mentre l'inclinazione a sinistra e a destra della verticale per S è la stessa; quindi il valore di η (ordinata poligono funicolare) non è definito in S , mentre la pendenza a destra coincide con quella a sinistra. Ciò si spiega pensando che una coppia è una forza piccolissima ad una distanza grandissima; quindi i due lati del poligono che si incontrano sulla retta di azione di tale forza (retta impropria) sono paralleli ad un'unica proiettante da P . Il salto di η in S è pari, in scala, al valore della coppia; se la coppia è positiva (antioraria) la forza piccolissima deve reputarsi, se a sinistra, orientata verso il basso, e quindi il punto S'' a sinistra è al disotto del punto S''' a destra ($S''S''' < 0$). Una regola pratica per leggere il verso della coppia a quello del salto $S''S'''$ è la seguente: “il verso della coppia è quello di chi volesse passare da S'' ad S''' seguendo un semicerchio sulla parte alla destra della verticale $S''S'''$.”

Basta perciò eseguire il poligono funicolare per le forze a sinistra di S, fino ad S''; tracciare in S la discontinuità

$$S''S''' = -\frac{\mathfrak{M}}{S_M};$$

da S'' infine proseguire, senza variare l'inclinazione in S, nel disegnare il poligono per le forze a destra. In altre parole, si traccia il poligono fu-

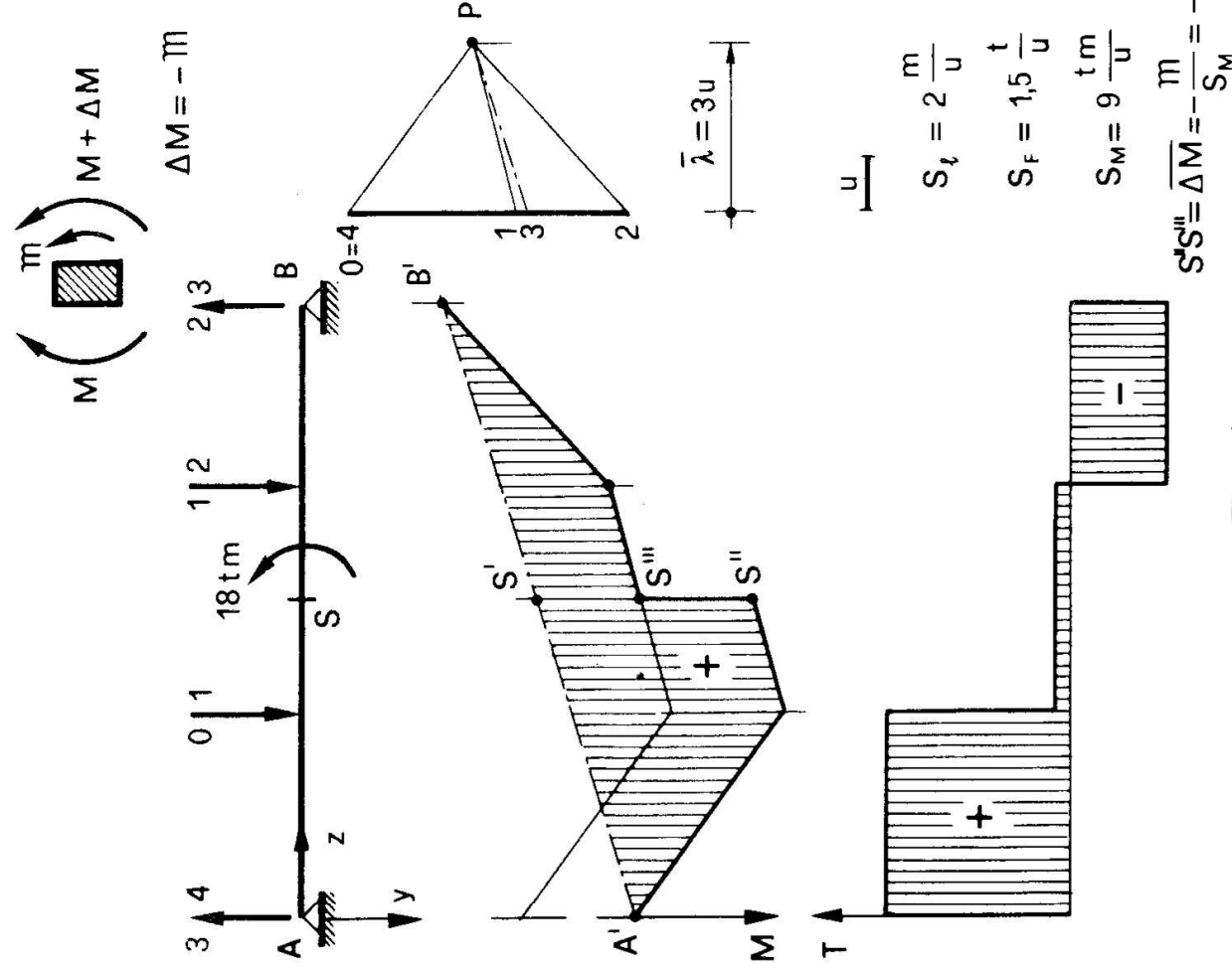


Figura 4

nicolare come se \mathfrak{M} non ci fosse, e poi si imprime alla parte a destra una traslazione rigida secondo y pari a $-\frac{\mathfrak{M}}{S_M}$.

Fatta eccezione della coppia, nulla varia rispetto a quanto fatto nell'esercizio 1.

Nel taglio la presenza di \mathfrak{M} non si risente direttamente; essa però gioca nei valori di R_A e di R_B , e cioè nell'ubicazione della fondamentale di T (z).

Problema n. 5.

1) Procedimento grafico.

Nella trave AD della Fig. 5a il vincolo B equilibra le eventuali componenti orizzontali delle forze applicate, i vincoli in A e D sono ancora indicati con i rulli di scorrimento.

Il carico q è uniformemente ripartito su tutta la luce l della trave; la sua risultante $ql = 0.1$ agisce nella mezzeria di AD; il suo poligono funicolare è una parabola, le cui tangenti estreme sono le parallele A'H e D'H, a P0 e P1, e la cui costruzione è ovvia. Le rette di chiusura sono due, relative ai due tratti AB e BD; infatti il vincolo in B introduce una sollecitazione esterna, costituita da una reazione passante per il punto E d'incontro dei due pendoli; tale reazione è verticale, poichè i carichi agenti sono verticali.

La retta di chiusura B'D' del tratto BD è di immediata costruzione, poichè $M = 0$ in C ed in D. La retta di chiusura A'B' del tratto AB è determinata da due condizioni. La prima, ovvia, è che $M = 0$ in A.

La seconda è che la discontinuità nei valori e nelle inclinazioni del diagramma del momento in B è provocata dalla reazione di B, e quindi le due tangenti a tale diagramma immediatamente a sinistra e a destra di B devono incontrarsi sulla verticale per E, retta d'azione della reazione di B. Ciò equivale a dire che le due fondamentali devono incontrarsi sulla verticale per E, e quindi la retta di chiusura A'B' del tratto AB è la A'E'.

A maggior precisazione di quanto ora detto, si osservi che se in due punti qualsiasi H e K del diagramma del momento si considerano le tangenti al diagramma stesso, il punto d'incontro di tali tangenti appartiene alla retta d'azione della risultante delle forze agenti tra le due verticali contenenti H e K, e ciò è ovvio se si considera il diagramma del momento come funicolare delle forze agenti. Se perciò in una sezione S agisce una forza F concentrata, le due tangenti a sinistra ed a destra di S devono incontrarsi sulla verticale di applicazione di F.

Si osservi pure che il poligono funicolare chiuso connette le forze applicate nella seguente successione: prima il carico q da A a D, poi R_D , poi R_B , e infine R_A . I valori di R_D , R_B ed R_A sono forniti sul poligono delle forze dai segmenti 12, 23, e 34 = 30, dove 2 e 3 sono i punti dove la

punteggiata delle forze è intersecata dalle parallele per P alle due rette di chiusura. Si ricordi infatti che i due lati del poligono funicolare che si tagliano sulla retta d'azione di una forza m sono paralleli alle due proiezioni P_m e P_n , dove m ed n sono i due estremi della forza mn nella pun-

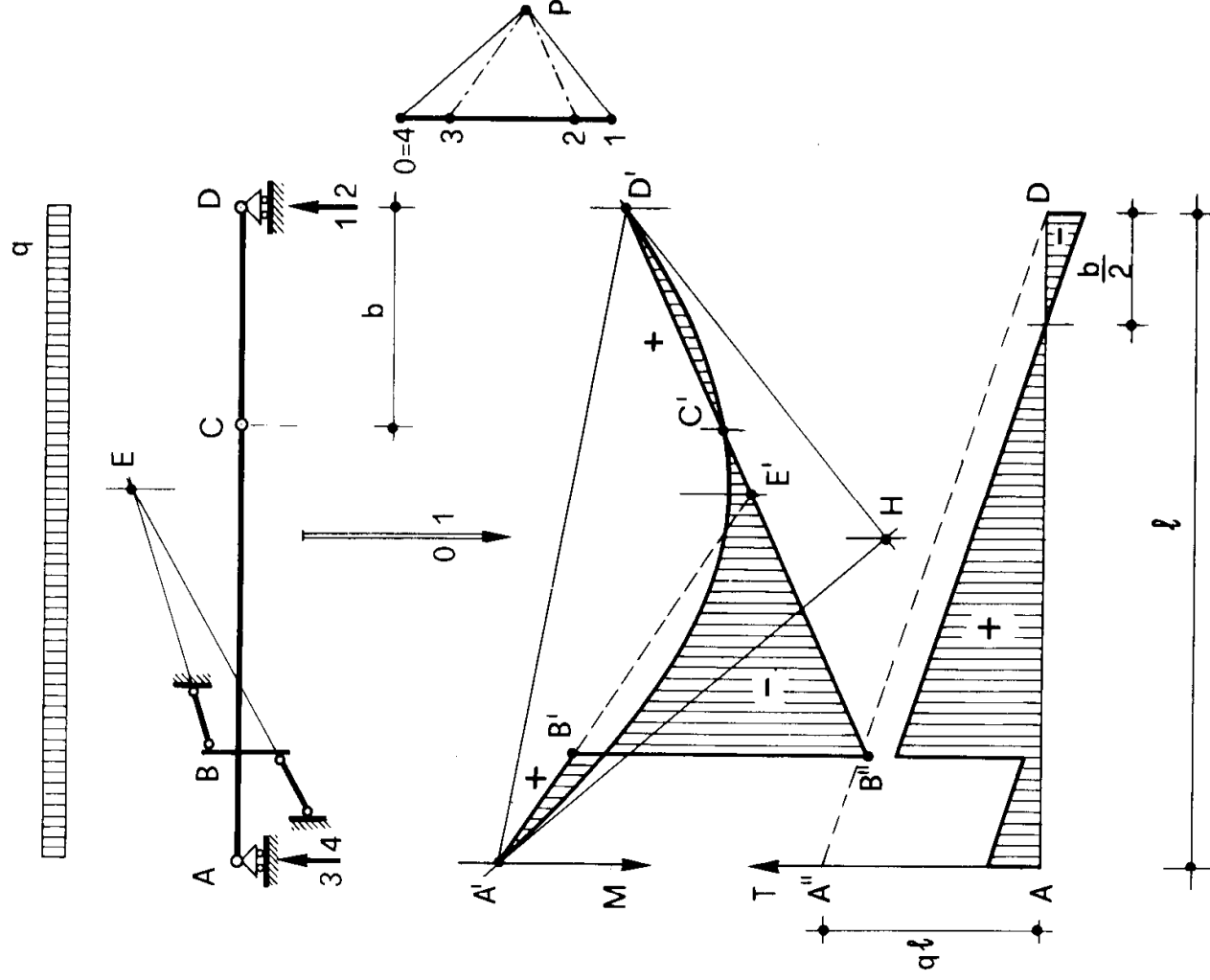


Figura 5a

teggiata delle forze.

Il diagramma del taglio, note le reazioni, è di immediata costruzione. Esso è composto di due parti, t_{AB} e t_{BD} , relative ai due tratti AB e BD : poichè il carico q è uniforme, t_{AB} e t_{BD} sono due rette; poichè q ha lo

stesso valore in AB e BD, le due rette sono parallele. La direzione comune delle due rette può ottenersi disegnando in A il segmento AA'' pari a ql, ed unendo A'' con D; l'inclinazione di tale retta è pari a

$$-\frac{ql}{l} = -q.$$

e cioè è quella del taglio in presenza del carico q.

Si osservi che il punto di nullo del taglio in BD è il punto medio di CD, poichè in tale punto il momento è massimo; conosciuta quindi R_D , e cioè $T_D = R_D$, la retta t_{BD} è nota.

Conoscendo poi R_A , e cioè $T_A = -R_A$, la retta t_{AB} è nota anch'essa, poichè è parallela a t_{BD} . La discontinuità del taglio in B è pari al valore di R_B .

Nella Fig. 5a si è assunta come scala del taglio quella S_F delle forze.

2) Procedimento di scomposizione.

Nella Fig. 5b è seguito, per la stessa struttura della figura 5a, il *procedimento di scomposizione*. Si esamina prima il tratto CD, che appoggia in C sul tratto AC, in D al suolo. Le due reazioni sono

$$R_C = R_D = -\frac{qb}{2}.$$

La R_C , esercitata da CD su AC, è pari a $\frac{qb}{2}$. Si passa quindi a studiare il tratto AC, soggetto al carico uniforme q ed alla forza $\frac{qb}{2}$ in C. La relazione di equilibrio intorno ad A si scrive (i momenti antiorari sono positivi)

$$-\frac{qb}{2} \cdot c - R_B a - qc \cdot \frac{c}{2} = 0$$

da cui

$$R_B = -q \frac{c(c+b)}{2a}. \quad (23)$$

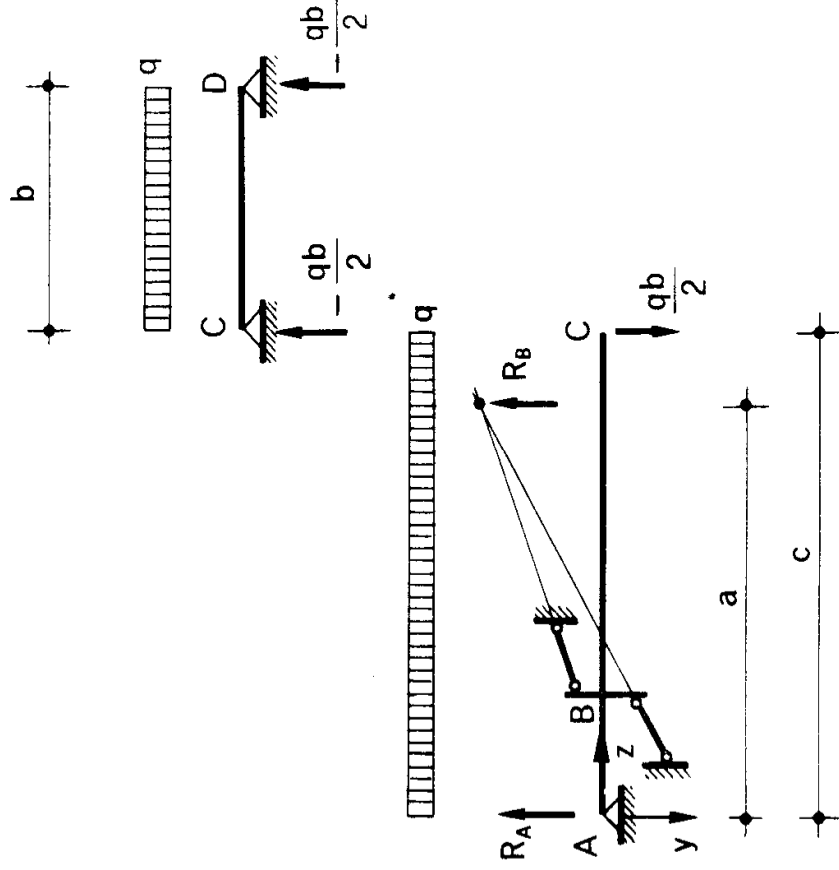
La relazione di equilibrio alla traslazione secondo la verticale si scrive

$$R_A + qc + q \frac{b}{2} - q \frac{c(c+b)}{2a} = 0$$

da cui

$$R_A = q \frac{c(c-2a) + b(c-a)}{2a} \quad (24)$$

Dalle (23) e (24) si osserva che, se a varia, R_A ed R_B sono definite



$$R_B = -q \frac{c(c+b)}{2a}$$

$$R_A = q \frac{c(c-2a) + b(c-a)}{2a}$$

Figura 5b

in $a \in [-\infty, 0 [\cup] 0, \infty]$; il punto $a = 0$ corrisponde al caso in cui B è

inefficace, poichè i due pendoli che lo costituiscono concorrono sulla verticale per A.

Per $a \rightarrow \infty$ risulta

$$R_B = 0$$

$$R_A = -q \frac{b + 2c}{2}; \quad (25)$$

tale caso si verifica se il vincolo in B è un bipendolo.

Ottenute le reazioni, è immediato determinare T (z) ed M (z); si lascia tale cura al lettore.

Problema n. 6.

La struttura della Fig. 6a è la stessa della Fig. 5a, fatta eccezione per il vincolo in B, che è un bipendolo; si passa dalla prima alla seconda per $a \rightarrow \infty$, e cioè per $E' \rightarrow D'B' \infty$. Costruita la parabola funicolare del carico q, la retta di chiusura del tratto BD è sempre la C'D'. Poichè il bipendolo introduce solo una coppia, le due fondamentali devono essere parallele, e quindi A'B' è la parallela a C'D' per A'; ciò si riconosce da quanto detto nell'esercizio precedente (la retta d'azione della reazione di B è la retta impropria), o anche direttamente dal fatto che, procedendo lungo la trave, l'incontro con una coppia non si avverte nel diagramma del taglio, e quindi la pendenza del momento è la stessa immediatamente a sinistra e a destra della coppia stessa.

La parallela per P alle due fondamentali determina

$$R_D = 1 \cdot 2$$

$$R_A = 2 \cdot 0 = 2 \cdot 3 .$$

La trattazione per scomposizione (Fig. 6b) si esegue, come già fatto per l'esercizio precedente, determinando prima R_D ed R_C , e studiando poi il tratto AC; per l'equilibrio alla rotazione intorno ad A si scrive

$$-\frac{qb}{2} \cdot c + \mathcal{M}_B - qc \cdot \frac{c}{2} = 0$$

da cui

$$M_B = q \frac{c(b+c)}{2}.$$

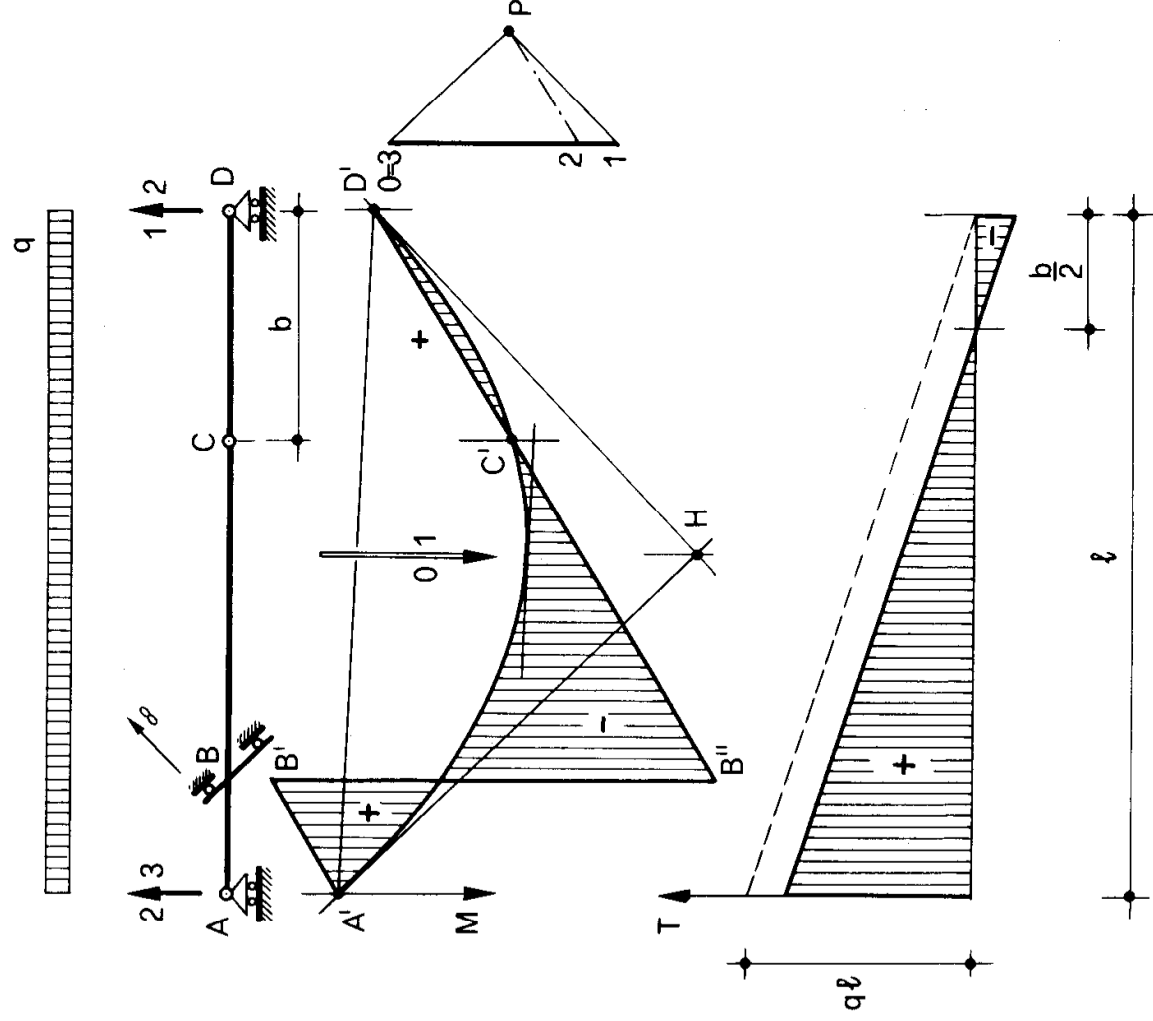


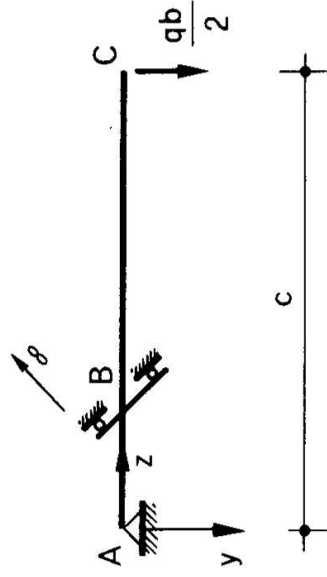
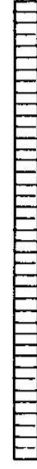
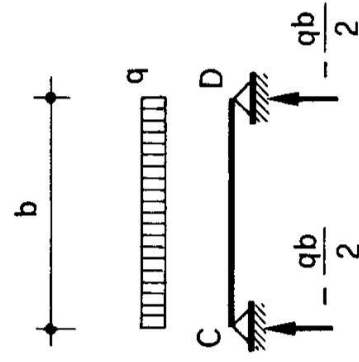
Figura 6a

Per l'equilibrio alla traslazione secondo la verticale si scrive

$$R_A + qc + \frac{qb}{2} = 0$$

da cui

$$R_A = -q \frac{b + 2c}{2} .$$



$$M_B = \frac{qc}{2}(b+c)$$

$$R_A = -q(b/2+c)$$

Figura 6b

Quest'ultima relazione coincide con la seconda delle (25), come naturale.

Problema n. 7.

1) *Procedimento grafico.*

La trave della Fig. 7a è vincolata in A con un incastro fisso, in D

con un incastro scorrevole; quindi le eventuali componenti orizzontali delle forze applicate sono equilibrate dall'incastro A.

In B esiste una cerniera, in C un bipendolo a piano di scorrimento verticale; in B è perciò $M = 0$, in C invece è $T = 0$.

Poichè in B e C non sono introdotte reazioni esterne, la fondamentale è unica. Un carico uniforme q è esteso da E a D; il suo funicolare è una

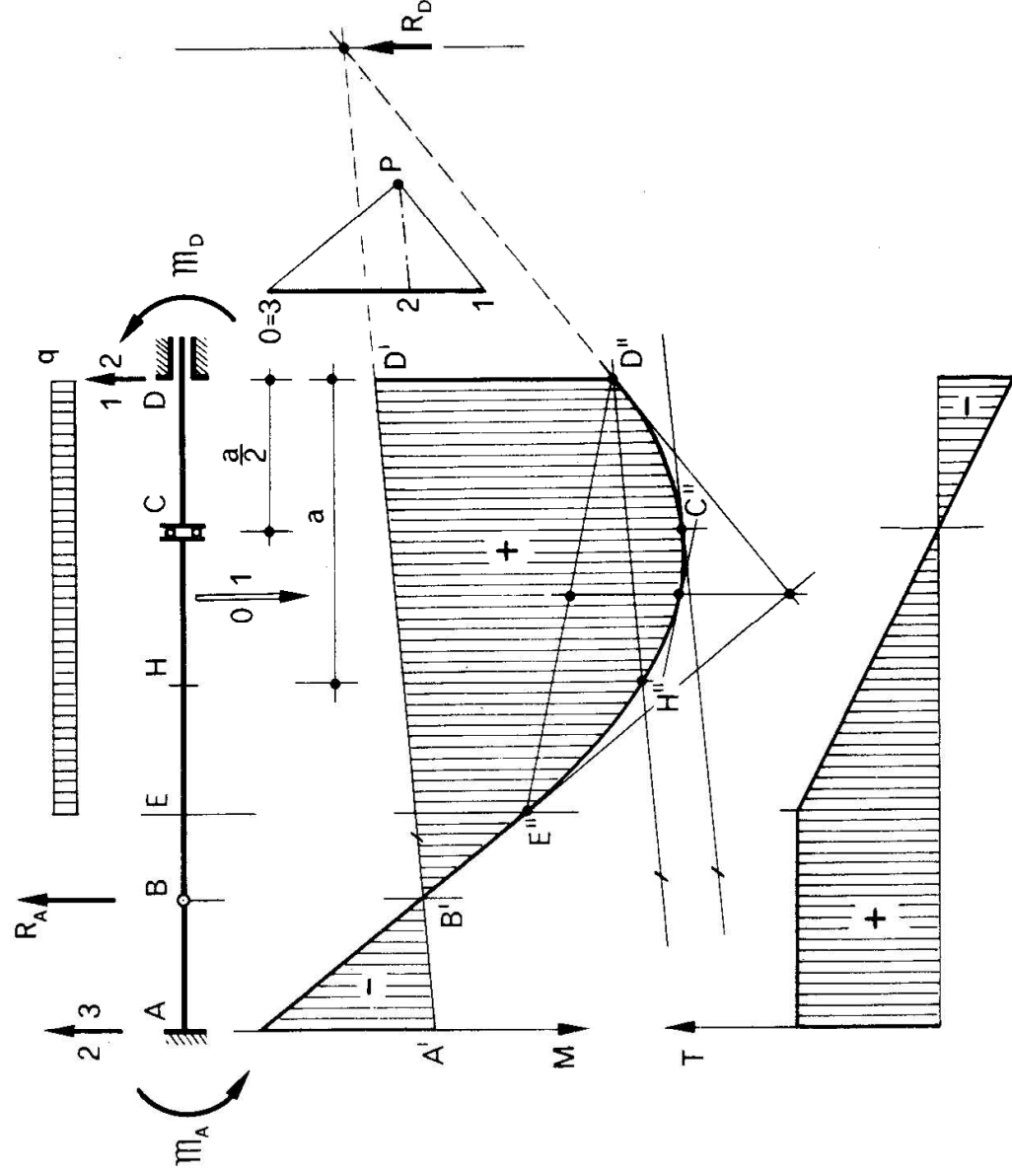


Figura 7a

parabola di corda $E''D''$, di ovvia costruzione; nel tratto AE se ne prende in considerazione il primo lato, parallelo a PO .

Poichè $M_B = 0$, la fondamentale interseca il poligono funicolare nel punto B' sulla verticale per B. Inoltre, in C è $T_C = 0$; quindi il diagramma del momento ha in C derivata nulla, cioè tangente parallela alla fondamentale. Occorre perciò che la fondamentale sia parallela alla tangente alla

parabola nel punto C'' dove questa è intersecata dalla verticale per C . Per ridurre l'errore da graficismo, si ricordi che tale tangente è parallela ad ogni corda i cui estremi siano su due verticali equidistanti da C . Quindi basta unire D'' con il punto H'' dove la parabola è tagliata dalla verticale passante per il punto H simmetrico di D rispetto a C ; la fondamentale deve essere parallela ad $H''D''$, e poichè passa per B' , è determinata.

Le due reazioni R_A ed R_B sono determinate dalla parallela per P alla fondamentale; è

$$R_D = 1 \cdot 2$$

$$R_A = 2 \cdot 3 = 2 \cdot 0 \text{ .}$$

Le rette d'azione di tali reazioni sono le verticali passanti per i punti di intersezione della fondamentale con il primo e con l'ultimo lato del poligono funicolare. E' ovvio che R_A coincide con l'interazione in B intesa agente da AB su BD .

Il diagramma del taglio si annulla in C ; esso è definito in tutto l'intervallo $]0, l[$, è lineare sotto ED , costante sotto AE .

2) Procedimento di scomposizione.

Si considera (Fig. 7b) il tratto BC poggiate su AB e CD . L'equilibrio alla traslazione fornisce

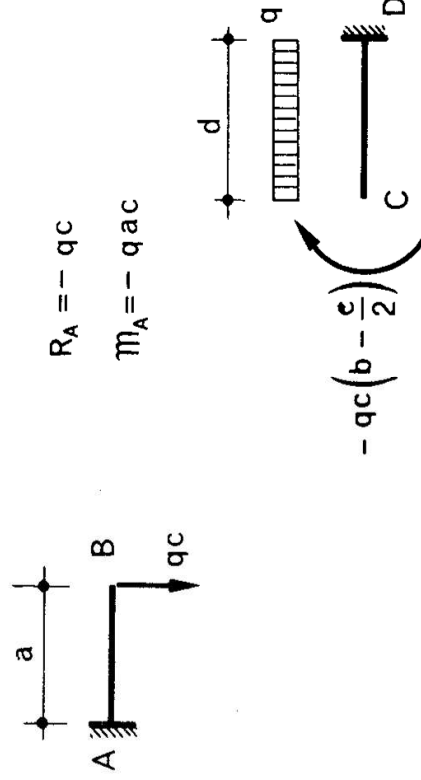
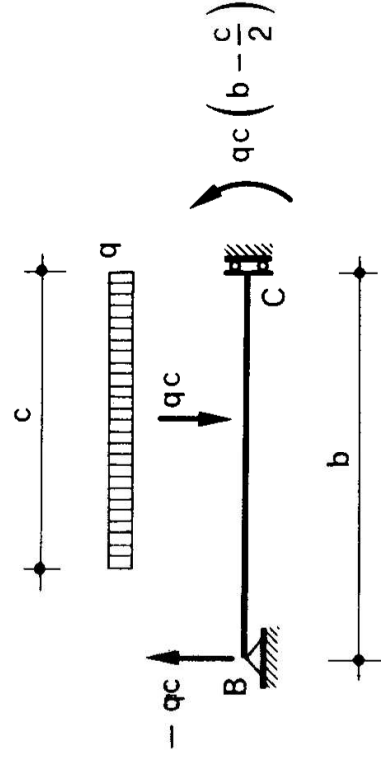
$$R_B = - q c ;$$

l'equilibrio alla rotazione

$$M_C = q c \left(b - \frac{c}{2} \right) \text{ .}$$

Il tratto AB è poi una mensola con incastro in A , e caricata dalla forza qc in B ; il tratto CD una mensola con incastro in D , soggetta ad un ca-

rico q uniformemente distribuito nella luce d , ed alla coppia $-qc\left(b - \frac{c}{2}\right)$ in C.



$$R_D = -qd$$

$$M_D = q\left(cb - \frac{c^2}{2} - \frac{d^2}{2}\right)$$

Figura 7b

Problema n. 8.

1) *Procedimento grafico.*

La trave della Fig. 8a è su tre appoggi ABD, e presenta una cerniera in C; uno dei tre appoggi è in realtà una cerniera, per fronteggiare le eventuali componenti orizzontali delle forze applicate.

Un carico q uniformemente distribuito impegna la struttura nell'intervallo $[6m, 24m]$. Solo per ragioni di disegno si è sostituito tale carico

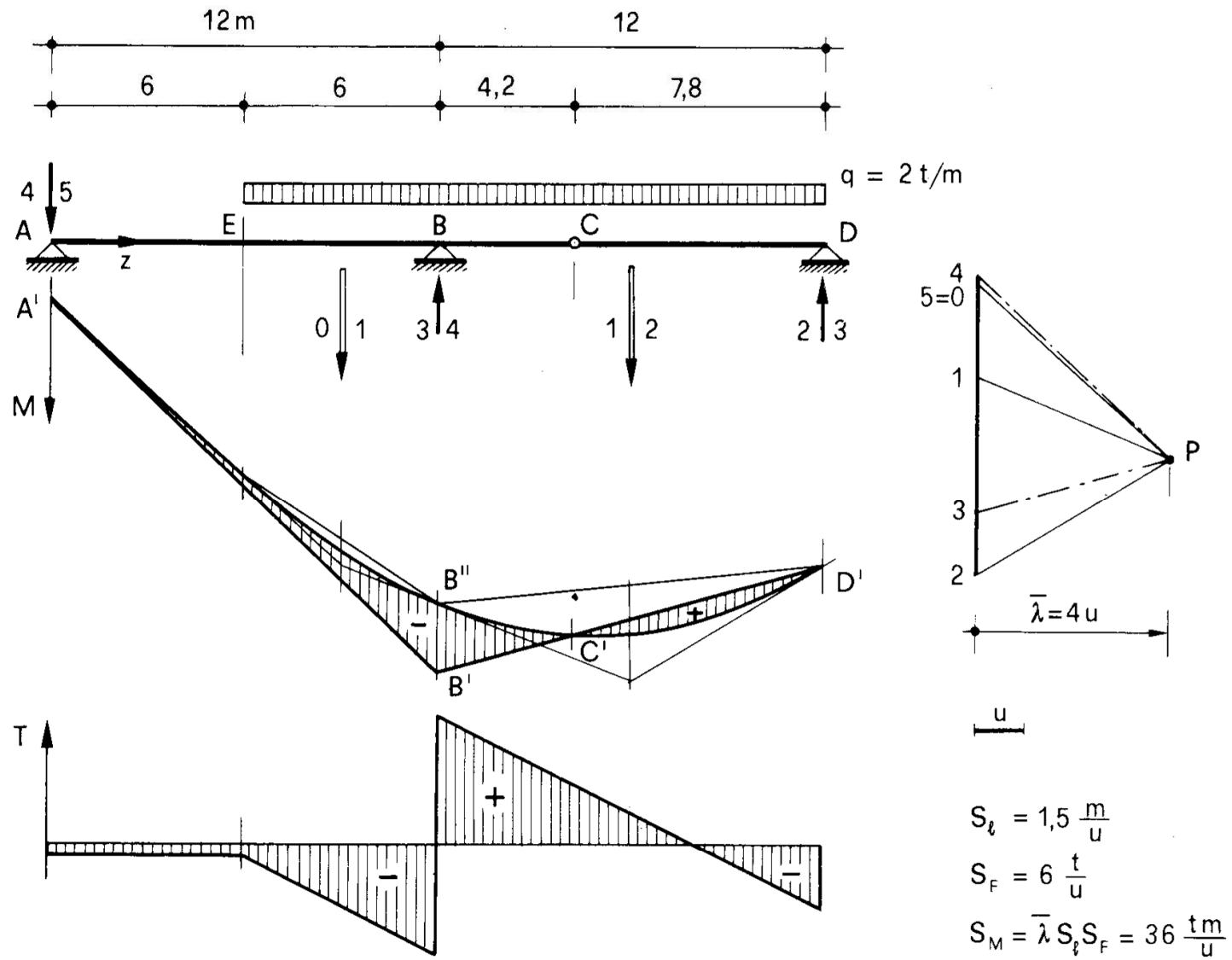


Figura 8a

con due forze concentrate equivalenti 0·1 e 1·2, invece che con una soltanto; la prima è relativa all'intervallo [6m, 12m], ed è pari a 12 t; la seconda è relativa all'intervallo [12m, 24m], ed è pari a 24 t. Costruito il poligono funicolare, in esso sono state inserite le parabole relative ai suddetti tratti, con il solito procedimento.

Le fondamentali sono due, relative alle due parti AB e BD comprese tra due vincoli esterni successivi. La fondamentale relativa alla parte BD è definita dalle due condizioni $M = 0$ in C e D; la fondamentale relativa alla parte AB è definita dalle due condizioni $M = 0$ in A, ed $M_{Bs} = M_{Bd}$ in B (M_{Bs} ed M_{Bd} momenti immediatamente a sinistra ed a destra di B).

La fondamentale della parte BD è perciò la retta che unisce i due punti C' e D' dove le verticali per C e D incontrano il poligono funicolare. È definito così il momento B'B'' in B; la fondamentale della parte AB è la retta che unisce B' con il punto A' dove la verticale per A incontra il poligono funicolare. Le due parallele per P ad A'B' ed a B'D' determinano le reazioni:

$$R_D = 2 \cdot 3$$

$$R_B = 3 \cdot 4$$

$$R_A = 4 \cdot 5 = 4 \cdot 0 \text{ .}$$

Il diagramma del taglio è costante in] 0, 6m[, lineare con la stessa pendenza in [6m, 12m [e in] 12m, 24m], si annulla nella mezzeria di CD; basta perciò per disegnarlo la conoscenza di R_D e di R_A .

2) Procedimento di scomposizione.

La trave CD (Fig. 8b) presenta le reazioni

$$R_C = R_D = - 7,8 t \text{ .}$$

La trave AC è soggetta perciò, oltre alla parte di q che le compete, alla forza $F = 7,8 t$ in C.

Per l'equilibrio alla rotazione intorno ad A si ha

$$2 \cdot 10,2 \left(16,2 - \frac{10,2}{2} \right) + 7,8 \cdot 16,2 + R_B \cdot 12 = 0$$

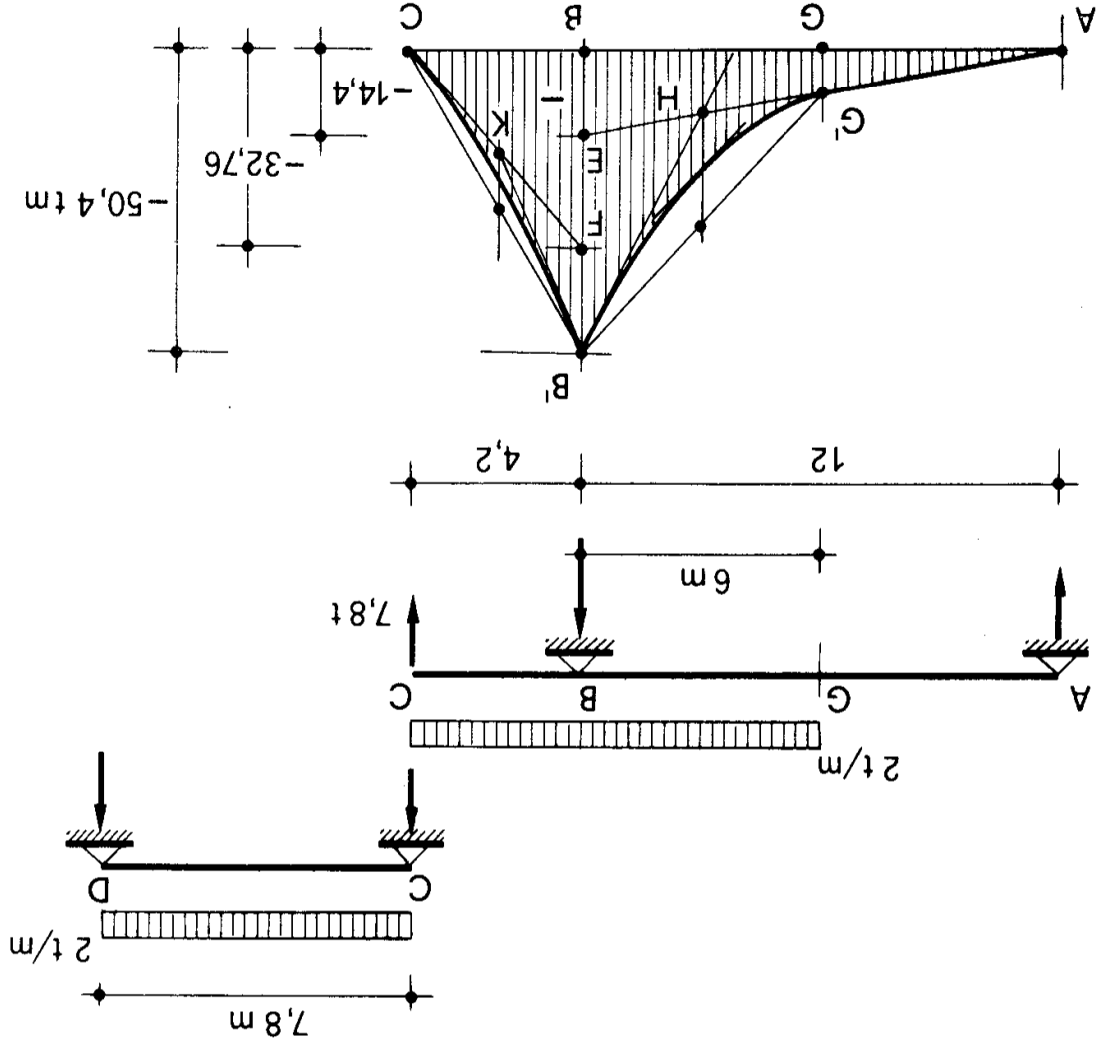
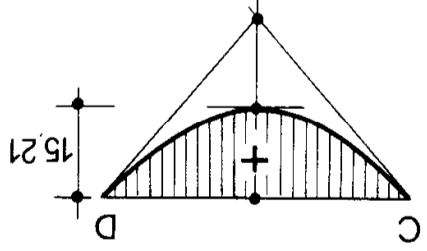


Figura 8b

da cui

$$R_B = - 29,4 t .$$

Per l'equilibrio alla traslazione secondo la verticale si ha

$$R_A - 29,4 + 2 \cdot 10,2 + 7,8 = 0$$

da cui

$$R_A = 1,2 t .$$

Il diagramma del momento su CD è una parabola simmetrica passante per C e D, di ordinata massima

$$M_{CDmax} = \frac{2 \cdot 7,8^2}{8} = 15,21 tm .$$

Il momento è ancora una parabola negli intervalli [6m, 12m] e [12m, 16,2m], e cioè nelle due parti GB e BC, mentre è lineare nell'intervallo [0,6m].

Il momento BB' in B è

$$M_B = - 7,8 \cdot 4,2 - 2 \cdot \frac{4,2^2}{2} = - 50,4 tm .$$

Calcolando tale momento con le forze a sinistra di B, si ha

$$BB' = BE + EB' .$$

dove BE, contributo di R_A , è pari a

$$- 1,2 \cdot 12 = - 14,4 tm .$$

ed EB', contributo di q , è fornito da

$$- 2 \cdot \frac{6^2}{2} = - 36 tm .$$

La sola forza R_A fornirebbe un momento in AB dato dalla retta AE; esso è valido in AG. Poichè in G sia il taglio che il momento sono continui, sia l'ordinata GG' che la tangente G'E sono valide anche per l'intervallo GB; la tangente in B' è fornita da B'H, dove H è l'intersezione di G'E con la verticale di mezzeria di GB; quindi il diagramma m_{GB} è definito.

Calcolando il momento M_B con le forze a destra, si ha

$$BB' = BF + FB'$$

dove BF, contributo di R_C , è pari a

$$- 7,8 \cdot 4,2 = - 32,76 \text{ tm}$$

ed FB', contributo di q , è fornito da

$$- 2 \cdot \frac{4,2^2}{2} = - 17,64 \text{ tm}$$

La retta CF sarebbe m_{BC} se agisse solo R_C ; quindi, poichè q agisce su tutta la luce BC, CF fornisce soltanto il valore della tangente in C. La tangente in B' è B'K, dove K è l'intersezione di CF con la verticale di mezzeria di BC.

Problema n. 9.

1) Procedimento grafico.

Nella trave della Fig. 9a il tracciamento del poligono funicolare si reputa scontato.

La fondamentale B'D' della parte BD si ottiene sfruttando le due condizioni $M = 0$ in D, e $T = \frac{dM}{dz} = 0$ in C; quindi la fondamentale passa per l'intersezione del funicolare con la verticale per D, ed è parallela alla tangente al funicolare nel punto C'' dove questo interseca la verticale per C.

Per ottenere una accettabile precisione, tale tangente non si costruisce direttamente, ma si segue il procedimento dell'es. 7; e cioè si unisce D' con il punto E'' dove il funicolare interseca la verticale situata a sini-

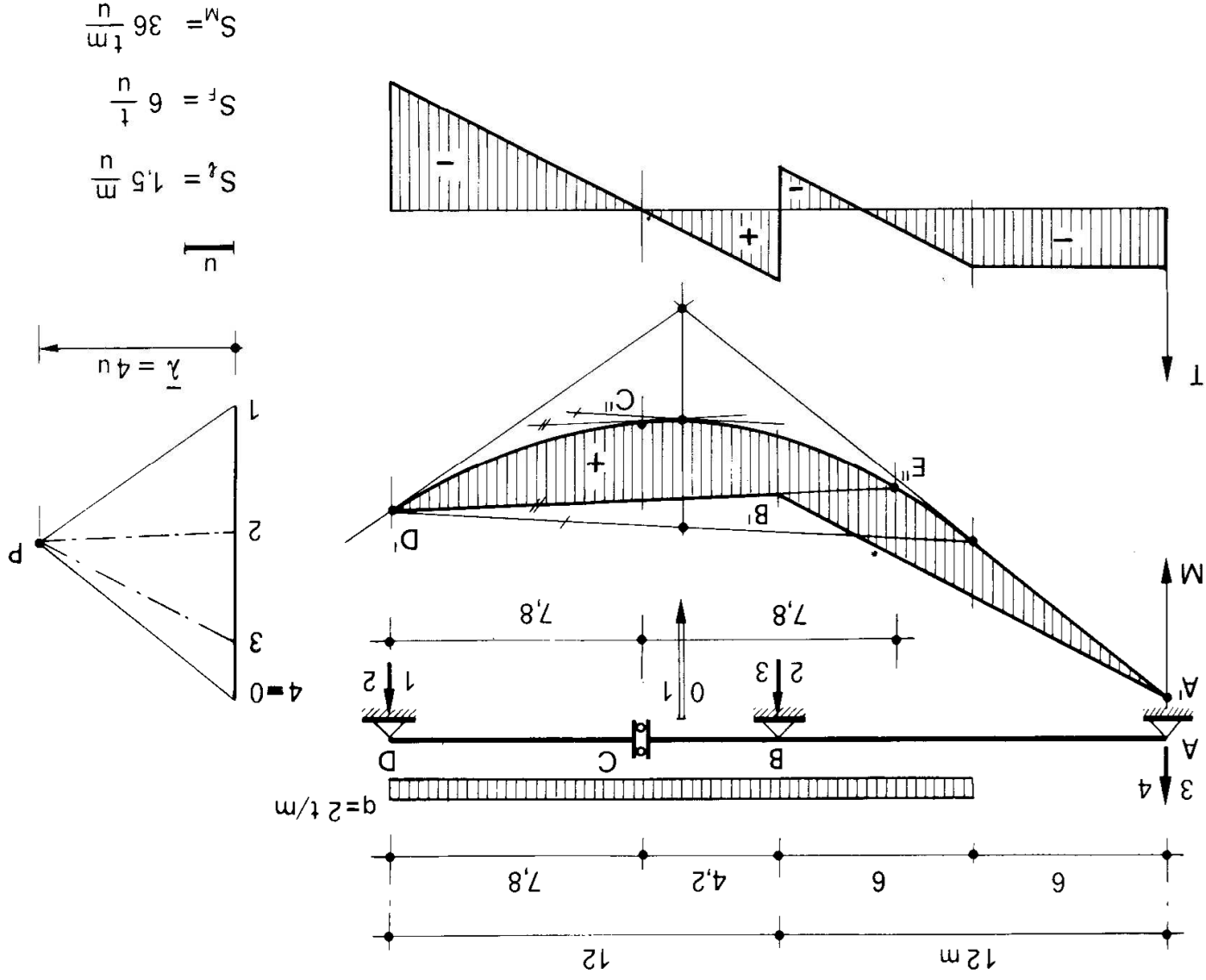


Figura 9a

stra di C, ed a una distanza da C pari a CD; la verticale per C e la D'E'' sono coniugate rispetto alla parabola, e quindi la tangente in C'' è parallela a D'E''.

Lo studio del diagramma del taglio, che presenta ordinata nulla in C, si affida alle cure del lettore.

2) *Procedimento di scomposizione.*

Dall'esame del tratto CD (Fig. 9b) si ha, per l'equilibrio alla traslazione,

$$R_D = - 15,6 t$$

e per l'equilibrio alla rotazione,

$$m_C = - 15,6 \cdot \frac{7,8}{2} = 60,84 tm .$$

Nel tratto AC si ha, per l'equilibrio alla rotazione intorno ad A,

$$- R_B \cdot 12 - 2 \cdot 6 \cdot 9 - 2 \cdot 4,2 \cdot 14,1 + 60,84 = 0$$

da cui

$$R_B = - 13,8 t ;$$

per l'equilibrio alla traslazione è

$$R_A - 13,8 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 4,2 = 0$$

da cui

$$R_A = - 6,6 t .$$

Il momento in B è fornito da

$$M_B = 60,84 - 2 \cdot \frac{4,2^2}{2} = 43,2 tm ,$$

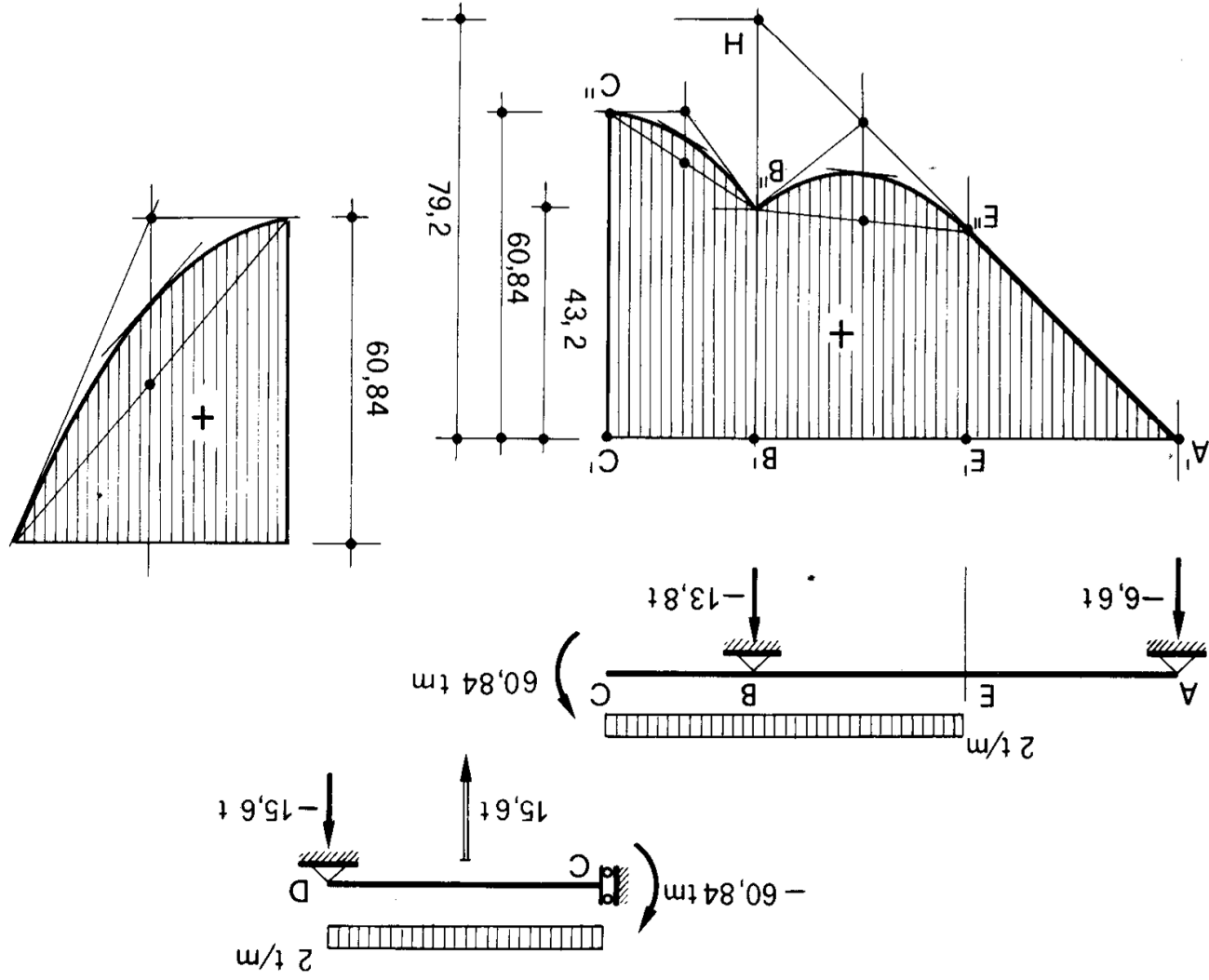


Figura 9b

quindi è nota l'ordinata $B'B''$ (oltre, ovviamente, quella $C'C''$, pari a $60,84 \text{ tm}$). La tangente in C'' è orizzontale, poichè in C è $T = 0$; quindi è immediato il disegno della tangente in B'' verso destra, e della parabola relativa alla parte BC (la tangente in B'' e quella in C'' devono intersecarsi sulla verticale di mezzeria di BC).

Se agisse solo R_A , il momento in B sarebbe pari a

$$B'H = 6,6 \cdot 12 = 79,2 \text{ tm} ;$$

la retta $A'H$ è valida in AE ; l'ordinata $E'E''$ e la retta $A'E''$ sono anche l'ordinata momento in E e la tangente ad $M(z)$ in E valide per la parte EB . E' così nota la tangente a sinistra in B'' (le due tangenti in E'' e B'' devono intersecarsi sulla verticale di mezzeria di EB) e quindi la parabola del tratto EB .

In modo ovvio si costruisce il diagramma momento per il tratto CD .

Problema n. 10.

La struttura della Fig. 10 è la stessa della Fig. 9; il carico q è però esteso a tutta la trave. Si è preferito sostituire il carico distribuito con le due risultanti 0.1 ed 1.2 relative alla parte AC ed alla parte CD , e proiettare 0.1 da un polo P_1 e 1.2 da un altro polo P_2 , con la stessa base λ ; in tal modo si hanno due poligoni funicolari distinti, uno sotto AC , l'altro sotto CD , formanti un punto angoloso in C'' . Il vantaggio di tale prassi è nell'ottenere, a parità di distanza polare, una figura meno ingombrante in altezza di foglio.

La fondamentale $A'C'$ della parte AC si ottiene attraverso le condizioni $M = 0$ in A , $\frac{dM}{dz} = 0$ in B ; poichè in D è pure $M = 0$, ed in C il momento è definito, la fondamentale della parte CD è la $C'D'$.

Se si taglia la trave immediatamente a sinistra di C , e si assume per reazione su AC la forza 1.4 applicata in H , e per reazione in A la 4.0 applicata in A , il poligono delle forze è chiuso, e così pure il poligono funicolare; quindi, poichè il verificarsi di questi due fatti è condizione necessaria e sufficiente di equilibrio, tali reazioni sono quelle vere. Così pure, la 2.3 applicata in D e la 3.4 applicata in K sono la reazione in D , e la reazione sulla sezione di CD immediatamente a destra di C .

Quindi è

$$R_A = 4.0$$

$$R_D = 2.3;$$

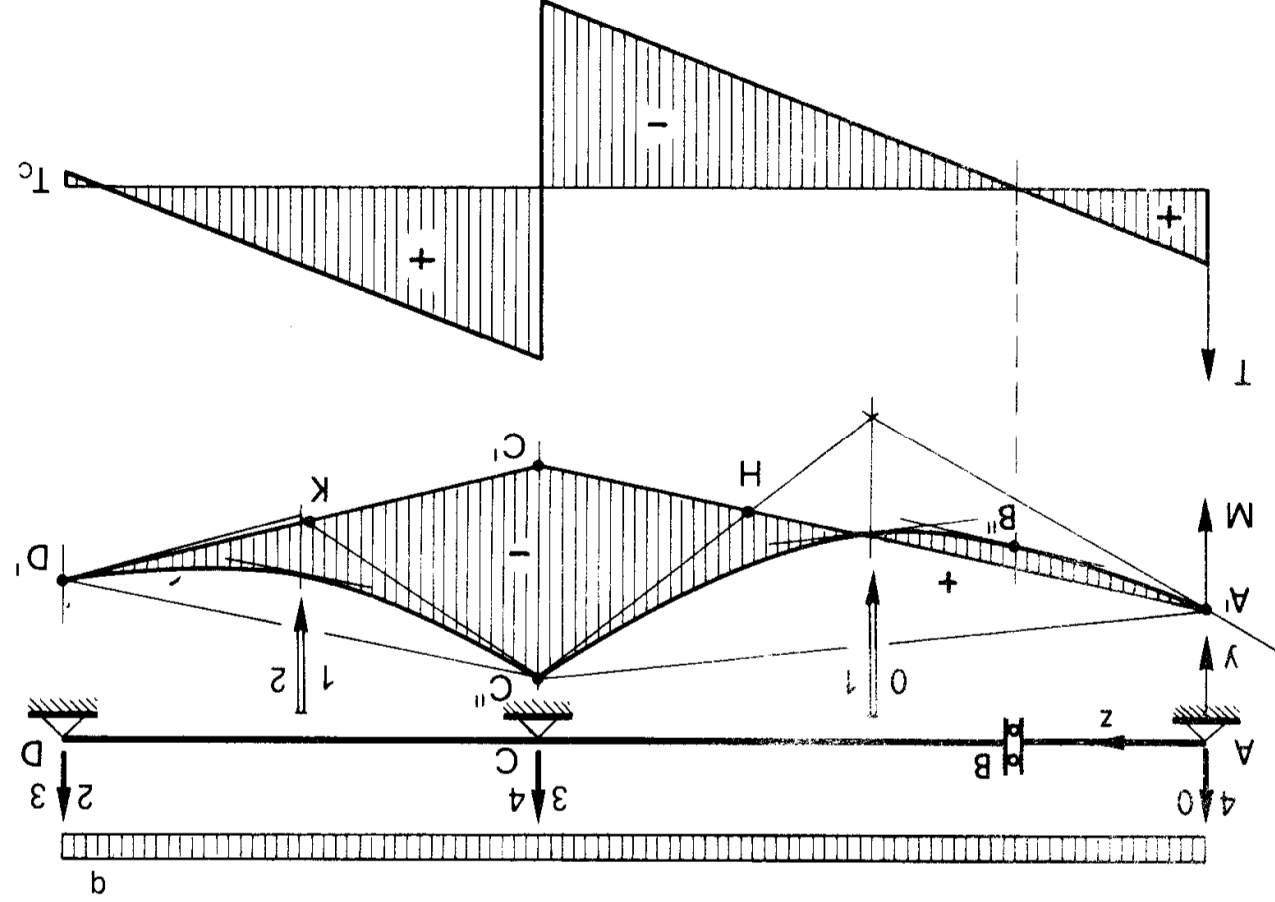
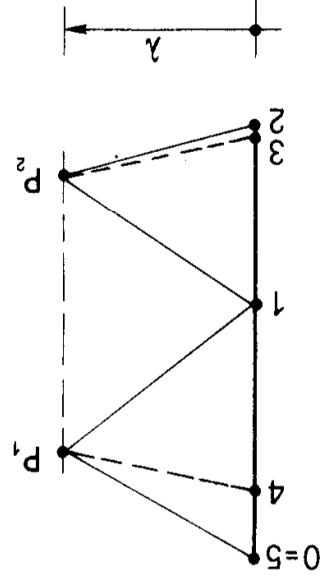


Figura 10

inoltre, poichè la somma delle due reazioni su AC e CD prima definite è pari alla reazione in C sulla trave, è pure

$$R_C = 3.4 . \quad (26)$$

Si osservi che la reazione sulla sezione di AC immediatamente a sinistra di C è in modulo e segno pari al taglio T_{Cs} alla sinistra di C, mentre la reazione sulla sezione di CD immediatamente a destra di C è uguale in modulo e contraria in segno al taglio T_{Cd} alla destra di C:

$$\begin{aligned} T_{Cs} &= 1.4 < 0 \\ T_{Cd} &= - 3.1 = 1.3 > 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Il diagramma del taglio si disegna banalmente.

Problema n. 11.

1) *Procedimento grafico.*

Nella trave della Fig. 11a le fondamentali sono due, una per la parte AB, l'altra per la parte BD.

La seconda, B''D', si ottiene in modo ovvio dalle due condizioni $M = 0$ in C e in D. Per la prima, vale la condizione $M = 0$ in A; inoltre, poichè il vincolo B agisce sulla trave solo con una coppia concentrata, i valori del taglio, e cioè di $\frac{dM}{dz}$, sono gli stessi a sinistra e a destra di B: ciò si

gnifica che le due fondamentali devono essere parallele, e ciò basta per definire la prima fondamentale A'B''. Si osservi che B''B''' è la coppia esercitata dal vincolo sulla trave; essa è antioraria, perchè (vedi es. 4) nel diagramma dei momenti raddrizzato il punto B'' (di sinistra) sta al disotto del punto B''' (di destra).

Il diagramma del taglio si traccia al solito modo.

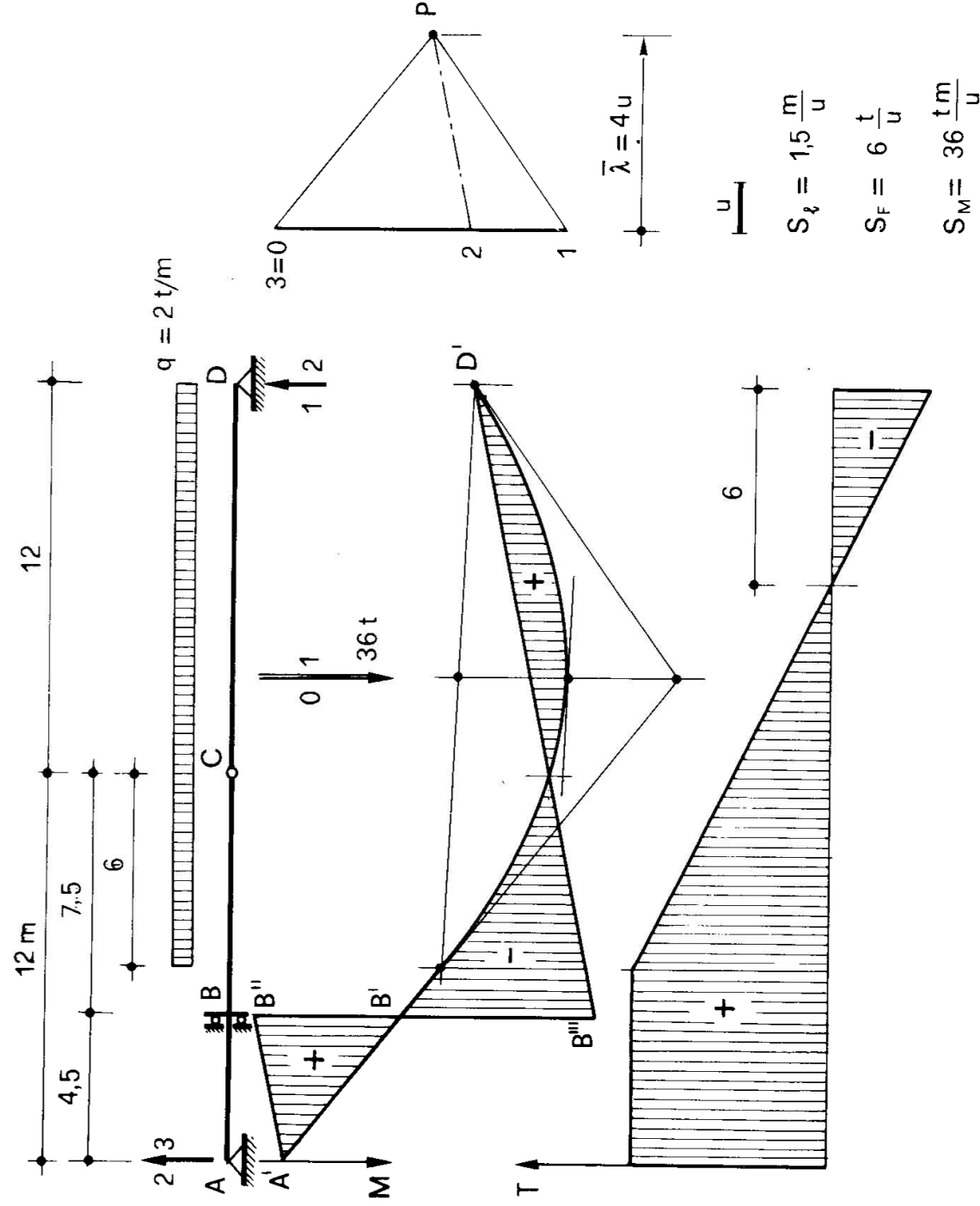


Figura 11a

2) Procedimento di scomposizione.

Le reazioni della trave CD sono (Fig. 11b)

$$R_C = R_D = - 12 \text{ tm}$$