

Problema n. 21.

1) *Computo dei vincoli.*

$$t = 7$$

$s = 21$ (otto cerniere binarie, due bipendoli, un pendolo)

$$3t - s = 0.$$

I tratti (3) e (4) costituiscono un arco a tre cerniere non allineate, quindi un insieme rigido. I tratti (1) e (2), considerando (2) impostato su (3) + (4), è pur esso un arco a tre cerniere non allineate. Eliminato il pendolo g , i tratti (5) e (7) presenterebbero rotazioni relative intorno al punto

$$H = DE \cap L, \infty f;$$

il pendolo g , poichè il suo asse non contiene H , impedisce tali rotazioni. Quindi $l = 0$, e la struttura è isostatica.

2) *Ricerca delle reazioni.*

Nel tratto (6) si ha

$$e + f = 0,$$

quindi e (e così f) passa per E ed è parallelo all'asse del bipendolo f . Nel tratto (5) è

$$d + e = 0,$$

e poichè e non passa per D , l'unico modo per soddisfare tale relazione è

$$d = 0$$

$$e = 0$$

e quindi anche

$$f = 0.$$

Nel tratto (7) è

$$4 + g + f = 0$$

e, per essere $f = 0$, è pure

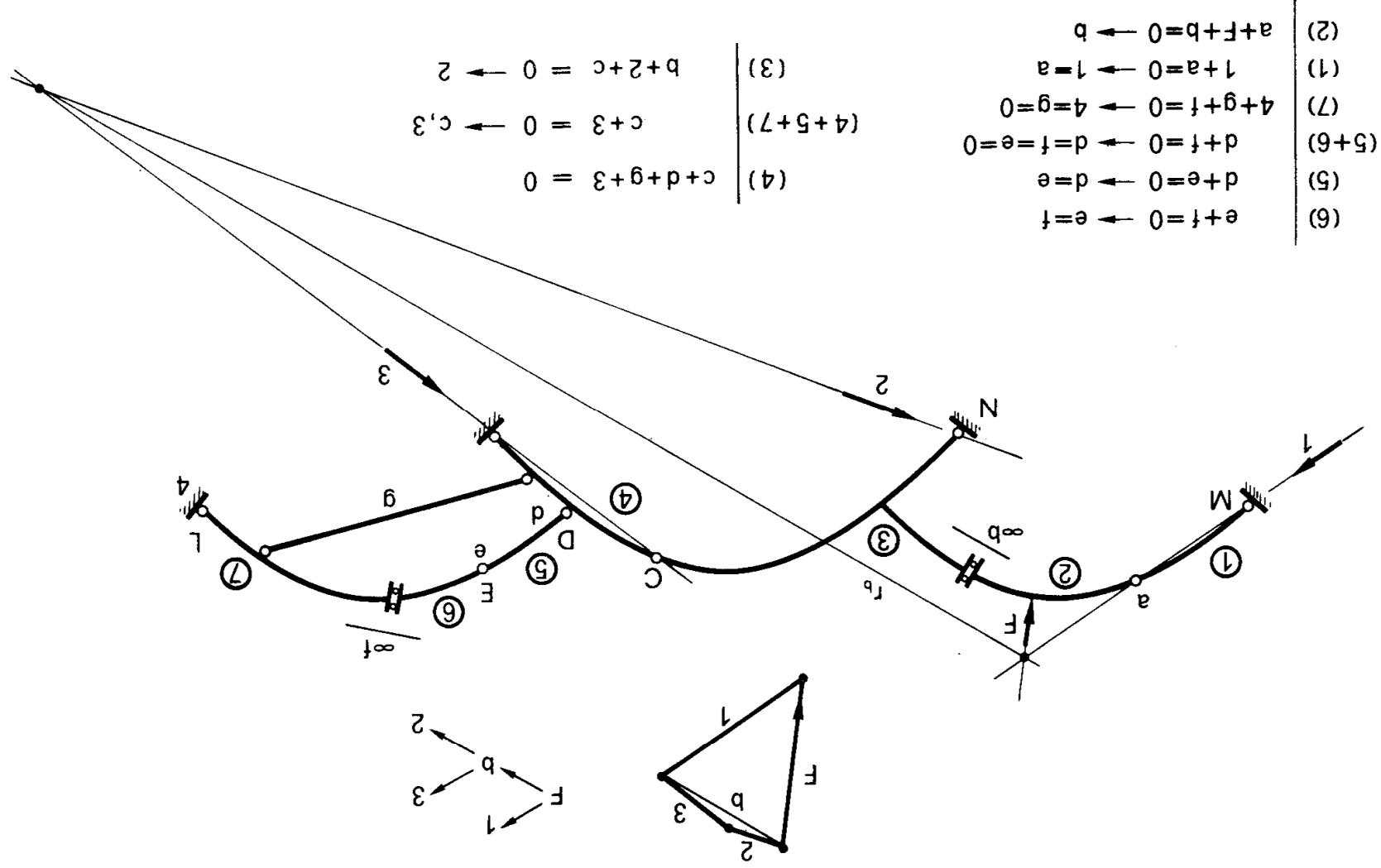


Figura 21

$$4 + g = 0.$$

Ma 4 deve passare per L, L non appartiene a g, quindi deve essere pure

$$4 = 0$$

$$g = 0 ;$$

tutta la parte (5) + (6) + (7) è perciò priva di sollecitazioni interne.

Nel tratto (1) è

$$1 + a = 0 ,$$

quindi r_1 ed r_a coincidono con la congiungente i due estremi del tratto.

Nel tratto (2) si ha

$$a + F + b = 0 ,$$

quindi

$$r_b \ni a \cap F, \infty b .$$

Nel tratto (4) è

$$c + d + g + 3 = 0$$

e cioè, per quanto già detto circa la nullità di d e g ,

$$c + 3 = 0 ;$$

quindi r_c ed r_3 coincidono con la congiungente gli estremi del tratto.

Nel tratto (3) si ha infine

$$b + 2 + c = 0 ,$$

e quindi

$$r_2 \ni B , b \cap c .$$

Si scompone F secondo r_a ed r_b , e b secondo r_3 ed r_2 .

Problema n. 22.1) *Computo dei vincoli.*

$$t = 4$$

$s = 12$ (tre cerniere binarie, due bipendoli, due pendoli)

$$3t - s = 0 .$$

Si osservi che il pendolo a impegna la struttura soltanto ai due estremi; le due intersezioni centrali sono soltanto grafiche.

L'isostaticità della struttura deve essere controllata attraverso lo studio dei centri, al solito modo.

2) *Ricerca delle reazioni.*

Nel tratto (2) si ha

$$b + c = 0 \quad (24)$$

quindi c (e così b), passa per C , ed è parallelo all'asse del bipendolo b .

Nel tratto (1) è

$$l' + a + b = 0 . \quad (25)$$

quindi

$$r_1 \ni H, a \cap b,$$

Nel tratto (3) può scriversi

$$c + 2 + d = 0 ; \quad (26)$$

quindi

$$r_d \ni 2 \cap c, \infty d .$$

Dalle tre notazioni (24), (25) e (26) si trae

$$1 + 2 + a + d = 0; \quad (27)$$

essa esprime l'equilibrio di tutta la parte a sinistra della sezione SS .

Dalla (27), poichè sono note tutte le quattro rette d'azione, si ha

$$r_{1+2} = r_{a+d} \ni a \cap d, 1 \cap 2 .$$

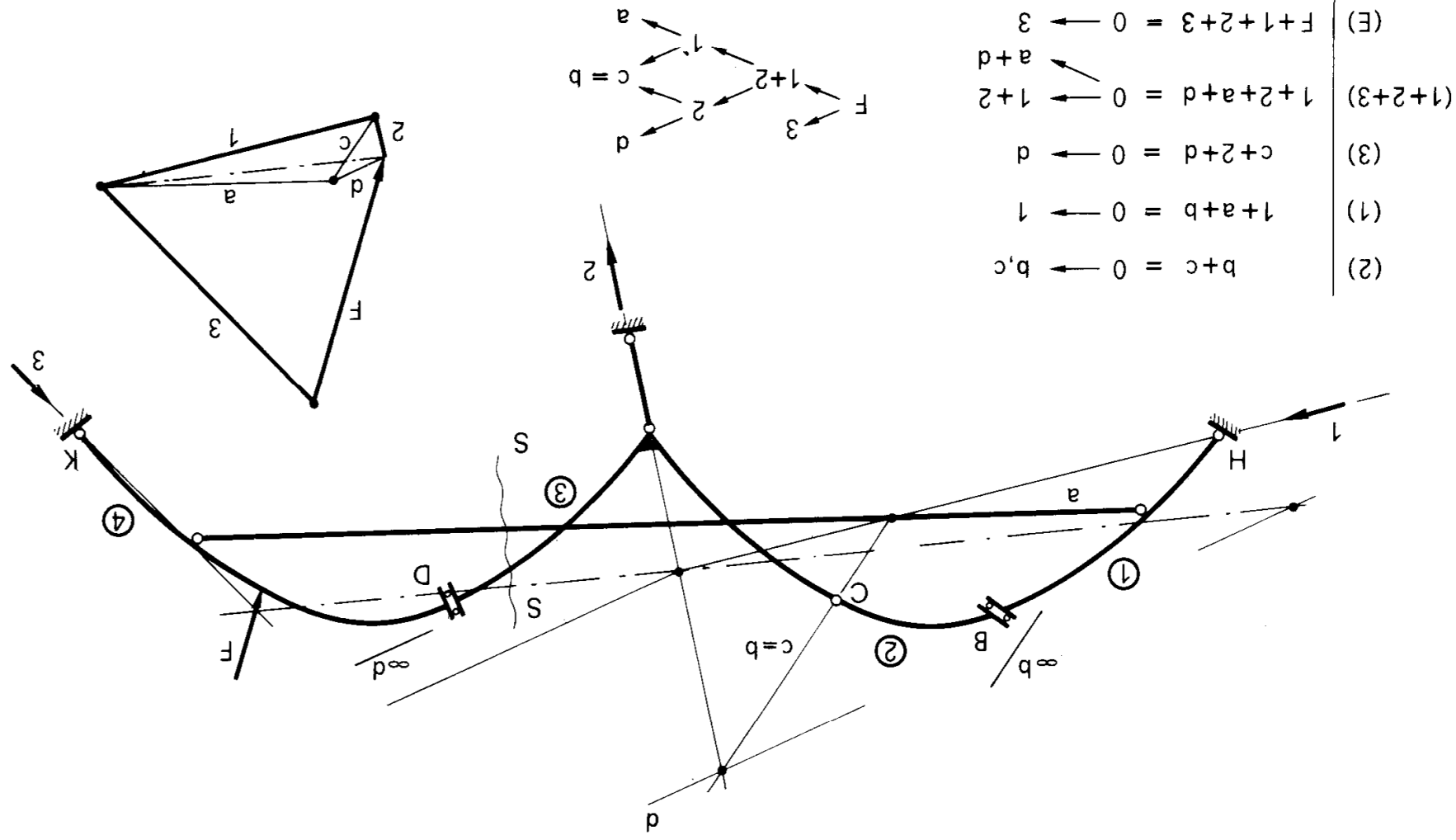


Figura 22

L'equilibrio globale importa

$$F + 1 + 2 + 3 = 0 ; \quad (28)$$

quindi

$$r_3 \ni K, F \cap r_{1+2} .$$

La F si scompone secondo r_3 ed r_{1+2} ; 1 + 2 secondo r_1 ed r_2 ; 1 secondo r_a ed $r_b = r_c$; 2 secondo r_c ed r_d . La reazione a agisce su (1) verso sinistra, e così pure b ; quindi a è un puntone, e le fibre superiori in B sono tese. La reazione c agisce su (2) verso sinistra. La reazione d agisce su (4) verso destra, quindi le fibre inferiori in D sono tese.

Si ha (ed è una verifica) che $b = c$, sia che provenga dalla scomposizione di 1, che da quella di 2.

Problema n. 23.

1) *Computo dei vincoli.*

$$t = 3$$

$s = 9$ (una cerniera binaria, due bipendoli, un pendolo, e due appoggi)
 $3t - s = 0$.

La parte (1) + (2) è rigida, poichè la direzione dell'asse del bipendolo b non coincide con quella del pendolo a ; essa poi non presenta movimenti, poichè r_2 non contiene H . La parte (3) quindi è impostata in C su una parte fissa, e non presenta movimenti, poichè r_3 non ha la stessa direzione dell'asse del bipendolo c . Quindi $l = 0$, e la struttura è isostatica.

2) *Ricerca delle reazioni.*

Per il tratto (3) si ha

$$c + F + 3 = 0 ,$$

quindi

$$r_c \ni \infty \quad c, 3 \cap F.$$

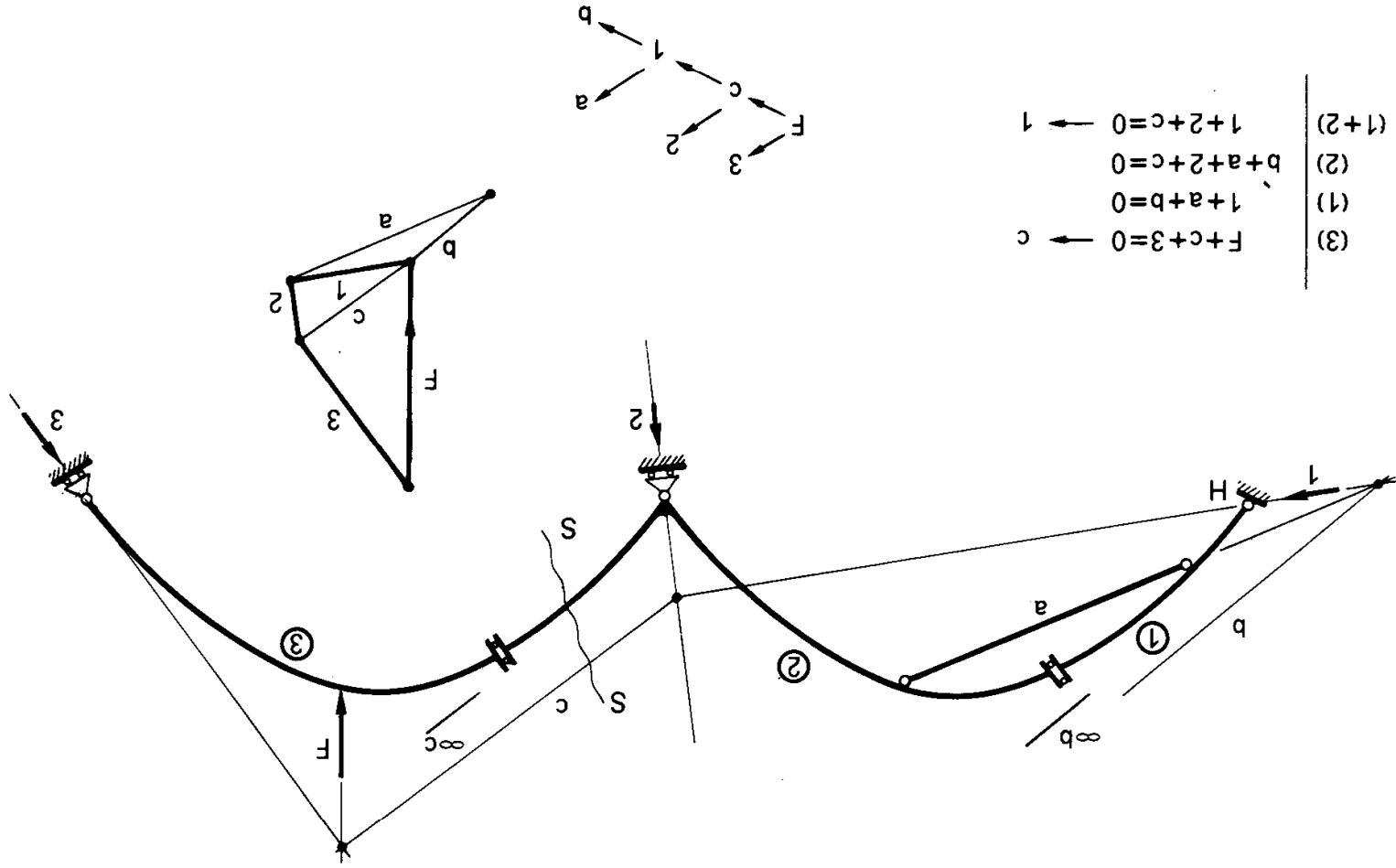


Figura 23

Per il tratto (1) è

$$1 + a + b = 0, \quad (29)$$

e per il tratto (2)

$$b + a + 2 + c = 0. \quad (30)$$

Dalle (29) e (30) si trae

$$1 + 2 + c = 0; \quad (31)$$

la (31) è la notazione di equilibrio della parte a sinistra della sezione SS, e da essa si trae

$$r_1 \ni H, 2 \cap c$$

Si scompone perciò la F secondo r_c ed r_3 , c secondo r_1 ed r_2 , 1 secondo r_b ed r_a . La a agente su (1) è diretta verso sinistra, la b verso destra; quindi a è un puntoné, e le fibre superiori in corrispondenza del bipendolo b sono tese. La reazione c , agente sul tratto (3), è diretta verso destra, quindi le fibre inferiori in corrispondenza del bipendolo in C sono tese.

Problema n. 24.

1) *Computo dei vincoli.*

$$t = 6$$

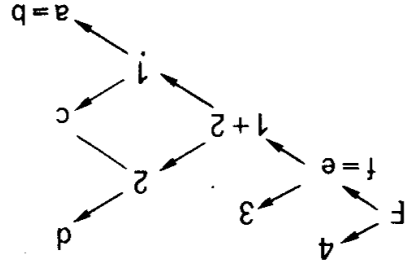
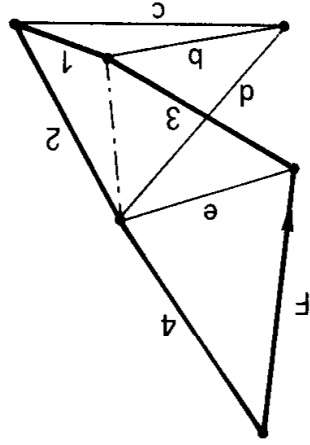
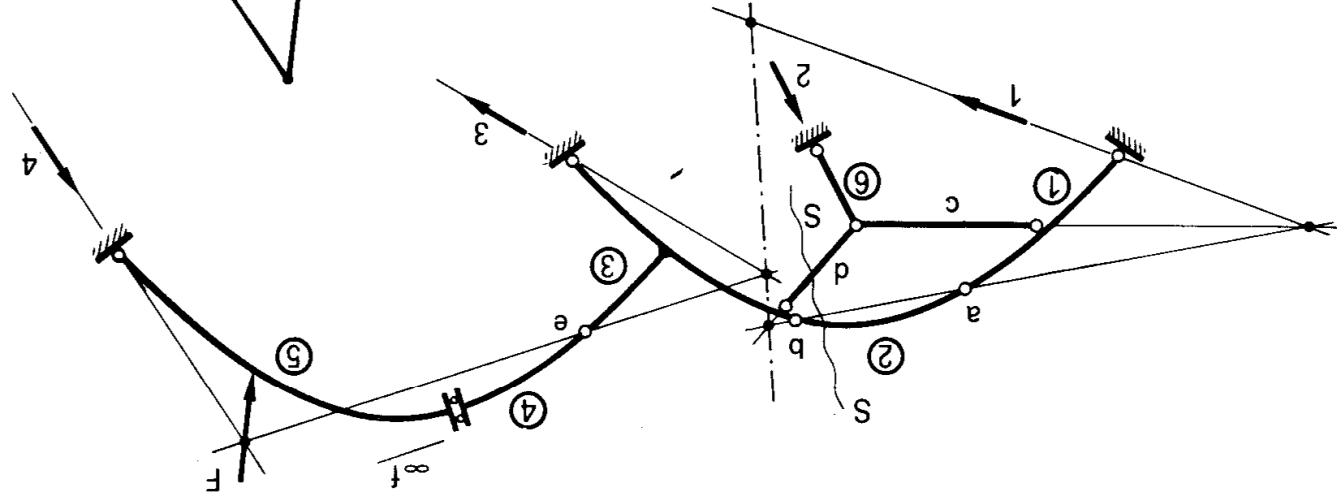
$$s = 18 \text{ (7 cerniere binarie, un bipendolo, due pendoli)}$$

$$3t - s = 0.$$

La ricerca della isostaticità deve essere eseguita attraverso il noto studio sui centri.

2) *Ricerca delle reazioni.*

La ricerca delle reazioni è condotta come nei precedenti esercizi; si



- | | | |
|---------|-------------|-----------------------|
| (2) | $a+b=0$ | $\rightarrow a, b$ |
| (4) | $e+f=0$ | $\rightarrow e, f$ |
| (5) | $F+f+4=0$ | $\rightarrow 4$ |
| (1) | $1+c+a=0$ | $\rightarrow 1$ |
| (6) | $2+c+d=0$ | $\rightarrow 2+c+d=0$ |
| (1+2+6) | $1+2+b+d=0$ | $\rightarrow 1+2$ |
| (3) | $b+d+e+3$ | $\rightarrow 3$ |

Figura 24

lascia al lettore la cura di interpretare le notazioni, il reticolo ed il poligono delle forze della Fig. 24. Si richiama solo l'attenzione sul fatto che la notazione somma $1 + 2 + 6$ esprime l'equilibrio della parte a sinistra della sezione SS.

Problema n. 25.

1) *Computo dei vincoli.*

$$t = 5$$

$$s = 15 \text{ (6 cerniere binarie, un appoggio, due pendoli)}$$

$$3t - s = 0.$$

La struttura è isostatica perchè si riduce ad una trave Gerber con i due appoggi intermedi che scaricano su un arco a tre cerniere non allinea-

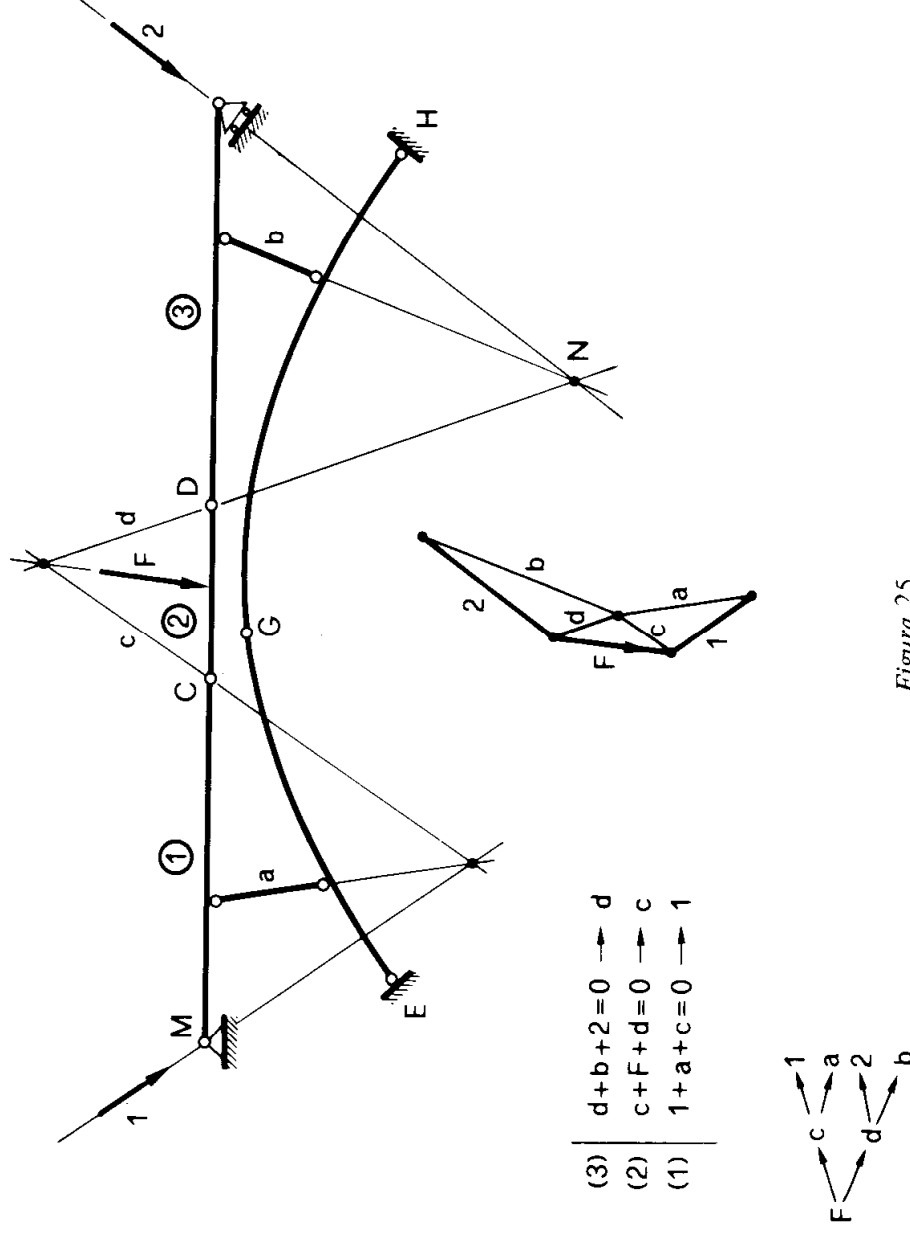


Figura 25

te; si osserva subito infatti che il tratto ① è fisso, poichè l'asse del pendolo a non contiene M; d'altro canto, i tratti ② e ③ costituiscono a loro volta un arco a tre cerniere C D N non allineate.

2) Ricerca delle reazioni.

Anche in questo caso l'interpretazione della Fig. 25 è chiara per il lettore. Manca nella Fig. 25, perchè reputata ovvia, la costruzione delle reazioni in E G H.

Problema n. 26.

1) *Computo dei vincoli.*

$$t = 4$$

$$s = 12 \text{ (quattro cerniere binarie, due appoggi, due pendoli)}$$

$$3t - s = 0.$$

La struttura è isostatica per motivi analoghi a quelli dell'es. 25.

2) *Ricerca delle reazioni.*

Dalla notazione del tratto (2)

$$c + b + 3 = 0 \quad (32)$$

si trae

$$r_c \ni C, 3 \cap b.$$

Dalla notazione del tratto (4)

$$d + b + 4 = 0 \quad (33)$$

si trae

$$r_d \ni D, 4 \cap b.$$

Dalla notazione del tratto (3)

$$2 + a + d = 0$$

si trae

$$r_2 \ni H, a \cap d.$$

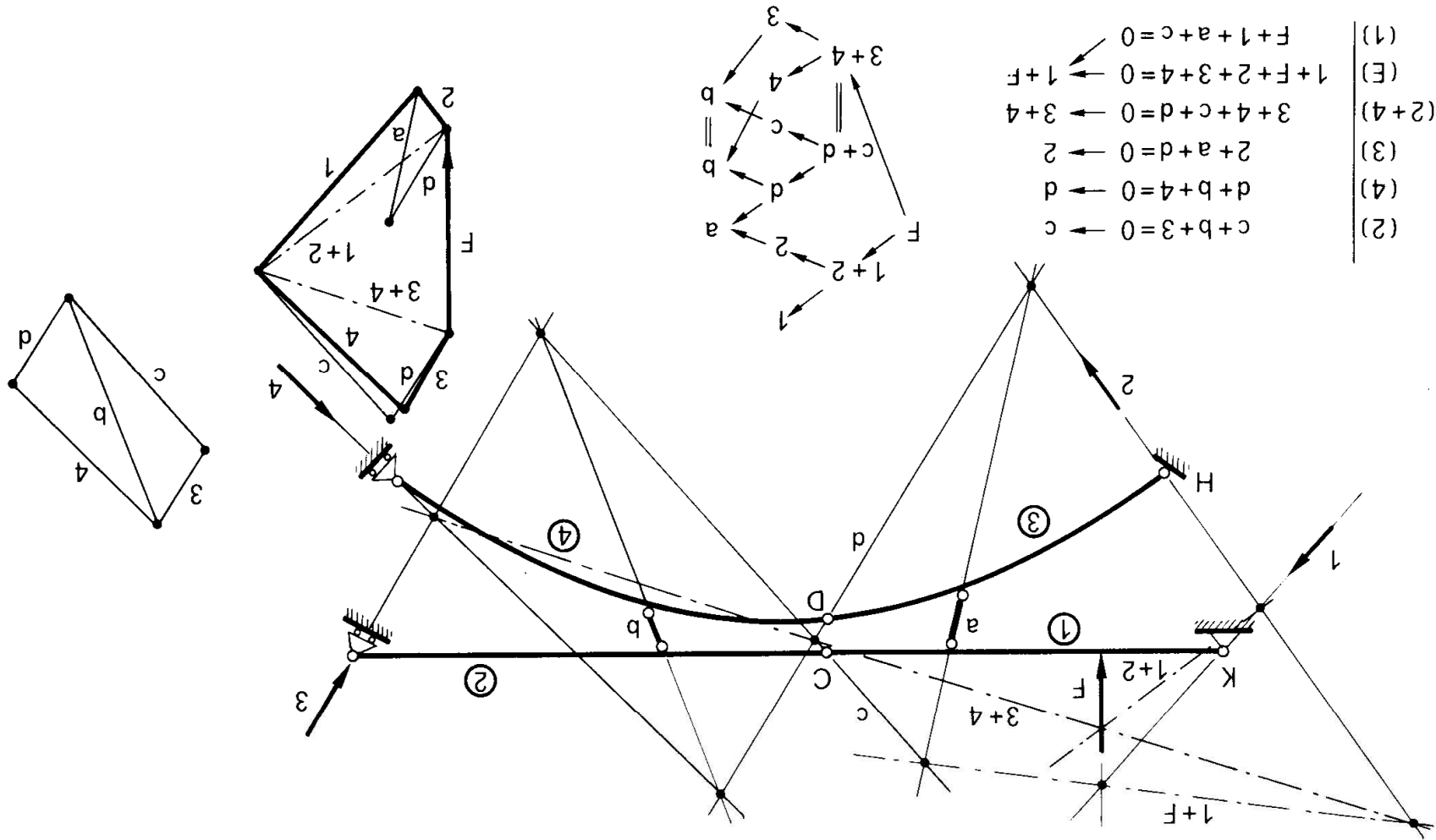


Figura 26

Dalle (32) e (33) si ricava

$$c + d + 3 + 4 = 0 ,$$

relativa all'equilibrio della parte a destra della sezione passante per C e D, da cui

$$r_{3+4} = r_{c+d} \ni 3 \cap 4, c \cap d .$$

Dalla notazione del tratto (1)

$$1 + F + a + c = 0$$

e da quella di equilibrio totale

$$1 + F + 2 + 3 + 4 = 0$$

si trae

$$r_{1+F} \ni a \cap c, (3 + 4) \cap 2$$

e quindi

$$r_1 \ni K, F \cap (1 + F) .$$

Si scompone F secondo r_{1+2} ed r_{3+4} , $1 + 2$ secondo r_1 ed r_2 , $3 + 4$ secondo r_3 ed r_4 ; $3 + 4$ è anche pari a $c + d$, e quindi si scompone secondo r_c ed r_d .

Componendo 2 e d si ottiene a ; b si trae invece componendo d e 4, oppure c e 3. Agenti su (3), a è diretta verso l'alto, d verso il basso; quindi a è un tirante, mentre in D le fibre superiori sono tese.

Agenti su (2), b è diretta verso l'alto, e c verso il basso; quindi b è un puntone, ed in C le fibre superiori sono tese.

Problema n. 27.

1) *Computo dei vincoli.*

$$t = 4$$

$s = 12$ (quattro cerniere binarie, quattro pendoli)

$$3t - s = 0.$$

L'isostaticità della struttura deve essere riconosciuta attraverso il noto procedimento dei centri.

2) Ricerca delle reazioni.

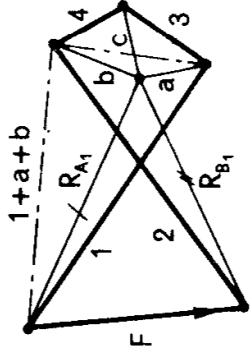
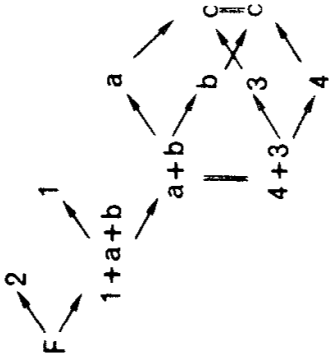
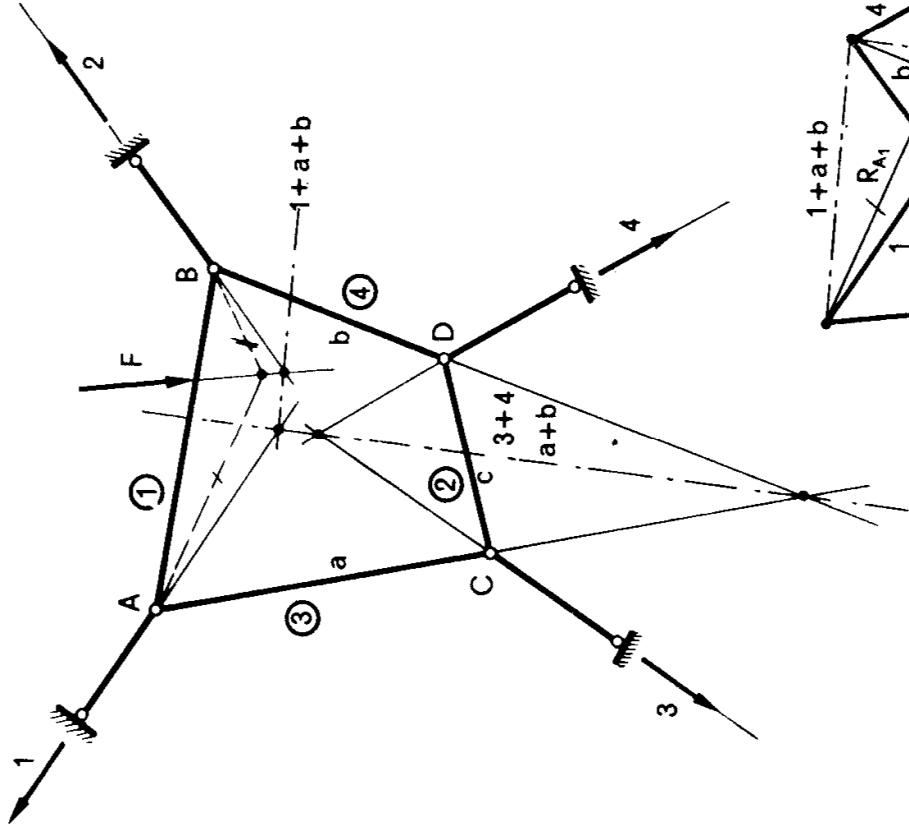


Figura 27

Per l'equilibrio del tratto ② è

$$3 + 4 + a + b = 0$$

da cui

$$r_{3+4} = r_{a+b} \quad \ni 3 \cap 4, a \cap b.$$

Per l'equilibrio del tratto (1) è

$$1 + 2 + a + b + F = 0.$$

Poichè r_{a+b} è nota, si può scomporre F secondo r_{a+b} , r_1 ed r_2 ; si ha

$$r_{1+a+b} \ni (a + b) \cap 1, F \cap 2,$$

e quindi F si scompone secondo r_2 ed r_{1+a+b} , poi $1 + a + b$ secondo r_1 ed r_{a+b} . Si ottiene così la 1, e la $a + b = 3 + 4$; quest'ultima si scompone secondo r_3 ed r_4 , e secondo r_a ed r_b ; la risultante di 1 ed a fornisce la reazione su (1) in A, la risultante di 2 e b fornisce la reazione su (1) in B. La reazione c può ottenersi componendo 3 ed a , oppure 4 e b .

Sul nodo C la c agisce verso destra e la a verso l'alto (vedi triangolo di equilibrio 3 a c) quindi a e c sono tiranti, sul nodo D, c agisce verso sinistra, e b verso l'alto, quindi b è un tirante.

Problema n. 28.

1) *Computo dei vincoli.*

$$t = 2$$

$$s = 6 \text{ (due cerniere binarie, un appoggio ed un pendolo)}$$

$$3t - s = 0.$$

La struttura è isostatica, poichè eliminato il pendolo a i due tratti possono ruotare l'uno rispetto all'altro intorno alla cerniera B, ed il pendolo impedisce tale movimento.

2) *Ricerca delle reazioni.*

La struttura è isostatica per vincoli esterni; la reazione $2 \cdot 3$ in C è parallela alla forza $0 \cdot 1 = F$, quindi anche la reazione $1 \cdot 2$ in A ha tale direzione. Si scompone perciò la $0 \cdot 1 = F$ secondo le due rette ad essa parallele e passanti per A e C.

La notazione di equilibrio del tratto ① è

$$R_A + a + b = 0,$$

e quindi

$$r_b \subset B, a \cap r_{1,2}$$

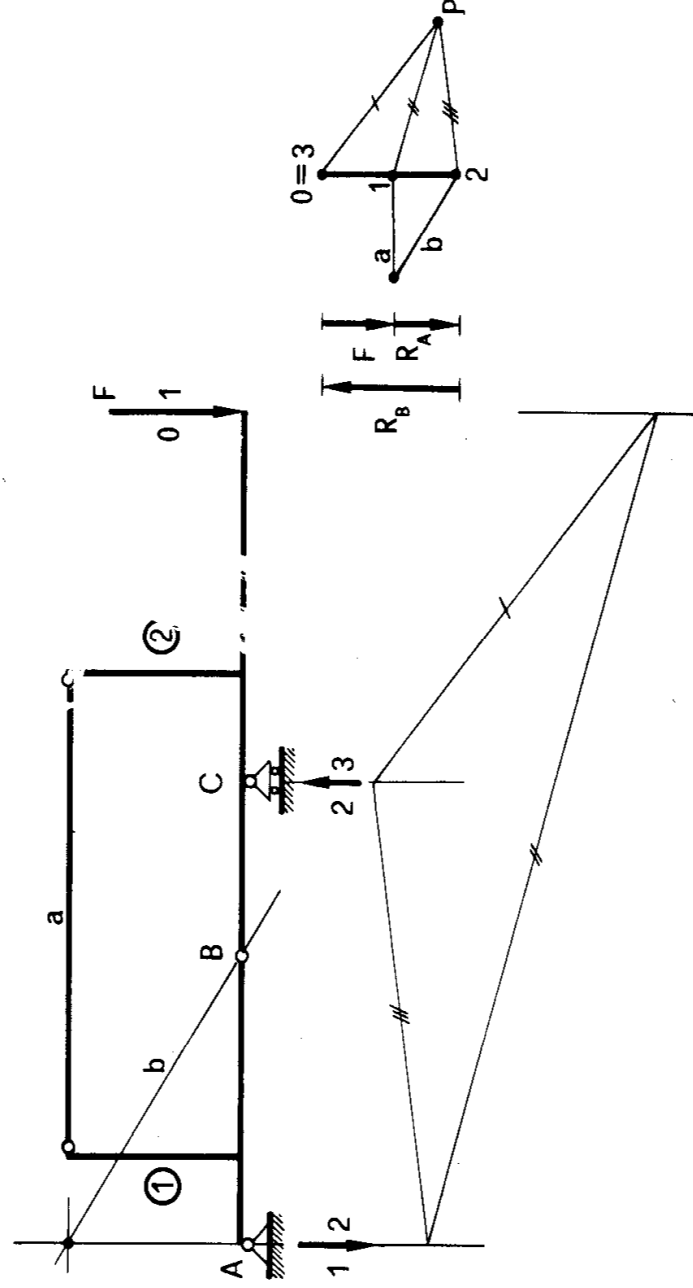


Figura 28

Agenti sul tratto ①, a è diretta verso destra e b verso sinistra, quindi a è un tirante, ed in B le fibre inferiori sono tese.

Problema n. 29.

1) *Computo dei vincoli.*

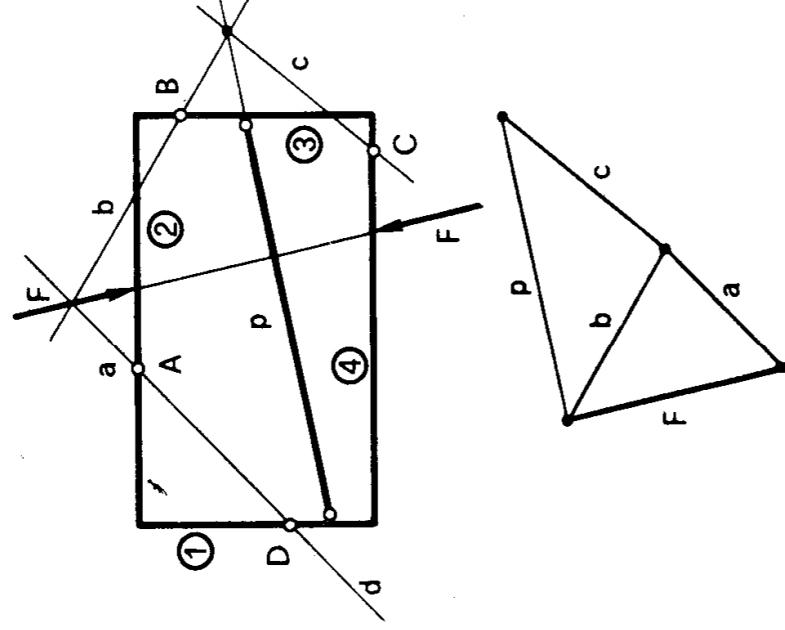
$$t = 4$$

$$s = 9 \text{ (quattro cerniere binarie ed un pendolo)}$$

$$3t - s = 3.$$

E' perciò $l - i = 3$. La struttura è d'altro canto rigida nei riguardi degli spostamenti relativi tra i suoi quattro tratti: ciò può constatarsi in-

interpretandola come costituita dai tratti (3) e (4) collegati dalla cerniera in C e dal pendolo p il cui asse non contiene C, e dall'arco a tre cerniere



(1)	$a + d = 0 \rightarrow a = d$
(2)	$a + F + b = 0 \rightarrow b$
(3)	$b + p + c = 0 \rightarrow c$

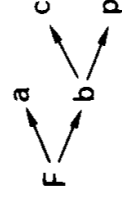


Figura 29

non allineate $A''A'B$ (arco (1) + (2)) impostato in A'' e B su (3) + (4). Quindi, poichè la struttura non ha vincoli esterni, è $l = 3$, e perciò è pure $i = 0$.

2) Ricerca delle reazioni.

La struttura può essere caricata solo con un sistema di forze in equilibrio; tale è l'insieme delle due forze F e $-F$ uguali e contrarie (Fig. 29).

Per l'equilibrio del tratto (1) è

$$a + d = 0$$

da cui si ottiene

$$r_a = r_d \ni A, D.$$

Per l'equilibrio del tratto (2) è

$$a + F + b = 0$$

da cui

$$r_b \ni B, a \cap F.$$

Per l'equilibrio del tratto (3) è

$$b + p + c = 0$$

da cui

$$r_c \ni C, b \cap p.$$

Si scompone perciò F secondo r_a ed r_h , e b secondo r_h ed r_a . Dal triangolo a F b risulta che, agenti sul tratto (2), a è diretto verso destra e b verso sinistra. Dal triangolo b p c risulta che, agenti sul tratto (3), c è diretto verso destra e p verso sinistra, quindi p è un tirante.

Problema n. 30.

1) *Computo dei vincoli.*

$$t = 3$$

$$s = 6 \text{ (tre cerniere binarie)}$$

$$3t - s = 3.$$

Analogamente a quanto fatto nell'esercizio precedente, si mostra che $l = 3$, $i = 0$.

2) *Ricerca delle reazioni.*

L'insieme di forze applicate deve essere in equilibrio; tali sono le tre forze F_1 F_2 F_3 , poichè concorrono in un punto ed il loro triangolo è chiuso.

Per l'equilibrio del tratto (2) è

$$b + c = 0$$

da cui

$$r_b = r_c \ni B, C.$$

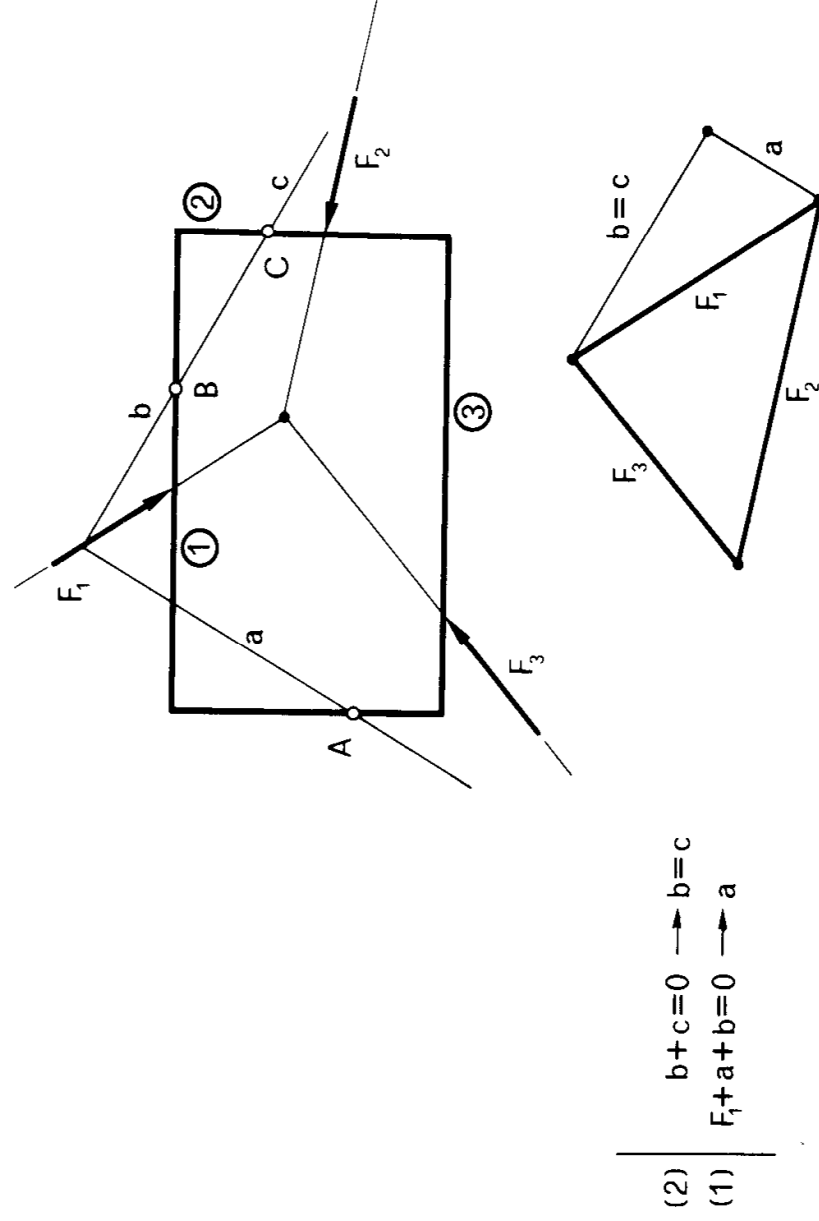


Figura 30

Per l'equilibrio del tratto (1) è

$$a + F_1 + b = 0$$

da cui

$$r_a \ni A, F_1 \cap b.$$

La forza F_1 si scompone secondo r_a ed r_b .

Problema n. 31.

1) *Computo dei vincoli.*

Identico a quello dell'esercizio precedente.

L'isostaticità della struttura si può riconoscere attraverso il procedimento dei centri.

2) Ricerca delle reazioni.

Per l'equilibrio del tratto (1) è (Fig. 32)

$$1 + 2 + a = 0 \quad (34)$$

da cui

$$r_a \ni A, 1 \cap 2 .$$

Per l'equilibrio del tratto (2) è

$$a + b + c = 0 \quad (35)$$

da cui

$$r_c \ni C, a \cap b .$$

Per l'equilibrio del tratto (3) è

$$c + d + 3 + 4 = 0 \quad (36)$$

da cui

$$r_{b+d} \ni (3 + 4) \cap a, b \cap d .$$

Dalle (35) e (36) si trae

$$3 + 4 + b + a + d = 0$$

da cui

$$r_{b+d} \ni (3 + 4) \cap a, b \cap d .$$

Per l'equilibrio del tratto (4) è

$$b + d + F + 5 = 0$$

da cui

$$r_5 \quad (b + d) \cap F, \infty 5 .$$

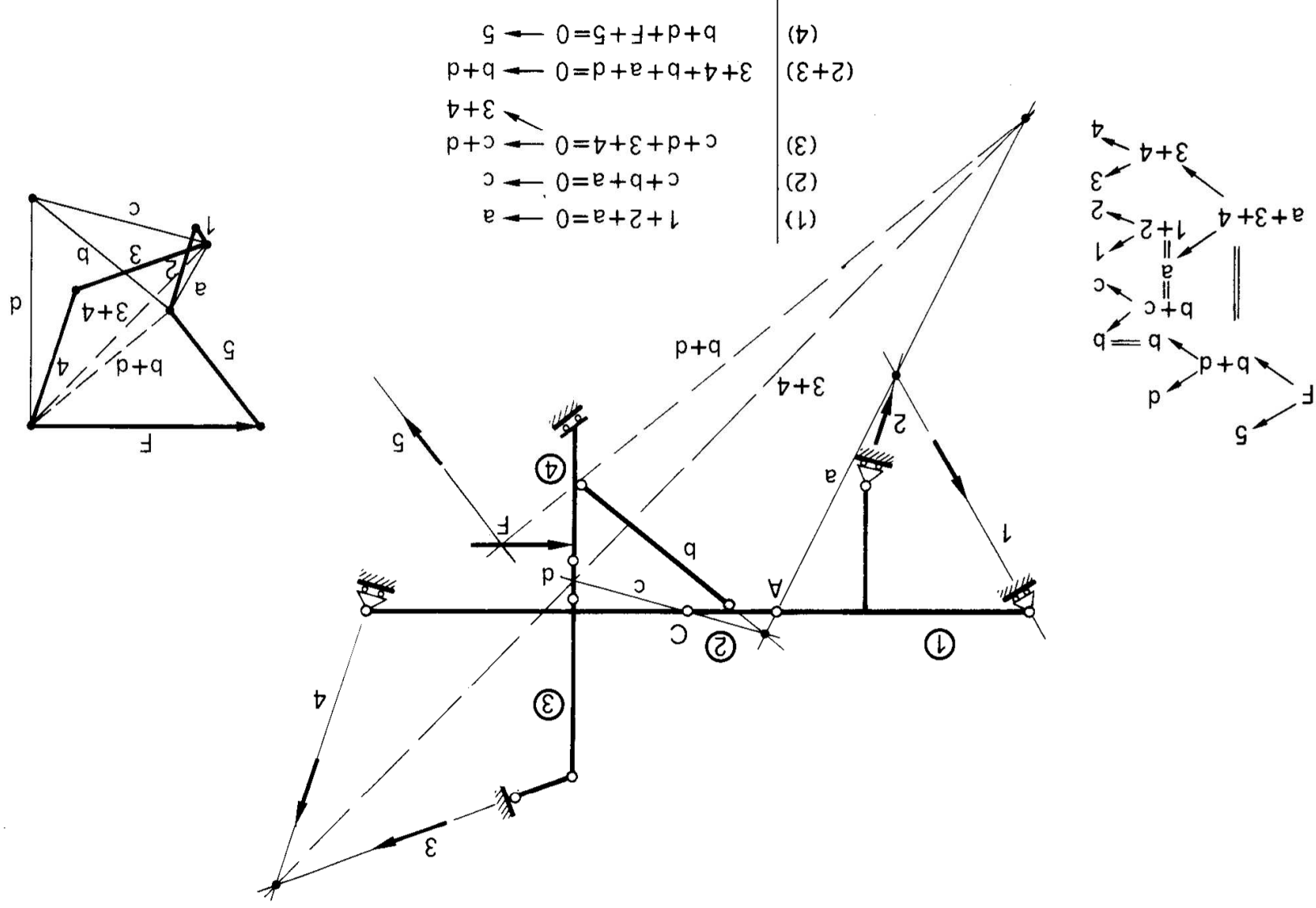


Figura 32

Si scompone F secondo r_3 ed r_{b+d} , $b + d$ secondo r_a ed r_{3+4} , $3 + 4$ secondo r_3 ed r_4 , poi ancora $b + d$ secondo r_b ed r_d , a secondo r_1 e r_2 , e ancora a secondo r_b ed r_c .

I versi delle reazioni esterne si hanno percorrendo il poligono delle forze F 5 2 1 3 4 nel verso di F . Si ha poi che a , agente su $\textcircled{1}$, è diretta verso l'alto; b e c , agenti su $\textcircled{2}$, sono diretta rispettivamente verso sinistra e verso destra (b è quindi un puntone); d , agente su $\textcircled{3}$, è diretta verso il basso (d è quindi un tirante).

Problema n. 33.

La struttura è la stessa dell'esercizio precedente, ma è caricata su $\textcircled{3}$ invece che su $\textcircled{4}$ (Fig. 33). Le (34) e (35) continuano a valere, sono note perciò r_a ed r_c . Per l'equilibrio del tratto $\textcircled{4}$ si ha poi

$$5 + b + d = 0 \quad (37)$$

da cui

$$r_5 \ni b \cap d, \infty 5.$$

Dalle (35) e (37) si trae

$$5 + a + c + d = 0$$

da cui

$$r_{a+5} = r_{c+d} \ni a \cap 5, c \cap d.$$

Per l'equilibrio del tratto $\textcircled{3}$ si ha

$$F + c + d + 3 + 4 = 0$$

da cui

$$r_{c+d+4} = r_{F+3} \ni 3 \cap F, (c + d) \cap 4.$$

Si scompone F secondo r_3 ed r_{c+d+4} , $c + d + 4$ secondo r_4 ed r_{c+d} ,

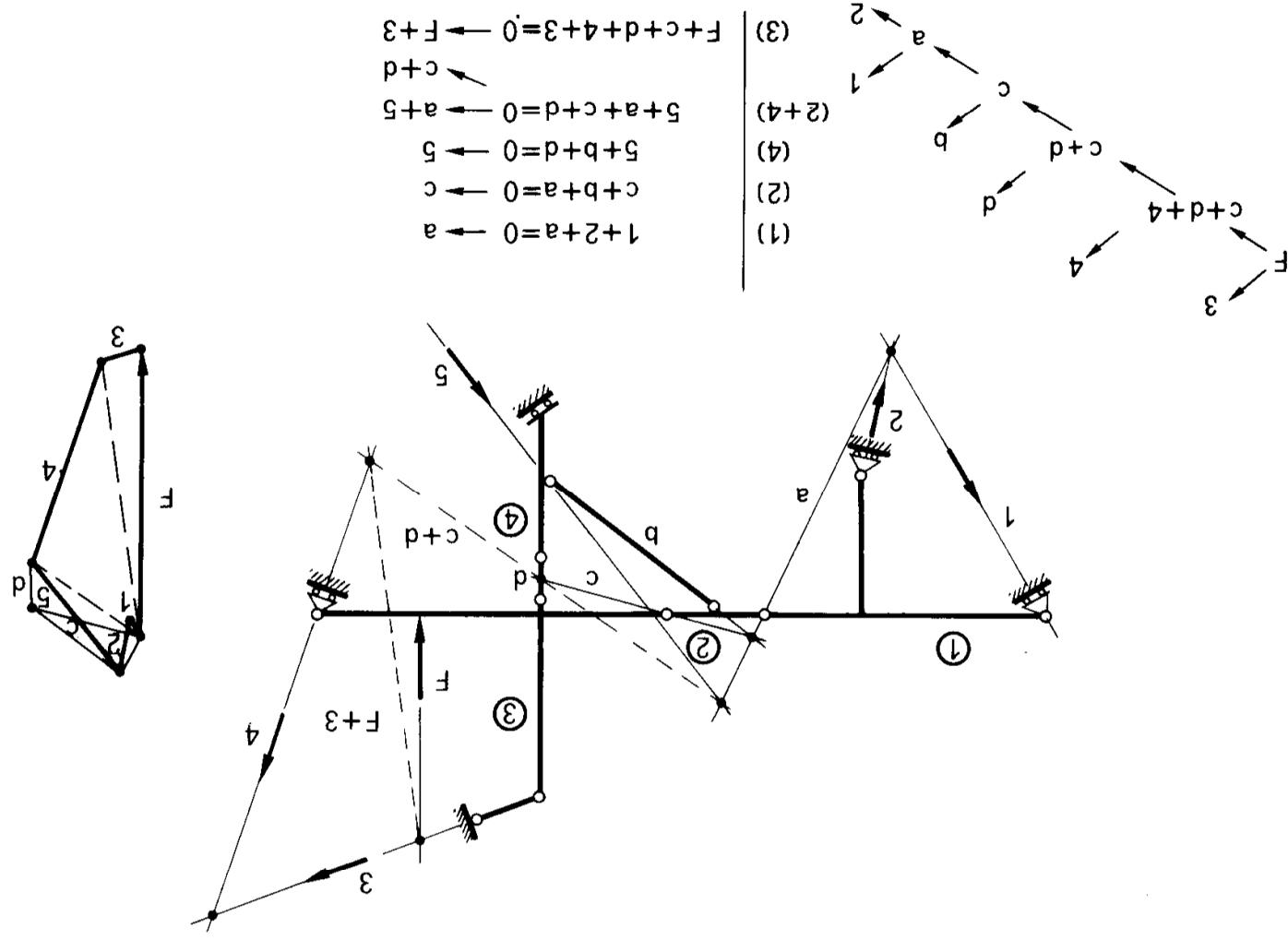


Figura 33

pure sostituendo le forze agenti su (2) con due qualsiasi equivalenti agenti in A e C. Tale metodo (es. 12), concettualmente più spontaneo, non può nel caso in esame essere applicato quando F agisce su (1), perchè non è risolto il problema per F agente su (2); nè quando F agisce su (2), chè non è risolto il problema per F agente su (1).

Si solidifica perciò la cerniera in C, e si sopprime il pendolo *b* (Fig. 34a).

Per l'equilibrio del tratto (4) si ha

$$5 + d = 0$$

da cui si trae

$$d = 0$$

$$5 = 0;$$

infatti 5 e *d* non possono essere uguali e contrarie, e quindi non resta che la soluzione nulla.

Per l'equilibrio del tratto rigido (2) + (3) è

$$a + 3 + 4 = 0$$

da cui

$$r_a \ni A, \quad 3 \cap 4.$$

Per l'equilibrio del tratto (1) è

$$F + 1 + 2 + a = 0$$

da cui

$$r_{1+2} = r_{F+a} \ni 1 \cap 2, \quad F \cap a.$$

Si scompone quindi F secondo r_{1+2} ed r_a , *a* secondo r_3 ed r_4 , $1 + 2$ secondo r_1 ed r_2 .

Si fanno poi agire (Fig. 34b) due forze X uguali e contrarie, positive (e cioè concorrenti), sui due punti collegati dal soppresso pendolo *b*.

Per l'equilibrio del tratto (1) è

$$1 + 2 + a = 0$$

da cui

$$r_a \ni A, \quad 1 \cap 2.$$

Per l'equilibrio del tratto (4) è

$$d + X + 5 = 0 \quad (38)$$

da cui

$$r_s \ni d \cap X, \infty 5.$$

(1)	$1+2+a$	$=0 \rightarrow a$
(4)	$d+X+5$	$=0 \rightarrow 5$
(2+3)	$a+X+d+3+4=0$	
(2+3+4)	$5+a+3+4$	$=0 \rightarrow 3+4$

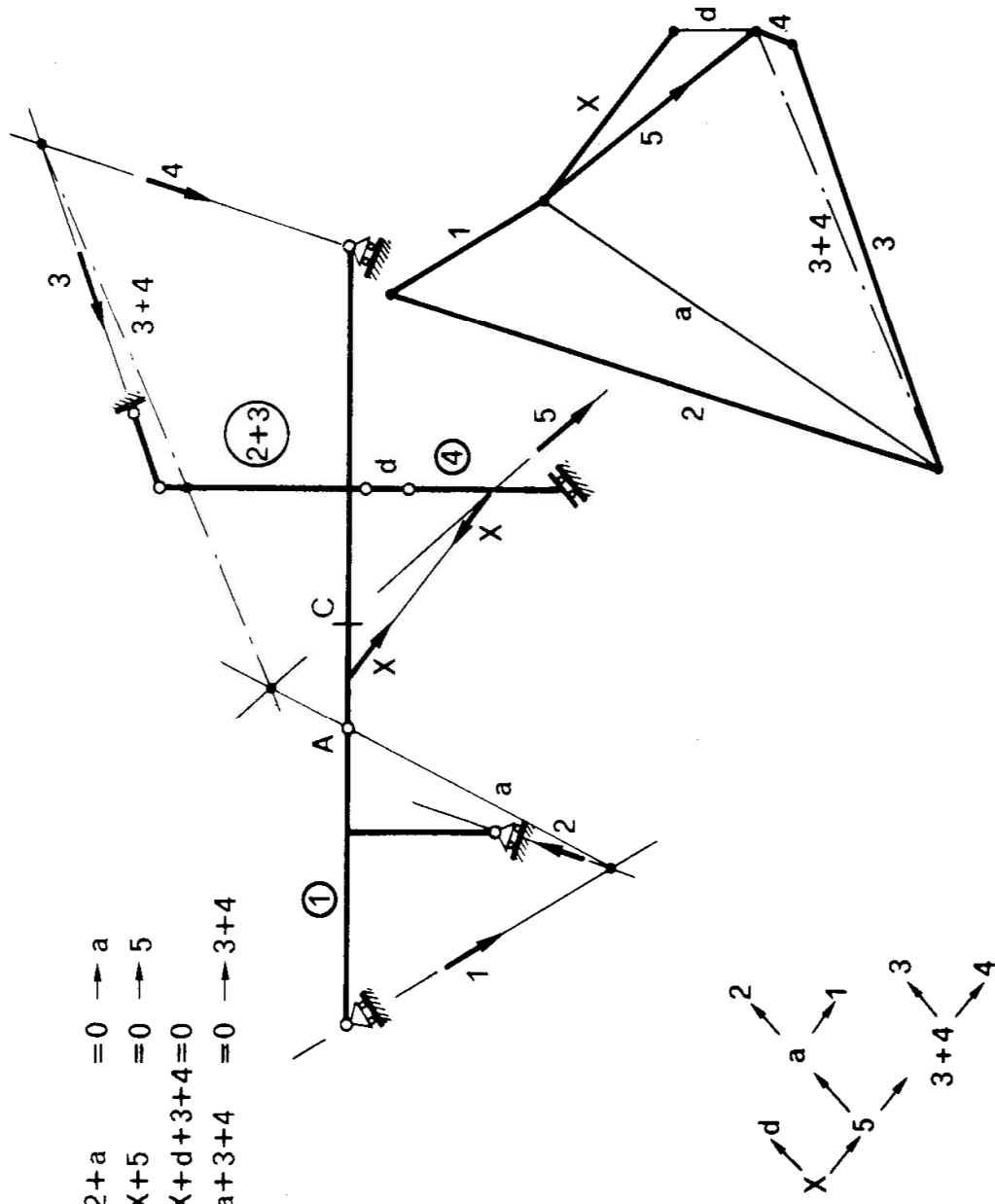


Figura 34b

Per l'equilibrio del tratto (2) + (3) è

$$a + X + d + 3 + 4 = 0 ; \quad (39)$$

dalle (38) e (39) si ottiene

$$5 + a + 3 + 4 = 0 . \quad (40)$$

Dalla (40) si trae

$$r_{3+4} = r_{s+a} \ni 3 \cap 4, \quad 5 \cap a .$$

Si scompone quindi X secondo r_3 ed r_d , 5 secondo r_a ed r_{3+4} , $3 + 4$ secondo r_3 ed r_4 , a secondo r_1 ed r_2 .

Il verso della reazione 5 si ottiene percorrendo il triangolo $X5d$ nel verso della X agente su $\textcircled{4}$; il verso delle altre reazioni esterne si ha percorrendo il poligono chiuso 5 4 3 2 1 nel verso di 5.

Conosciute le reazioni, si calcola il momento in C

$$M'_C = h X .$$

Se M_C è il momento in C dovuto alla F (Fig. 34a) dalla relazione

$$M_C + M'_C = 0$$

si trae

$$X = - \frac{M_C}{h} .$$

Si è così risolto il problema della struttura sotto qualsiasi condizione di carico; è infatti sufficiente, per ottenere le reazioni, sostituire per ogni tratto rigido le forze su esso agenti con la risultante, studiare i quattro casi semplici (forza singola su ciascun tratto rigido), e sovrapporre gli effetti. Quanto detto è di carattere generale; è questo il motivo per cui, in tutti gli esercizi precedenti (fatta eccezione per gli archi a tre cerniere) si è sempre fatto riferimento ad un'unica forza esterna.

Problema n. 35.

1) *Computo dei vincoli.*

$$t = 7$$

$$s = 7 \cdot 2 + 6 + 1 = 21 \quad (\text{sette cerniere binarie, una cerniera quaternaria, un pendolo})$$

L'isostaticità va controllata con il noto metodo dei centri.

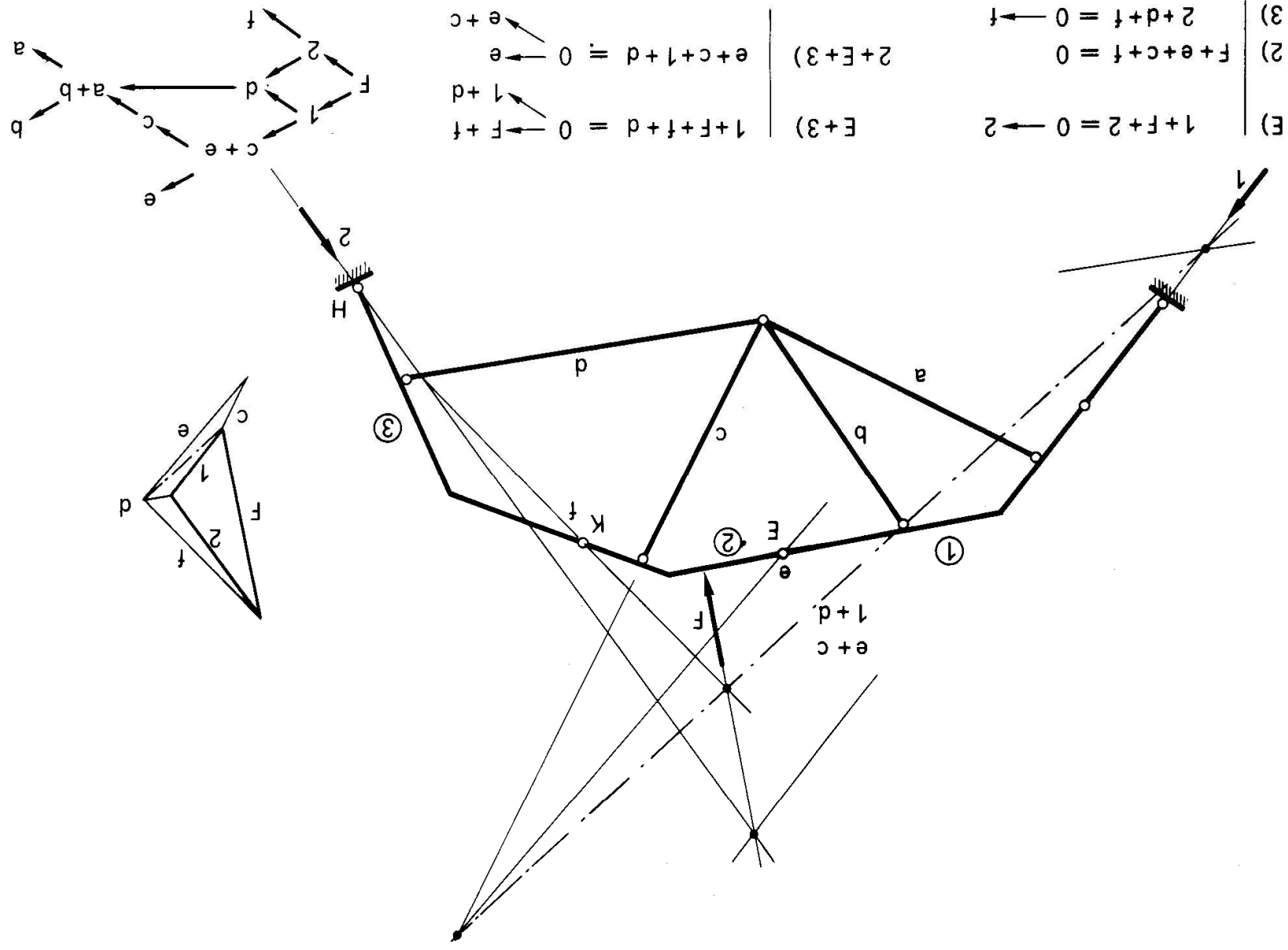


Figura 35

2) Ricerca delle reazioni.

Per l'equilibrio globale si ha

$$F + 1 + 2 = 0 \quad (41)$$

da cui

$$r_2 \ni H, 1 \cap F.$$

Per l'equilibrio del tratto (2) è

$$e + F + c + f = 0. \quad (42)$$

Per l'equilibrio del tratto (3) è

$$f + d + 2 = 0, \quad (43)$$

da cui

$$r_f \ni K, 2 \cap d.$$

Dalle (41) e (43) si ha

$$1 + F + f + d = 0 \quad (44)$$

da cui

$$r_{F+f} = r_{1+d} \ni 1 \cap d, F \cap f.$$

Dalle (42) e (44) si ha

$$1 + d + e + c = 0$$

da cui

$$r_c \ni E, (1 + d) \cap c,$$

$$r_{1+d} = r_{c+e}.$$

Si scompone F secondo r_1 ed r_2 , 2 secondo r_f ed r_d , 1 secondo r_d ed r_{c+e} , $c + e$ secondo r_c ed r_e . Si scompone poi $c + d$ secondo r_a ed r_b , ed il problema è risolto.