CAPITOLO QUARTO

# I DIAGRAMMI DELLE CARATTERISTICHE

## *PREMESSA.*

In questo capitolo si tratterà esclusivamente di strutture isostatiche, e di sistemi monodimensionali piani. La ricerca delle caratteristiche M N T verrà effettuata prevalentemente per via grafica, nel senso che se ne tracceranno direttamente i diagrammi, senza fornirne l'espressione analitica.

Si ricordano le note formule

$$\frac{dT}{ds} = - q_n \tag{1}$$

$$\frac{dN}{ds} = - q_t \tag{2}$$

$$\frac{dM}{ds} = T - m \,, \tag{3}$$

valide per travi a piccola curvatura. Le (1) (2) e (3) sono state tratte dall'esame dell'equilibrio di un tronco elementare lungo ds, non soggetto a forze o coppie concentrate; quindi può dirsi che in un tronco compreso tra due sollecitazioni (forza o coppia) concentrate (applicate o reattive) successive, le funzioni T (s) ed N (s) sono derivabili una volta, la funzione M (s) è derivabile due volte; in particolare,

$$\frac{d^2M}{ds^2} = - q_n - \frac{dm}{ds} \,. \tag{4}$$

Le funzioni T (s) ed N (s) sono definite in ogni intervallo aperto compreso tra due generiche forze concentrate successive, e la funzione M (s) è definita nell'intervallo aperto compreso tra due coppie concentrate successive; e cioè in altre parole, T (s) ed N (s) *non sono in genere definite* *nei punti ove è applicata una forza concentrata*, M (s) *non è definita nei punti ove è applicata una coppia concentrata.*

Dalle (1) e (2) si trae che T (s) ed N (s) in un tronco *rettilineo* sono fornite da un'unica espressione in ogni intervallo compreso tra due forze concentrate (sempre che $q_n$ e $q_t$ siano integrabili); dalla (3), invece, unitamente alle (1) e (2), si trae che M (s) è fornita da un'unica espressione in ogni intervallo compreso tra due sollecitazioni (forza o coppia) concentrate. In altre parole, *chi percorre l'asse della trave vede in genere variare l'espressione di* M (s), T (s) ed N (s), *quando incontra una forza concentrata; mentre vede variare l'espressione di* M (s), *giammai quella di* N (s) *e* T (s), *quando incontra una coppia concentrata.*

Se il tronco compreso tra due sollecitazioni esterne concentrate è *rettilineo* e *scarico*, cioè se su di esso è $q = 0$, $m = 0$, lungo esso T (s) ed N (s) sono *costanti*, M (s) varia con legge *lineare*; l'inclinazione di M (s) sull'asse del tronco è fornita dal valore del taglio. Se sul tronco esiste un *carico distribuito uniforme*

$$q_n = q$$

(di valore costante) T (s) varia con legge *lineare*, M (s) con legge *quadratica*; l'inclinazione (costante) di T (s) sull'asse del tronco è fornita dal valore di $-q$, l'inclinazione (variabile) di M (s) è fornita dal valore corrispondente di T (s).

In genere, su un tronco *rettilineo* compreso tra due sollecitazioni esterne concentrate e soggetto ad un carico distribuito $q_n = q\,(s)$, l'inclinazione di T (s) sull'asse è pari a $-q\,(s)$, l'inclinazione di M (s) è pari a T (s); dove M (s) è stazionario $\left(\frac{dM}{ds} = 0\right)$ è pure T (s) = 0, e viceversa. Per la (4), all'ascissa dove T (s) = 0 si ha per M (s) un massimo, un minimo o un flesso in relazione al valore ed al segno di q (s) a quella ascissa; se $q > 0$, M è massimo, se $q < 0$, M è minimo.

Per i segni vale tutto quanto già detto nella premessa del cap. 2; i diagrammi si tracciano assumendo come fondamentale l'asse di ogni tronco, ad ognuno dei quali è associata la coppia levogira di assi *nt*. I valori di M ed N si riportano sulla fondamentale dalla parte di *n* positiva, i valori positivi di T dalla parte di *n* negativa; risulta così, come si usa dire in pratica, che *il momento è riportato rispetto all'asse della trave dalla parte delle fibre tese.*

## Problema n. 1.

La struttura della Fig. 1 è una trave rettilinea su tre appoggi pendolari; le reazioni 1 2 3 si ottengono scomponendo la F secondo le rette d'azione $r_1$, $r_2$ $r_3$ delle reazioni stesse; a ciò fare si costruisce prima

$$r_{1+2} \ni 1 \cap 2,\ F \cap 3,$$

poi si scompone F secondo $r_{1+2}$ ed $r_3$, ed 1 + 2 secondo $r_1$ ed $r_2$.

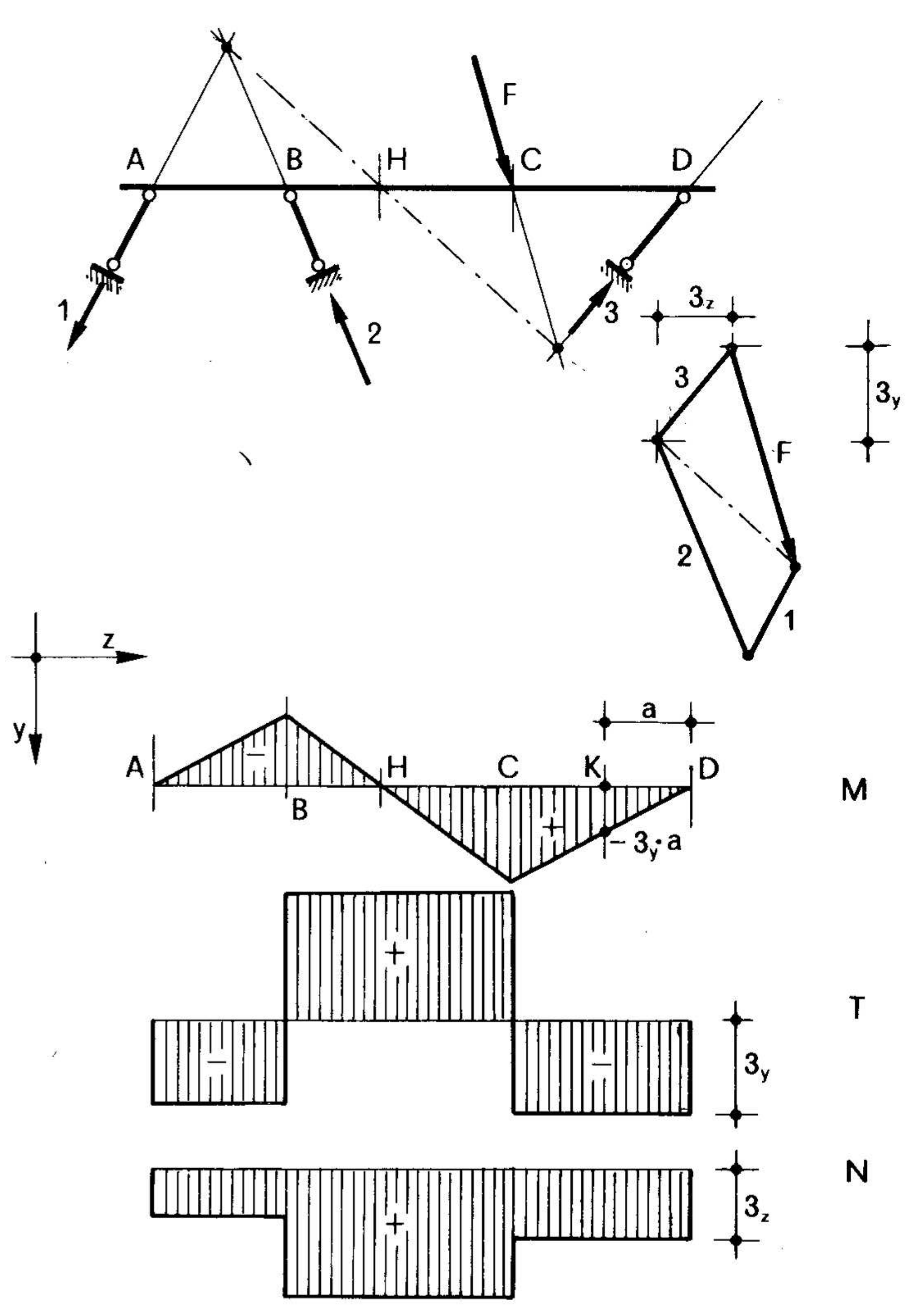



*Figura* 1

Il diagramma del momento M (z) è relativo a tre funzioni lineari, definite negli intervalli chiusi AB, BC e CD, e cioè è composto da tre rette, che si chiameranno $m_{AB}$, $m_{BC}$, $m_{CD}$; $z$ è l'asse della trave. Le condizioni cui esse devono soddisfare sono

a) $m_{AB} \cap z = 1 \cap z$

b) $m_{AB} \cap m_{BC} \in r_{By} : r_{By} \ni B, y_\infty$

c) $m_{BC} \cap z = (1 + 2) \cap z$

d) $m_{BC} \cap m_{CD} \in r_{Cy} : r_{Cy} \ni C, y_\infty$

e) $m_{CD} \cap z = 3 \cap z$ .

La condizione a) esprime che $m_{AB}$ deve intersecare l'asse z in A, poichè $m_A = 0$.

La condizione b) esprime che $m_{AB}$ ed $m_{BC}$ devono intersecarsi sulla verticale di B, poichè in B deve essere

$$m_{AB} = m_{BC} = M_B \ .$$

La condizione c) esprime che $m_{BC}$ deve intersecare l'asse z nel punto H dove l'asse z è intersecato dalla risultante di 1 e 2; infatti in H è $M_H = 0$.

La condizione d) esprime che $m_{BC}$ ed $m_{CD}$ devono intersecarsi sulla verticale di C, poichè in C deve essere

$$m_{BC} = m_{CD} = M_C \ .$$

La condizione e) esprime che $m_{CD}$ deve intersecare l'asse z in D, poichè $M_D = 0$.

E' immediato tracciare una qualsiasi spezzata che soddisfi le suddette condizioni; essa deve essere disegnata tenendo conto che $M_B < 0$, $M_C > 0$, e quindi le fibre tese sono quelle inferiori in C, quelle superiori in B.

La scala (sesta condizione) è determinata dal fatto che in una generica sezione K, a distanza KD = *a* da D, deve essere

$$M_K = - 3_y \cdot a \ ,$$

dove $3_y$ è la componente secondo y della reazione 3 (nel caso in esame è $3_y < 0$).

Il diagramma del taglio T (z) è relativo a tre funzioni costanti, definite negli intervalli aperti AB, BC e CD, e cioè è composto da tre rette parallele all'asse, che si chiameranno $t_{AB}$, $t_{BC}$, $t_{CD}$. In AB è

$$t_{AB} = -1_y = 2_y + F_y + 3_y ;$$

in BC è

$$t_{BC} = -1_y - 2_y = F_y + 3_y ;$$

in CD è

$$t_{CD} = -1_y - 2_y - F_y = 3_y .$$

In A, B, C e D la T (z) non è definita; essa è in tali punti discontinua, e le discontinuità (differenze tra i valori a destra e a sinistra del punto di discontinuità) sono pari a

$$\Delta t_A = -1_y$$

$$\Delta t_B = -2_y$$

$$\Delta t_C = -F_y$$

$$\Delta t_D = -3_y ;$$

cioè, con rozza locuzione, nel diagramma di T (z) si osserva, in corrispondenza di ogni forza concentrata, un *salto* pari al valore della componente della forza normale all'asse, e *nel verso* della componente stessa. E' questo forse il motivo autentico per cui le ordinate positive T (z) si riportano dalla parte delle y negative.

Le componenti secondo y di 1, 2, 3 ed F sono fornite dal poligono delle forze.

Anche il diagramma dello sforzo normale N (z) è relativo a tre funzioni costanti, definite negli intervalli aperti AB, BC e CD, e quindi è composto da tre rette parallele all'asse, che si chiameranno $n_{AB}$, $n_{BC}$, $n_{CD}$.

In AB è

$$n_{AB} = -1_z = 2_z + F_z + 3_z ;$$

in BC è

$$n_{BC} = -1_z - 2_z = F_z + 3_z ;$$

in CD è

$$n_{CD} = -1_z - 2_z - F_z = 3_z \ .$$

Le discontinuità in A, B, C e D sono pari a

$$\Delta n_A = -1_z$$

$$\Delta n_B = -2_z$$

$$\Delta n_C = -F_z$$

$$\Delta n_D = -3_z \ ;$$

e cioè nel diagramma N (z) si osserva, in corrispondenza di ogni forza concentrata, un *salto* pari al valore della componente della forza tangente all'asse, *verso l'alto* se tale componente è positiva.

**Problema n. 2.**

La capriata elementare della Fig. 2a è soggetta sul tratto AB, di lunghezza $s$, ad un carico $q$ normale all'asse ed uniformemente distribuito, di risultante $F = qs$; la risultante F ha per retta d'azione $r$ la normale ad AB nella sua mezzeria.

Si ricercano dapprima le reazioni. Per l'equilibrio del tratto BC, che è scarico, si ha

$$b + c = 0 \ . \tag{5}$$

dove $b$ è la reazione in B su BC, e $c$ è la reazione in C su CB; dalla (5) si trae che $b$ e $c$ sono uguali e contrarie, e ciò, attraverso la notazione di equivalenza, si scrive

$$b = c \ ;$$

il tratto BC si comporta, in altre parole, *come un pendolo,* e la sua reazione si indicherà con $e$. Altrettanto può dirsi per il tratto AC, la cui reazione si indicherà con $g$.

Per l'equilibrio del tratto AB si ha

$$d + F + e = 0 \ , \tag{6}$$

dove con $d$ si è indicata la reazione della cerniera A su AB è perciò

$$r_d \ni A, r \cap e.$$

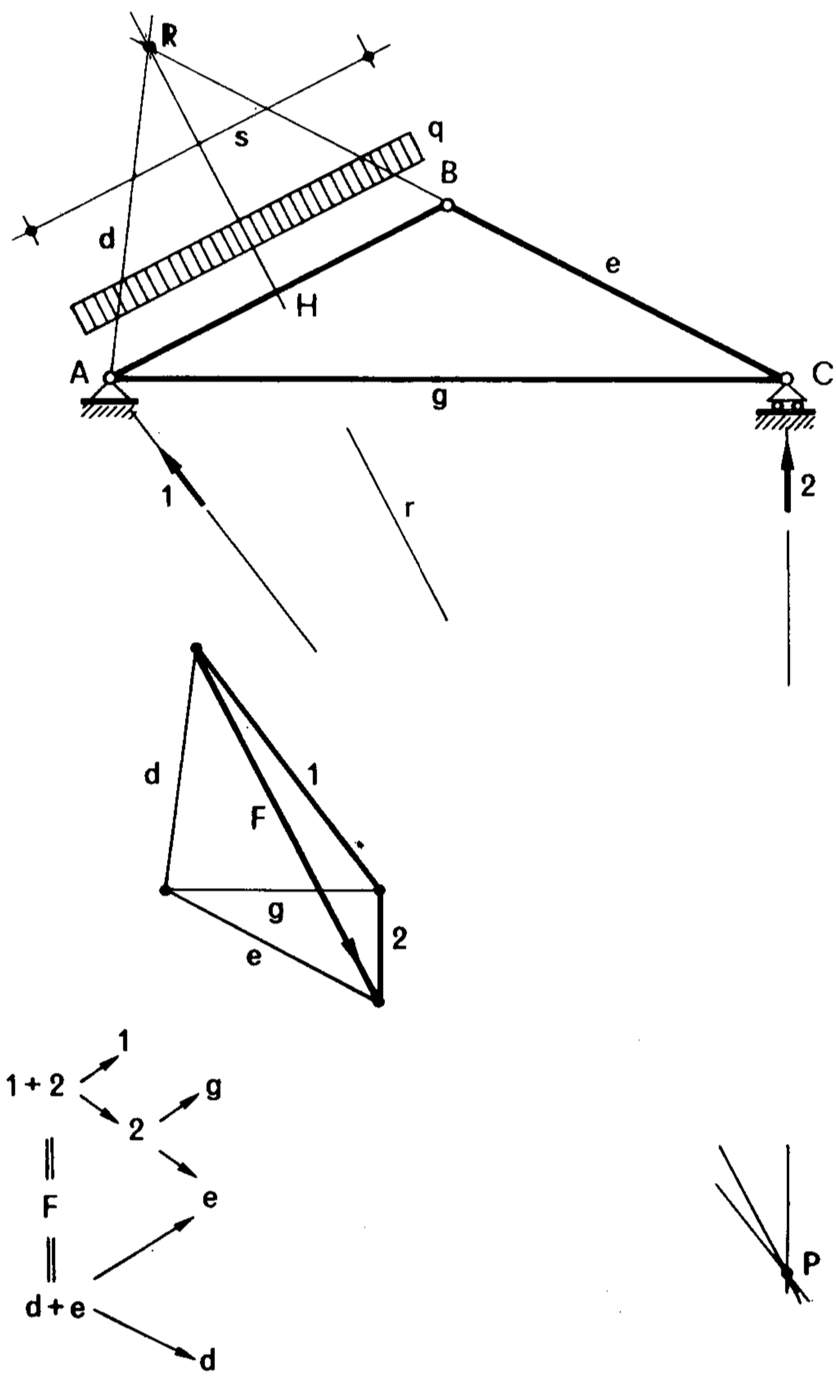



*Figura* 2a

Per l'equilibrio della cerniera A si ha

$$1 + g + d = 0 \,, \tag{7}$$

dove 1 è la reazione esterna in A; per l'equilibrio della cerniera C si ha

$$2 + e + g = 0 \,, \tag{8}$$

dove 2 è la reazione esterna in C; per l'equilibrio globale si ha poi

$$F + 1 + 2 = 0 \,. \tag{9}$$

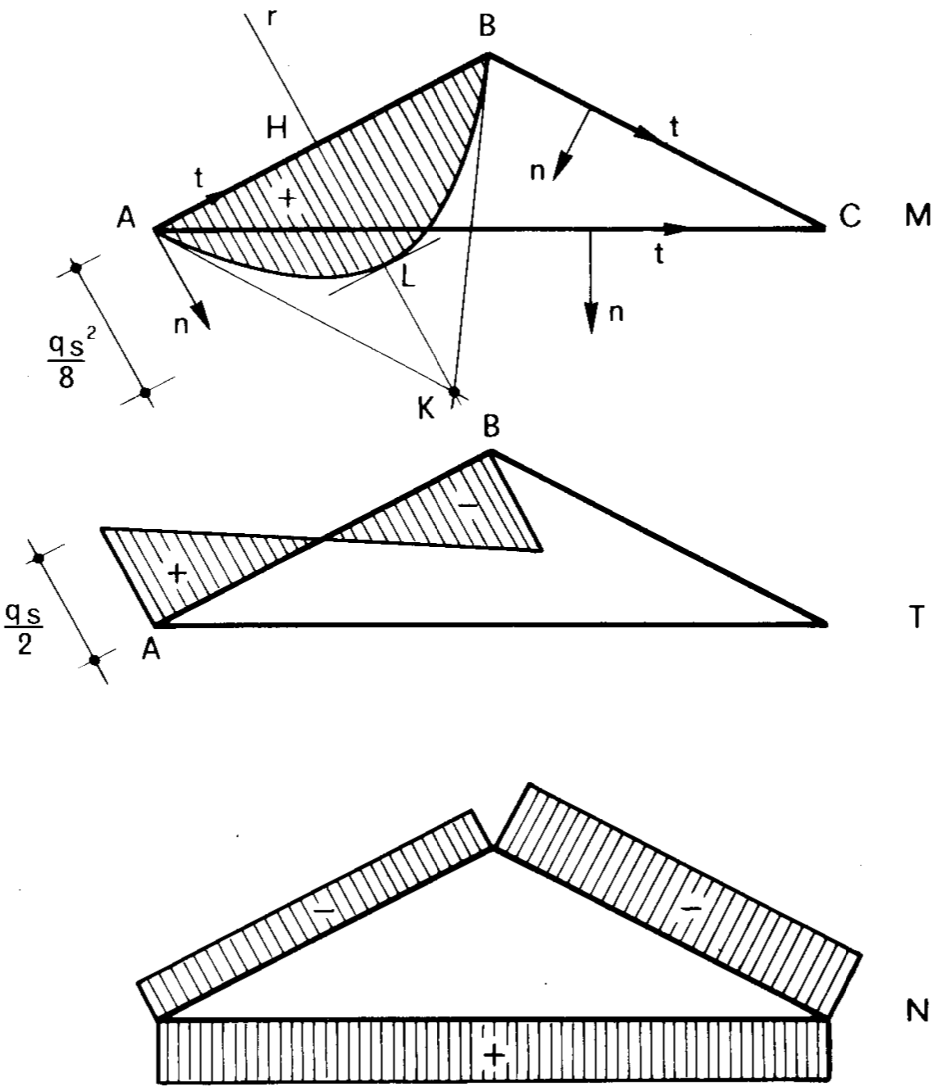



*Figura* 2b

Dalla (9) si ha

$$r_1 \ni A,\ r \cap 2.$$

Si opera perciò scomponendo F secondo $r_1$ ed $r_2$, 2 secondo $r_e$ ed

$r_g$, ed ancora F secondo $r_e$ ed $r_d$. Soltanto il tratto AB è soggetto a momento flettente e taglio (Figura 2b); poichè $q$ è uniforme, M (s) varia con legge quadratica e T (s) con legge lineare.

Dalla Fig. 2a si osserva che, poichè il punto $R \in d, r, e$ definisce con A e B un triangolo isoscele, le proiezioni di $d$ e di $e$ sulla normale ad AB sono uguali e pari a $\frac{qs}{2}$ ; quindi

$$T_A = -T_B = \frac{qs}{2} . \tag{10}$$

Dalla (10) si trae che il diagramma del taglio si annulla nella mezzeria H di AB. Nello stesso punto H il diagramma del momento presenterà quindi un massimo ($q > 0$); il suo valore è

$$M_{max} = \frac{qs}{2}\frac{s}{2} - \frac{qs}{2} \cdot \frac{s}{4} = \frac{qs^2}{8} \tag{11}$$

(il primo termine è il momento rispetto ad H della reazione in A su AB, e cioè di $d$, pari al prodotto della componente normale ad AB di $d$ per la distanza $AH = \frac{s}{2}$ ; il secondo termine è il momento, sempre rispetto ad H, della risultante del carico applicato alla sinistra di H; tale risultante è pari a $\frac{qs}{2}$ , ed è applicata alla distanza $\frac{s}{4}$ da H).

E' proprietà generale di una parabola $n = n(t) = at^2 + bt + c$, su un qualsiasi riferimento $tn$ anche non ortogonale ($t$ asse delle ascisse, $n$ delle ordinate), che, presi due generici punti A e B di essa, le tangenti in A e B, si incontrino sulla parallela ad $n$ condotta per il punto medio H di AB; se inoltre K è il punto d'incontro delle tangenti, ed L il punto di intersezione di HK con la parabola, risulta

$$HK = 2 \cdot HL , \tag{12}$$

e la tangente in L alla parabola è parallela alla corda AB. Se perciò sono note le tangenti in A e B, è nota pure l'ordinata HL della parabola nel punto medio H di AB, e la tangente alla parabola in L; se invece è nota l'ordinata HL nel punto medio H di una corda AB, sono note pure le tangenti in A, B ed L.

Poichè quindi la parabola M (s) passa per A e B (Figura 2b), dove M = 0, ed è noto il valore HL di M nel punto medio H di AB, è immediata la costruzione delle due tangenti in A, B ed L.

Lo sforzo normale impegna invece tutti i tratti; esso è costante in ciascun tratto, poichè AC e BC non sono soggetti a forze applicate, ed in AB è $q_n = 0$. In AB lo sforzo assiale è fornito dalla componente di *e*, o di *d*, secondo AB; esso è di compressione. In BC e AC lo sforzo normale è pari rispettivamente ad *e* (compressione) ed a *g* (trazione).

**Problema n. 3.**

Si è in presenza di un arco a tre cerniere A B C di 60 m di luce

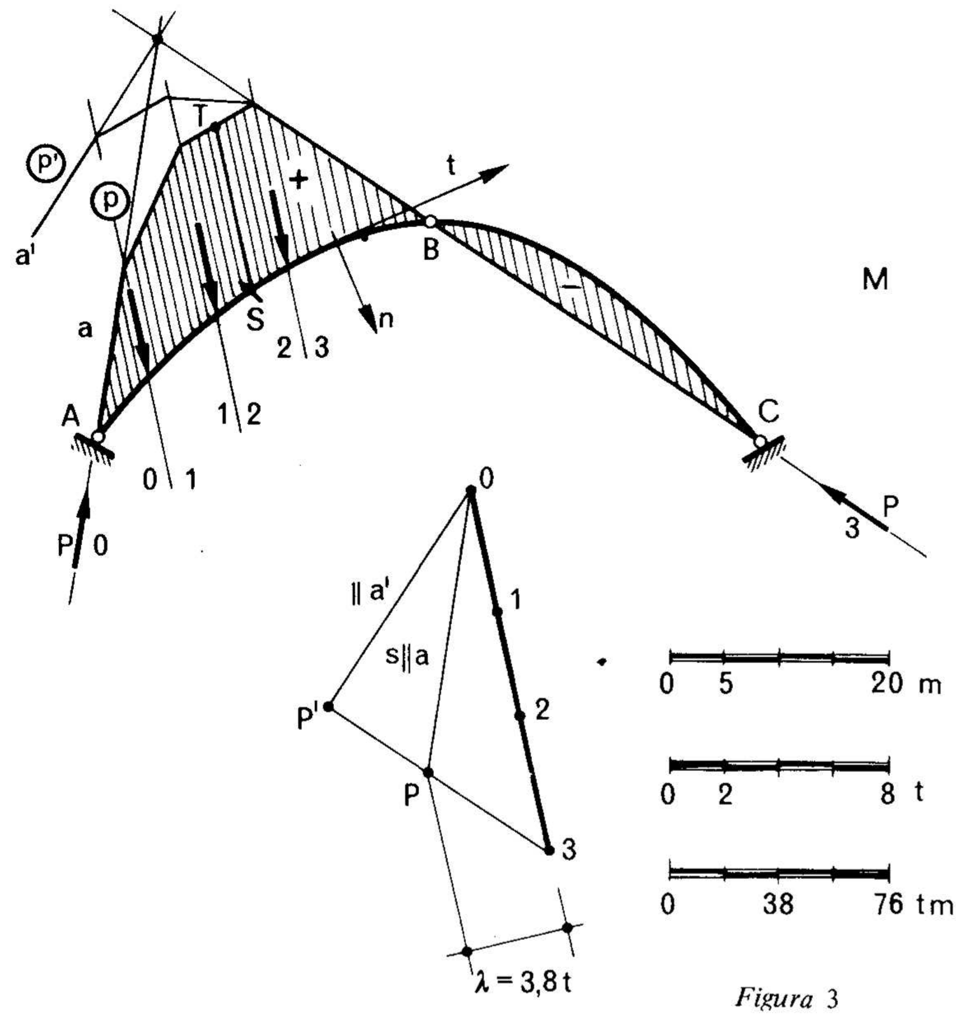



*Figura* 3

(Fig. 3); il tratto BC è *scarico* (e cioè su esso non agiscono forze esterne), mentre sul tratto AB sono presenti tre forze 01, 12, 23 pari ciascuna a

4,8 $t$, tra loro parallele.

Si costruisce prima il poligono funicolare $p$ che connette le tre forze, ed il cui primo lato passa per A, l'ultimo coincide con la retta BC. A ciò fare, si costruisce un primo poligono p′ di tentativo che soddisfi la seconda condizione, operando con un polo P′ arbitrario, ma appartenente alla parallela a BC condotta per l'estremo 3 del poligono delle forze. Il polo P che soddisfi anche la prima condizione deve sempre appartenere alla 3P′, ed inoltre deve essere tale che la parallela $a$ ad OP per A incontri BC ancora nel punto dove il primo lato a′ di p′ interseca BC; per tale punto infatti passa la risultante delle forze applicate. Quindi

$$P = 3\,P' \cap s : s \ni 0,\ a_\infty : a \ni A,\ BC \cap a'$$

Costruito il poligono funicolare $p$, si riconosce che esso è il cosiddetto *poligono delle successive risultanti;* e cioè, il suo primo lato $a$ è la retta d'azione della reazione PO in A, che interessa da sinistra il tratto compreso tra A ed il punto d'applicazione della prima forza 01; il suo secondo lato è la retta d'azione della risultante P1 di P0 e 01, che interessa da sinistra il tratto compreso tra i punti d'applicazione di 01 e 12; il terzo lato è la retta d'azione della risultante P2 di P0, 01 e 12, che interessa da sinistra il tratto compreso tra i punti d'applicazione di 12 e 23, e così via. Nel caso, di frequentissimo incontro, in cui le forze applicate sono tra loro parallele, il poligono delle successive risultanti fornisce immediatamente il diagramma dei momenti. Se infatti in S si considera il segmento ST (Fig. 3), dove T è l'intersezione del poligono con la parallela alle forze per S, e se la risultante $R_S$ delle forze a sinistra di S si scompone in $R'_S$ ed $R''_S$ rispettivamente parallela e normale alle forze applicate, risulta considerando $R_S$ agente in T,

$$M_S = R''_S \cdot ST\ ;$$

poichè $R''_S$ è indipendente da S, e pari alla base $\lambda$ del poligono funicolare, l'assunto è dimostrato:

$$M_S = \lambda \cdot ST\ . \tag{13}$$

Nel caso in esame, risulta $\lambda = 3{,}8\ t$; quindi la scala del momento si ha moltiplicando quella delle lunghezze per 3,8 $t$. Atteso il verso di $\lambda$, che agente da sinistra su S è diretto verso destra, il momento è positivo dove T è al disopra di S, negativo dove è al disotto.

## Problema n. 4.

L'esercizio (Fig. 4) è analogo al precedente; sulla campata sinistra AB dell'arco a tre cerniere ABC agisce un carico $q$ verticale (direzione y) uniformemente distribuito lungo l'orizzontale (direzione z). Il poligono fu-

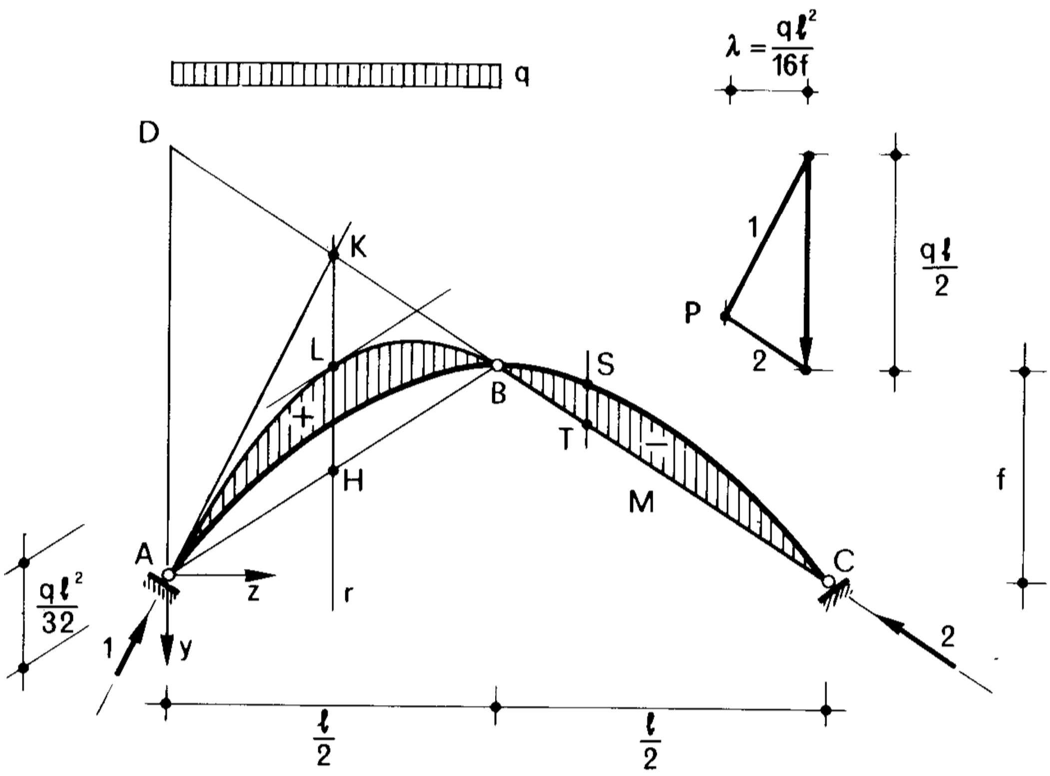



*Figura* 4

nicolare il cui primo lato passa per A, e l'ultimo coincide con BC, è di immediata costruzione. Infatti la retta d'azione $r$ della risultante del carico è già nota (essa è verticale, e biseca il segmento AB), quindi é

$$r_1 \ni A, BC \cap r \; ;$$

d'altro canto si sa che il poligono funicolare di un carico uniformemente distribuito è una parabola quadratica di asse parallelo a $q$. Di tale parabola, definita nel tratto AB, si conoscono due punti A e B, e le tangenti(*) AK e BK nei punti stessi ($K = BC \cap r \cap r_1$); quindi (es. 2) la parabola taglia la retta $r$ nel punto medio L del segmento HK (H punto medio di AB) e la tangente in L è parallela ad AB.

(*) Si ricordi che, sostituendo ad un insieme di forze un insieme equivalente, il poligono funicolare varia soltanto nella parte impegnata dalle forze variate.

Dalla similitudine tra il triangolo AKD e quello delle forze si trae, se $f$ è la *freccia* dell'arco,

$$\lambda : \frac{ql}{2} = \frac{l}{4} : 2f$$

da cui

$$\lambda = \frac{ql^2}{16f} . \qquad (14)$$

Ottenuto $\lambda$, il momento in una generica sezione S (Figura 4a) è fornito dal prodotto $\lambda \cdot$ ST dove T è intersezione del poligono funicolare con la parallela ad $r$ per S.

**Problema n. 5.**

L'arco a tre cerniere ABC della Fig. 5 è soggetto ad un carico orizzontale $q$ uniformemente distribuito, lungo la verticale, su tutto il semiarco AB. In condizioni di simmetria la cerniera B è situata in chiave, e quindi il carico $q$ impegna una altezza $f$; la sua risultante è pari a $q \cdot$ f, ed è applicata (retta d'azione $r$), alla quota $\frac{f}{2}$ da A. Le due reazioni 1 e 2 si

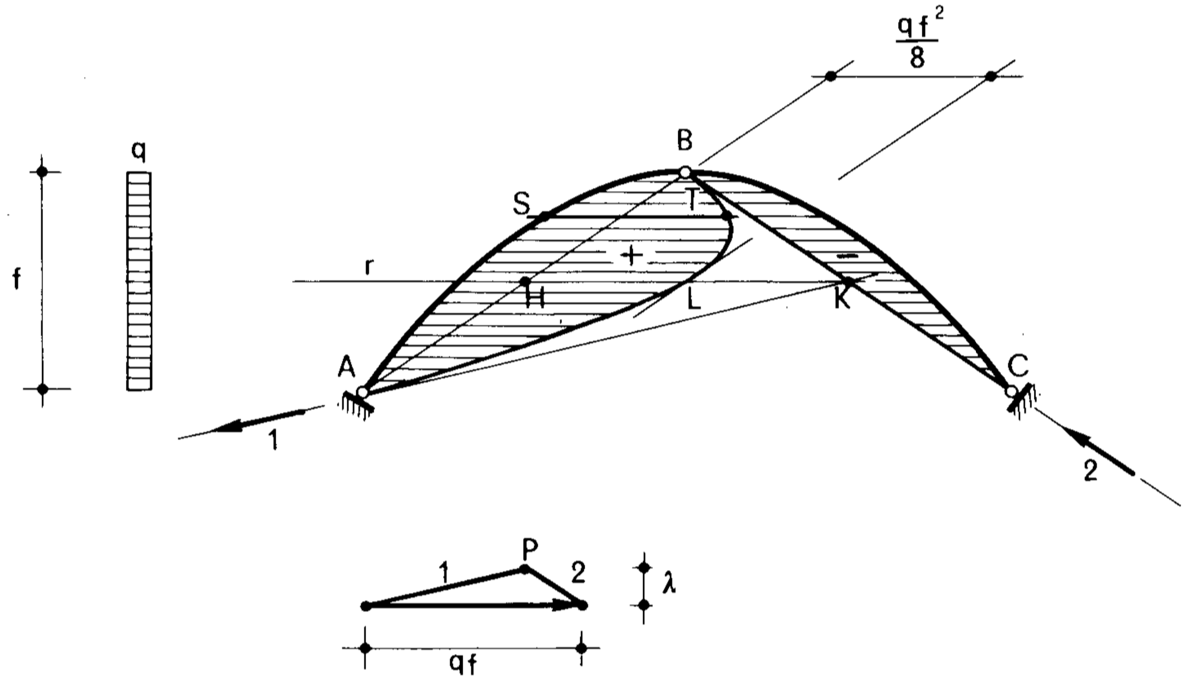



*Figura* 5

determinano scomponendo q $\cdot$ f secondo $r_2$ = BC, ed $r_1 \in$ A, BC $\cap$ r. Operando come nell'es. 4, si osserva che il poligono funicolare di $q$ è una parabola quadratica di asse parallelo a $q$; di essa si conoscono i punti A e B e le tangenti in A e B, date da $r_1$ ed $r_2$. Determinati H = AB $\cap$ r, e

$K = r_1 \cap r_2$, la parabola passa per la mezzeria L di HK, e la sua tangente in L è parallela ad AB. Il segmento HL vale

$$HL = \frac{qf^2}{8} \, . \tag{15}$$

Per quanto detto nell'es. 3, in ogni sezione S il momento $M_S$ è dato dal prodotto $ST \cdot \lambda$, dove T è l'intersezione con il poligono funicolare della parallela ad *r* per S.

**Problema n. 6.**

Si è ancora in presenza di un arco a tre cerniere ABC; la B è impro-

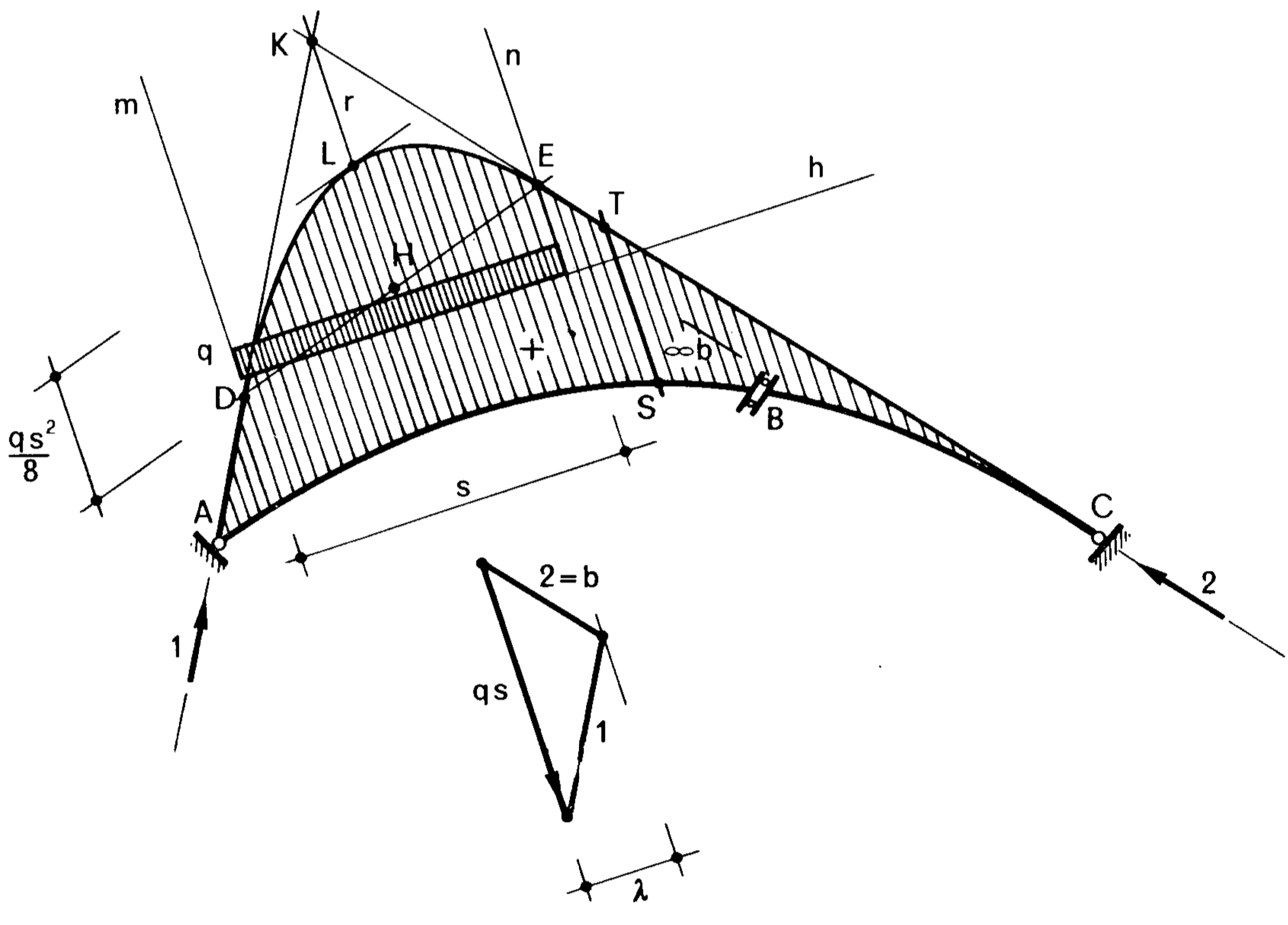



*Figura* 6

pria (bipendolo). Sul semiarco AB agisce, uniformemente distribuito lungo la direzione *h*, un carico *q*, ortogonale ad *h*, compreso tra le due normali *m* ed *n* ad *h*; la distanza tra *m* ed *n* è *s*, la risultante del carico è q · s, applicata secondo *r*. Si ha

$$r_2 \ni C, \infty\, b$$

$$r_1 \ni A,\ r_2 \cap r\ .$$

Il poligono funicolare si completa inserendo la parabola tra *m* ed *n*; la parabola passa per D ed E, dove

$$D = r_1 \cap m$$

$$E = r_2 \cap n\ ,$$

ed ha in D ed R come tangenti rispettivamente $r_1$ ed $r_2$.

La costruzione della parabola e la lettura del momento in S si eseguono come negli esercizi precedenti.

**Problema n. 7.**

Il portale della Fig. 7a è un arco a tre cerniere ABC; è

$$r_2 \ni B,\ C$$

$$r_1 \ni A,\ \ r_2 \cap F\ .$$

La struttura si può suddividere in quattro tronchi rettilinei e scarichi, lungo i quali M (s) è lineare, N (s) e T (s) sono costanti. La coppia *nt* di riferimento mobile è tale che *t* è orientata verso l'alto nei due ritti, verso destra nel traverso (Fig. 7b).

Nel tronco AL le fibre tese sono a destra; è quindi da quella parte che deve essere disegnato il diagramma del momento. Esso è nullo in A, ed è quindi fornito da una retta passante per A; se la scala è definita a priori, occorre che in tale scala il segmento LG fornisce il momento in L, pari ad $1_n$ · AL; in caso contrario LG definisce la scala. Calcolando il momento attraverso le forze a monte della generica sezione S rispetto al verso di *t*, si osserva che il momento in LD è fornito dalla risultante di 1 ed F, che ha la retta d'azione $r_2$. Quindi $m_{LD}$ è una retta che passa per G, poichè il momento in L ha un valore definito, ed incontra la fondamentale LD nel punto K dove LD è tagliata da $r_2$; in K infatti il momento di 1 + F sarebbe nullo, se il tronco LD si prolungasse fino a K stesso

$$m_{LD} \ni G,\ \ K : K = LD \cap r_2\ .$$

Nel nodo D il momento è definito; esso vale $2_n \cdot DK$, e tende, nella sezione di collegamento con il ritto, le fibre di destra. Un rapido esame dell'equilibrio del nodo D, isolato dal resto della struttura, vale a convincere che sulla sezione di collegamento con il traverso agisce lo stesso momento già definito, e tende le fibre inferiori.

Graficamente ciò si traduce nel *ribaltamento* della ordinata DD′, normale a DL, nell'ordinata di pari valore DD″, normale a DB; *regola pra-*

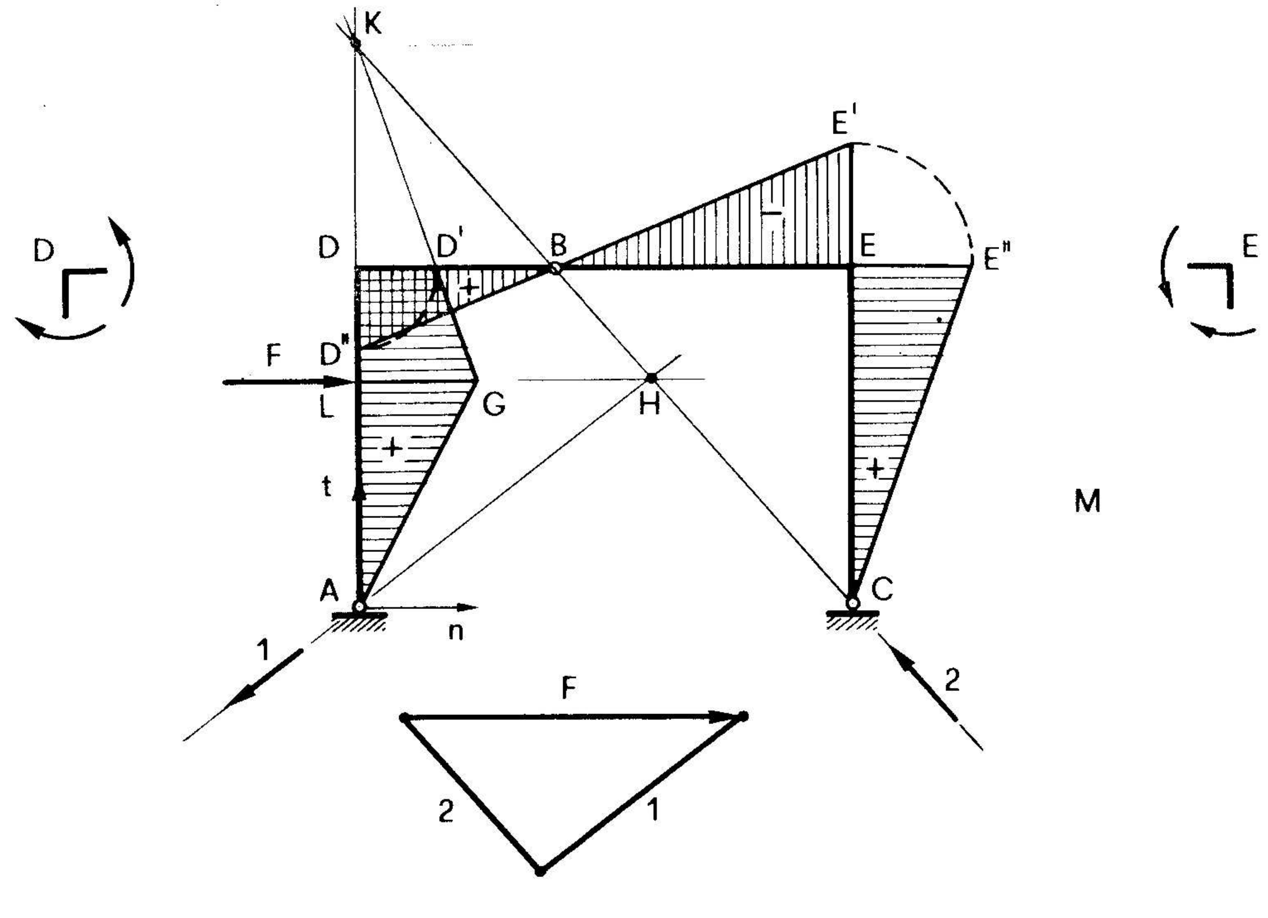



*Figura 7a*

*tica* molto utile è questa: se DB ruota rigidamente intorno a D, trascinando con se il relativo diagramma del momento, fino a che i due tratti si trovano, l'uno dopo l'altro, sullo stesso allineamento, l'ordinata DD″ deve sovrapporsi a DD′.

Nel tronco DE, per quanto detto sopra, il momento va ancora calcolato attraverso la 1 + F; quindi in D esso presenta ordinata pari a DD″, in B si annulla; ciò si evince anche, più direttamente, dal fatto che in B esiste una cerniera. In DE, pertanto, il momento è fornito dalla retta $m_{DE}$ = D″B; a sinistra di B risultano tese le fibre inferiori, a destra di B le superiori; in E, $m_{DE}$ presenta ordinata EE′. Questa si ribalta in EE″; il tratto $m_{CE}$ del diagramma è perciò definito, poichè $M_C = 0$.

E' facile riconoscere, e se ne lascia la cura al lettore, che il diagramma così ottenuto è affine a quello fornito, come nei precedenti esercizi, dal poligono funicolare per AB e C.

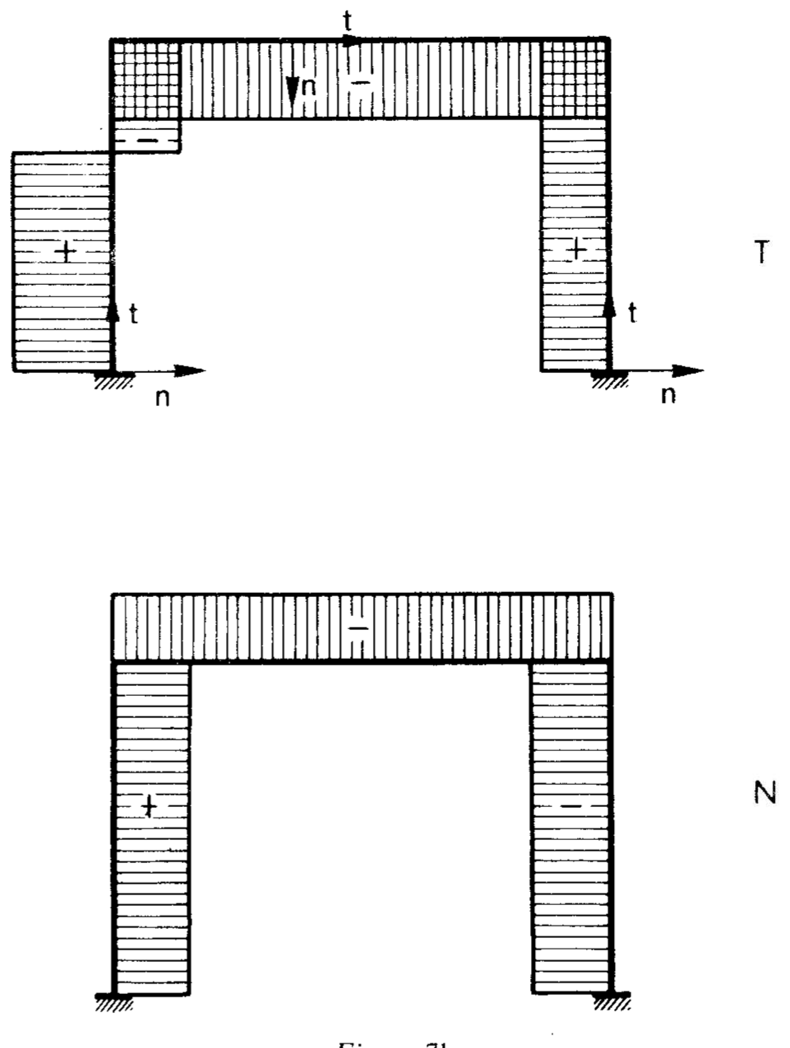



*Figura* 7b

Nella Fig. 7b sono consegnati i diagrammi di T (s) ed N (s), ottenibili, come già esposto nell'es. 1, dal poligono delle forze.

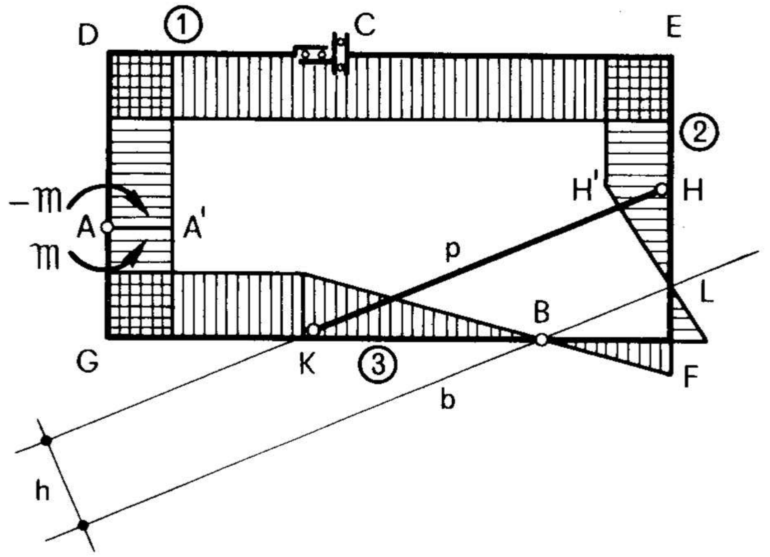
Si osservi che, qualunque sia il verso di $t$ nei singoli tronchi, il momento nel diagramma risulta *sempre riportato dalla parte delle fibre tese* (vedi premessa); quindi, se si cambia il verso di $t$ in uno o più tronchi, il diagramma M (s) resta inalterato, mentre varia il segno. Nella Fig. 7a sono riportati i segni in relazione al verso delle $t$; nel nodo D i due momenti relativi alle due sezioni collegate dal nodo risultano così dello stesso segno, mentre nel nodo E risultano di segno contrario. Intese invece come coppie, le azioni sul nodo D (o E) devono essere sempre positive se antiorarie, e tra loro uguali e contrarie. I diagrammi T (s) ed N (s) invece variano dove si cambia il verso di $t$, mentre il loro segno resta inalterato, uno sforzo normale positivo infatti corrisponde sempre ad una trazione, un taglio positivo ad un T · ds orario sul tronco elementare. Si fa osservare che *dove il diagramma del momento appare ruotato in senso orario rispetto alla fondamentale il taglio è positivo, e viceversa.*

## Problema n. 8.

La struttura è caratterizzata da t = 3, ed s = 6 (due cerniere binarie, un pendolo, un pendolo improprio); risulta

$$3t - s = l - i = 3$$

Poichè $l$ = 3, è pure i = 0; quindi la struttura è isostatica.




$$\begin{array}{l|l} (2) & p+b+c=0 \longrightarrow b \\ (1) & -\mathfrak{M}+c+a=0 \longrightarrow a=0 \end{array}$$

$$p, b = \frac{\mathfrak{M}}{h}$$

*Figura* 8

In corrispondenza della cerniera A, sulla sezione inferiore alla cerniera agisce una coppia $\mathfrak{M}$, sulla sezione superiore una coppia $-\mathfrak{M}$; così come deve essere per una struttura libera da vincoli esterni, il sistema di forze applicate è in equilibrio.

Dall'equilibrio del tratto ②, si trae

$$\mathrm{p} + \mathrm{b} + \mathrm{c} = 0\ ; \qquad (16)$$

$$\mathrm{r}_b \ni \mathrm{B},\ \mathrm{p}_\infty\ .$$

Dall'equilibrio del tratto ① si trae poi

$$\mathrm{a} + \mathrm{c} - \mathfrak{M} = 0\ ; \qquad (17)$$

poichè $c$ è una coppia, non può che essere $a = 0$ (una qualsiasi $a$ non potrebbe in alcun modo essere equilibrata da $-\mathfrak{M}$ e $c$).

Dalla (17) si trae

$$\mathrm{c} - \mathfrak{M} = 0,$$

e cioè $c$ e $-\mathfrak{M}$ si fanno equilibrio su ①, $c$ quindi è una coppia opposta a $-\mathfrak{M}$ se agente su ①, ed il suo modulo è uguale a quello di $\mathfrak{M}$. Le fibre tese in C sono quelle inferiori.

Per tracciare il diagramma dei momenti si comincia disegnando in A una ordinata AA′ di modulo pari a quello di $\mathfrak{M}$ (la scala è assegnata), dalla parte delle fibre tese. Si badi che ciò non è in contraddizione con la nota proposizione dover essere nullo il momento in corrispondenza di una cerniera; infatti l'ordinata AA′ è relativa alle due sezioni collegate dalla cerniera, non certo alla cerniera. Ciò in accordo con il fatto che dove è applicata una coppia il momento non è definito. Alcuni autori usano riportare due ordinate uguali, una immediatamente al disopra e l'altra immediatamente al disotto della cerniera, in modo da evidenziare che nella cerniera il momento è comunque nullo; essi devono però prescindere dal fatto che nello schema strutturale (ideale, è pur vero, ma assunto ad ipotesi di lavoro) la cerniera è puntiforme, e le due sezioni da essa collegate coincidono.

La struttura è *chiusa*, e cioè sezionando lungo una qualsiasi sezione retta essa non si sconnette; quindi *non* esiste, data una sezione S qualsiasi ed assegnato in essa il verso di $t$, un insieme di sollecitazioni esterne *a monte* e *a valle* di S. Occorre perciò, per il calcolo delle caratteristiche della sollecitazione interna, conoscere queste caratteristiche in una certa sezione, ed assumerle come sollecitazioni esterne, dopo avere sezionato la trave in corrispondenza di tale sezione. Nel caso in esame tale sezione può essere la A. Risulta così chiaro che in AD il momento è costante, e pari a quello in A, poichè la reazione $a$ in A è nulla. In D l'ordinata momento si ribalta, così come fatto nell'esercizio precedente; proseguendo lungo DE il momento si mantiene costante, poichè è sempre dovuto alla sola coppia $-\mathfrak{M}$. In E si effettua di nuovo un ribaltamento, e si prosegue con il momento ancora costante fino al punto H, dove interviene la reazione $p$. La risultante di $-\mathfrak{M}$, e $p$, e cioè di $c$ e $p$, ha la retta d'azione di $b$; quindi il diagramma momento in HF si ottiene congiungendo H′ con il punto L in cui $b$ incontra la retta HF. In F si ribalta di nuovo, e si prosegue fino a K sfruttando il fatto che nella cerniera B il momento è nullo. In K entra in gioco di nuovo la reazione $p$, il cui effetto quindi si annulla; il momento è ancora costante fino a G. In G si ribalta, e si prosegue con momento costante fino ad A, dove il diagramma deve chiudersi con l'ordinata dì partenza AA′.

**Problema n. 9.**

Il portale della Fig. 9 è un arco a quattro cerniere con tirante, già riconosciuto come isostatico. Sulla sezione immediatamente a destra della cerniera K agisce la coppia $\mathfrak{M}$, su quella immediatamente a sinistra la coppia $-\mathfrak{M}$. Poichè l'insieme delle forze applicate è in equilibrio, anche l'insieme delle reazioni esterne deve essere in equilibrio; quindi

$$\mathrm{r}_1 = \mathrm{r}_2 \ni \mathrm{A}, \ \mathrm{I} \ .$$

Per l'equilibrio del tratto AC è

$$\mathrm{l} + \mathrm{p} + \mathrm{c} = 0$$

da cui

$$\mathrm{r}_c \ni \mathrm{C}, \mathrm{l} \cap \mathrm{p} \ .$$

Per l'equilibrio del tratto CK è

$$\mathrm{c} + \mathrm{k} - \mathrm{M} = 0 \tag{18}$$

da cui si trae che $\mathrm{r}_k$ è parallela ad $\mathrm{r}_c$:

$$\mathrm{r}_k \ni \mathrm{K}, \mathrm{c}_\infty \ ;$$

sempre dalla (18) si trae il modulo comune di $c$ e $k$, fornito da $\frac{\mathfrak{M}}{\mathrm{d}}$, dove $d$ è la distanza fra $r_c$ ed $r_k$. Per ottenere le reazioni, si scompone $\frac{\mathfrak{M}}{\mathrm{d}}$ secondo $r_p$ ed $r_1$; la reazione $c$, agente su CK, è orientata verso sinistra, quin-

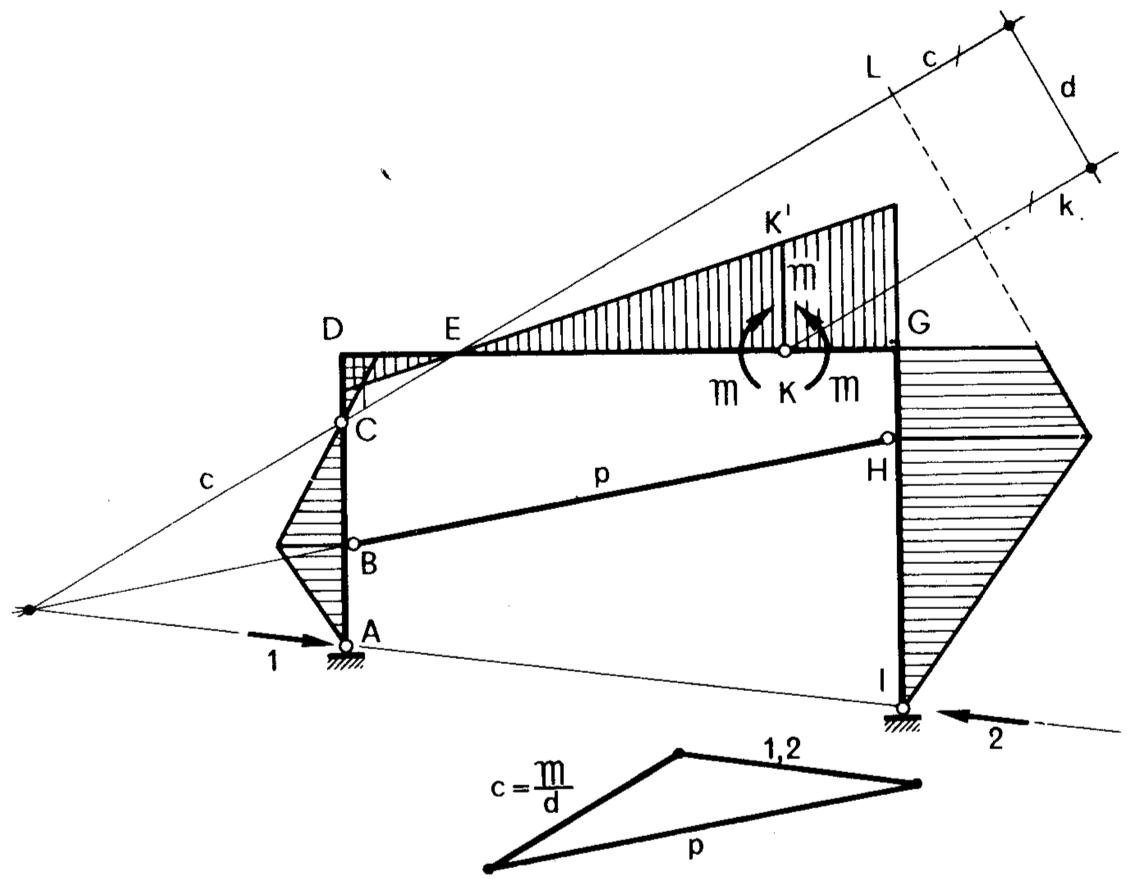



*Figura* 9

di agente su AC è orientata verso destra; se ne trae che, agente su AC, $p$ è orientata verso sinistra (puntone), mentre 1 è orientata verso destra.

Per tracciare il diagramma dei momenti però, in questo caso come in quello dell'esercizio precedente, non c'è bisogno di conoscere il valore delle reazioni; in K infatti si traccia KK', corrispondente in scala ad $\mathfrak{M}$, e dalla parte delle fibre superiori, che sono tese; calcolando il momento attraverso le forze a sinistra di ogni sezione, si riconosce che il diagramma M (s) in DG è la retta K'E, dove

$$E = r_c \cap DG .$$

In D si effettua il ribaltamento, e il diagramma prosegue lungo DB annullandosi in C, e poi lungo BA annullandosi in A; così pure si effettua il ribaltamento in G, ed il diagramma prosegue lungo GH annullandosi in L ($L = r_c \cap HG$), e poi lungo HI annullandosi in I.

## Problema n. 10.

Nella struttura della Fig. 10 è t = 3, s = 9 (tre cerniere binarie, una cerniera impropria ed un pendolo), quindi $3t - s = l - i = 0$. Poichè il tratto CD è di per sè non labile, agli effetti cinematici la struttura si riduce ad un arco a tre cerniere non allineate ABC, pur esso non labile perchè le tre cerniere non sono allineate. Quindi $l = 0$, ed $i = 0$.

La sollecitazione esterna è costituita da due forze F e − F, uguali e contrarie, agenti immediatamente a destra ed a sinistra del bipendolo B,

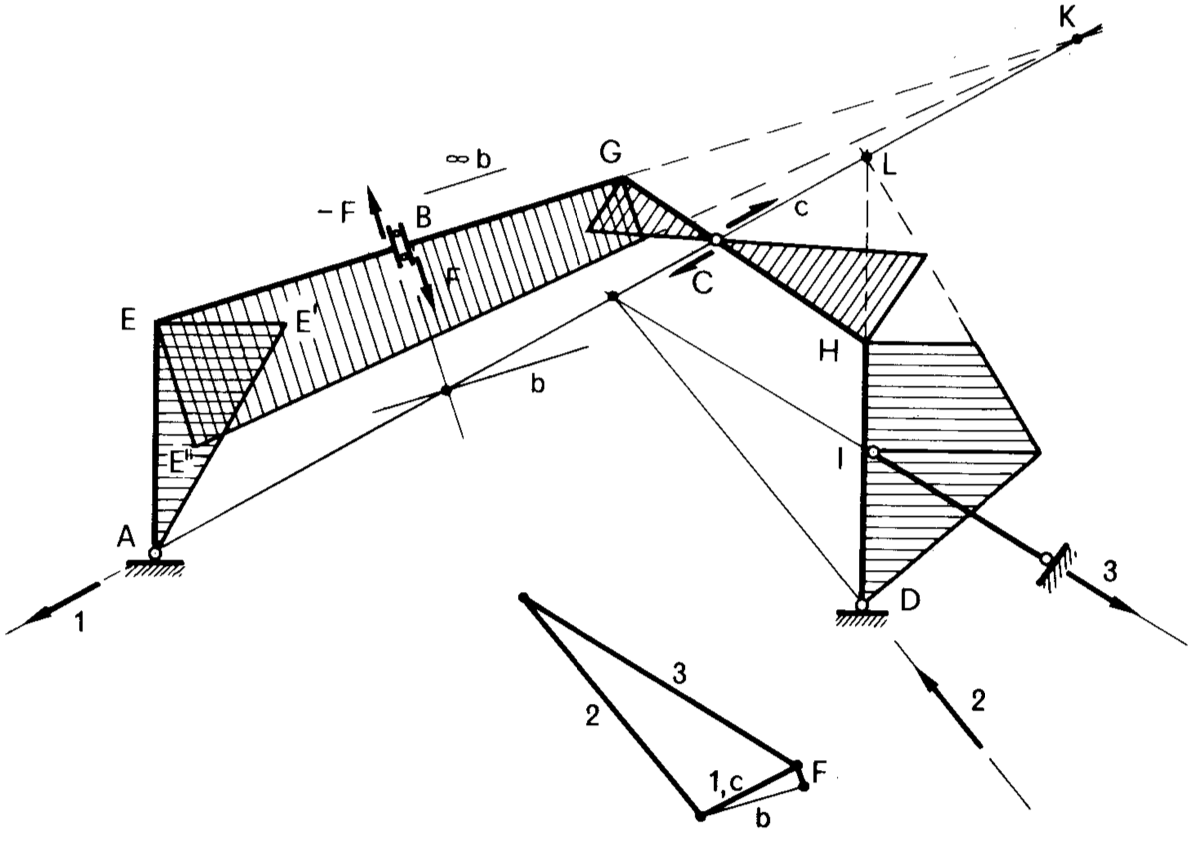



*Figura* 10

con retta d'azione ortogonale alla direzione *b* dell'asse del bipendolo, a sua volta coincidente con l'asse del tronco EG.

Per l'equilibrio della parte a sinistra di C, soggetta alle due forze in equilibrio F e − F ed alle reazioni 1 e C, si ha che

$$r_1 = r_c = AC\ .$$

Per l'equilibrio del tratto CD risulta poi

$$r_2 \ni D, 3 \cap c .$$

Per l'equilibrio del tratto AB si ha

$$1 - F + b = 0$$

e quindi

$$r_b \ni \quad F \cap 1, \ \infty \ b .$$

Si scompone F secondo $r_1$ ed $r_b$, ed 1 secondo $r_2$ e $r_3$ (1, 2 e 3 sono in equilibrio); dal triangolo di equilibrio di 1, *b* e − F risulta che 1 è diretto verso sinistra e *b*, agente su AB, verso destra.

Il diagramma M (s) può iniziare dal tronco AE; $m_{AE}$ si annulla in A, e presenta in E una ordinata EE′ (fibre tese a destra), pari, in scala, al momento $1_n \cdot AE$. In E si effettua il ribaltamento di E′ in E″; nel tratto EG il momento è dovuto alla sola forza 1, quindi $m_{EG}$ si annulla in $K = EG \cap r_1$. In G si ribalta di nuovo; ancora il momento è dovuto alla forza 1, e quindi $m_{GH}$ si annulla in $C = GH \cap r_1$, d'altronde, in C è ubicata una cerniera, e quindi in essa il momento deve essere nullo. In H si ribalta ancora; nel tronco HI il momento si calcola ancora attraverso la $r_1$, e quindi $m_{HI}$ si annulla in $L = HI \cap r_1$. Nel tronco HD il tracciamento di $m_{HD}$ è immediato, poichè esso si annulla in D.

**Problema n. 11.**

Nel portale della Fig. 11a si desidera la linea d'influenza

$$v_S^{\mu}$$

dello spostamento (secondo y) della sezione S per effetto di una distorsione del tipo $\mu$ viaggiante; tale linea è fornita (es. 2-10) dal diagramma del momento provocato da una forza F = − 1 agente in S nella direzione di y:

$$v_S^{\mu} = M(s) \uparrow F_S^{\nu} = -1 .$$

L'equilibrio alla rotazione di AB intorno a B fornisce il valore della $R_{Ay}$: .

$$R_{Ay} \cdot 26\,a - 1 \cdot 13\,a = 0$$

da cui

$$R_{Ay} = \frac{1}{2}$$

$$M_S = -\frac{13}{2}\,a.$$

Disegnata in SS′ l'ordinata $\frac{13}{2}a$, il diagramma si completa in modo

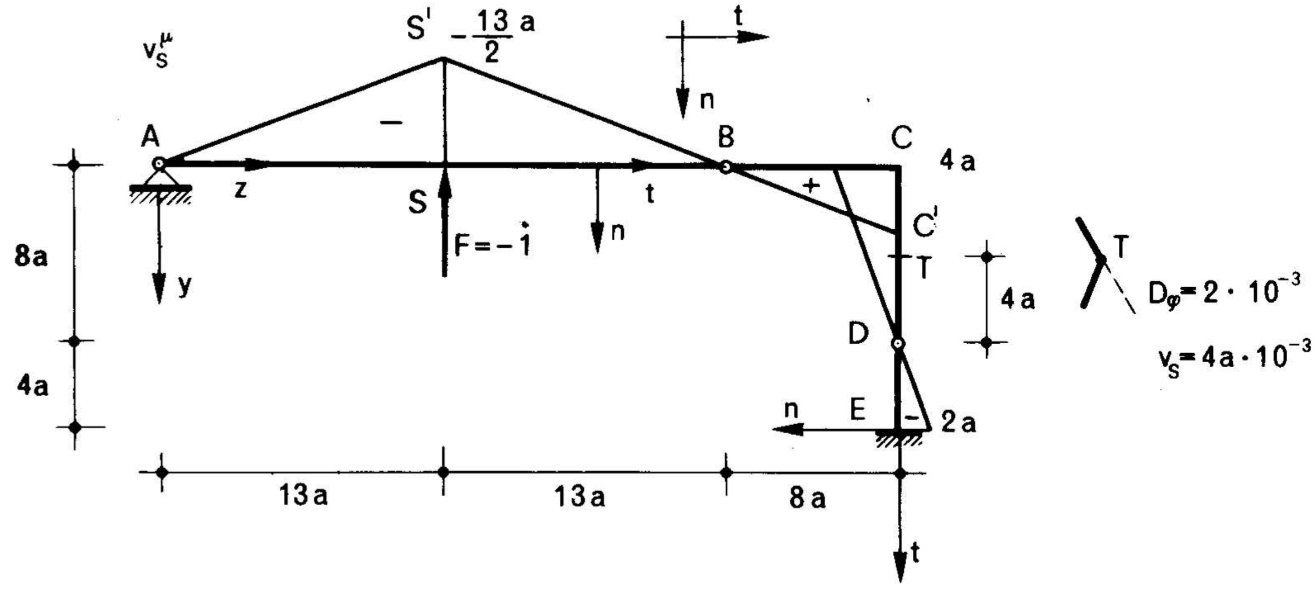



*Figura* 11a

ovvio; in C è

$$M_C = M_S \frac{8a}{13\,a} = 4\,a\;;$$

in E è

$$M_E = M_C \frac{4\,a}{8\,a} = 2\,a\;.$$

Il segno di M (s), e quello di $\mu$ (s), sono definiti in rapporto ad una coppia di riferimento mobile *nt* in cui *t* è sempre orientata nel verso di percorrenza del portale da A ad E; quindi in AB e DE risulta $v_S^{\mu} < 0$, in BC e CD è $v_S^{\mu} > 0$; così pure, una distorsione $\mu$ interessante un certo tronco è positiva se in AC allunga le fibre superiori del tronco stesso, in CE le fibre di destra.

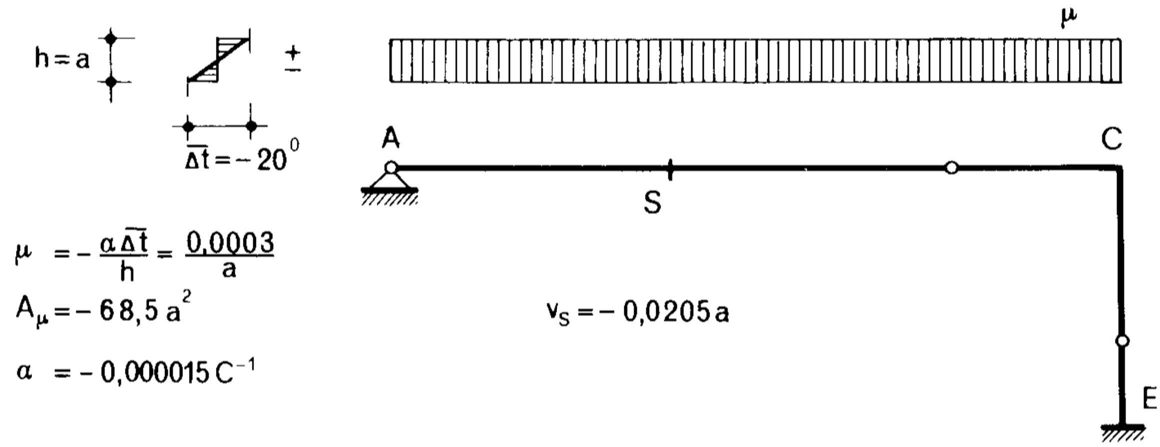



*Figura* 11 b.

In T agisca una distorsione concentrata $D_\varphi$ pari a $2 \cdot 10^{-3}$ radianti; essa è positiva, quindi nel tronco elementare, in cui può sempre supporsi che essa agisca, risultano allungate le fibre di destra; ciò vale a dire (Fig. 11a) che la faccia inferiore in T ruota in senso orario rispetto alla superiore.

La suddetta distorsione in T provoca in S uno spostamento dato da

$$v_S = D_\varphi \cdot v_S^{\mu}\ (T) = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 2a = 4a \cdot 10^{-3} \ ,$$

positivo e perciò verso il basso.

Se invece su tutto il traverso agisce (Fig. 11b) una variazione termica alla Navier $\overline{\Delta t} = -20°C$ (variazione $\overline{\Delta t}$ positiva significa che essa produce deformazione dello stesso segno di quelle provocate da un momento positivo; perciò, nel caso in esame, $\overline{\Delta t}$ allunga le fibre superiori), e l'altezza del traverso è h = a, si ha(*)

$$\mu = -\frac{\alpha \overline{\Delta t}}{h} = \frac{0{,}000015 \cdot 20}{a} = \frac{0{,}0003}{a} \ .$$

(*) Per il conglomerato, o per l'acciaio, può supporsi $\alpha = 0{,}000015\ C^{-1}$.

E' perciò

$$v_S = \int_A^C v_S^\mu(z) \cdot \mu(z)\, dz = \frac{0{,}0003}{a} \int_A^C v_S^\mu(z)\, dz = \frac{0{,}0003}{a} A_\mu ,$$

dove $A_\mu$ è l'area del diagramma $v_S^\mu$ sottostante al diagramma di $\mu$; si ha perciò

$$A_\mu = -\frac{13}{2} a \cdot 13 a + \frac{1}{2} \cdot 4 a \cdot 8 a = -68{,}5\, a^2$$

$$v_S = -0{,}0205\, a ;$$

$v_S$ è negativo, e perciò è verso l'alto.

**Problema n. 12.**

Il portale a tre cerniere della Fig. 12 è soggetto ad una coppia $\mathfrak{M}$ nel nodo B. Si ha

$$r_2 \ni C, E$$

$$r_1 \ni A, r_{2\infty} ;$$

il modulo di 1 e 2 è fornito da $\frac{\mathfrak{M}}{d}$, dove *d* è la distanza tra $r_1$ ed $r_2$, ed il verso è tale da generare una coppia di verso contrario ad $\mathfrak{M}$. Nel tronco AB le fibre tese sono a destra; $m_{AB}$ si annulla in A, e l'ordinata BB' è, in scala, pari ad $1_n \cdot$ AB.

Nel tronco DE il diagramma $m_{DE}$ è simmetrico di $m_{AB}$, e infatti si annulla in E, e le due inclinazioni sono uguali e contrarie perchè tali sono i tagli; quindi DD'' = – BB'. Si osservi, a tale riguardo, che il segno della inclinazione del diagramma del momento è, come il taglio, indipendente dall'orientamento della coppia *nt*; se, per esempio, si cambia tale orientamento in DE, orientando *t* verso il basso, il momento in ED (pur restando disegnato com'è, perchè le fibre tese sono quelle di sinistra) diviene positivo, ma il taglio, e con esso l'inclinazione resta negativo.

In D si ribalta D″ in D′; la retta D′C è il diagramma $m_{BD}$ su tutto il traverso. Deve verificarsi, per l'equilibrio del nodo B,

$$BB' + BB'' = \mathfrak{M}$$

$T_{AB} = -1_n > 0$

$T_{ED} = -2_n < 0$

$T_{AB} = -T_{ED}$

$\widehat{B'AB} = -\widehat{D''ED}$

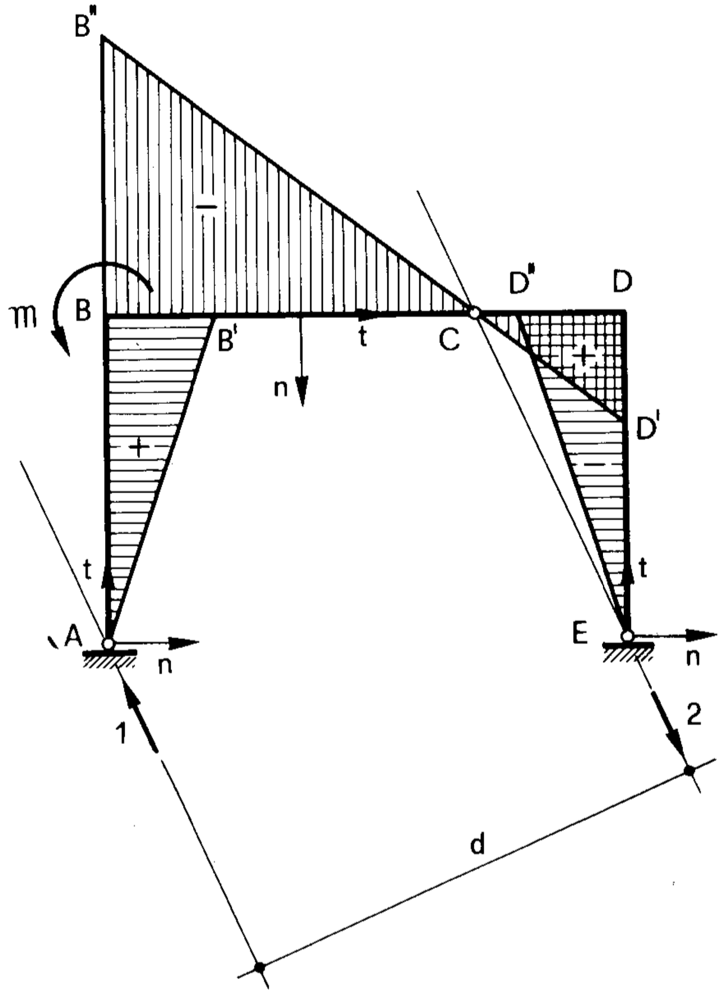



*Figura* 12

**Problema n. 13.**

Nella struttura della Fig. 13 è t = 3, s = 9, 3t − s = 0; si è in presenza di un arco a quattro cerniere con tirante, struttura già nota al lettore.

La ricerca delle reazioni (es. 3-11) si esegue considerando che il tratto EH non è soggetto a forze esterne, e quindi si comporta come un pendolo; per l'equilibrio del tratto HM è

$$r_2 \ni M, p \cap e ,$$

e per l'equilibrio globale è

$$r_1 \ni A, r_2 \cap F \ .$$

Nel tronco AB le fibre tese stanno a destra, quindi $m_{AB}$ è noto; l'ordinata BB′ è pari, in scala, ad $1_n \cdot AB$.

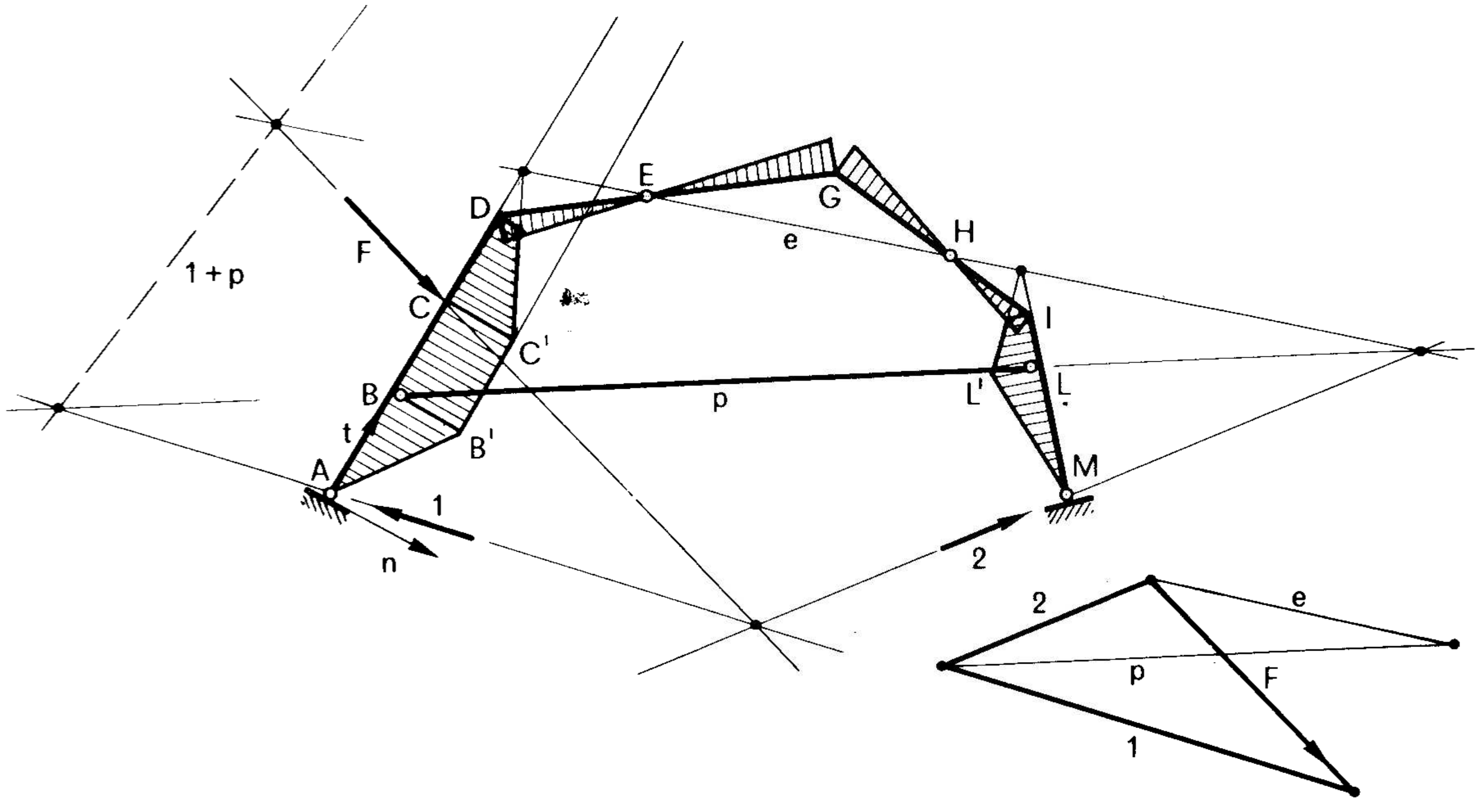



*Figura* 13

Operando attraverso le forze a monte della generica sezione S, nel tronco BC occorre tener conto di 1 e di *p*; per l'equilibrio del tratto AE risulta

$$1 + p + F + e = 0$$

da cui

$$r_{1+p} \ni 1 \cap p, F \cap e \ .$$

Il diagramma $m_{BC}$ è perciò (tra B e C) la retta

$$m_{BC} \ni B', r_{1+p} \cap BC \ .$$