CAPITOLO TERZO

RICERCA DELLE REAZIONI VINCOLARI

Problema n. 1.

In questo capitolo si considerano sistemi piani (vedi inizio cap. 2). La struttura della Fig. 1 è una trave vincolata con 3 vincoli semplici

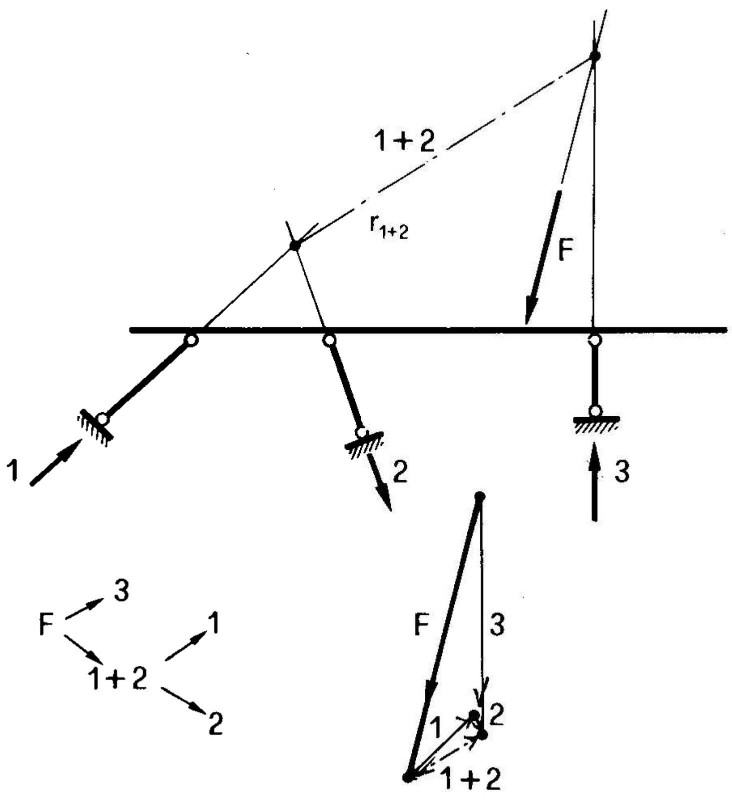


Figura 1

(pendoli); un *vincolo semplice,* sia esso un *appoggio,* un *pendolo* o un doppio bipendolo (*pendolo improprio*), definisce la retta d'azione della reazione, che nel caso del pendolo improprio è la retta impropria del piano. La forza F e le tre reazioni R_1 R_2 R_3 dei tre pendoli 1, 2 e 3, indicate per semplicità con i soli numeri caratterizzanti i vincoli, sono in equilibrio; ciò si esprime con la relazione simbolica

$$(F,\ 1,\ 2,\ 3) = 0$$

o ancora

$$F + 1 + 2 + 3 = 0\ . \tag{1}$$

Si noti bene che la (1) è qualcosa in più della analoga relazione vettoriale, che è solo condizione necessaria di equilibrio; inoltre, il segno (+) non definisce la nota operazione di somma vettoriale, ma è solo un *simbolo associativo.* Così dalla (1) si trae

$$\begin{aligned} F + 1 &= 2 + 3 \\ F + 2 &= 1 + 3 \\ F + 3 &= 1 + 2\ ; \end{aligned} \tag{2}$$

la prima delle (2) traduce il fatto che la risultante di F ed 1 e la risultante di 2 e 3 giacciono sulla stessa retta; le (2) cioè, sono una *notazione di equivalenza,* così come la (1) è una *notazione di equilibrio.* Dalla (1) si passa alle (2) spostando i termini dall'uno all'altro membro senza cambiamenti di segno. Dalla terza delle (2) si trae che la retta d'azione r_{F+3} di F + 3 e quella r_{1+2} di 1 + 2 coincidono, ed è data dalla congiungente il punto d'incontro di F e 3 con il punto d'incontro di 1 e 2:

$$r_{F+3} = r_{1+2} \ni 1 \cap 2\ ,\quad F \cap 3\ . \tag{3}$$

Si ottengono quindi 3 ed 1 + 2 scomponendo F secondo r_{1+2} ed r_3; si ottengono poi 1 e 2 scomponendo 1 + 2 secondo r_1 ed r_2. I versi di 1, 2 e 3 si determinano alla fine, dalla condizione che il poligono delle forze F 1 2 3 deve essere chiuso; percorrendo quindi tale poligono nel verso di F, si hanno i versi di 1, 2 e 3.

Le operazioni di cui si è parlato sopra sono riassunte nel *reticolo di scomposizione* della figura 1, di ovvia comprensione.

Problema n. 2.

La struttura della Fig. 2 è la stessa della Fig. 1, caricata però da una coppia $\mathfrak{M}$. Si ha

$$\mathfrak{M} + 1 + 2 + 3 = 0$$

da cui

$$\mathfrak{M} + 3 = 1 + 2 \quad .$$

La risultante di $\mathfrak{M}$ e 3, e la risultante di 1 e 2, hanno perciò la stessa retta d'azione, fornita da

$$r_{1+2} \ni 1 \cap 2 \quad , \quad \mathfrak{M} \cap 3 \; ;$$

si badi che il punto $\mathfrak{M} \cap 3$ è il punto improprio di 3, poichè $\mathfrak{M}$ è una forza (nulla) agente secondo la retta impropria del suo piano. Si scompone

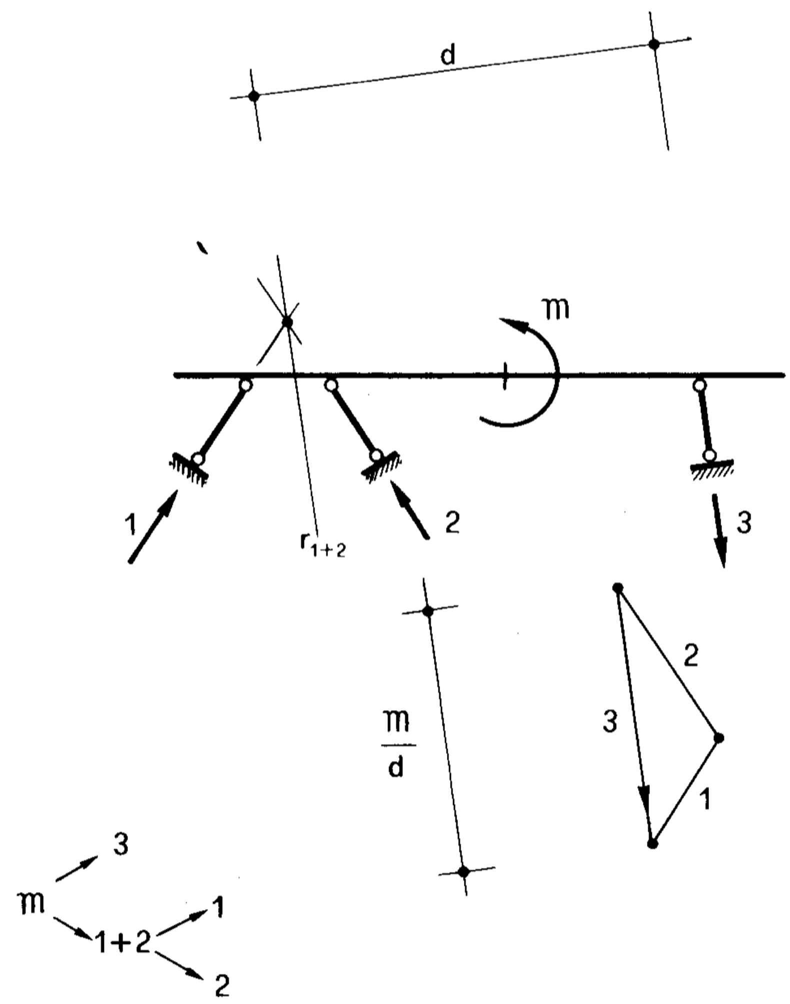


Figura 2

perciò $\mathfrak{M}$ secondo r_3 ed r_{1+2}, e poi 1 + 2 secondo r_1 ed r_2. Scomporre $\mathfrak{M}$ secondo r_3 ed r_{1+2} significa dividere $\mathfrak{M}$ per la distanza *d* tra r_3 ed r_{1+2}: il verso di 3 e di 1 + 2 è dettato da quello della coppia.

Problema n. 3.

1) *Computo dei vincoli.*

t = 3
s = 9 (cinque pendoli e due *cerniere binarie*)
3t − s = 0 .

La struttura non è labile; infatti il tratto di sinistra è fisso, poichè i tre pendoli 1, 2 e 3 non concorrono; il tratto centrale è fisso, poichè l'as-

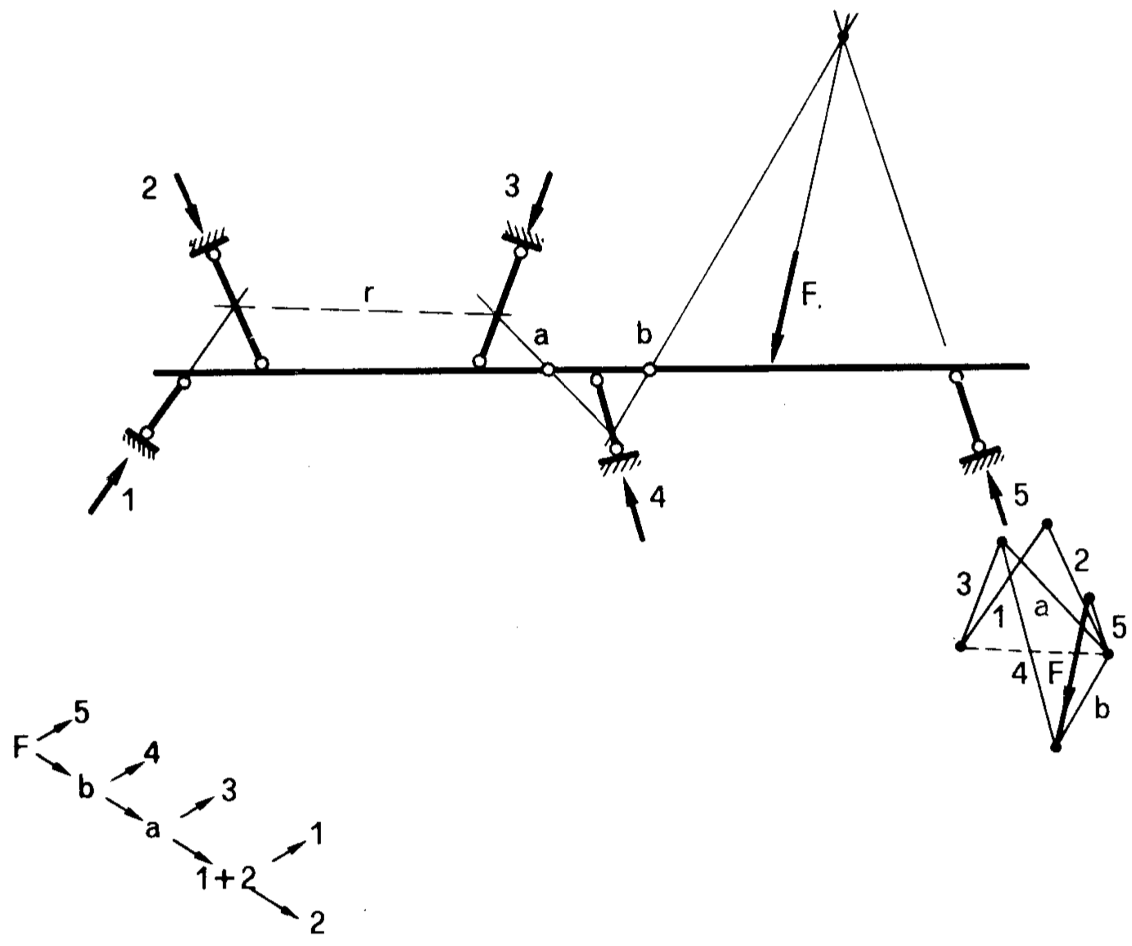


Figura 3

se del pendolo 4 non contiene la cerniera *a*; il tratto di destra è fisso perchè l'asse del pendolo 5 non contiene la cerniera *b*. Quindi $l = 0$, i = 0, e la struttura è isostatica.

2) *Ricerca delle reazioni.*

Si sono indicate con numeri (1, 2, 3, 4, 5) le reazioni esterne, con lettere (a, b) le reazioni interne. Si hanno le tre notazioni di equilibrio

$$\begin{aligned} F + 5 + b \quad\quad &= 0 \\ b + 4 + a \quad\quad &= 0 \\ 1 + 2 + 3 + a &= 0 \, . \end{aligned} \tag{4}$$

Dalla terza (4) si ha la notazione di equivalenza

$$1 + 2 = 3 + a \, ,$$

da cui

$$r_{1+2} = r_{3+a} = r \, ,$$

dove

$$r \ni 3 \cap a, 1 \cap 2.$$

Si possono perciò eseguire le successive operazioni di scomposizione sintetizzate nel reticolo della Fig. 3. Il verso delle reazioni esterne si ottiene percorrendo il poligono F 4 3 1 2 5 nel verso di F; il verso delle reazioni interne si ottiene percorrendo il poligono 4 a b nel verso di 4. Da quest'ultimo si osserva che, considerate agenti sul tratto centrale, *a* e *b* sono ambedue dirette verso il basso.

I cinque pendoli sono tutti puntoni; per ciascuno di essi si inverte il segno della sollecitazione se il pendolo stesso viene ruotato di 180° intorno al punto di contatto con la trave.

Problema n. 4.

1) *Computo dei vincoli.*

$t = 2$
$s = 6$ (una cerniera binaria, due bipendoli)
$3t - s = 0.$

La struttura non è labile; infatti le tre cerniere (A_∞, B_∞, C) non sono allineate. Quindi $l = 0$, $i = 0$, e la struttura è isostatica.

2) *Ricerca delle reazioni.*

Siano 1 e 2 le reazioni dei vincoli A e C, *b* la reazione del vincolo B. Si ha

$$\begin{aligned} F + 1 + 2 &= 0 \\ F + 1 + b &= 0 \\ 2 + b &= 0 \,. \end{aligned} \tag{5}$$

Dalla terza delle (5) si trae che le reazioni 2 e *b* sono uguali e contrarie, e quindi la loro comune retta d'azione passa per C ed ha come dire-

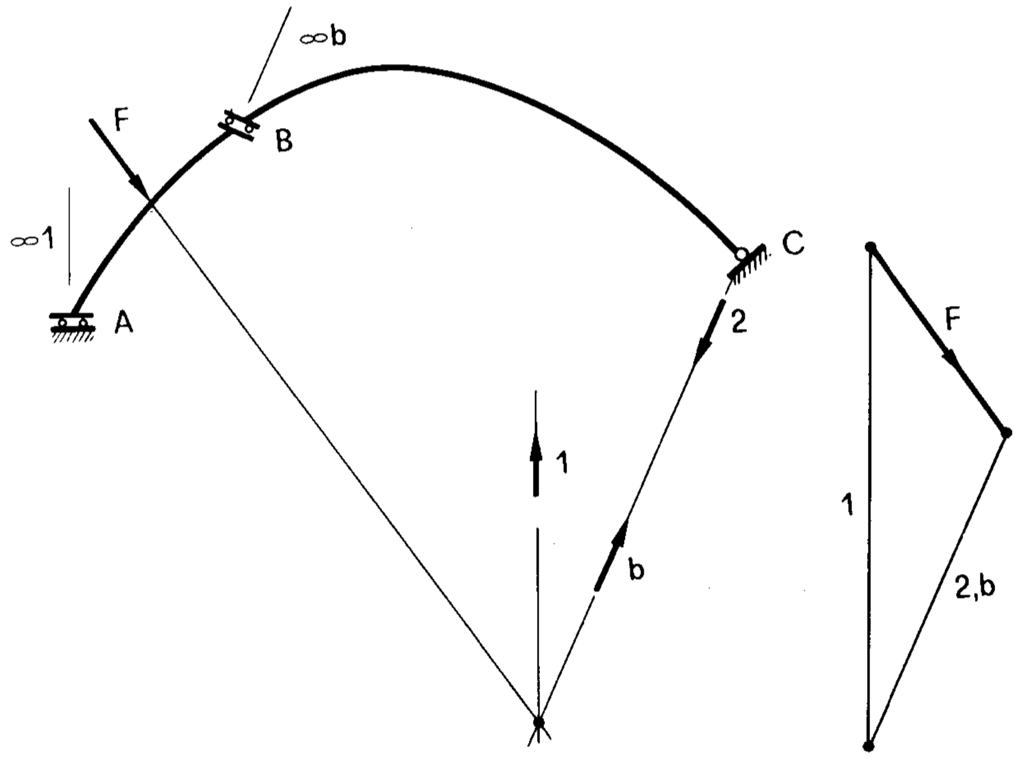


Figura 4

zione quella dell'asse del bipendolo in B (si ricordi che per *bipendolo* si intende un vincolo costituito da due pendoli vicini e con assi paralleli; essi equivalgono ad una cerniera posta nel punto improprio di tali assi; comunemente si intende per *asse del bipendolo* la retta equidistante dagli assi dei due pendoli). Dalla prima delle (5) si trae che 1 e 2 si ottengono scomponendo F nelle direzioni degli assi dei bipendoli in A e B; la retta d'azione di 2 è stata definita, quella di 1 è data dalla condizione che F, 1 e 2 devono concorrere nello stesso punto. I versi di 1 e 2 si ottengono percorrendo il poligono chiuso F 2 1 nel verso di F; il verso di *b*, considerata agente dalla parte AB sulla parte BC, è contrario a quello di 2.

Problema n. 5.

1) *Computo dei vincoli.*

t = 2
s = 6 (due cerniere binarie, un bipendolo)
3t − s = 0.

La struttura non è labile, poichè il punto improprio dell'asse del bipendolo non coincide con il punto improprio della congiungente AC. Quindi $l = 0$, i = 0, e la struttura è isostatica.

2) *Ricerca delle reazioni.*

Siano 1 e 2 le reazioni delle cerniere A e C, *b* quella del bipendolo B. Si è indicato, come nell'esercizio precedente, con ∞ b l'asse del bipendolo in B, con ciò indicando pure la direzione caratterizzante la cerniera impropria equivalente al bipendolo; la *b* deve essere parallela ad ∞ b.

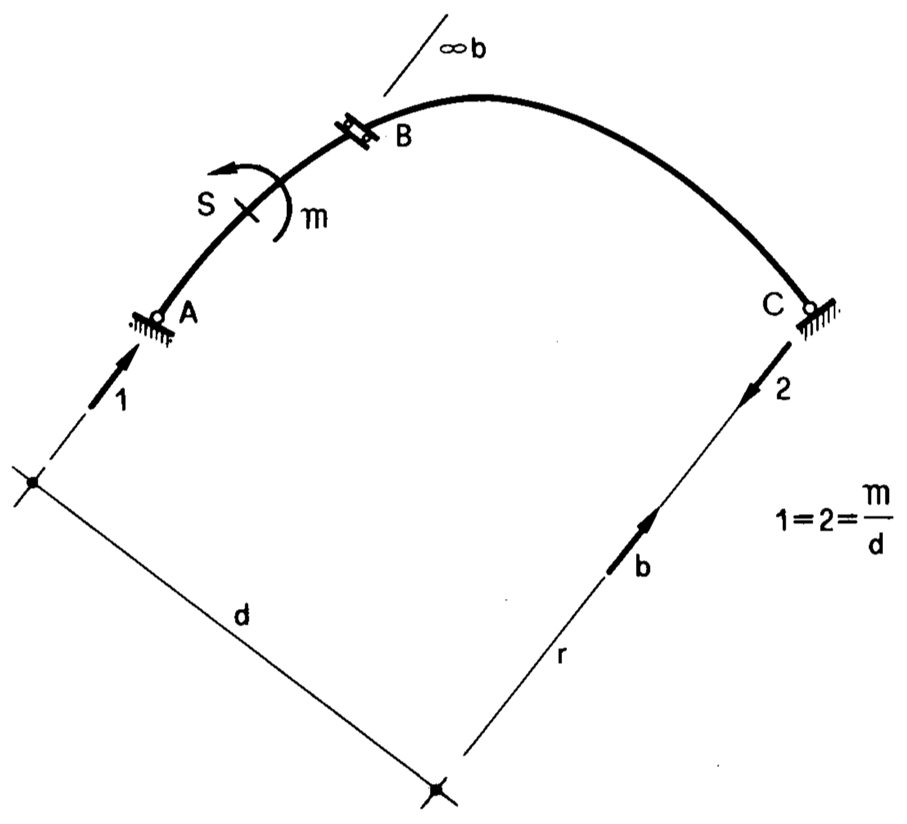


Figura 5

Si ha

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} + 1 + 2 &= 0 \\ \mathfrak{M} + 1 + b &= 0 \\ 2 + b &= 0\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Dalla terza delle (6) si ricava che le reazioni 2 e *b* sono uguali e contrarie, e quindi la loro comune retta d'azione è quella che passa per C, ed ha come direzione quella dell'asse del bipendolo in B; formalmente

$$r_2 = r_b = r \ni C, \infty b. \tag{7}$$

Dalla prima delle (6) si trae che 1 e 2 devono equilibrare $\mathfrak{M}$, e cioè la retta d'azione di 1 è parallela ad *r*; se *d* è la distanza tra le rette d'azione di 1 e 2, si ha

$$1 = 2 = \frac{\mathfrak{M}}{d}\ ;$$

il verso di 1 e 2 è tale da generare una coppia contraria ad $\mathfrak{M}$. La reazione *b*, intesa come azione da AB su BC, è uguale e contraria a 2.

Problema n. 6.

La struttura della Fig. 6 è identica a quella della figura 4; unica differenza è la presenza di $\mathfrak{M}$ su AB al posto di F.

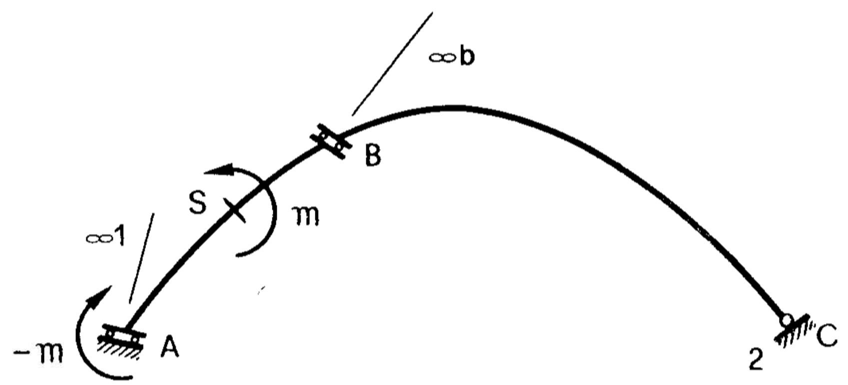


Figura 6

La reazione in A ha la direzione di ∞ 1, quella in C la direzione di ∞ b che è diversa dalla prima; poiché 1 e 2 devono generare una coppia, unica possibilità è che 2 sia nulla (e così pure, quindi, *b*), mentre il bipendolo in A assorbe tutta la coppia applicata.

Problema n. 7.

Si è in presenza di un arco a tre cerniere, soggetto ad una forza F_1 sul tratto di sinistra, ed una forza F_2 sul tratto di destra; siano 1 e 2 le reazioni d'imposta, *b* la reazione di chiave. Si ha

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + 1 + 2 &= 0 \\ 1 + F_1 + b &= 0 \\ b + F_2 + 2 &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Si opera per sovrapposizione di effetti, considerando prima quelli di F_1, poi quelli di F_2, ed infine sommando. Se agisce solo la forza F_1,

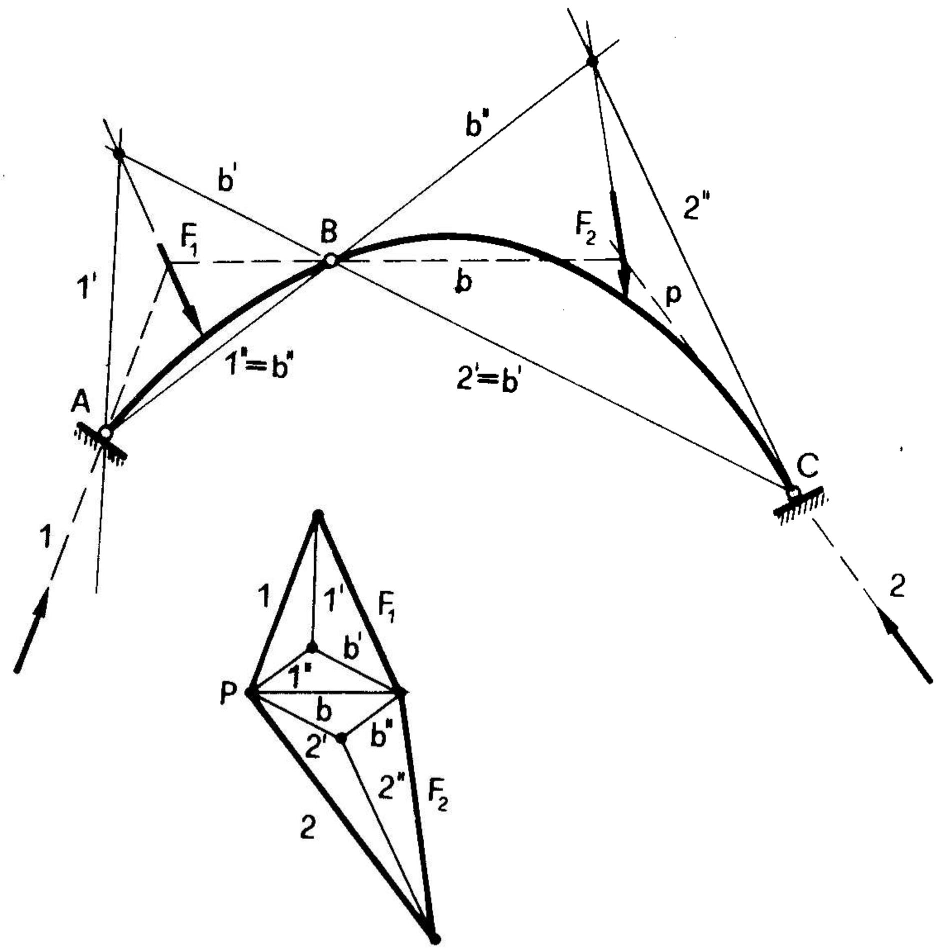


Figura 7

le reazioni in A, B e C (1′, b′ e 2′) si ottengono scomponendo la F_1 secondo la retta BC (retta d'azione di b′) e la r_1' fornita da

$$r_1' \ni A, F_1 \cap BC \ .$$

Se agisce solo la forza F_2, le reazioni in A, B e C (1″, b″ e 2″), si ottengono scomponendo la F_2 secondo la retta AB (linea d'azione di b″) e la r_2'' fornita da

$$r_2'' \ni C, F_2 \cap AB \ .$$

Componendo b′ e b″ si ottiene la reazione *b* totale; componendo 1′ ed 1″, la 1; componendo 2′ e 2″, la 2. Il punto P, estremo di *b*, è anche polo del poligono funicolare che connette F_1 ed F_2 e passa per i tre punti A B C, come si verifica immediatamente; ed infatti i vettori definiti da P e dai vertici di F_1 ed F_2 sono, come è noto, proprio le reazioni in A, B e C.

Problema n. 8.

L'arco a tre cerniere della Fig. 8 è soggetto ad un insieme di forze (F_1 ed F_2) sul tratto di sinistra, ad un altro sistema di forze (F_3 ed F_4)

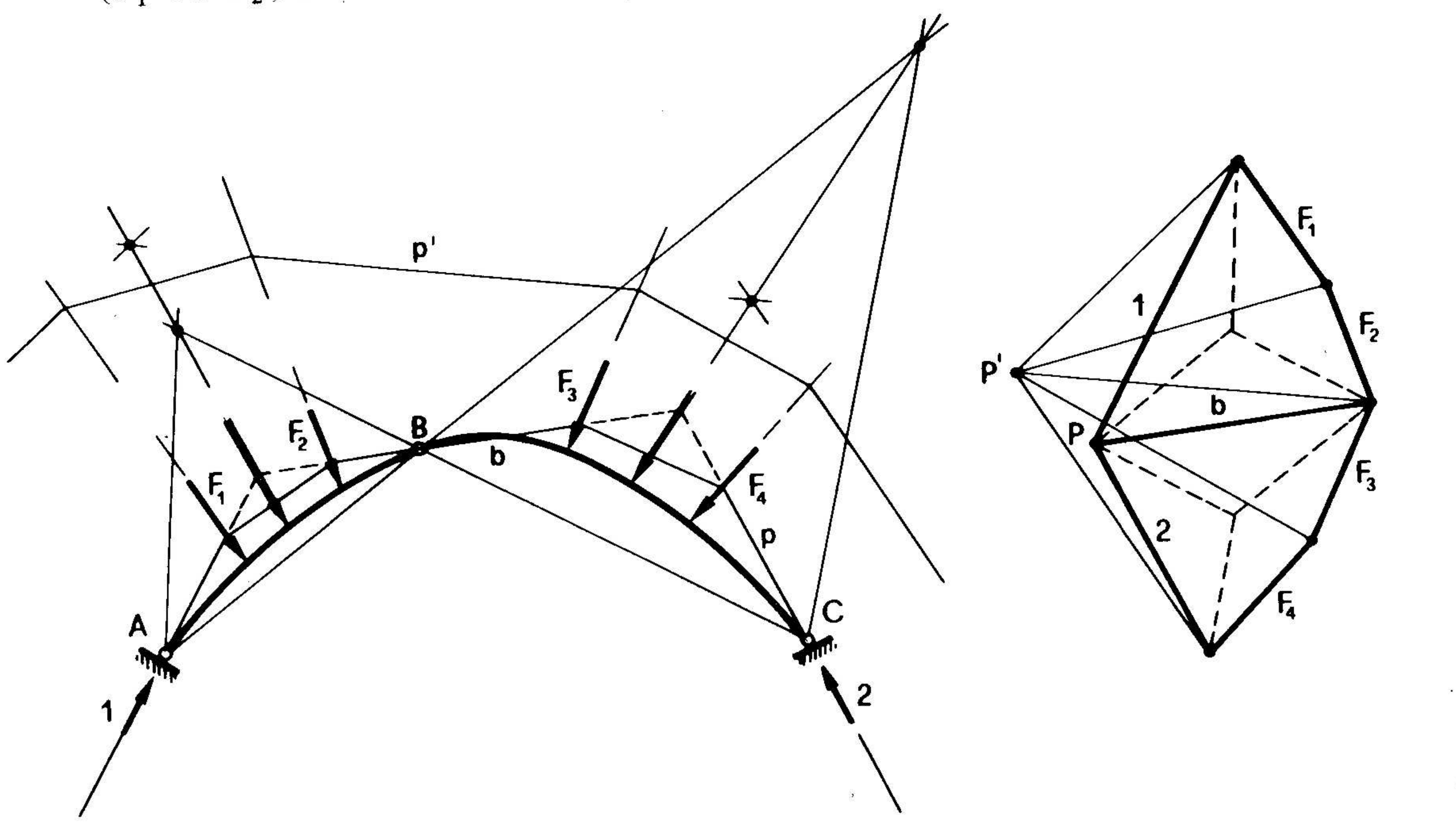


Figura 8

sul tratto di destra. Un primo poligono funicolare p′, di polo P′, serve a definire le rette d'azione della risultante di F_1 ed F_2, e della risultante di F_3 ed F_4. Conosciute le due risultanti, le reazioni 1, 2 e *b* si determinano come nell'esercizio precedente; l'estremo P di *b* è il polo del poligono funicolare connettente le quattro forze e passante per i tre punti A B C.

Problema n. 9

Si è ancora in presenza di un arco a tre cerniere, di cui due improprie (bipendoli di assi ∞ 1 ed ∞ b); i due tratti sono soggetti ciascuno ad un'unica forza, F_1 su quello di sinistra ed F_2 su quello di destra.

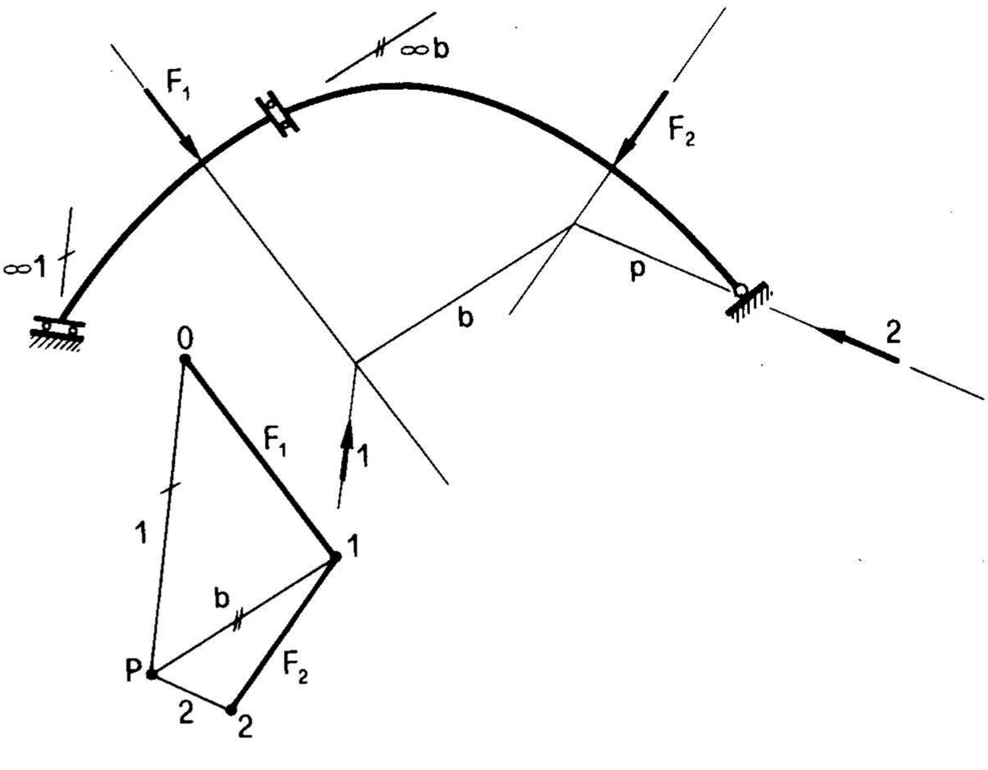


Figura 9

Poichè le direzioni di 1 e *b* sono note, i valori di tali reazioni si ottengono scomponendo F_1 secondo le suddette direzioni; si hanno così anche il polo P del poligono funicolare per A B C, e la reazione 2. Le posizioni effettive di 1 e *b* si hanno costruendo il poligono funicolare, con inizio dal terzo lato 2.

Problema n. 10.

Anche nella Fig. 10 appare un arco a tre cerniere A B C; l'arco è impostato in A e C su due mensole, invece che al suolo. Il procedimento, una volta individuata la retta d'azione di $F_1 + F_2$ (e ciò può farsi senza ricorrere al poligono funicolare, poichè le due forze si incontrano nell'ambi-

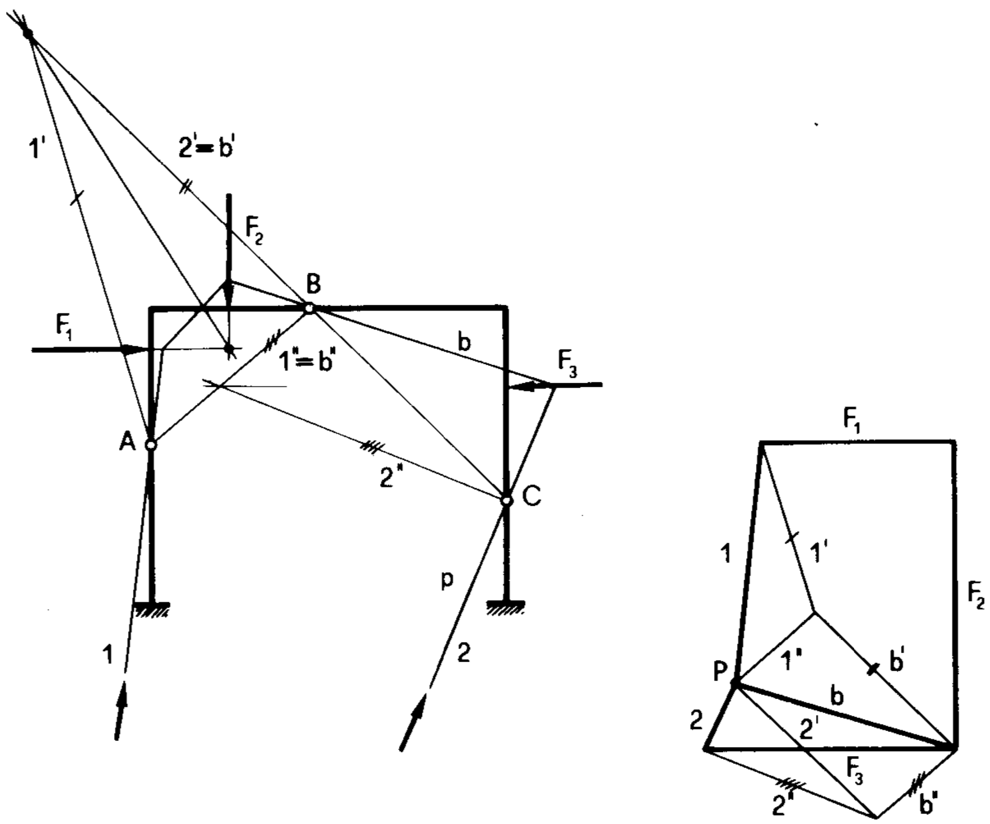


Figura 10

to della figura), è lo stesso di quello seguito nell'esercizio 7; se ne lascia la verifica al lettore.

Problema n. 11.

1) *Computo dei vincoli.*

$t = 3$
$s = 9$ (quattro cerniere binarie, un pendolo)
$3t - s = 0.$

La struttura è isostatica poiché non ci sono labilità; infatti, se si elimina il pendolo *p* il tratto AB può ruotare rispetto al tratto CD intorno al punto d'incontro di AD e BC, e tale rotazione è appunto impedita da *p*, il cui asse non passa per tale punto:

$$r_p \not\ni AD \cap BC \ .$$

2) *Ricerca delle reazioni.*

Si ha

$$\begin{aligned} F + 1 + 2 \quad &= 0 \\ F + 1 + p + b &= 0 \\ b + c \quad &= 0 \\ c + p + 2 \quad &= 0 \ . \end{aligned} \tag{9}$$

Dalla terza delle (9), notazione di equilibrio del tratto BC, si ricava

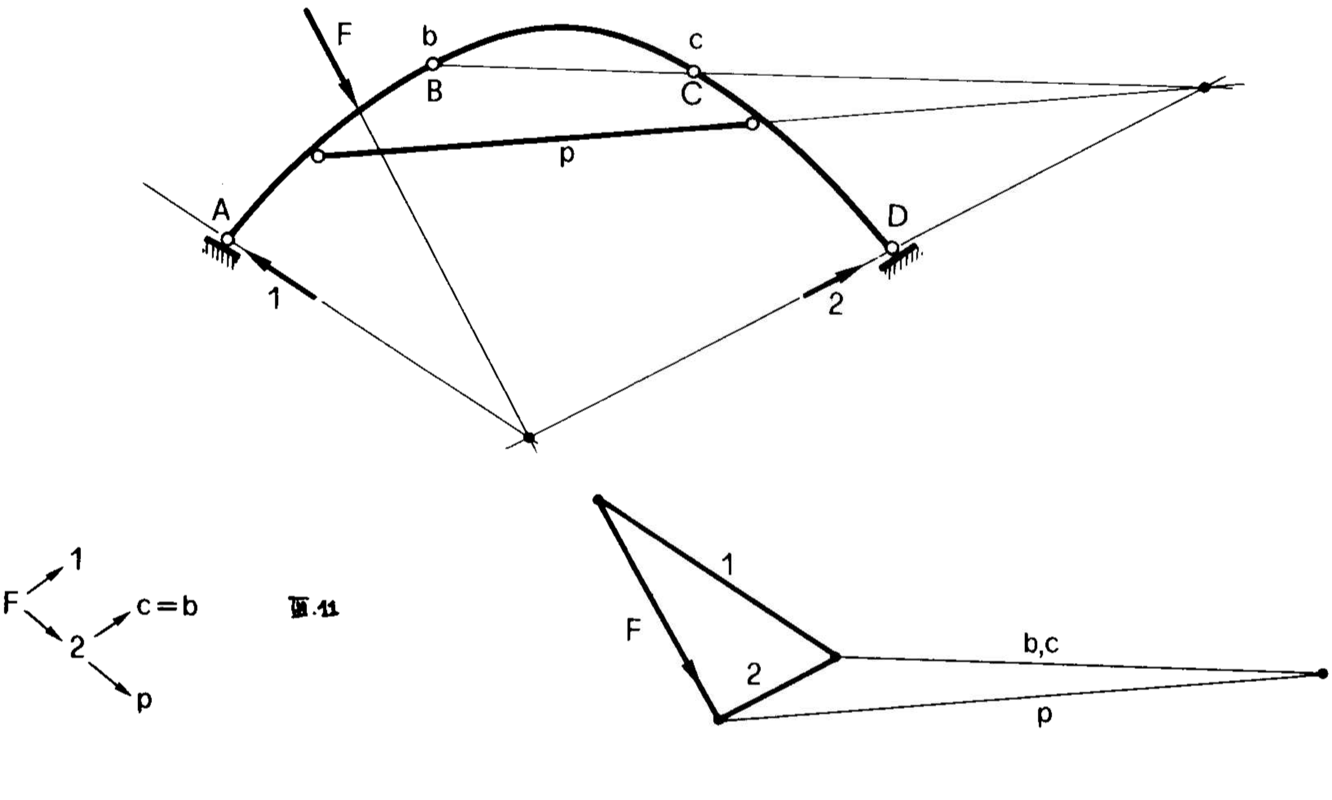


Figura 11

che le rette d'azione di *b* e *c* coincidono (si usa dire che il tratto BC si comporta da pendolo); quindi

$$r_b = r_c = BC$$

Dalla quarta delle (9), notazione di equilibrio del tratto CD, si trae che r_p, r_c ed r_2 concorrono in uno stesso punto; quindi, essendo note r_p ed r_c, si trae r_2

$$r_2 \ni D, p \cap c .$$

Dalla prima, notazione di equilibrio globale, si ha poi

$$r_1 \ni A, F \cap 2 .$$

La scomposizione di F secondo r_1 ed r_2, e di 2 secondo r_p ed r_c, è riportata nel reticolo e nel poligono di equilibrio; dal poligono F 1 2 si ottengono, percorrendo nel verso di F, i versi di 1 e 2; dal poligono 2 p c si ottiene, percorrendo nel verso di 2, che *c* è diretto, agente da BC su CD, verso destra, e *p*, agente da AB su CD, verso sinistra, cioè BC è un puntone, e *p* un tirante.

Problema n. 12.

La stessa struttura della Fig. 11 è caricata da una forza F sul tratto BC. Si ha

$$\begin{aligned} F + 1 + 2 &= 0 \\ 1 + p + b &= 0 \\ b + F + c &= 0 \\ c + p + 2 &= 0 . \end{aligned} \tag{10}$$

La sola F è conosciuta in retta d'azione; di ciascuna delle altre forze si conosce solo un punto della retta d'azione. Poichè non esiste alcuna notazione in cui compaiono due sole forze, nè è possibile operando sulle (10) ricondursi a tale condizione, il problema è irrisolubile per via elementare. Si è perciò aggirato l'ostacolo riconducendo il problema a quello dell'es. 11; all'uopo si è decomposta la forza F nelle due equivalenti F' ed F'', passanti per B e C.

Considerando F' agente su AB, si ottengono così $1'$ e $2'$; considerando F'' agente su CD, si ottengono invece $1''$ e $2''$. Componendo $1'$ ed $1''$, si ottiene 1; componendo $2'$ e $2''$, si ottiene 2.

Dalla seconda delle (10) si hanno *p* e *b*; dalla quarta delle (10), *p* e *c*. Risulta, dal triangolo 1 p b, che, considerate agenti su AB, *p* è diretta verso destra e b verso sinistra; dal triangolo 2 p c risulta che, considerate agenti su CD, p è diretta verso sinistra e c verso destra. Il pendolo p è

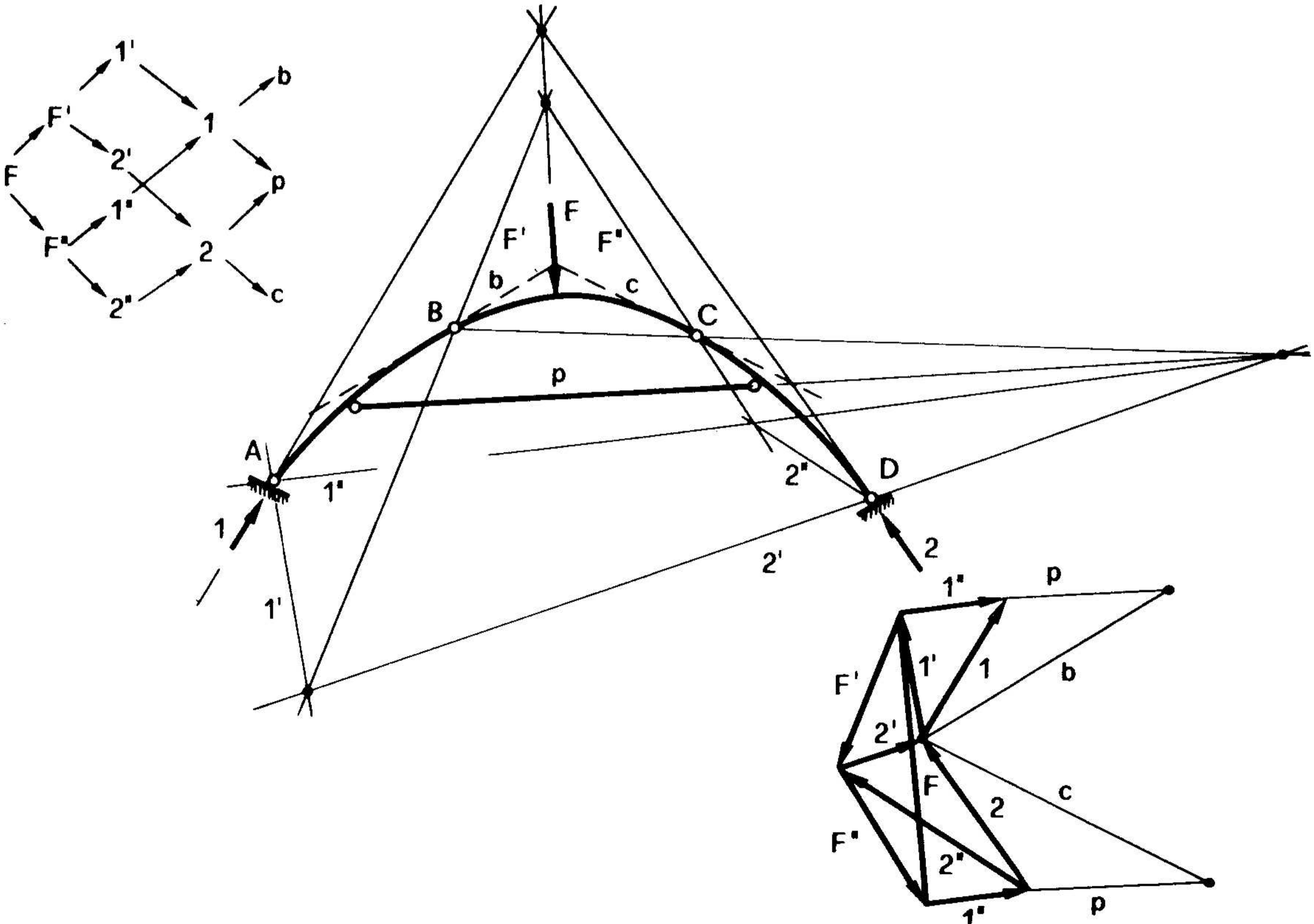


Figura 12

quindi un tirante. Si verifica che p, calcolato da 1 o da 2, presenta lo stesso valore.

Problema n. 13.

Lo stesso caso della Fig. 12 si vuole risolvere con il *"metodo di sostituzione"* dei vincoli. Si solidifica la cerniera in C e si elimina il pendolo p (Fig. 13a); l'arco a tre cerniere che così vien fuori è immediatamente risolubile; risulta

$$2 = R_D = 0{,}80\ F$$

$$M_C = -\ 0{,}80 \cdot 0{,}30 \cdot F = -\ 0{,}24\ F\ .$$

Sullo stesso arco a tre cerniere si fanno poi agire (figura 13b) due forze uguali e contrarie X in corrispondenza dei due punti d'incontro dell'asse di p con la struttura (positive, e perciò concorrenti).

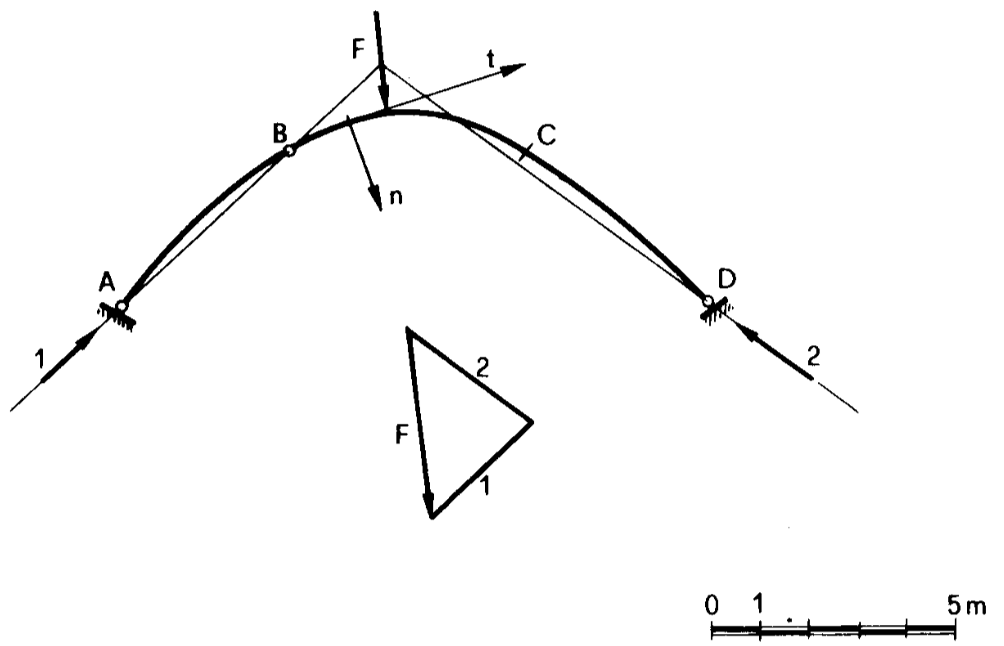


Figura 13a

Poichè le due forze X sono in equilibrio, devono esserlo anche le

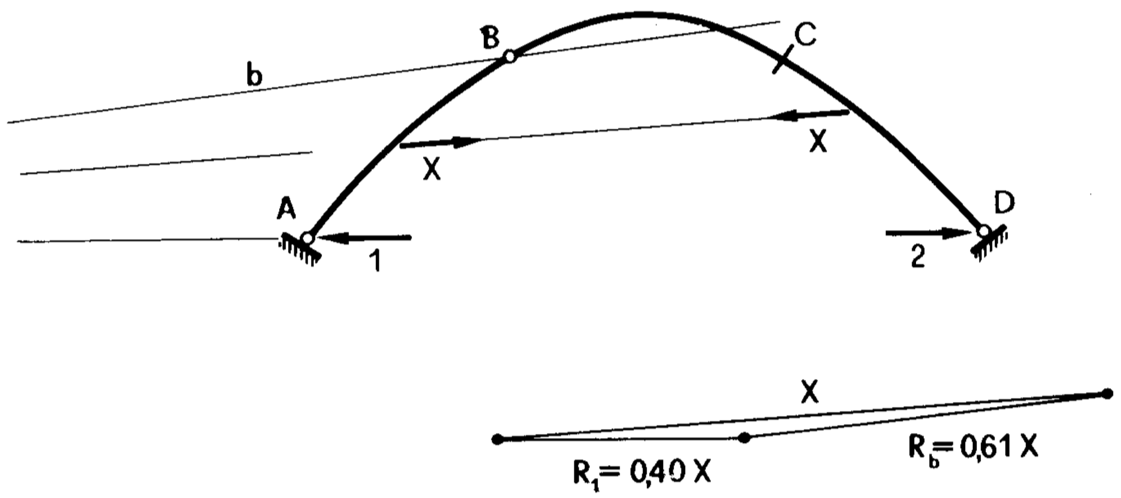


Figura 13b

reazioni esterne, e cioè 1 e 2 devono essere uguali e contrarie, ed avere quindi la stessa retta d'azione AD. Dalla notazione

$$1 + X + b = 0$$

si trae

$$r_b \ni B, AD \cap p.$$

Scomponendo la X su AB secondo AD ed r_b si ha

$$1 = R_A = 0{,}40\,X$$

$$b = R_B = 0{,}61\,X\ ;$$

sia R_1 che R_B sono dirette (agenti su AB) verso sinistra. E' poi

$$M'_C = 0{,}70 \cdot 0{,}61 \cdot X = 0{,}43\,X\ .$$

Poichè in C deve essere $M_C = 0$, X è data dalla relazione

$$-\ 0{,}24\,F + 0{,}43\,X = 0$$

e cioè

$$X = 0{,}56\,F\ .$$

Dalla Fig. 12 risulta

$$X = \frac{3{,}4}{6}\,F = 0{,}56\,F\ ;$$

i due risultati perciò coincidono.

Si osservi che il metodo di sostituzione è analogo al metodo di variazione utilizzato nel cap. II.

Problema n. 14.

Il problema della Fig. 14a è sostanzialmente identico a quello degli esercizi 12 e 13; esso sarà qui risolto per via analitica. Le incognite sono nove, e cioè le componenti secondo y e z (indicate con gli indici ad esponente *v* e *o*) delle reazioni R in A B C D, e la sollecitazione S nel pendolo. Il verso di *t* è quello di chi percorre la struttura da A a D, quindi le R positive sono quelle riportate nella Fig. 14a. Occorrono nove equazioni indipendenti.

Le tre condizioni di equilibrio del tratto AB (equilibrio alla trasla-

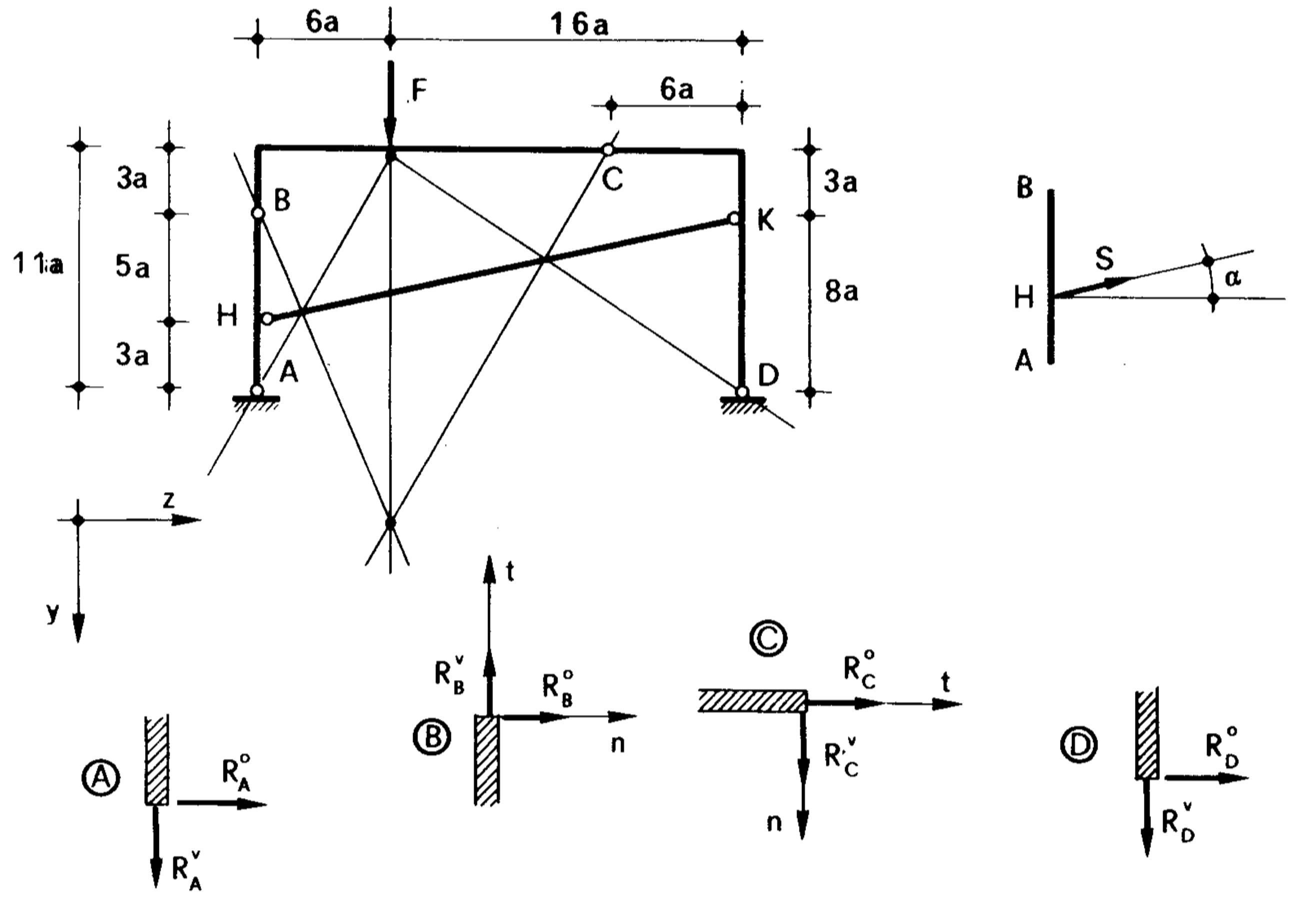


Figura 14*a*

zione secondo y e z, ed alla rotazione intorno ad A) si scrivono (Fig. 14b)

$$\begin{aligned} &R_A^v - R_B^v - S \operatorname{sen}\alpha = 0 \\ &R_A^o + R_B^o + S\cos\alpha = 0 \\ &-R_B^o \cdot 8\,a - S\cos\alpha \cdot 3\,a = 0\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Le tre condizioni di equilibrio del tratto BC (rotazione intorno ad A) sono

$$\begin{aligned} &R_B^v + F + R_C^v = 0 \\ &-R_B^o + R_C^o = 0 \\ &-F \cdot 6a - R_C^v \cdot 16a - R_C^o \cdot 3a = 0\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Le tre condizioni di equilibrio del tratto CD (rotazione intorno a D) sono

$$
\begin{aligned}
- R_C^{\nu} \quad + R_D^{\nu} \quad + S \operatorname{sen}\alpha \quad &= 0 \\
- R_C^{\circ} \quad + R_D^{\circ} \quad - S \cos\alpha \quad &= 0 \qquad (13) \\
- R_C^{\nu} \cdot 6\,a + R_C^{\circ} \cdot 11\,a + S \cos\alpha \cdot 8\,a &= 0\,.
\end{aligned}
$$

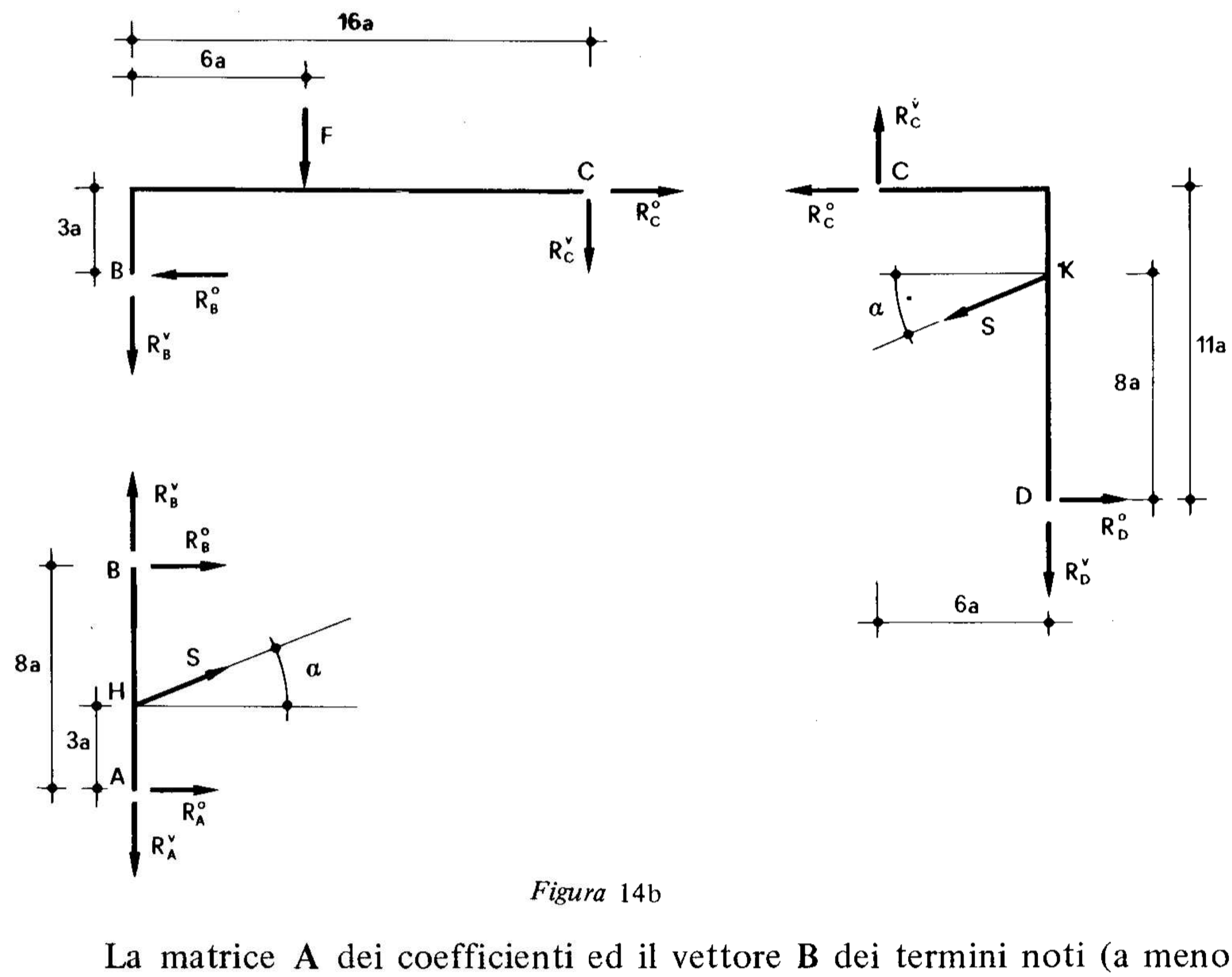


Figura 14b

La matrice **A** dei coefficienti ed il vettore **B** dei termini noti (a meno di F) del sistema

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}\,, \tag{14}$$

costituito dalle (11), (12), e (13), sono riportati nella tabella 1 . Il valore di α è dato in radianti da

$$\alpha = \operatorname{artg} \frac{5}{22}\,. \tag{15}$$

Si ha così la soluzione, in dodici cifre significative (tal quale fornita dal calcolatore)

$$
\begin{aligned}
R_A^v &= -0,727272727272 \quad F\\
R_A^\circ &= 0,407239819003 \quad F\\
R_B^v &= -0,579185520362 \quad F\\
R_B^\circ &= 0,244343891402 \quad F\\
R_C^v &= -0,420814479638 \quad F\\
R_C^\circ &= 0,244343891402 \quad F\\
R_D^v &= -0,272727272727 \quad F\\
R_D^\circ &= -0,407239819004 \quad F\\
S &= -0,668199934538 \quad F\,.
\end{aligned}
$$

Il pendolo HK è quindi un puntone.

Nella Fig. 14a si sono disegnate le rette d'azione delle reazioni in A B C D; come era da attendere, le rette d'azione di R_A ed R_B si intersecano sulla retta HK, e così pure le rette d'azione di R_C ed R_D. Le rette d'azione di R_B ed R_C si intersecano sulla retta d'azione di F, e così pure le rette d'azione di R_A ed R_D.

Poichè la soluzione del sistema (14) esiste, la struttura è non labile, e la matrice **A** è non singolare:

$$\det |\mathbf{A}| \neq 0\,, \tag{16}$$

Ed infatti, le rette AD, BC ed HK non sono concorrenti.

Ciò accade, per esempio, se il punto H sale alla quota 5,2783a. E' allora

$$\alpha = 7{,}05230°,$$

e la terza delle (11) si modifica in

$$-\,R_B^\circ \cdot 8a - S\cos\alpha \cdot 5{,}2783a = 0.$$

Il sistema (14) presenta così soluzioni talmente elevate da andare in overflow. Ciò rende anche avvertiti della pericolosità, sul piano del valore delle reazioni, e quindi della sicurezza, di strutture *prossime* a condizioni di labilità.

Tabella 1.

R^v_A	R^o_A	R^v_B	R^o_B	R^v_C	R^o_C	R^v_D	R^o_D	S	F
1	0	−1	0	0	0	0	0	$-\operatorname{sen}\alpha$	0
0	1	0	1	0	0	0	0	$\cos\alpha$	0
0	0	0	8	0	0	0	0	$3\cos\alpha$	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	−1
0	0	0	−1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	16	3	0	0	0	−6
0	0	0	0	−1	0	1	0	$\operatorname{sen}\alpha$	0
0	0	0	0	0	−1	0	1	$-\cos\alpha$	0
0	0	0	0	−6	11	0	0	$8\cos\alpha$	0

Lo stesso esercizio si può risolvere, sempre analiticamente, con il metodo di sostituzione (es. 3-13). Soppresso il pendolo, e solidificata la cerniera in C, si è in presenza di un arco a tre cerniere A B D. La forza F induce due reazioni verticali in A e D (Fig. 14c) pari a

$$R^v_A = -F\,\frac{16}{22}$$

$$R^v_D = -F\,\frac{6}{22}\ ;$$

in C si ha quindi il momento

$$M_C = \frac{36}{22}\,Fa = 1{,}6364\,Fa\ .$$

Si fanno poi agire in H e K due forze X uguali e contrarie; una X positiva corrisponde a due forze concorrenti. Le forze X sono in equilibrio; devono esserlo perciò anche le reazioni esterne, e cioè R_A ed R_D sono uguali e contrarie ($R^o_A = -R^o_D$, $R^v_A = R^v_D = 0$).

La notazione di equilibrio del tratto AB

$$R_A + X + R_B = 0$$

si traduce nelle tre equazioni (Fig. 14c)

$$\begin{aligned} R^{\circ}_A + R^{\circ}_B \qquad\qquad + X \cos\alpha &= 0 \\ - R^{\nu}_B - X \operatorname{sen}\alpha &= 0 \\ - 8a\, R^{\circ}_B \qquad - 3a\, X \cos\alpha &= 0 \end{aligned}$$

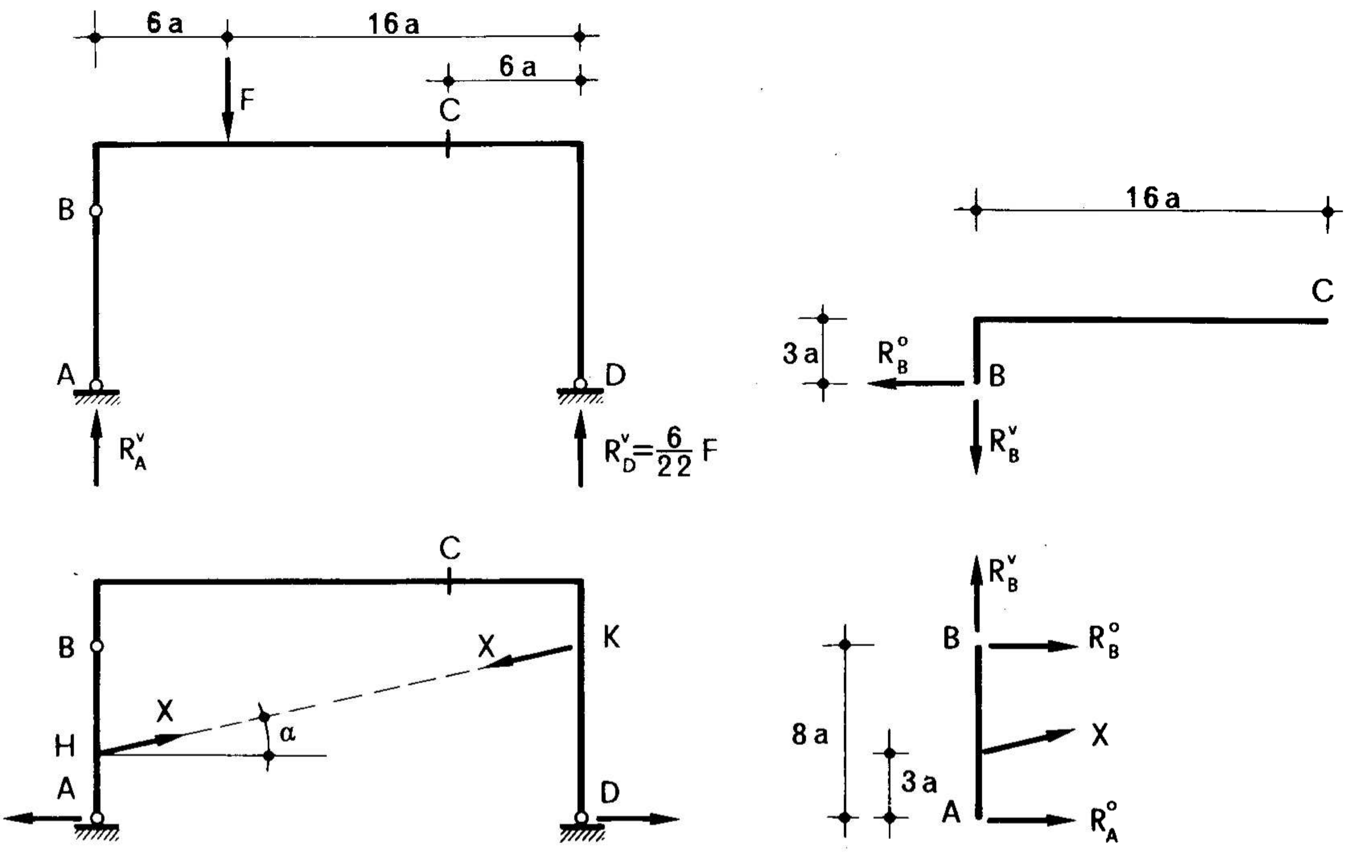


Figura 14c

da cui

$$\begin{aligned} R^{\nu}_B &= -\ 0{,}2216\ X \\ R^{\circ}_B &= -\ 0{,}3657\ X \\ R^{\circ}_A &= -\ 0{,}6094\ X\ . \end{aligned}$$

E' perciò

$$M'_C = 3\,a\,R^{o}_B - 16\,a\,R^{v}_B = Xa\,(-\,1{,}0971 + 3{,}5456) = 2{,}4485\ Xa\ .$$

Dalla relazione

$$M_C + M'_C = 1{,}6364\ Fa + 2{,}4485\ Xa = 0$$

si trae

$$X = -\,0{,}6683\ F\ .$$

Questo valore coincide con quello già ottenuto per S, a meno dello 0,1 %, errore dovuto all'aver chiamato in gioco la sola quarta cifra significativa. Dal valore di S è immediato risalire a quello delle altre reazioni.

E' da osservare come il procedimento di sostituzione si possa presentare conveniente anche in quei sistemi dove le reazioni possono ricavarsi per via elementare, poichè esso fa operare su strutture semplificate.

Problema n. 15.

1) *Computo dei vincoli.*

$t = 2$

$s = 6$ (due cerniere binarie, due pendoli)

$3t - s = 0.$

La struttura è isostatica poiché non ci sono labilità; infatti il punto H d'incontro degli assi dei due pendoli non giace sulla retta DE.

2) *Ricerca delle reazioni.*

Si ha

$$\begin{aligned} F + 1 + 2 &= 0 \\ 1 + a + b &= 0 \\ b + F + a + 2 &= 0\ . \end{aligned} \qquad (17)$$

Dalla seconda delle (11) si trae

$$r_1 \ni D, a \cap b \;;$$

dalla prima delle (11) poi si ha

$$r_2 \ni E, F \cap 1.$$

La F si scompone secondo r_1 ed r_2, la 1 secondo r_a ed r_b. La 1 agi-

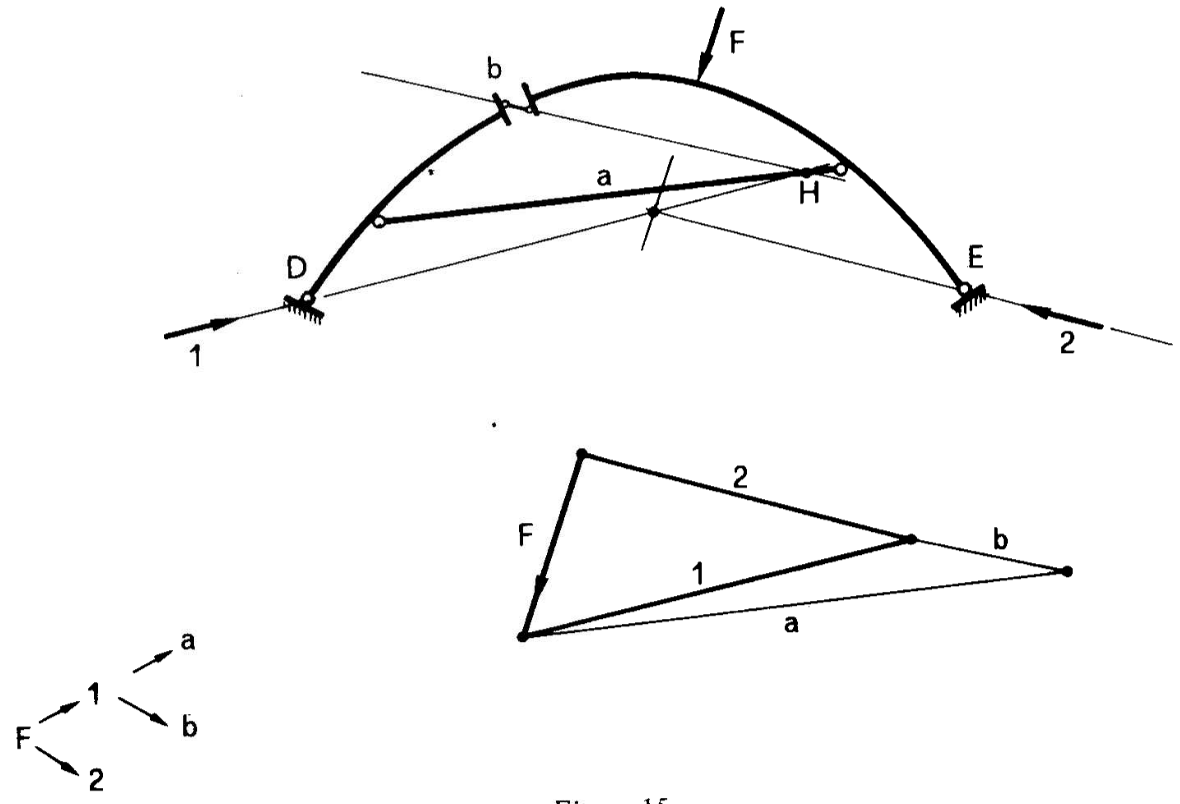


Figura 15

sce verso destra, la 2 verso sinistra. Considerate agenti sul tratto di sinistra, *b* è diretta verso destra, *a* verso sinistra, quindi *a* è un puntone, *b* un tirante.

Problema n. 16.

1) *Computo dei vincoli.*

t = 6

s = 18 (due bipendoli, cinque cerniere binarie, una cerniera ternaria)
$3t - s = 0$.

La struttura è isostatica perchè, sopprimendo il pendolo c, il tratto

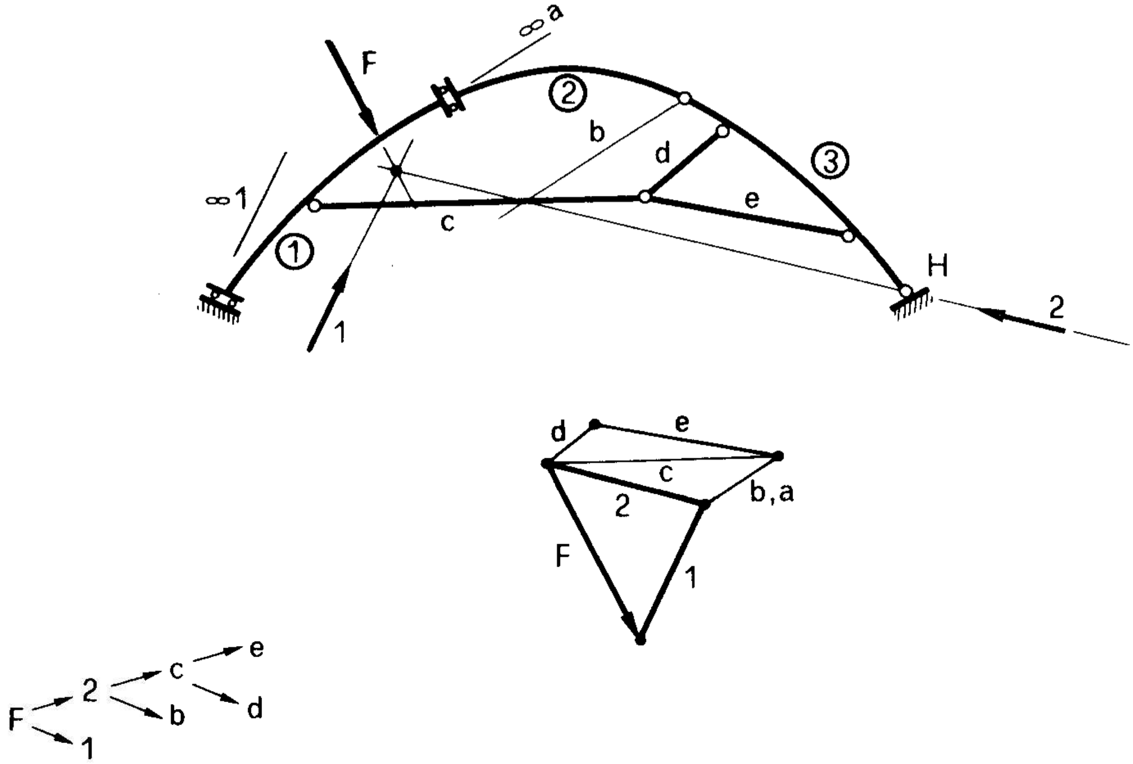


Figura 16

di sinistra (1) dell'arco e quello (3) di destra possono ruotare l'uno rispetto all'altro intorno al punto

$$13 = \infty 1,\ 3 \cap \infty 12,\ 23,$$

ed il pendolo c impedisce tale rotazione, poichè

$$13 \notin r_c\ .$$

2) *Ricerca delle reazioni.*

Si ha

$$\begin{aligned} F + 1 + 2 &= 0 \\ 1 + c + F + a &= 0 \\ a + b &= 0 \\ b + d + e + 2 &= 0 \\ c + d + e &= 0\ . \end{aligned} \tag{18}$$

Dalla terza delle (18) si trae la comune retta d'azione delle due reazioni *b* e *a*; dalle due ultime delle (18) si ha(*)

$$b + c + 2 = 0$$

e conoscendo le rette d'azione di *t* e *c* si ricava quella di 2:

$$r_2 \ni H, L \cap e \ .$$

Dalla prima delle (18) si ha poi

$$r_1 \ni \infty 1, F \cap 2.$$

La successiva scomposizione di F secondo r_1 ed r_2, di 2 secondo r_b ed r_c, di *c* secondo r_d ed r_e risolve il problema. Considerate agenti su $\underset{\supset}{3}$, *c* è diretta verso destra, *b* verso sinistra; perciò *c* è un puntone, e così pure *d* ed *e*.

Problema n. 17.

1) *Computo dei vincoli* (Fig. 17a)

$t = 6$
$s = 18$ (7 cerniere binarie, una ternaria)
$3t - s = 0.$

Che la struttura sia isostatica deve riconoscersi attraverso una indagine sui centri (vedi es. 2-15).

2) *Ricerca delle reazioni.*

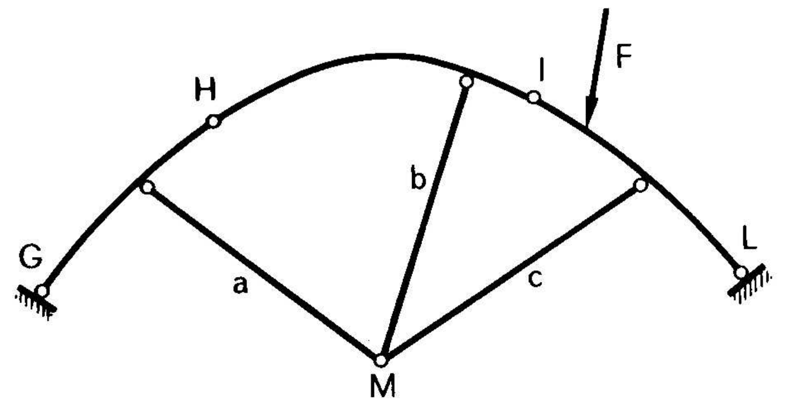
Le reazioni non sono reperibili per via elementare; il problema si risolve, come nell'es. 3-13, con il metodo di sostituzione. Si elimina (Fig. 17a e 17b) il pendolo *c*, e si solidifica la cerniera H.

(*) Da due notazioni di equilibrio se ne può ricavare una terza sopprimendo i termini comuni a primo membro.

Poichè, per l'equilibrio del nodo M,

$$a + b = 0 \ ,$$

a e *b* devono essere o uguali ed opposte, o nulle; poichè il primo caso non può verificarsi, essendo le due rette d'azione non coincidenti, deve verificarsi il secondo. La struttura si riduce così ad un banale arco a tre



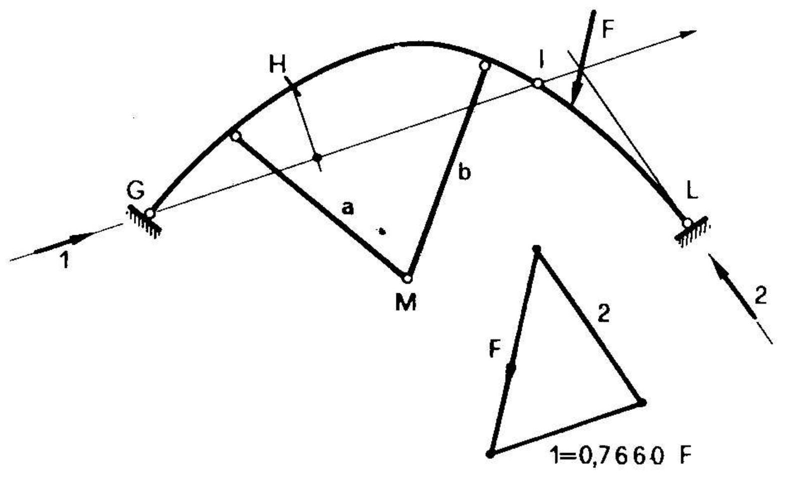


Figura 17a, b

cerniere G I L. Si fanno poi agire (Fig. 17c) in M e Q (estremi del pendolo soppresso) due forze X uguali e contrarie; positive, e perciò concorrenti. Poichè le due forze X sono in equilibrio, lo sono anche le reazioni esterne, e quindi 1 e 2 sono uguali e contrarie:

$$r_1 = r_2 \ni G, L \ .$$

Poichè (equilibrio del tratto I L) è

$$d + X + 2 = 0$$

è pure

$$r_d \ni I,\ X \cap 2.$$

Scomponendo X secondo r_2 ed r_d, e secondo r_a ed r_b, si ottengono le reazioni 2, d, a, b. Si ha, in relazione ai versi, che 1 è diretto verso si-

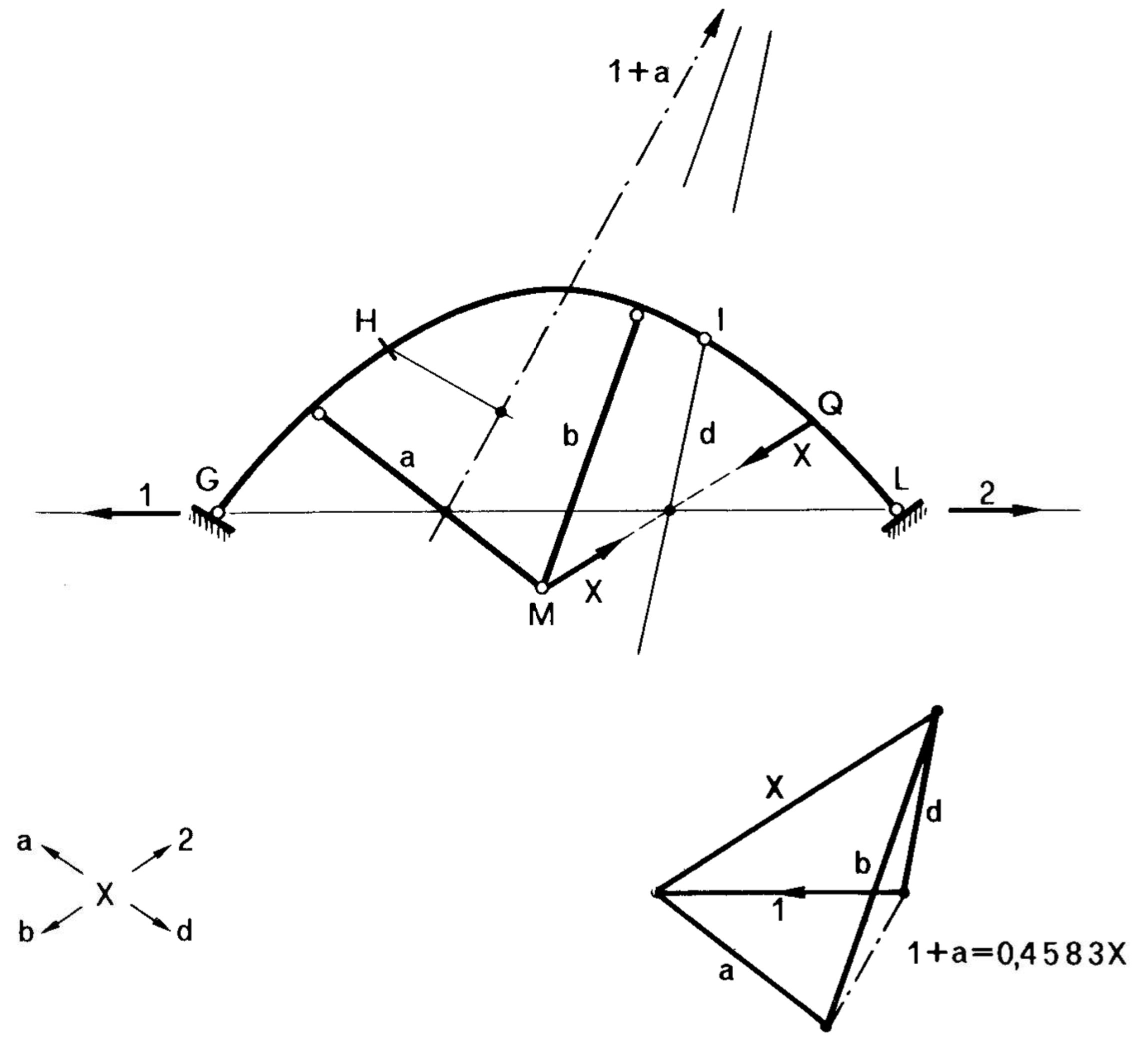


Figura 17c

nistra, e quindi 2 verso destra; inoltre *d* è diretto verso il basso se agente da I L su G I; *b* verso l'alto, ed *a* verso il basso, se agenti sulla struttura (*a* è tirante, *υ* è puntone).

Sulla struttura agisce, a sinistra di H, la forza 1 + a, diretta verso il basso(*); è quindi

(*) La forza 1 + a agisce sulla retta

$$r_{1+a} \quad \ni \quad 1 \cap a,\ b \cap d$$

in virtù della notazione 1 + a + b + d = 0.

$$M'_H = (1 + a)\, d_{H,1+a} = 0{,}4583\, X\, d_{H,1+a}$$

Dalla Fig. 17b risulta poi

$$M_H = -\,1 \cdot d_{H,1} = -\,0{,}7660\, F\, d_{H,1}\ .$$

E' perciò

$$0{,}4583\, X\, d_{H,1+a} - 0{,}7660\, F\, d_{H,1} = 0$$

da cui

$$X = \frac{0{,}7660}{0{,}4583}\ \frac{d_{H,1}}{d_{H,1+a}}\ F = 1{,}6714 \cdot 0{,}7390\, F =$$

$$= 1{,}2351\, F \text{ (tirante)}\ .$$

Ottenuto X, e cioè *c*, tutti gli altri sforzi sono determinati.

Problema n. 18.

1) *Computo dei vincoli.*

t = 5
s = 15 (due bipendoli, cinque cerniere binarie, un pendolo).

Che la struttura sia isostatica deve riconoscersi attraverso un'indagine sui centri.

2) *Ricerca delle reazioni.*

Le notazioni di equilibrio sono (Fig. 18a)

$$\begin{aligned} 1 + a + F + c &= 0 \\ c + d &= 0 \\ d + b + 3 &= 0 \\ F + 1 + 2 + 3 &= 0 \\ a + b + 2 &= 0\ . \end{aligned} \qquad (19)$$

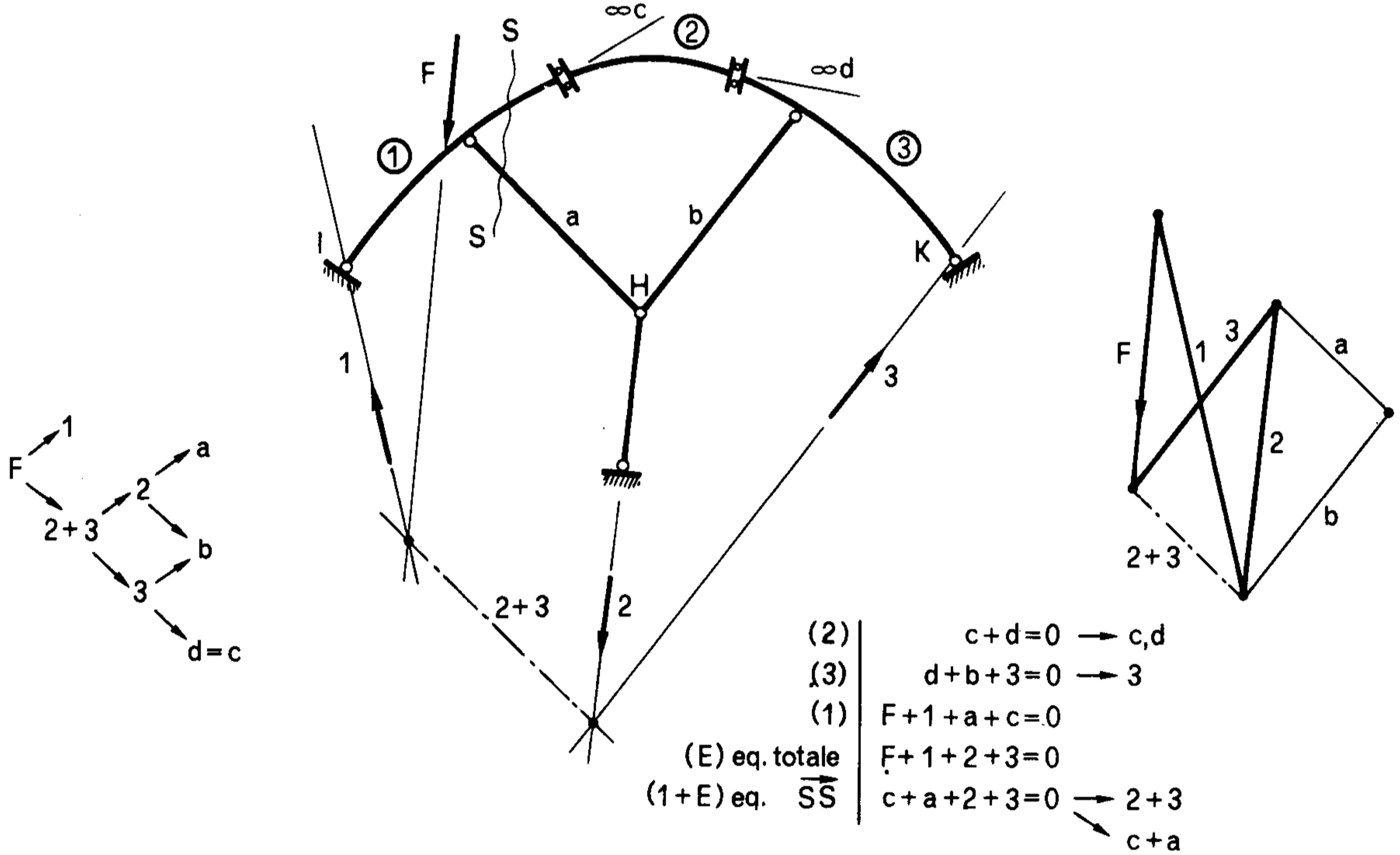

F
S
∞c
②
∞d
①
③
a
b
S
I
K
H
1
3
2
2+3
F
1
3
a
2
b
2+3
F → 1
F → 2+3
2+3 → 2
2 → a
2 → b
2+3 → 3
3 → b
3 → d=c
(2) | c+d=0 → c,d
(3) | d+b+3=0 → 3
(1) | F+1+a+c=0
(E) eq. totale | F+1+2+3=0
(1+E) eq. $\overrightarrow{SS}$ | c+a+2+3=0 → 2+3
→ c+a

Figura 18a

Dalla seconda delle (19), relativa al tratto 2 , si trae che *c* e *d* hanno la stessa retta d'azione; poichè gli assi dei bipendoli hanno diversa direzione, le reazioni *c* e *d* devono essere due coppie uguali e contrarie. Si pensi pure che 2 può essere considerato un pendolo, i cui estremi giacciono sulla retta impropria del piano, e quindi la reazione di tale pendolo agisce secondo la retta impropria, e cioè è una coppia.

Dalla terza delle (19), relativa al tratto 3 , si trae che *b* e 3 devono dar luogo ad una coppia; poichè la direzione di *b* è nota, se ne trae quella di 3:

$$\mathrm{r}_3 \ni \mathrm{k}, \infty\, \mathrm{L} \ .$$

Dalla quarta e dalla prima delle (19) relative a tutta la struttura(*) ed al tratto 1 , si trae

$$\mathrm{a} + 2 + 3 + \mathrm{c} = 0 \ . \qquad (20)$$

Quindi, poichè le quattro forze sono tutte conosciute in retta d'azione, dalla

$$2 + 3 = \mathrm{c} + \mathrm{a}$$

si trae la comune retta d'azione di $2 + 3$ e di $\mathrm{c} + \mathrm{a}$:

$$\mathrm{r}_{2+3} = \mathrm{r}_{c+a} \ni 2 \cap 3, \quad \mathrm{a} \cap \infty \ .$$

Per la quarta delle (19), la retta d'azione di 1 è

$$\mathrm{r}_1 \ni 1, \mathrm{F} \cap (2 + 3) \ .$$

Scomponendo F secondo r_1 ed r_{2+3}, $2 + 3$ secondo r_2 ed r_3, 2 secondo r_a ed r_b, si hanno tutte le reazioni; per verifica, 3 e *b* devono risultare dello stesso valore, parallele ed opposte. La coppia generata da 3 e *b* è la comune reazione *c* e *d*. Percorrendo il poligono F 1 2 3 nel verso di F si ottengono i versi delle tre reazioni esterne. Per l'equilibrio del nodo H il poligono 2 *a b* deve essere chiuso percorrendolo nel verso in cui 2 è diretto verso il basso (tale è l'azione del pendolo 2 sul nodo H, *b*

(*) La notazione di equilibrio globale si indica con (E).

ed a sono dirette verso l'alto; quindi a e b sono tiranti; ed agiscono sulla struttura verso il basso.

Si osservi che la (20) è la condizione di equilibrio della parte a destra della sezione S S (Fig. 18a).

3) *Il caso in cui una forza agisce sul tratto a.*

Nel caso in cui (Fig. 18b) una forza F agisce sul tratto a, il problema non è risolubile per via elementare. Si scompone allora la F in due forze agenti nei due estremi G ed H del tratto a; la prima va trattata come già fatto in questo esercizio (Fig. 18a), poiché può considerarsi come agente sul tratto (1) ; la seconda non offre difficoltà (Figura 18b).

Si ha infatti

$$\begin{aligned} F + 1 + 2 + 3 &= 0 \\ I + a + c &= 0 \\ c + d &= 0 \\ d + b + 3 &= 0 \,. \end{aligned} \tag{21}$$

Dalla terza delle (21) si ricava, come già fatto prima, che i due bipendoli sviluppano due coppie uguali e contrarie; dalla quarta delle (21) si ha poi che r_3 è parallela all'asse del pendolo b.

Dalla seconda si trae che r_1 è parallela all'asse del pendolo a; non resta quindi che scomporre F secondo r_3 ed r_{1+2} ($r_{1+2} \ni 1 \cap 2, 3 \cap F$, come risulta dalla prima delle 15), e poi $1 + 2$ secondo r_1 ed r_2. Si osserva che b ed a sono uguali e contrari a 3 ed 1; agenti sulla struttura, a è diretto verso il basso, e così pure b; quindi a e b sono ambedue tiranti. Considerate agenti sul tratto (2) , la coppia c è oraria, la coppia d è antioraria; quindi in BC le fibre tese sono quelle inferiori. Il valore comune delle coppie c e d è pari a

$$1 \cdot d_{1a} = 3 \cdot d_{3b} \,.$$

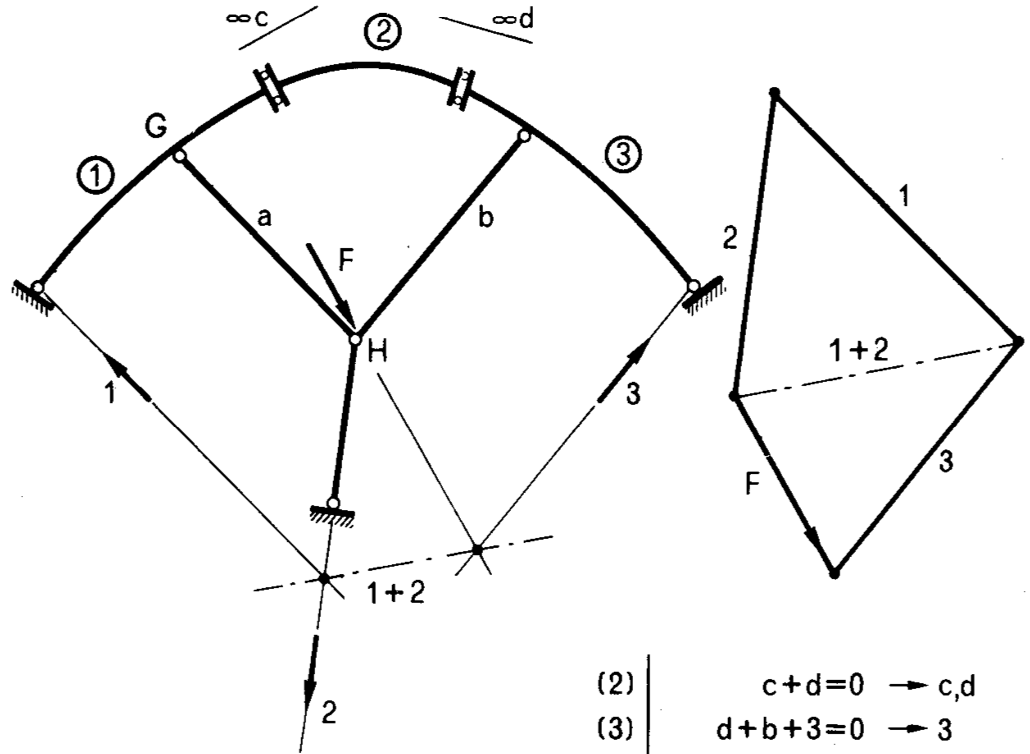
Problema n. 19.

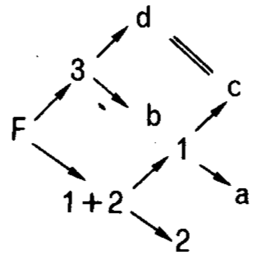
1) *Computo dei vincoli.*

$t = 2$

$s = 6$ (due cerniere binarie, un pendolo, un pendolo improprio)

$3t - s = 0.$





(2)	$c+d=0 \rightarrow c,d$
(3)	$d+b+3=0 \rightarrow 3$
(1)	$1+a+c=0 \rightarrow 1$
(E)	$F+1+2+3=0 \rightarrow 1+2 \rightarrow 1,2,3$
	$\searrow 3+F \nearrow$

Figura 18b

La struttura è isostatica perchè, soppresso il pendolo improprio, (1) ruota rispetto a (2) intorno al punto CD $\cap$ a, che è proprio, ed il pendolo

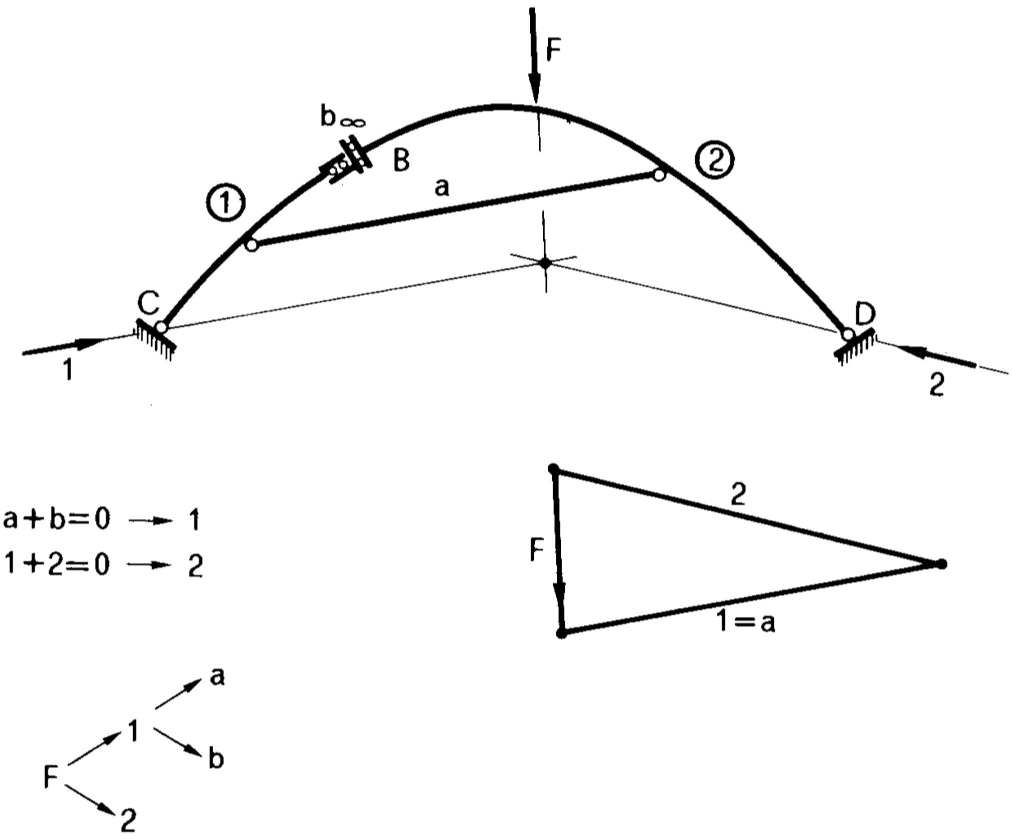


Figura 19

improprio invece consente solo traslazioni relative, e cioè rotazioni relative con centro improprio.

2) *Ricerca delle reazioni.*

Si ha

$$\begin{aligned} 1 + a + b &= 0 \\ 1 + F + 2 &= 0 \,. \end{aligned} \qquad (22)$$

Dalla prima delle (22), notazione di equilibrio del tratto (1), si ha che, essendo la reazione *b* una coppia, r_1 è la parallela per C all'asse di *a*:

$$r_1 \ni C \;,\; a \cap r_a$$

Dalla seconda delle (22), notazione di equilibrio globale, si trae

$$r_2 \ni D \ , \ F \cap 1 \ .$$

Si scompone F secondo r_1 ed r_2: la reazione a è pari in valore ad 1, ed è diretta sulla struttura verso sinistra; il pendolo perciò è un puntone. La coppia b è pari al prodotto

$$b = 1 \cdot d_{1a} \ .$$

ed è antioraria su (2) (fibre superiori tese in B).

Problema n. 20.

1) *Computo dei vincoli.*

$t = 3$
$s = 9$ (tre cerniere binarie, un pendolo improprio, due pendoli)
$3t - s = 0.$

Il tratto (1) e quello (2) costituiscono un unico insieme rigido; infatti, soppresso il pendolo improprio, gli spostamenti relativi possibili tra (1) e (2) sarebbero le rotazioni intorno ad E, mentre il pendolo improprio consente solo traslazioni relative. Si è quindi in presenza di un arco a tre cerniere H D K con cerniere non allineate, e perciò $l = 0$; la struttura è isostatica.

2) *Ricerca delle reazioni.*

Si hanno le notazioni

$$\begin{aligned} 1 + F + 2 \qquad &= 0 \\ 2 + d \qquad\qquad &= 0 \\ 1 + a + b + c &= 0 \ . \end{aligned} \tag{23}$$

Dalla seconda delle (23), relativa al tratto (3), si trae

$$r_2 = r_d \ .$$

Dalla prima delle (23), relativa all'equilibrio globale, si ha poi

$$r_1 \ni H,\ F \cap 2\ ;$$

dalla terza delle (23), relativa al tratto (1), si trae infine che $a + b$ è parallela ad 1, poichè con essa deve generare una coppia uguale a c:

$$r_{a+b} \ni E,\ 1 \cap \infty\ .$$

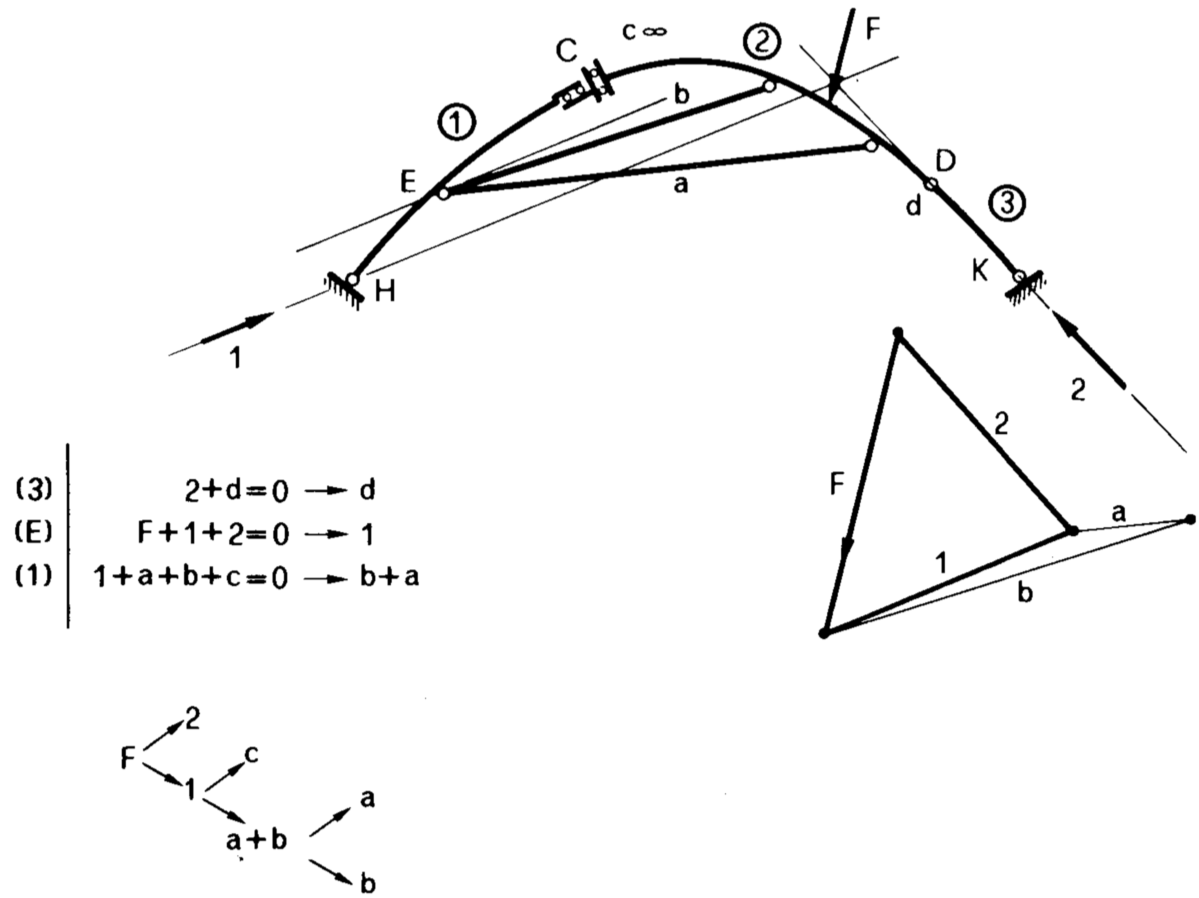


Figura 20

Si scompone perciò la F secondo r_1 ed r_2, e la 1, pari ad a + b, secondo r_a ed r_b. La a agisce su (1) verso destra, la b verso sinistra; quindi a è un tirante, b un puntone. La coppia c su (1) è oraria, e pari a

$$c = 1 \cdot d_{1,\, a+b}\ ;$$

le fibre superiori in C sono tese.