

L'equazione di Lagrange può scriversi perciò come segue:

$$- 3 \cdot 0,533 + 1,5 \cdot 1,3 - 2 \left( -\frac{2}{3} \right) - R \cdot 1,4 = 0$$

da cui

$$R = \frac{- 3 \cdot 0,533 + 1,5 \cdot 1,3 + 4 \cdot 0,333}{1,4} = 1,202 \text{ t.}$$

Conviene osservare che in realtà la sola deformata  $v$  è stata sufficiente per il calcolo di  $R$ . Questa deformata, nella scala in cui

$$DE = - 1,$$

è pure la *linea d'influenza*  $r^{F_y}$  della reazione del pendolo per forze verticali  $F_y$  viaggianti.

Nella Fig. 13a è stata disegnata anche la linea  $r^{F_z}$  per forze orizzontali  $F_z$  viaggianti, e nella Fig. 13c la linea  $r^m$  per coppie viaggianti; i tratti della prima sono ortogonali ai corrispondenti della  $r^{F_y}$ , la seconda è il diagramma delle inclinazioni di  $r^{F_y}$ .

Si osservi che i diagrammi  $v$  e  $w$  sono soltanto le parti del primo ordine in  $c$ , generica coordinata lagrangiana, che non appare esplicitamente.

#### Problema n. 14.

Nella struttura della Fig. 14 si vuole la linea d'influenza  $t_S^{F_y}$ ; effettuata in  $S$  la sconnessione semplice corrispondente al taglio, la struttura risulta costituita da quattro parti rigide, quindi  $n = 4$ .

La tabella dei centri è

	1	2	3	4
1	1	12	13	14
2		2	23	24
3			3	34
4				4

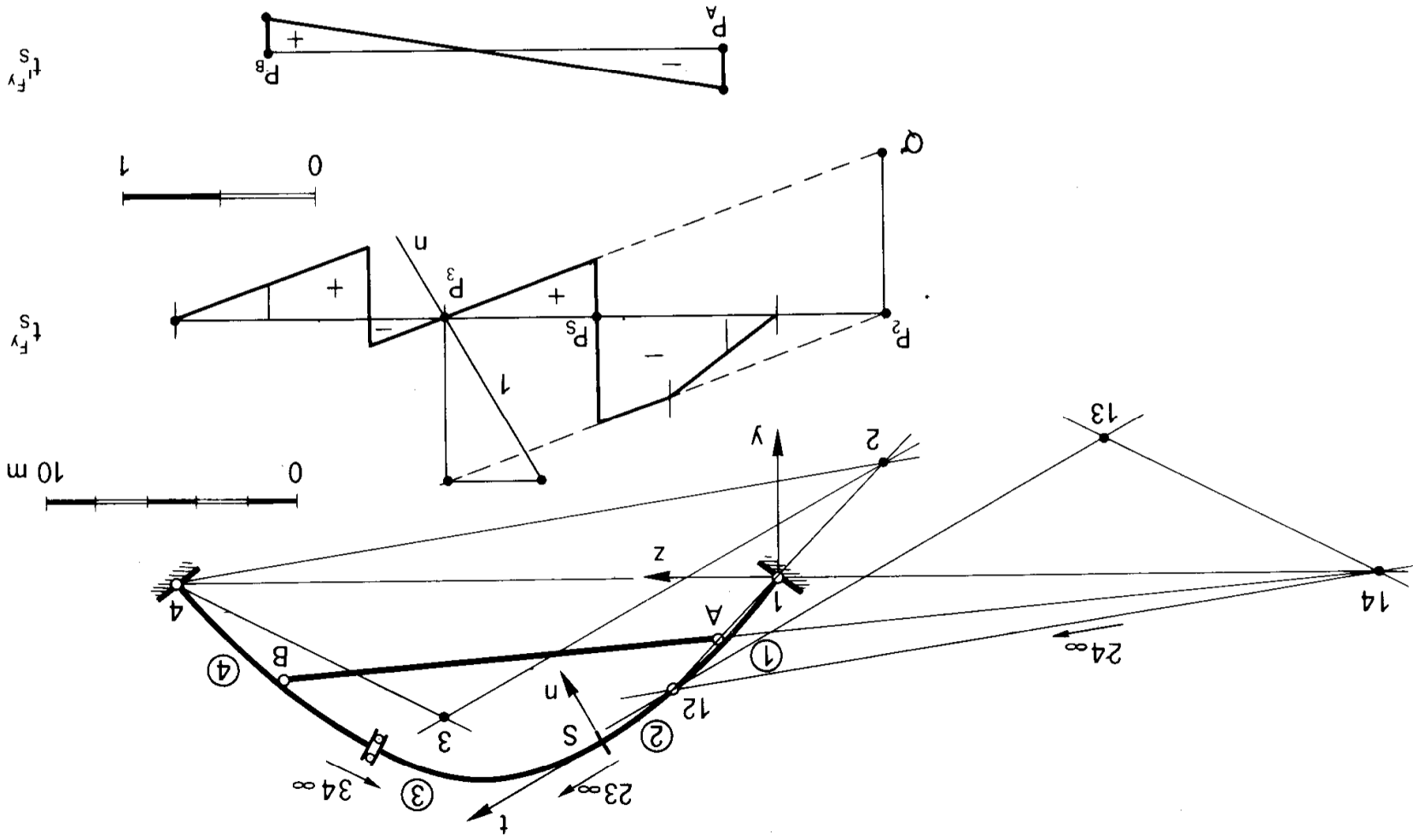


Figura 14

dove sono in corsivo i centri noti a priori. E' pure

$$2n - 1 = 7$$

$$\frac{(n + 1)n}{2} = 10 .$$

Occorre quindi trovare altri 2 centri; si badi però che molte volte, per necessità grafiche, è opportuno trovarne anche di più; in genere, se la struttura è semplice, essi si calcolano tutti. Nel caso in esame si ha che  $C_{14}$  deve giacere sulla  $C_1 C_4$ , che è nota, e sull'asse del pendolo AB; quindi  $C_{14}$  è determinato. Successivamente si trovano gli altri centri, come di seguito

noti	incogniti
1	14 = 1 · 4 ∩ AB
12	24 = 14 · 12 ∩ 23 · 34
23	13 = 12 · 23 ∩ 14 · 34
34	2 = 1 · 12 ∩ 4 · 24
4	3 = 1 · 13 ∩ 2 · 23 ∩ 4 · 34

In genere, conoscendo i primi sette centri della tabella sarebbe possibile tracciare nell'ordine i segmenti della deformata secondo y corrispondenti ai tratti (1), (4), (2), (3). Nel caso in esame però, dopo aver tracciato il segmento sub (1), quello sub (4) [che ha punto di nullo sub  $C_4$  ed interseca il primo sub  $C_{14}$ ] e quello sub (2) [che interseca il segmento sub  $C_{12}$  ed il segmento sub (4) sub  $C_{24}$  (e cioè è ad esso parallelo)], non può tracciarsi il segmento sub (3), di cui si sa solo che è parallelo ai segmenti sub (2) e sub (4). Occorre quindi conoscere un ottavo centro. Come si evince dalla Fig. 14, si è tracciato prima ad arbitrio il segmento sub (1), poi quello sub (2) utilizzando  $C_2$  e  $C_{12}$ , poi quello sub (3) utilizzando  $C_{23}$  e  $C_3$ , e poi quello sub (4) utilizzando  $C_{34}$  e  $C_4$ .

La deformata si è tracciata in modo che  $T_S > 0$  compia lavoro negativo; assumendo unitario il modulo di  $D_{t_S}$  (ottenibile dalla componente verticale  $P_2 Q$ , come si osserva nella figura) si ha la  $t_S^y$ .

Se la  $F_y$  viaggia sul pendolo, AB, la  $t_s^{F_y}$  è un segmento di retta compreso tra le verticali per A e B, i cui valori estremi sono le stesse ordinate che si leggono sotto A e B nella linea tracciata prima.

### Problema n. 15.

Con riferimento alle due strutture degli esercizi 13 e 14, si vuole riconoscere la loro natura in ordine alla deformabilità; trattandosi di strutture composte di parti rigide collegate tra loro ed al suolo, la deformabilità va intesa in generale, e cioè come possibilità di variazioni nella posizione assoluta o relativa delle varie parti, e non in relazione al volume elementare.

Si ricorda che, se  $t$  è il numero dei tratti rigidi monoconnessi<sup>(\*)</sup>, ed

$$l = 3t - s + i$$

da cui<sup>(\*\*)</sup>

$$3t - s = l - i. \quad (29)$$

La struttura è *labile* (o *meccanismo*) se  $l \geq 1$ ; è *iperstatica* se  $i \geq 1$ ; quindi si hanno le due implicazioni semplici

$$\begin{aligned} 3t - s > 0 &\Rightarrow \text{struttura labile} \\ 3t - s < 0 &\Rightarrow \text{struttura iperstatica} \end{aligned} \quad (30)$$

La struttura si dice *isostatica* se non è nè labile nè iperstatica; vale

---

(\*) Un tratto rigido monoconnesso può anche essere considerato come due tratti, collegati da un vincolo triplo; ciò si fa, per esempio, quando si ricerca una caratteristica della sollecitazione.  
 (\*\*) I vincoli si possono successivamente introdurre, sui  $t$  tratti, in un ordine qualsiasi, senza che perciò vari  $i$ ; infatti, per la (29), è

$$l' - i' = l - i;$$

e poichè  $l' = l$ , grado di libertà effettivo del sistema, deve essere pure  $i' = i$ . Il numero  $i$  è il *grado di iperstaticità* della struttura.

cioè la doppia implicazione (di definizione)

$$l = i = 0 \iff \text{struttura isostatica.} \quad (31)$$

Dalla (31) si ricava

$$3t - s = 0 \iff \text{struttura isostatica} \quad (32)$$

Si è in presenza di un triangolo logico, così rappresentabile

$$\begin{array}{ccc} 3t - s = 0 & & l = 0 \\ & \triangle & \\ i = 0 & & ; \end{array} \quad (33)$$

due qualsiasi delle tre proposizioni di vertice implicano l'altra, e quindi l'isostaticità della struttura.

Si osservi che, in quanto detto, le forze agenti sulla struttura non sono entrate in gioco.

Dalla (33) si trae che, per assicurarsi della isostaticità della struttura, basta verificare due delle tre proposizioni di vertice, in particolare

$$\begin{array}{l} 3t - s = 0 \\ l = 0 . \end{array} \quad (34)$$

La prima si riduce ad un banale computo numerico, per la seconda soccorre l'algoritmo delle catene cinematiche, nei modi che tra poco esporremo.

Una struttura isostatica, come ora definita, costituisce, per qualsiasi insieme di forze applicate, un sistema isostatico nei riguardi di *ogni* reazione propria; ed infatti, una qualsiasi sconnessione semplice deve dar luogo ad un grado di libertà (altrimenti quel vincolo sarebbe sovrabbondante, e quindi  $i > 0$ ), e ad uno solo; ad esso si accompagnano spostamenti determinati a meno di una costante, con uno spostamento non nullo in corrispondenza del vincolo soppresso.

Della suddetta proposizione vale la reciproca, e cioè se il sistema è isostatico per qualsiasi insieme di forze applicate e rispetto ad *ogni* reazione, la struttura è non labile e non iperstatica, e cioè è isostatica. Infatti, se

fosse iperstatica o labile, almeno per qualche forza le reazioni sarebbero indeterminate o incompatibili<sup>(\*)</sup>. Si può scrivere quindi la doppia implicazione

$$\text{struttura isostatica} \iff \text{sistema } R \text{ isostatico } \forall R, S_F. \quad (35)$$

avendo chiamato  $R$  isostatico un sistema isostatico rispetto ad  $R, S_F$  un insieme di forze applicate. Conseguenza immediata della (35) è che, se una qualsiasi reazione si presenta sotto forma indeterminata o  $\infty$ , la struttura non è isostatica; se lo fosse, infatti, cadrebbe in difetto la  $\Rightarrow$  della (35).  
Se

$$3t - s = 0$$

la seconda implicazione ( $\Leftarrow$ ) della (35)) assume particolare rilievo, poiché è limitata ad una sola condizione di carico: se, con riferimento a ogni reazione, il sistema costituito dalla trave e da un generico insieme di forze applicate è isostatico, la struttura è isostatica. Infatti, se a qualsiasi connessione semplice si accompagna un meccanismo ad un grado di libertà, ed in questo meccanismo il movimento corrispondente alla connessione è  $\neq 0$ , ciò vuol dire che il vincolo soppresso non è superfluo, e cioè  $i = 0$ ; per la (33) quindi la struttura è isostatica.

In senso per così dire duale, può anche dirsi che, se  $3t - s = 0$ , la  $\Leftarrow$  delle (35) è limitata ad una sola reazione. Se infatti una generica reazione è determinata per ogni condizione di carico, ciò vuol dire che il meccanismo generato dalla soppressione del vincolo corrispondente a quella reazione è ad un solo grado di libertà; quindi la struttura data presenta

---

(\*) La (1), nella ricerca di una  $R$  generica, si scrive

$$cL_F + Rc\delta = 0,$$

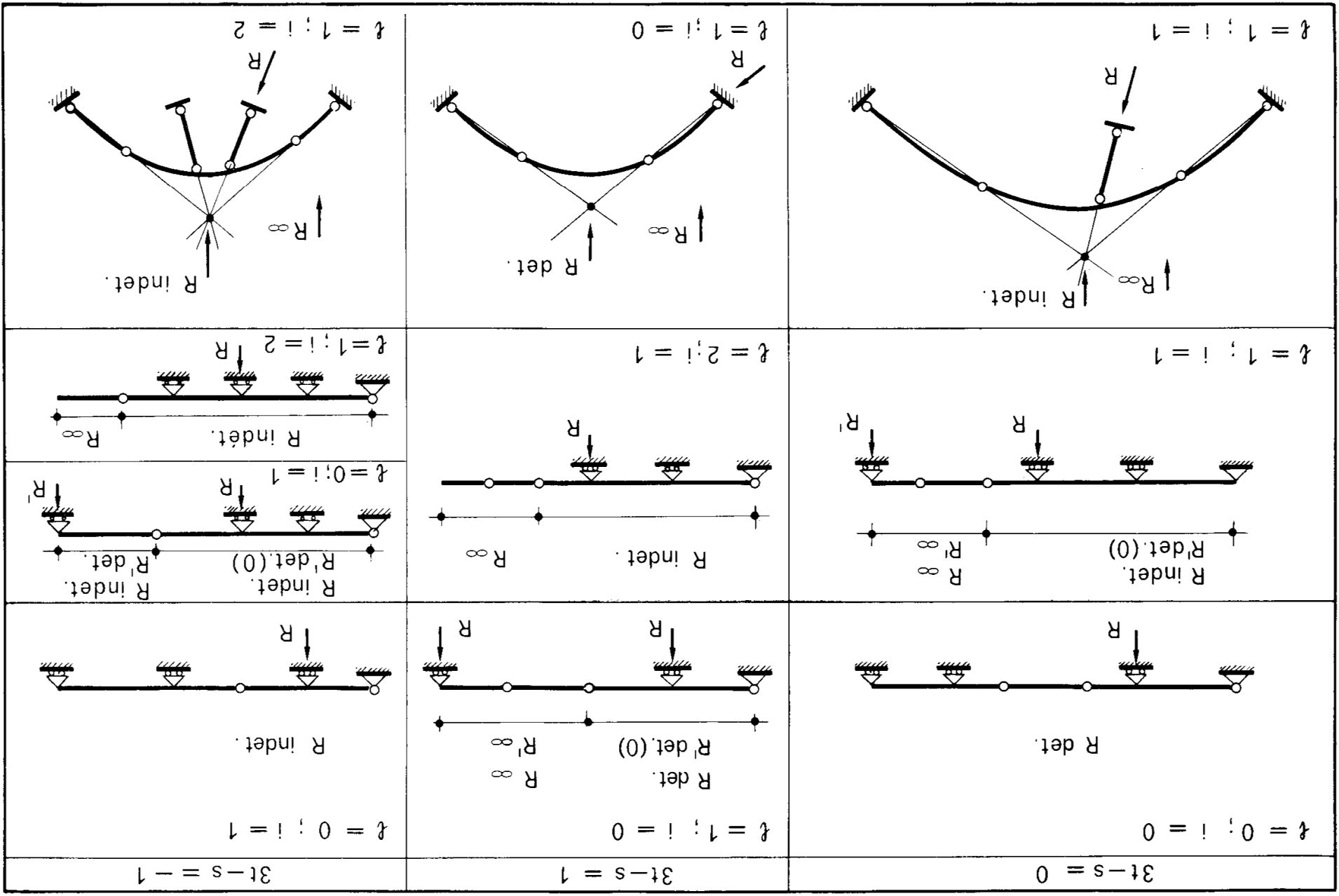
dà cui

$$R = -\frac{L_F}{\delta}.$$

Ciò può farsi solo se  $\delta \neq 0$ ; se  $\delta = 0$ , la  $R$  può assumere l'aspetto  $0/0$ , e cioè è *indeterminata*, o  $-L_F/0$ , e cioè l'aspetto  $\infty$ . In questo secondo caso, dire che  $R = \infty$  significa solo voler indicare che nessun valore di  $R$  può soddisfare l'equilibrio, e cioè  $R$  è *incompatibile*.

Se la struttura è iperstatica, c'è almeno una  $R$  per cui  $\delta = 0$ , e quindi  $R$  è indeterminata (o incompatibile). Se è labile possono darsi due casi; o le forze applicate sulla parte labile sono in equilibrio sulla configurazione, e allora la  $R$  è determinata; o le forze non sono in equilibrio sulla configurazione, e allora la  $R$  è incompatibile.

Figura 15



$l = 0$ , e per la (33) è isostatica.

Nei due casi delle Figg. 13 e 14 è  $3t - s = 0$ , e la  $\Leftarrow$  della (35) è soddisfatta.

In ambedue risulta infatti

$$t = 3$$

$$s = 9$$

$$3t - s = 0 .$$

Nel primo, il meccanismo generato dalla soppressione del pendolo è univocamente determinato, a meno di una costante, e si accompagna ad uno spostamento del punto A nella direzione del pendolo stesso; quindi, la R del pendolo è determinata e finita per qualsiasi insieme di forze applicate, e ciò assicura che la struttura è isostatica. Nel secondo, il meccanismo generato dalla sconnessione da taglio in S è pure univocamente determinato, e si accompagna ad un  $D_t \neq 0$ .

Non è forse superfluo riassumere, con alcuni elementari schemi di esempio (Fig. 15), i casi fin qui incontrati. Se la struttura è isostatica (35) ogni reazione, per qualsiasi condizione di carico, è determinata e viceversa. Se la struttura non è isostatica, una qualsiasi reazione può essere determinata o presentarsi sotto forma indeterminata o  $\infty$ . Se una reazione si presenta sotto forma indeterminata o  $\infty$ , la struttura è sicuramente non isostatica. Se poi  $3t - s = 0$ , basta che una sola reazione sia determinata per tutte le possibili condizioni di carico, e cioè che una sola linea d'influenza di reazione sia definita (a un sol valore), per dedurne che la struttura è isostatica.

Così pure, se  $3t - s = 0$ , basta che per una sola condizione di carico siano determinate tutte le reazioni, per dedurne che la struttura è isostatica.

### Problema n. 16.

Nella struttura della Fig. 16 la condizione necessaria di isostaticità è soddisfatta: si ha infatti  $t = 5$  (tratti 1 2 3 a b) ed  $s = 15$  (sei cerniere, un bipendolo ed un pendolo). Si vuole conoscere la linea d'influenza  $n^y$  dello sforzo N nel pendolo AB per forze verticali viaggianti sull'arco. Si sopprime il pendolo AB; la struttura acquista un grado di libertà. Poichè  $n = t = 5$ , il numero di centri sufficiente è  $2n - 1 = 9$ , mentre tutti i possibili centri sono  $\frac{n(n+1)}{2} = 15$ . I centri noti sono quelli indicati sulla



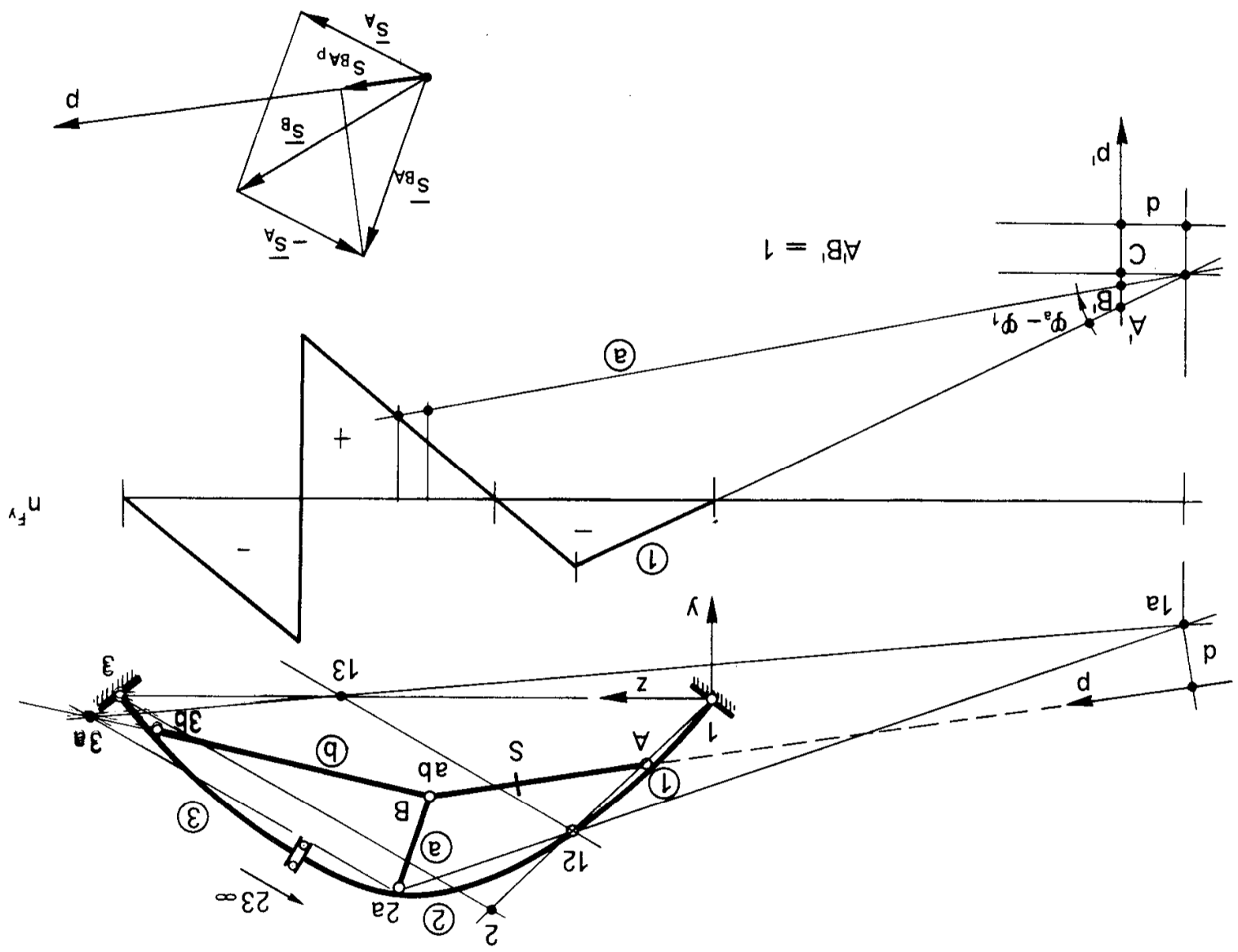


Figura 16

sinistra della tabella

noti	incogniti
1	$2 = 1 \cdot 12 \cap 3 \cdot 23$
12	$13 = 1 \cdot 3 \cap 12 \cdot 23$
23	$3a = ab \cdot 3b \cap 23 \cdot 2a$
3	$1a = 12 \cdot 2a \cap 13 \cdot 3a$
ab	
2a	
3b	

dove è anche indicata la costruzione di 2, 13, 3a, 1a.

Si è visto che il numero di centri sufficiente è nove, ma non ci si può fermare a  $C_{13}$ ; mentre infatti i centri  $C_1 C_{12} C_{23} C_3 C_2$  bastano per tracciare la deformata relativa ai tratti  $\textcircled{1}$   $\textcircled{2}$  e  $\textcircled{3}$ , il centro  $C_{13}$  è inutilizzabile ai fini della costruzione della deformata relativa ai tratti  $\textcircled{a}$  e  $\textcircled{b}$ , pur necessaria per determinare la scala. Basterebbe la conoscenza di  $C_{3a}$  per cogliere lo scopo; infatti il segmento sub  $\textcircled{a}$  taglia sub  $C_{3a}$  il segmento sub  $\textcircled{3}$ , e sub  $C_{2a}$  il segmento sub  $\textcircled{2}$  (in modo analogo si può avere il segmento sub  $\textcircled{b}$  utilizzando  $C_{ab}$  e  $C_{3b}$ ).

Si è preferito invece tracciare il segmento sub  $\textcircled{a}$  utilizzando i centri  $C_{2a}$  e  $C_{1a}$ , poichè interessa infine determinare la variazione di distanza tra A e B, e quindi l'angolo  $\varphi_{1a} = \varphi_a - \varphi_1$ . La variazione di distanza tra i due punti A e B si determina assegnando innanzitutto un verso all'asse  $p$  del pendolo AB. Si riporta poi  $p$  in  $p'$  parallelo ad  $y$ , in modo che, solidariamente ad essa,  $C_{1a}$  vada a finire nella sua proiezione sulla fondamentale; e cioè  $p$  ruota rigidamente intorno a  $C_{1a}$  fino a disporsi parallelo ad  $y$ .

La variazione di distanza  $\Delta l_{AB}$  tra i due punti A e B, dove B segue A nel verso di  $p$ , è la componente secondo  $p$  dello spostamento di B rispetto ad A, e cioè del vettore  $\overline{s}_B - \overline{s}_A = \overline{s}_{BA}$ :

$$\Delta l_{AB} = s_{Bp} - s_{Ap} = s_{BAp} \quad (36)$$

La componente  $s_{BAp}$  si ottiene considerando che  $\textcircled{1}$  sia fermo, e  $\textcircled{a}$  ruoti di  $\varphi_a - \varphi_1$  intorno a  $C_{1a}$ ; quindi è

$$s_{BAp} = d \cdot (\varphi_a - \varphi_1) . \quad (37)$$

dove  $d$  è la distanza di  $C_{1a}$  da  $p$ .

Si osserva che, se  $A'$  e  $B'$  sono i punti

$$A' = p' \cap \text{sub } \textcircled{1} \quad A \in \textcircled{1}$$

$$B' = p' \cap \text{sub } \textcircled{2} \quad B \in \textcircled{a}$$

risulta, in valore e segno,

$$\Delta I_{AB} = s_{BAp} = A'B' . \quad (38)$$

Per ottenere quindi la variazione di distanza  $\Delta I_{AB}$  tra due punti  $A \in \textcircled{e}$  e  $B \in \textcircled{i}$ , una volta conosciuta la generica deformata  $s_d$ , basta trasportare la retta orientata  $p = AB$  in  $p' \parallel d$ , facendola ruotare intorno a  $C_{ij}$ ; se  $A' = p' \cap \text{sub } \textcircled{i}$ ,  $B' = p' \cap \text{sub } \textcircled{i}$ , è pure  $\Delta I_{AB} = A'B'$ . Nel caso in esame  $d$  coincide con  $y$ .

Come caso particolare viene fuori l'altro, già incontrato nell'esercizio 13: per ottenere la componente  $s_{Ap}$  secondo la retta orientata  $p \ni A$  di un punto  $A \in \textcircled{i}$ , basta trasportare la retta  $p$  in  $p' \parallel d$ , facendola ruotare intorno a  $C_i$ ; se  $A' = p' \cap \text{sub } \textcircled{i}$ , e  $O' = p' \cap f$ , dove  $f$  è la fondamentale del diagramma  $s_a$ , è pure  $s_{Ap} = O'A'$ .

Poichè le due reazioni del pendolo sulla struttura sono positive se  $R_A$  ed  $R_B$  convergono (pendolo *tirante*), la distorsione da imprimere tra  $A$  e  $B$  deve essere tale che  $R_A$  ed  $R_B$  compiano lavoro negativo, e cioè  $A$  e  $B$  devono allontanarsi; quindi il segno della deformata è proprio quello della linea d'influenza. In quanto alla scala, basta porre  $A'B' = 1$ .

### ✕ Problema n. 17.

Si vuole la linea d'influenza  $m_s^{fy}$  del momento nella sezione  $S$  della struttura della Fig. 17, per forze verticali viaggianti. La struttura soddisfa la condizione necessaria di isostaticità:  $t = 3$ ,  $s = 9$ ,  $3t - s = 0$ .

Si opera in  $S$  la sconnessione corrispondente al momento, e cioè si introduce una cerniera, che consente lavoro alla caratteristica momento.

Si ha così  $n = 4$ ,  $2n - 1 = 7$ . La tabella operativa per la ricerca dei centri è la seguente

noti	incogniti
1	$4 = r_2 \cap r_3$
12	$2 = r_1 \cap 1 \cdot 12$
23	$3 = 2 \cdot 23 \cap 4 \cdot 34$
34	

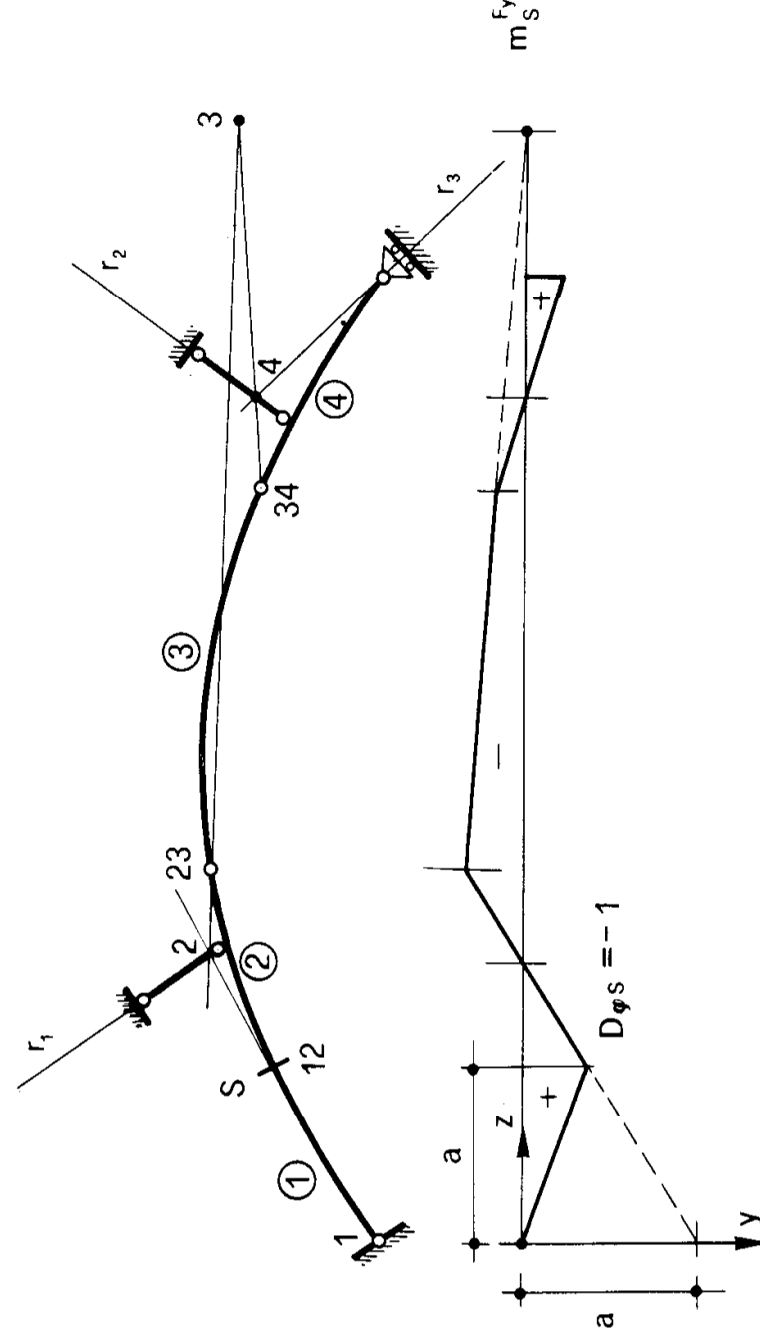


Figura 17

La distorsione da applicare in S è una  $D_{\varphi} = -1$ ; la costruzione della figura, come noto, permette di leggere le ordinate della linea  $m_S^{Fy}$  nella scala delle lunghezze.

/// **Problema n. 18.**

Si vuole la linea d'influenza  $m_S^{Fy}$  del momento nella sezione S della struttura della Fig. 18, per forze verticali viaggianti. Risulta  $t = 3$ ,  $s = 9$ ,

$3t - s = 0$ . Effettuata la sconnessione in S, si riconosce che la parte compresa tra la cerniera d'imposta e la cerniera successiva non è soggetta a

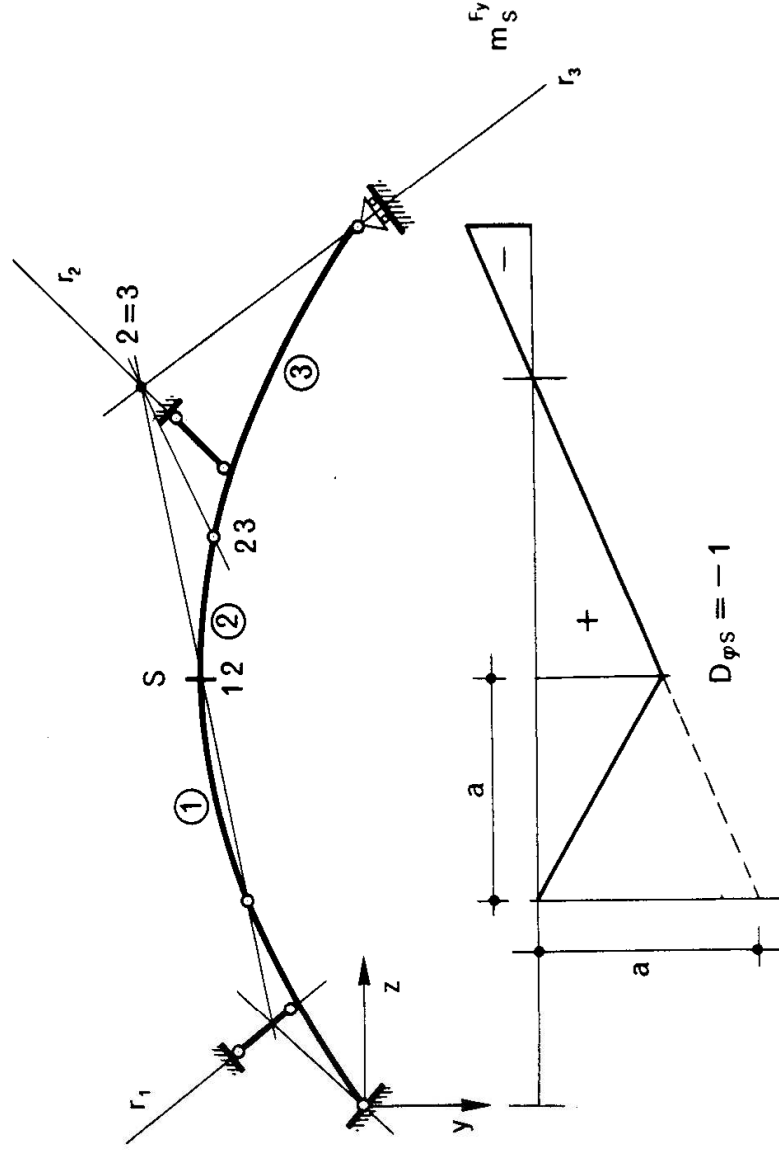


Figura 18

movimenti; quindi  $n = 3$ ,  $2n - 1 = 5$ . Si ha così

noti	incogniti
1	$3 = r_2 \cap I_3$
12	$2 = 1 \cdot 12 \cap 3 \cdot 23$
23	

La costruzione della linea  $m_S^{F_y}$  è ovvia; si nota la particolarità della coincidenza tra i due centri  $C_2$  e  $C_3$ ; costruito il segmento sub ① e quello sub ②, si vede che il segmento sub ③ coincide con quello sub ②. La deformata è però sempre definita a meno di una costante, e  $D_{\varphi_S} \neq 0$ , quindi la struttura è isostatica.

✕ Problema n. 19.

Si vuole la linea d'influenza  $m_S^{F_y}$  del momento nella sezione S della

struttura della Fig. 19, per forze verticali. Risulta  $t = 4$ ,  $s = 12$ ,  $3t - s = 0$ . Effettuata la scossione in  $S$ , risulta  $n = 5$ ,  $2n - 1 = 9$ . La tabella ope-

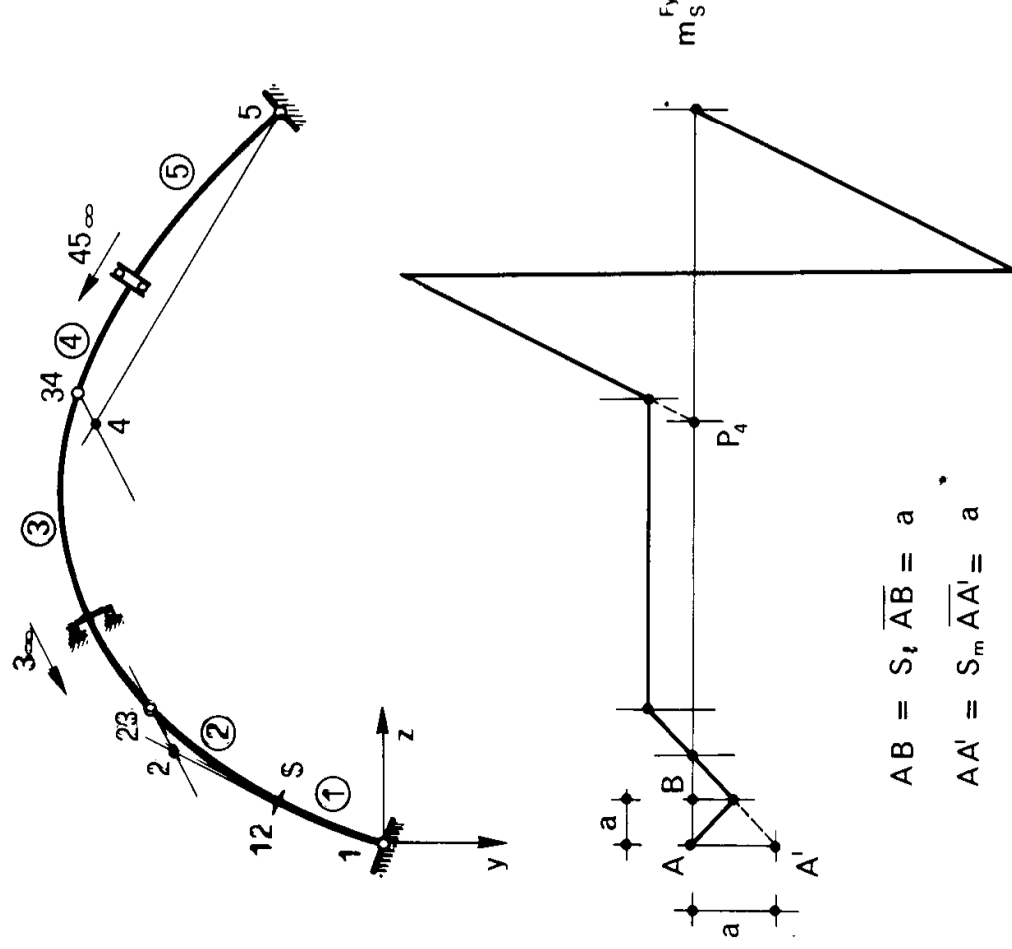


Figura 19

rativa per la ricerca dei centri è la seguente:

noti	incogniti
1	$2 = 1 \cdot 12 \cap 3 \cdot 23$
12	$4 = 3 \cdot 34 \cap 5 \cdot 45$
23	
3	
34	
45	
5	

La linea  $m_s^{Fy}$  si legge in scala diversa da quella delle lunghezze; la scala di  $m_s^{Fy}$  infatti è quella in cui  $\overline{AA'} = a$ , e nella scala delle lunghezze è invece  $\overline{AB} = a$ , dove  $\overline{AA'} \neq \overline{AB}$ .

Problema n. 20.

Si vuole conoscere il diagramma delle componenti secondo  $y$  degli spostamenti dei punti dell'asse della struttura in figura 20a, per effetto di una variazione termica  $\Delta t$  nel pendolo. La lunghezza del pendolo è  $l_p$ , ed  $\alpha$  il coefficiente di dilatazione termica (dilatazione termica riferita all'u-

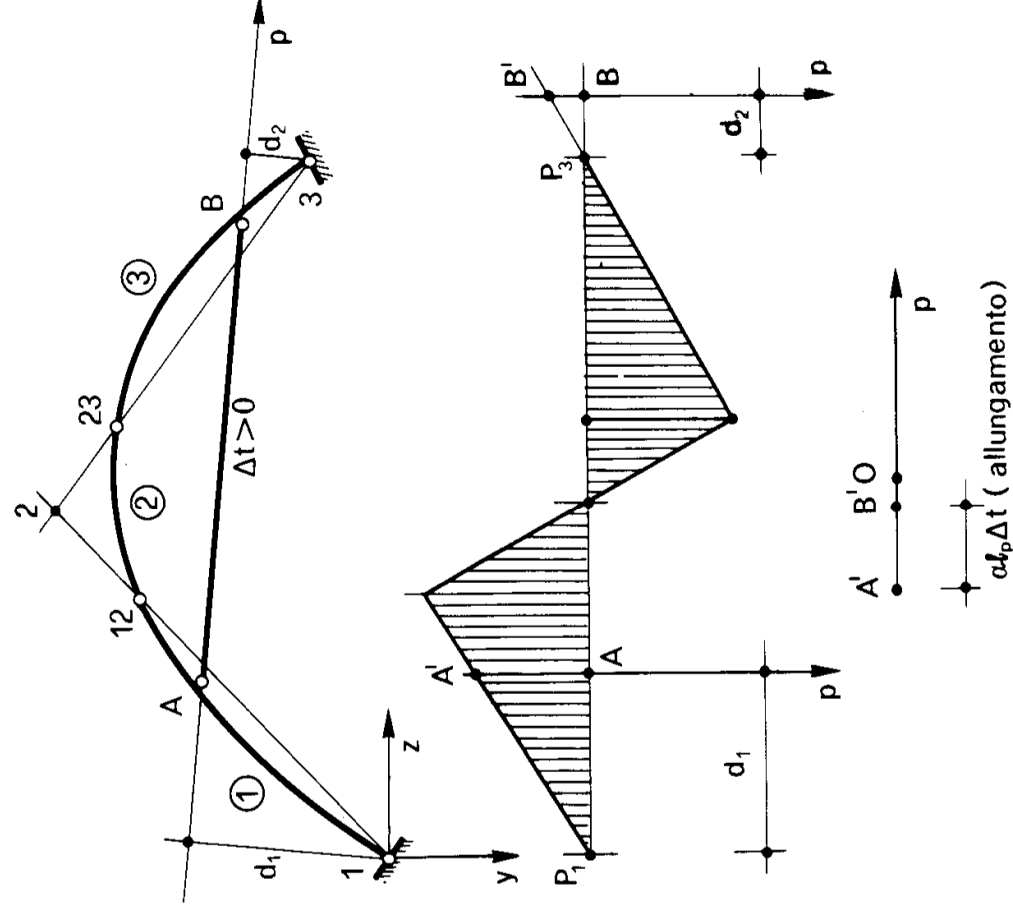


Figura 20a

nità di lunghezza ed alla variazione termica di un grado centigrado) del materiale di cui esso è costituito.

Eliminando il pendolo, la struttura diviene labile: è infatti  $n = 3$ ,  $s = 8$ ,  $3n - s = 1$ ; la tabella operativa dei centri è ( $2n - 1 = 5$ )

1	2 = 1 · 12 ∩ 3 · 23
12	
23	
3	

La deformata è definita, a meno di una costante, e quindi la struttura reale è isostatica. Per conoscere la deformata dovuta a  $\Delta t$ , occorre precisare la costante in funzione di  $\Delta t$ . A ciò fare si traccia una qualsiasi delle  $\infty$  deformate connesse con il grado di libertà, e nella stessa scala si determina la variazione di distanza tra i due estremi A e B collegati dal pendolo. Per quanto già detto negli esercizi 13 e 16, orientata la retta  $p$  (asse del pendolo) nel verso AB, A si sposta, nel verso negativo (sinistra) della quantità  $AA'$ , e B, pure nel verso negativo, della quantità  $BB'$ . Quindi A e B si allontanano della quantità  $A'B'$ . Ciò vuol dire che la linea disegnata è la richiesta deformata, nella scala in cui

$$A'B' = \alpha l_p \Delta t, \quad (39)$$

dove  $\alpha l_p \Delta t$  è l'effettiva variazione di lunghezza del pendolo. Si osservi che, se  $\Delta t > 0$ , A e B si allontanano, e quindi gli spostamenti hanno il segno della figura.

Questo esercizio non tratta della ricerca di una reazione vincolare, ma lo stesso è stato introdotto nel capitolo intitolato al procedimento di Lagrange, poichè in esso si utilizzano le catene cinematiche.

In maniera analoga a quanto fatto in relazione al pendolo, si può operare per una variazione termica  $\Delta t$  agente su uno dei tre tratti rigidi costituenti la struttura; basta inserire in tale tratto uno snodo che consenta la variazione di lunghezza degli estremi, impedendo però ad essi la rotazione relativa, e cioè un bipendolo corrispondente ad una cerniera nel punto  $\infty$  della normale alla congiungente i due estremi. Nella deformata occorre tener presente che il segmento sub  $\textcircled{i}$ , dove con  $i$  è indicato il tratto soggetto alla variazione termica, è unico, ed i punti validi sono gli estremi. Una variazione termica in più tratti può studiarsi per sovrapposizione.



Nella Fig. 20b è riportato il caso in cui  $\Delta t$  agisce sul primo tratto di sini-

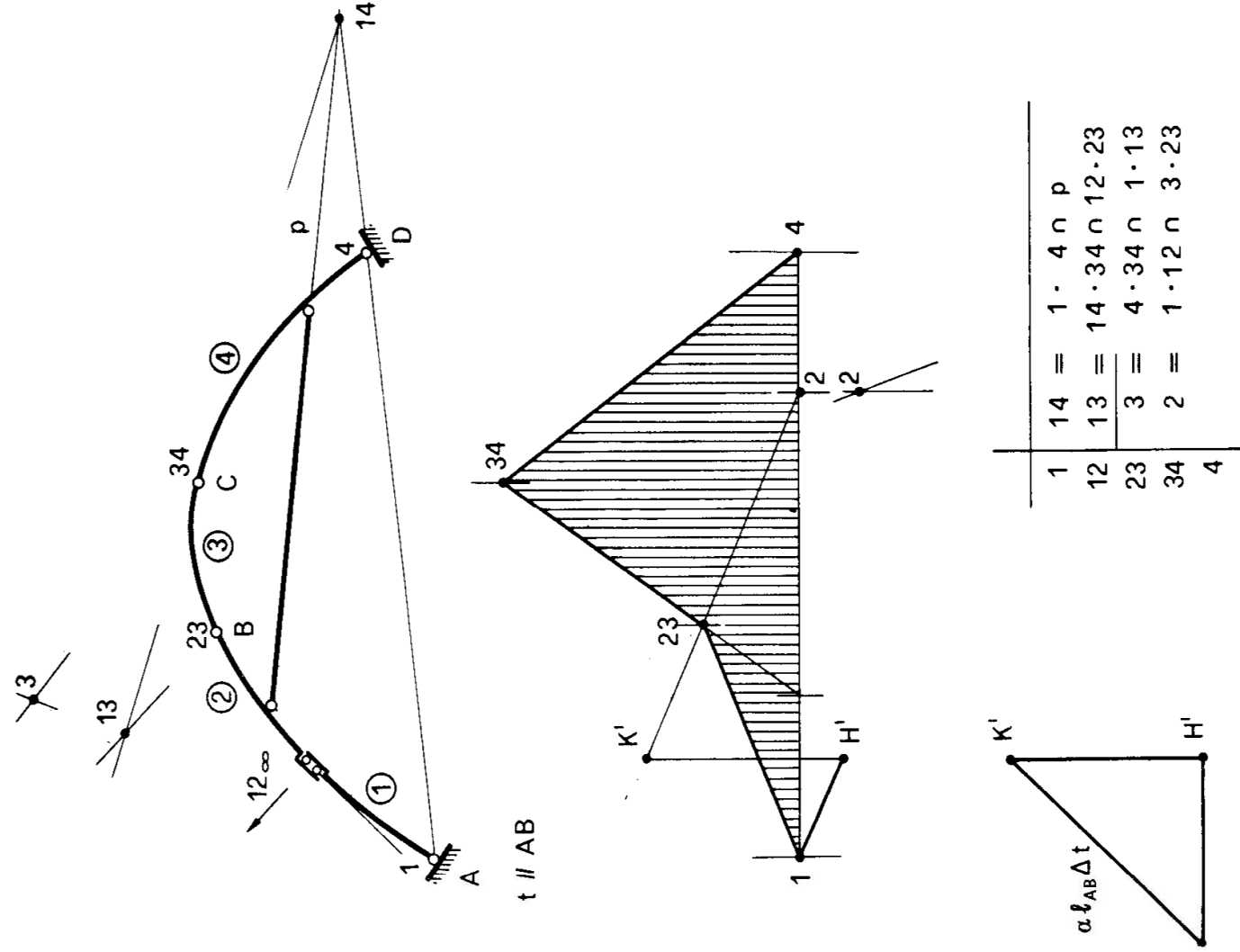


Figura 20b

stra; la compressione è affidata al lettore.

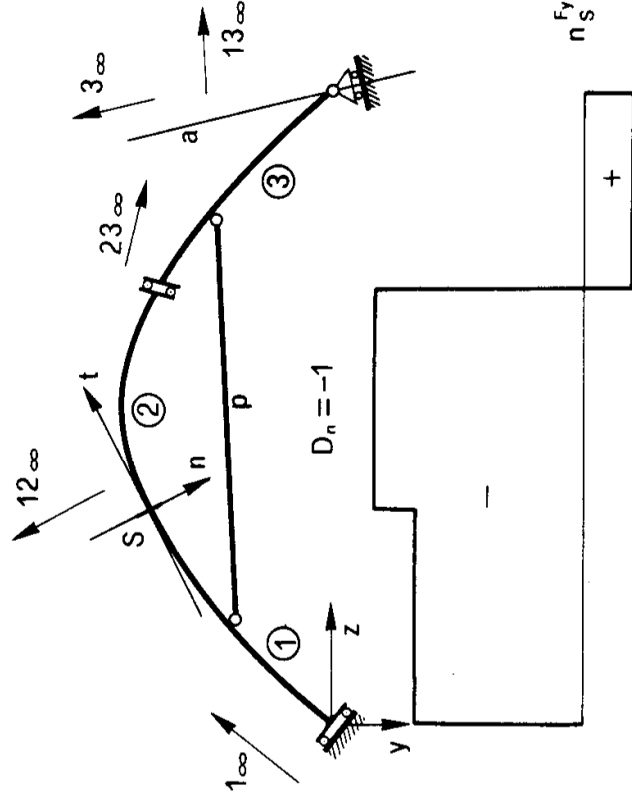
Problema n. 21.

Nella struttura della Fig. 21 si ricerca la linea  $n_S^{Fy}$ . In essa si ha  $t = 2$ ,

$s = 6, 3t - s = 0; n = 3, 2n - 1 = 5$ . Per i centri si ottiene

1	$13 = 12 \cdot 23 \cap p$
12	$3 = 1 \cdot 13 \cap a$
23	

Singularità dell'esercizio è l'essere tutti i centri impropri. Poiché si



$$\begin{aligned} \bar{s}_{12} + \bar{s}_{23} + \bar{s}_{31} &= 0 \\ \bar{s}_{12} &= \bar{s}_2 - \bar{s}_1 \\ \bar{s}_{23} &= \bar{s}_3 - \bar{s}_2 \\ \bar{s}_{31} &= \bar{s}_1 - \bar{s}_3 \end{aligned}$$

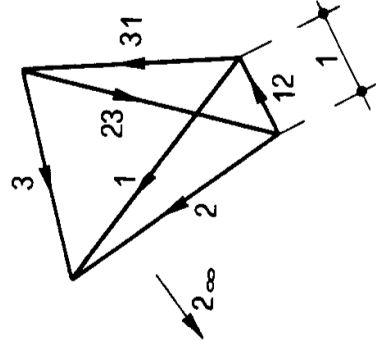


Figura 21

verifica tale circostanza, può anche asserirsi che ogni tratto trasla, senza ruotare; siano  $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3$  le tre traslazioni assolute,  $\bar{s}_{12}, \bar{s}_{23}, \bar{s}_{31}$  le tre traslazioni relative.

Dalle tre relazioni

$$\begin{aligned}\bar{s}_{12} &= \bar{s}_2 - \bar{s}_1 \\ \bar{s}_{23} &= \bar{s}_3 - \bar{s}_2 \\ \bar{s}_{31} &= \bar{s}_1 - \bar{s}_3\end{aligned}\tag{40}$$

si trae

$$\bar{s}_{12} + \bar{s}_{23} + \bar{s}_{31} = 0 .\tag{41}$$

Di tutte le suddette traslazioni si conosce la direzione, ad eccezione della  $\bar{s}_2$ ; costruito perciò il poligono chiuso delle (41), ed i poligoni chiusi

$$\begin{aligned}\bar{s}_{31} + \bar{s}_3 - \bar{s}_1 \\ \bar{s}_{12} + \bar{s}_1 - \bar{s}_2\end{aligned}$$

postulati dalla terza e dalla prima delle (40), si ottiene  $\bar{s}_2$ . Conoscendo le traslazioni, e quindi le loro componenti verticali, si traccia il diagramma di tali componenti, che fornisce la linea  $n_s^{F_y}$  richiesta nella scala in cui  $\bar{s}_{12} = \bar{s}_2 - \bar{s}_1 = 1$ . Poichè la linea corrisponde ad un allontanamento tra le due facce in S, il suo segno è corretto.

071

**Problema n. 22.**

Si determina la linea  $m_s^{F_y}$  per la struttura della Fig. 22a. Considerando  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $p$  come parti della struttura si ha  $t = 8$ ,  $s = 24$  (9 cerniere che

sopprimono due gradi di libertà, ed 1 cerniera che ne sopprime 6), e quindi di  $3t - s = 0$ . Effettuato il taglio in S è  $n = 9$ ,  $2n - 1 = 17$ ,

$$\frac{n(n+1)}{2} = 45.$$

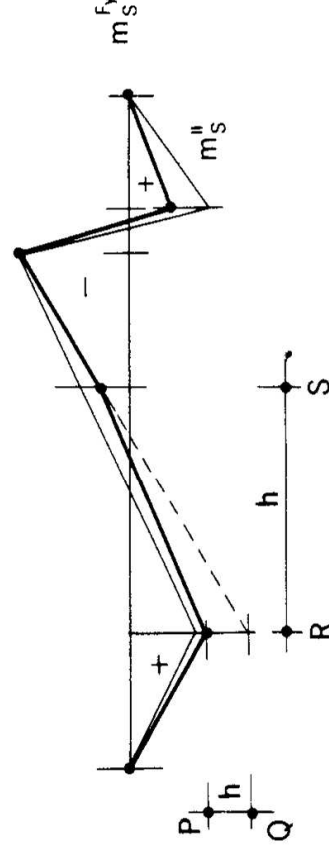
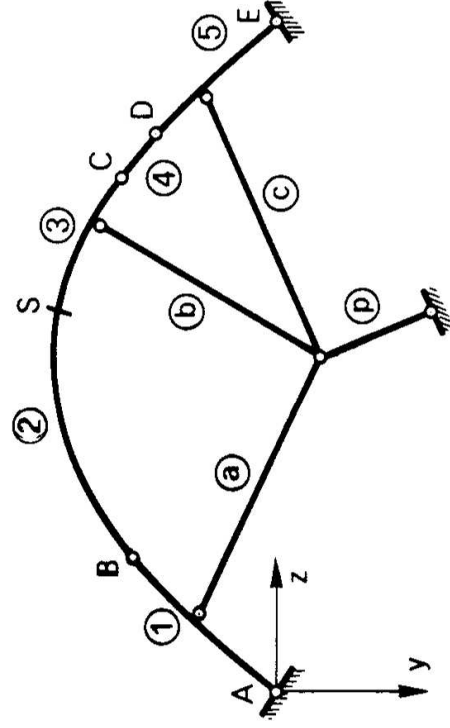


Figura 22a

La tabella operativa per la ricerca dei centri è

noti	incogniti
1	$2 = 1 \cdot 12$
12	$3 = 5a = 5 \cdot a \cap ac \cdot 5c$
23	$4 = 5 \cdot 45$ $1b = ab \cdot 1a$
34	$13 = 12 \cdot 23$ $2b = 3b \cdot 23$
45	$14 = 13 \cdot 45$ $4b = 3b \cdot 34$
5	$15 = 1 \cdot 5$ $*5b = ab \cdot 5a \cap bc \cdot 5c$
1a	$1c = 1 \cdot c \cap ac \cdot 1a$ $2c = 1c \cdot 12$

3b	25	3c = bc · 3b
5c	35 = 34 · 45	4c = 5c · 45
ab	$\underline{a} = 1 \cdot 1a \cap p \cdot ap$	$\underline{1p} = 1 \cdot p \cap ap \cdot 1a$
ac	$\ast \underline{b} = a \cdot ab \cap p \cdot bp$	$\underline{2p} = 1p \cdot 12$
ap	$\underline{c} = a \cdot ac \cap 5 \cdot 5c$	3p = bp · 3b
bc	2a = 1a · 12	4p
bp	3a = ab · 3b	$\underline{5p} = 5 \cdot p \cap cp \cdot 5c$
cp	4a	
p		

Nella tabella si è eseguito un primo ciclo, scrivendo accanto ad ogni centro incognito le rette note in cui i centri sicuramente sono contenuti.

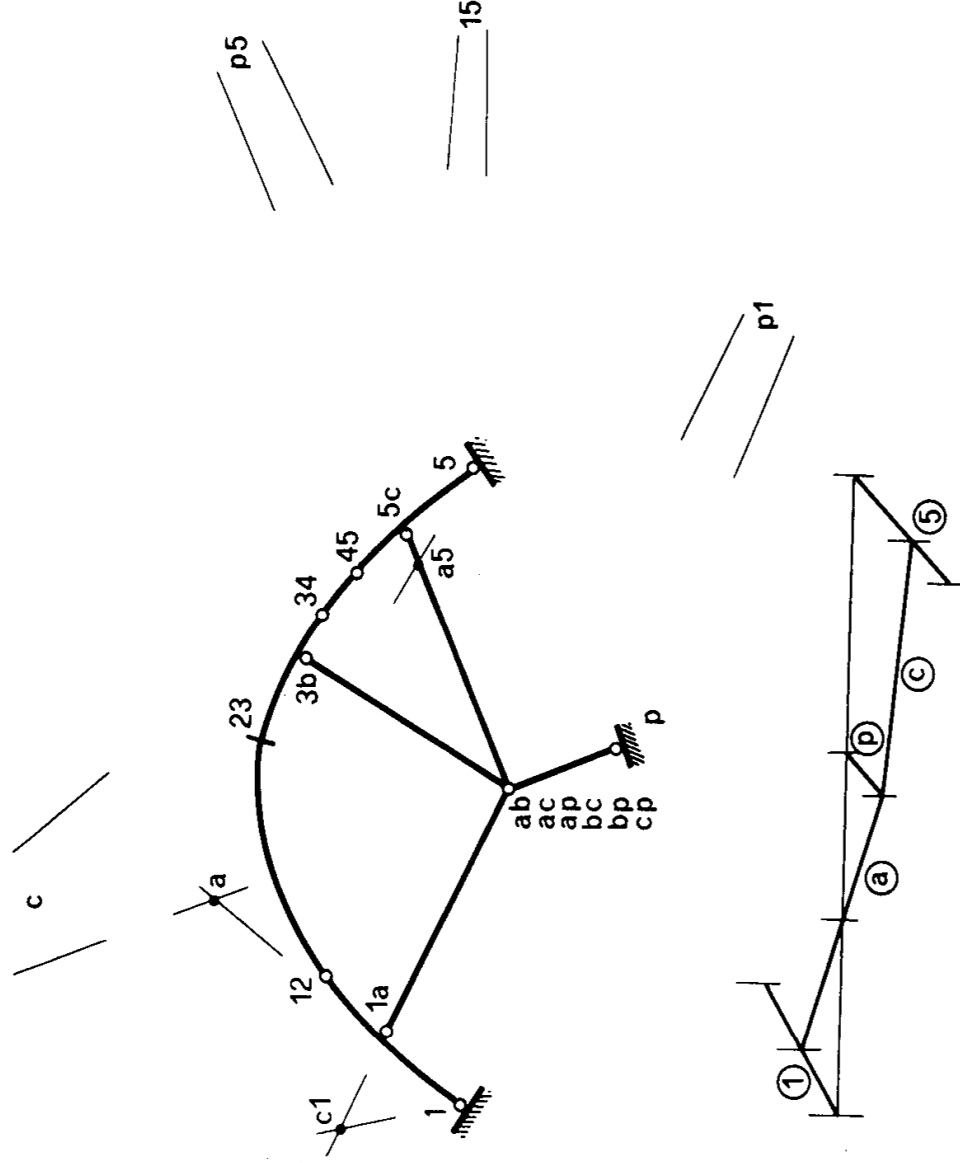


Figura 22b

Si osservi (Fig. 22b) che i centri  $C_b$  e  $C_{5b}$  sono solo apparentemente

determinati, perchè le due rette, che dovrebbero definirli nelle loro intersezioni, coincidono. Un secondo ciclo permette di determinare ulteriormente

$$15 = 1 \cdot 5 \cap 1a \cdot 5a \cap 1p \cdot 5p ;$$

il  $C_{5b} = ba \cdot 5a \cap bp \cdot 5p$  è determinato solo apparentemente.

Altri centri non sono determinabili.

Con i centri suddetti possono tracciarsi (Fig. 22b) solo le deformate sub ①, ⑤, ①a, ⑤a, ①c, ⑤c; quindi il problema deve affrontarsi per altra via, seguendo per esempio il *procedimento delle variazioni*. E' quanto si farà nel seguito.

Si studia innanzitutto la struttura della Fig. 22c, *variata* rispetto

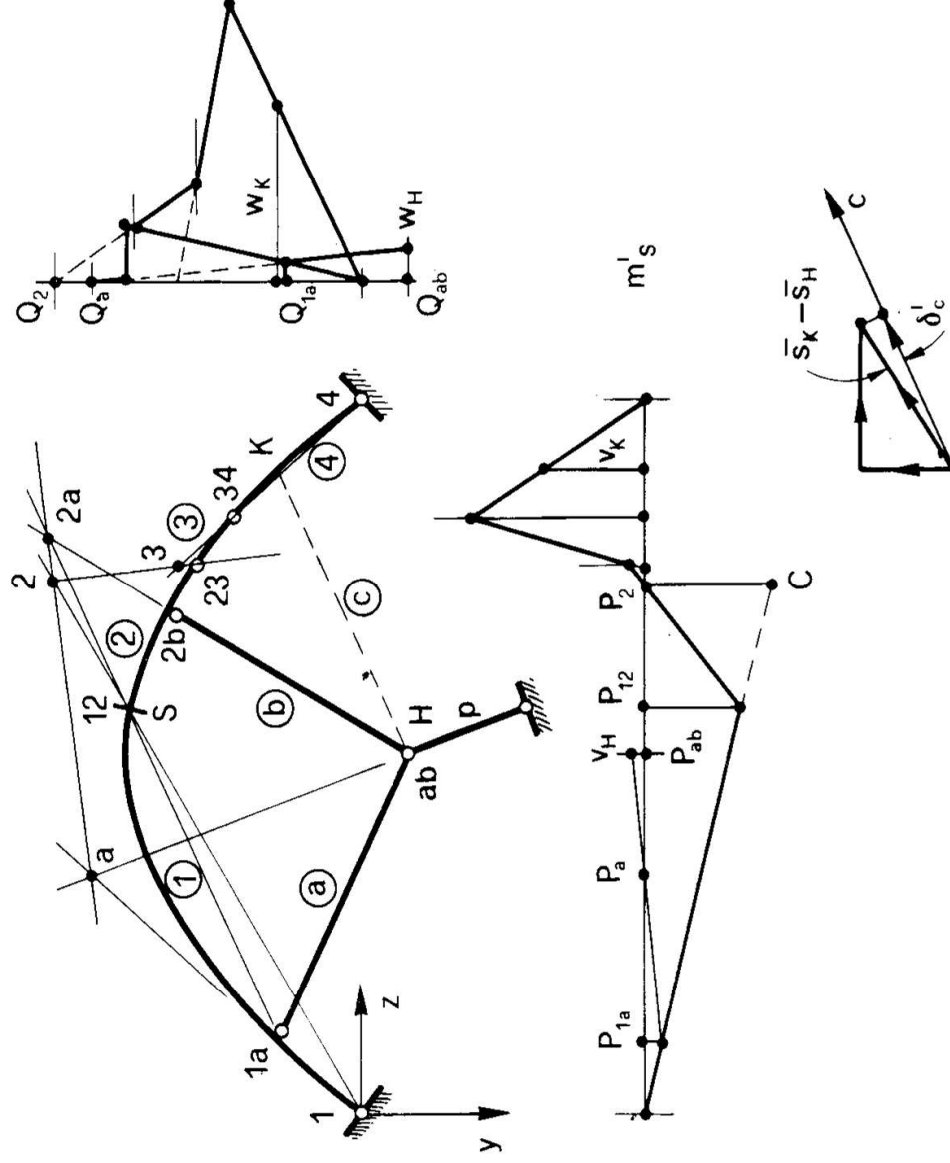


Figura 22c

alla struttura assegnata (Fig. 22a) per eliminazione del pendolo  $c$  e *solidificazione* della cerniera (sostituzione con un incastro) in B; così si aggringe e si elimina un grado di libertà, e la condizione  $3t - s = 0$  resta rispettata.

Su questa struttura si opera per ricercare la deformata  $m'_s$ . La tabella operativa dei centri è quella riportata in seguito (  $p$  si considera stavolta come un pendolo, e quindi  $n = 6, 2n - 1 = 11$  ).

noti	incogniti
1	$a = 1 \cdot 1a \cap p$
12	$2a = 1a \cdot 12 \cap ab \cdot 2b$
23	$2 = a \cdot 2a \cap 1 \cdot 12$
34	$3 = 2 \cdot 23 \cap 4 \cdot 34$
4	$13 = 1 \cdot 3 \cap 12 \cdot 23$
1a	$3a = 3 \cdot a \cap 13 \cdot 1a$
2b	$4a = 4 \cdot a \cap 34 \cdot 3a$
ab	

Occorre adesso conoscere la variazione di distanza  $\delta'_c$  tra i punti HK inizialmente collegati dal soppresso pendolo  $c$ . Si può, procedendo come negli esercizi 13 e 16, ricercare il centro  $C_{4a}$  (per questo si sono ritrovati i centri  $C_{13}$  e  $C_{3a}$ , altrimenti superflui); è più semplice in questo caso, poichè si risparmiano tali centri, disegnare le due deformate  $s_y$  ed  $s_z$  ( $v$  e  $w$ ), tracciare il vettore  $\bar{s}_K - \bar{s}_H$  (di componenti rispettivamente  $v_K - v_H$  su  $y$ , e  $w_K - w_H$  su  $z$ ), e farne la componente normale su HK. Nella figura risulta  $\delta'_c > 0$ , e quindi H e K si allontanano.

Analogamente si è operato nella Fig. 22d, dove si è studiata una *seconda struttura variata*, per eliminazione rispetto alla struttura data (Fig. 22a) del pendolo  $c$  e solidificazione della cerniera in S; la deformata  $m''_s$  non presenta discontinuità in S, ed il  $\delta''_c$  risulta negativo (avvicinamento tra H e K).

La linea

$$m''_s - m'_s = \frac{\delta''_c}{\delta'_c} \tag{42}$$

presenta in S la stessa rotazione relativa della  $m'_s$ , ed è tale che  $\delta_c = 0$  (nel nostro caso, poichè  $\delta'_c$  e  $\delta''_c$  hanno segno contrario, le  $m'_s$  ed  $m''_s$  si sono sommate con i loro segni). Quindi la (42), che è riportata nella Fig. 22a, è la linea  $m''_s$  richiesta; la scala è quella in cui  $\overline{PQ}$  ed  $\overline{RS}$  rappresentano la stessa lunghezza  $h$ , e cioè

$$\overline{PQ} \cdot S_m = \overline{RS} \cdot S_l$$

da cui

$$S_m = S_l \frac{\overline{RS}}{\overline{PQ}}$$

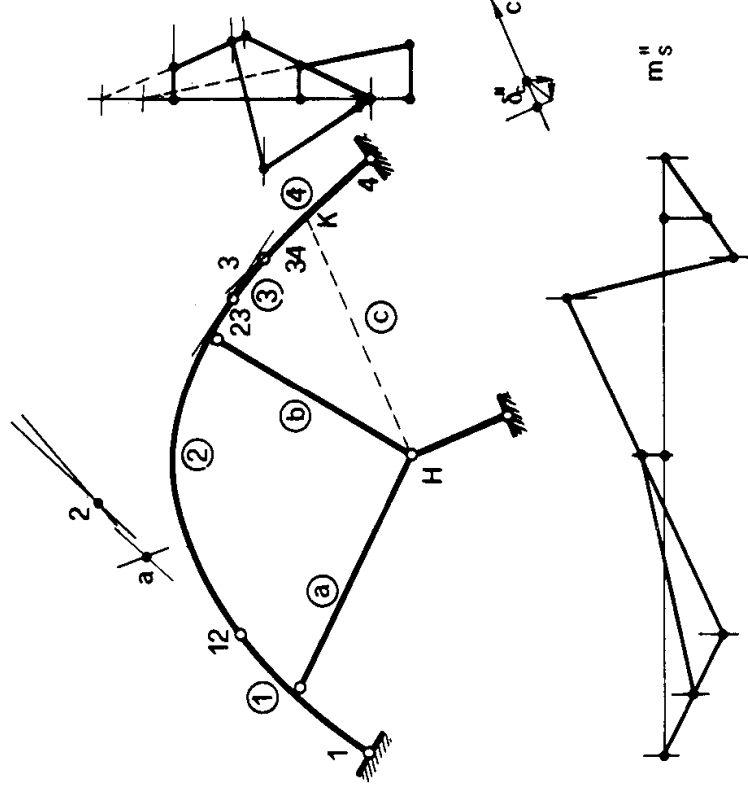


Figura 22d

ms

**Problema n. 23.**

Si ripropone lo stesso problema (Fig. 23a) dell'esercizio 22 (si è solo variata la direzione dell'asse del pendolo  $p$ , allo scopo di mostrare come tale direzione influenzi la  $m''_S$ ). Il procedimento è sempre quello delle



variazioni, eseguito però effettuando l'eliminazione di due pendoli e la sostituzione di due snodi con incastri; si ha il vantaggio così di operare

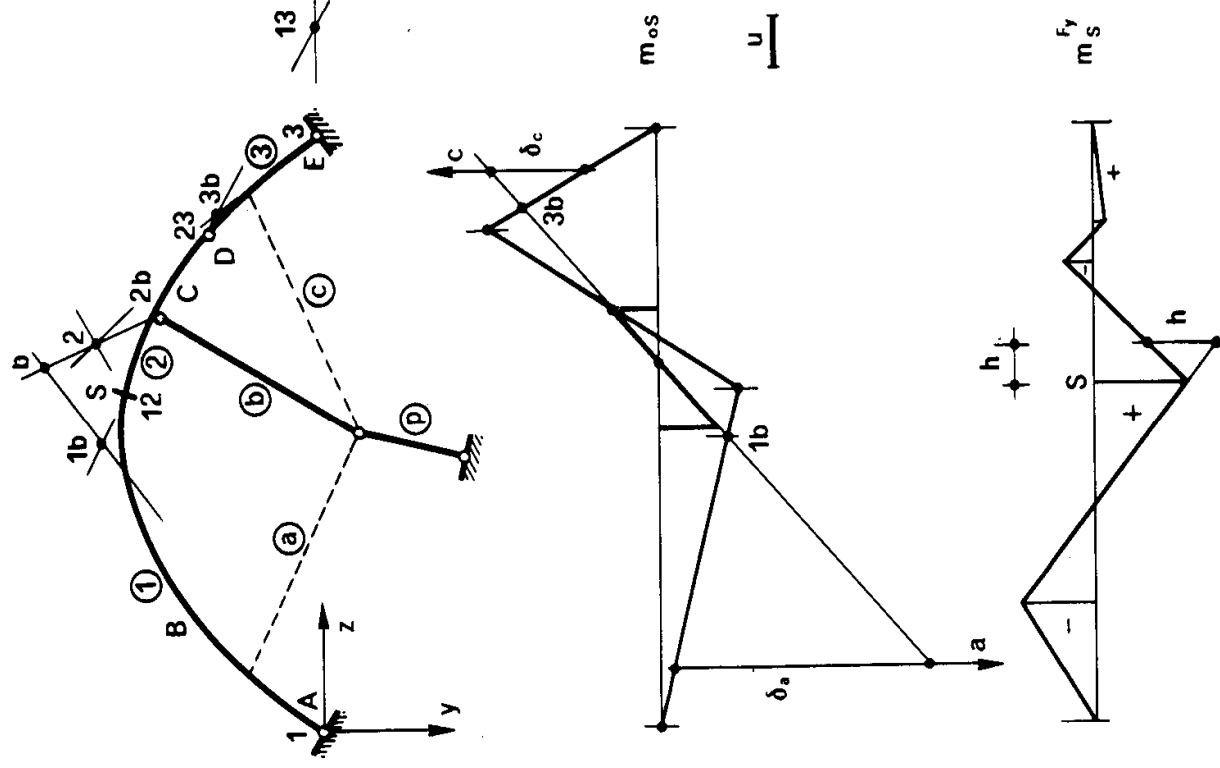


Figura 23a

su una struttura variata più semplice, e lo svantaggio di dovere risolvere un sia pur breve sistema di equazioni. Si eliminano perciò i due pendoli  $a$  e  $c$ , e si solidificano le cerniere in B e C (Fig. 23a); si è costruita così la deformata  $m_{os}$ . Risulta  $n = 4$ ,  $2n - 1 = 7$ ; la tabella operativa dei centri è

noti	incogniti
1	$13 = 1 \cdot 3 \cap 12 \cdot 23$
12	$2 = 1 \cdot 12 \cap 3 \cdot 23$
23	$b = 2 \cdot 2b \cap p$
3	$1b = 1 \cdot b \cap 12 \cdot 2b$
2b	$3b = 13 \cdot 1b \cap 23 \cdot 2b$

Utilizzando i centri  $C_{1b}$  e  $C_{3b}$ , e seguendo il procedimento dell'es. 16, si ottengono le variazioni di distanza tra gli estremi del pendolo  $a$ ,  $\delta_a$ , e del pendolo  $c$ ,  $\delta_c$ , ora soppressi.

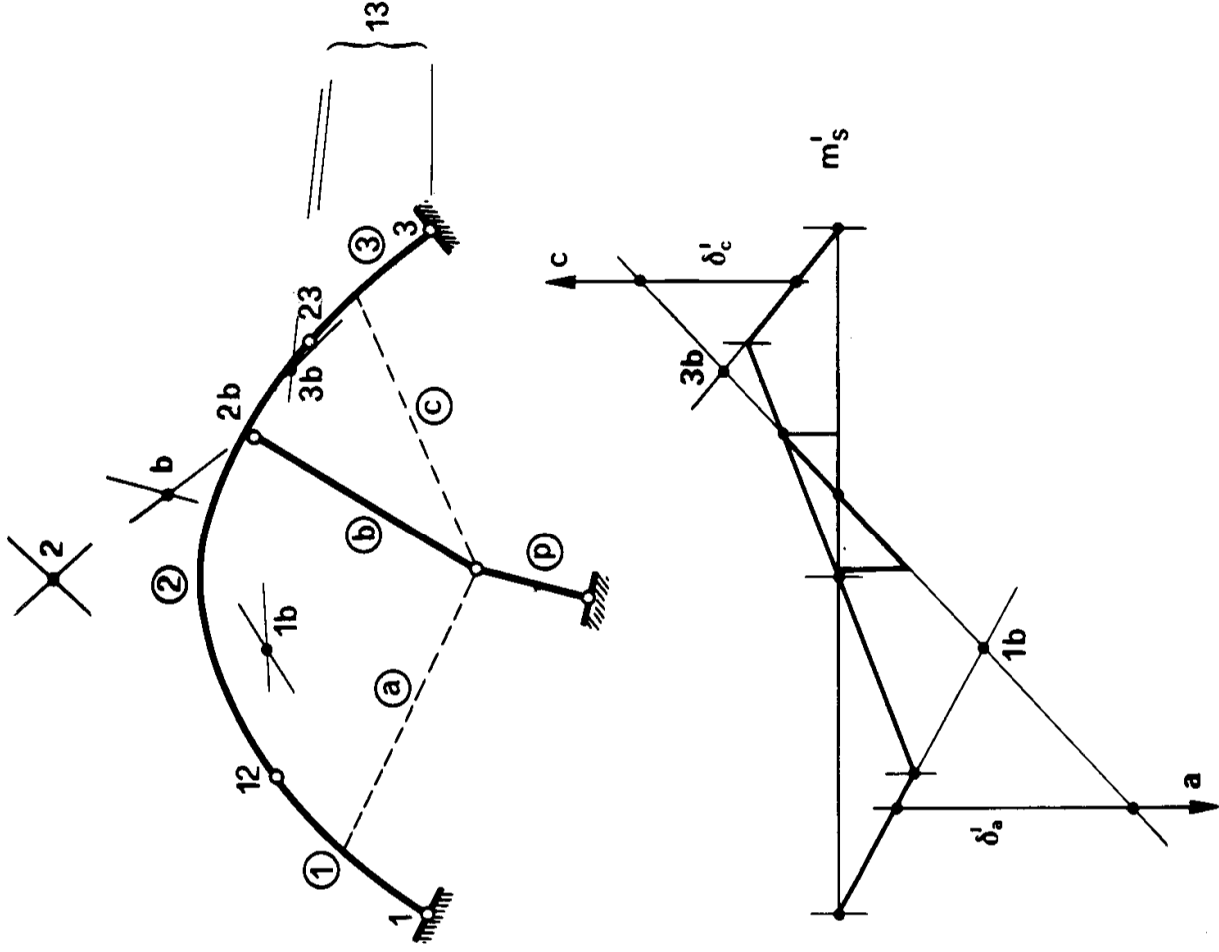
Risulta così

$$\delta_a = 5,30 u$$

$$\delta_c = - 2 u .$$

dove  $u$  è una prefissata lunghezza.

Si opera poi analogamente sulla struttura della Fig. 23b, dove è ri-



*Figura 23b*

pristinata la cerniera in B e solidificata invece quella in S; la cerniera in C è sempre solidificata.

Si ha così la deformata  $m'_s$ , dove risulta

$$\delta'_a = 4,25 u$$

$$\delta'_c = - 2,80 u ,$$

mentre in S non si presenta rotazione relativa.

Infine si opera analogamente sulla struttura della figura 23c, dove

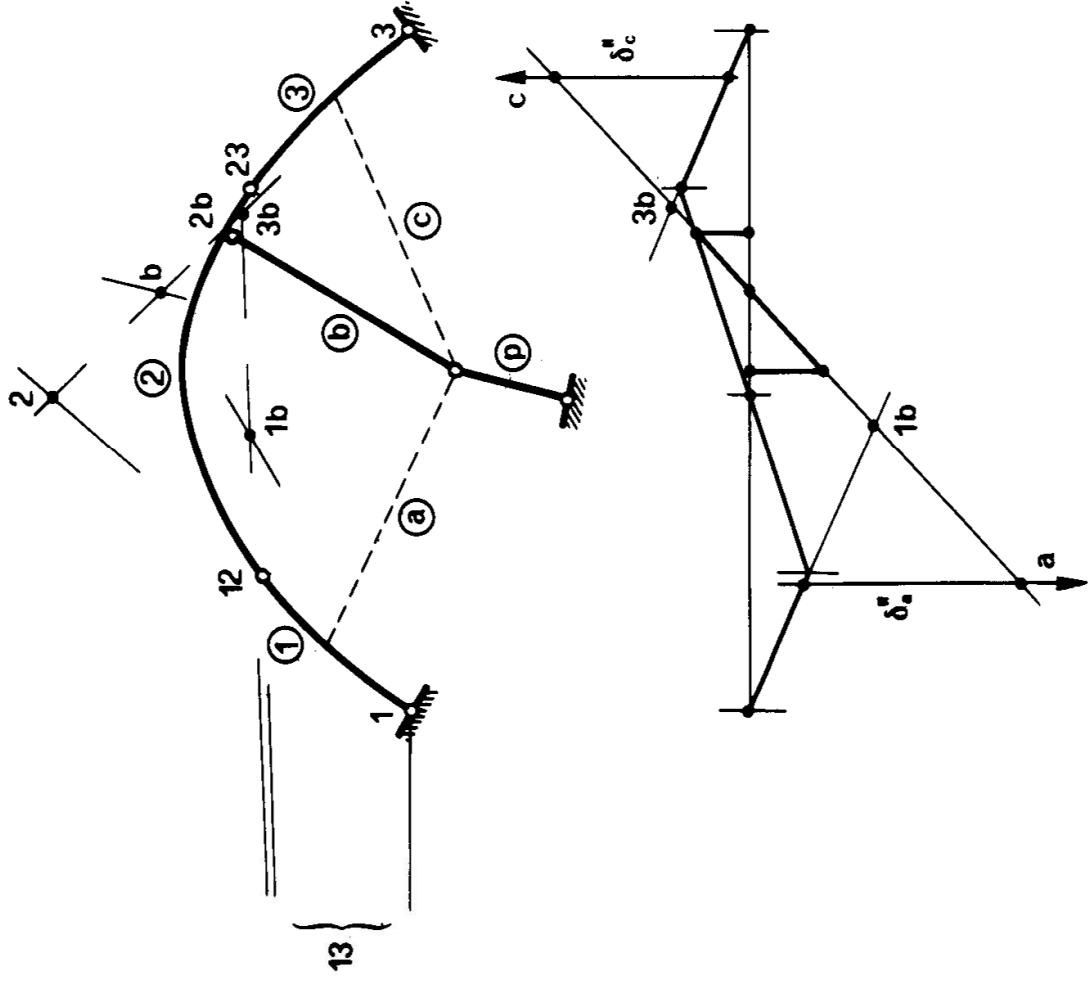


Figura 23c

sono solidificate le cerniere in S e D. Si ha così la  $m''_s$ , in cui risulta

$$\delta''_a = 3,80 u$$

$$\delta''_c = - 3,10 u ;$$

anche in questo caso in S non si ha rotazione relativa.

Qualsiasi combinazione

$$m_{os} + k_1 m' + k_2 m''$$

soddisfa le condizioni di vincolo della struttura assegnata, fatta eccezione per i pendoli  $a$  e  $c$ , e presenta sempre la stessa rotazione relativa in  $S$ , che è poi quella dovuta alla  $m_{os}$ . Si impongono le condizioni di vincolo in  $a$  e  $c$  attraverso le due equazioni

$$\begin{aligned} \delta_a + k_1 \delta'_a + k_2 \delta''_a &= 0 \\ \delta_c + k_1 \delta'_c + k_2 \delta''_c &= 0 . \end{aligned} \quad (43)$$

Nel caso in esame è

$$\begin{aligned} 5,30 + 4,25 k_1 + 3,80 k_2 &= 0 \\ 2 + 2,80 k_1 + 3,10 k_2 &= 0 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} k_1 &= - 3,4832 \\ k_2 &= 2,5010 . \end{aligned}$$

La linea  $m_S^{Fy}$  è riportata nella Fig. 23a.

### Problema n. 24.

Con riferimento alla struttura della Fig. 24a, si desidera la linea d'inflessione  $r^{Fy}$ , per forze verticali viaggianti, della componente secondo  $r$  della reazione della cerniera in  $D$ . Anche in questo caso occorre ricorrere al procedimento delle variazioni. Si elimina (Fig. 24b) il pendolo  $a$  e si solidifica la cerniera in  $B$ ; si ha così  $n = 3$ ,  $2n - 1 = 5$ .

Si ha poi

noti	incogniti
1	$2 = 1 \cdot 12 \cap \perp r$
12	$b = 2 \cdot 2b \cap p$
2b	$1b = 1 \cdot b \cap 12 \cdot 2b .$



La deformata  $r'$  presenta una variazione di distanza tra gli estremi del soppresso pendolo  $a$  pari a

$$\delta'_a = -4,6 u.$$

Si studia poi (Fig. 24c) una seconda struttura variata, in cui ovvia-

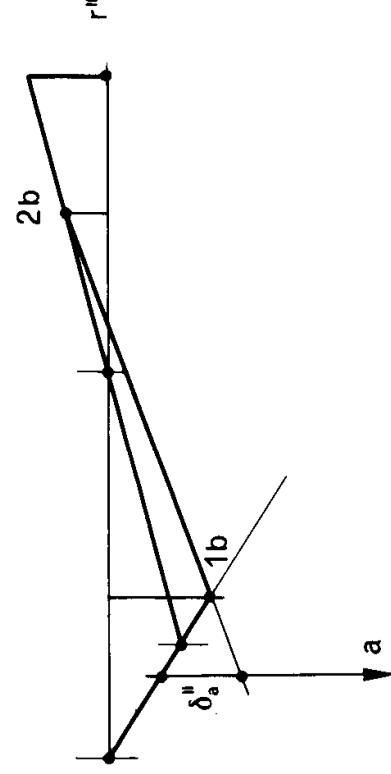
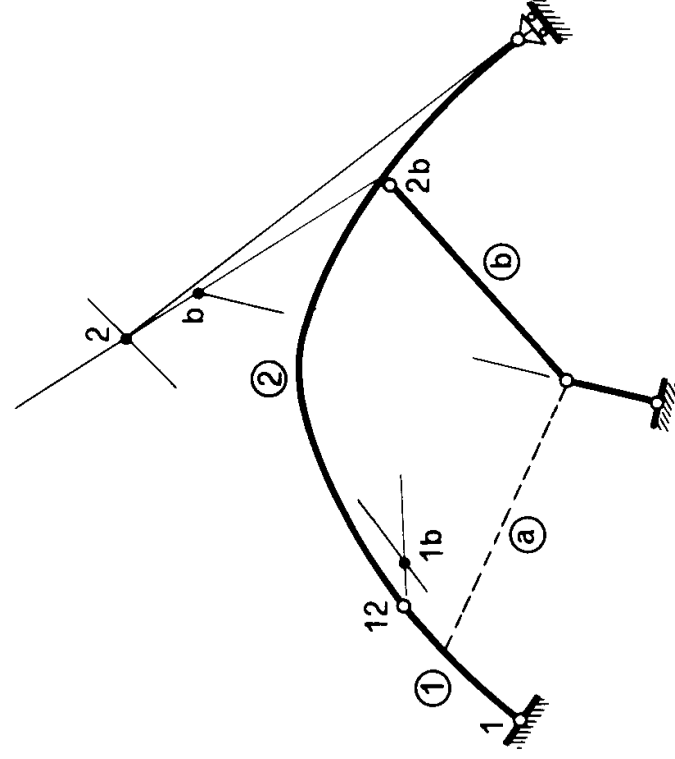


Figura 24c

mente il pendolo  $a$  è ancora soppresso, ed è solidificata non più la cerchiera in B, ma quella in C. Procedendo analogamente a quanto fatto nella prima struttura variata, si costruisce la  $r''$ , cui si accompagna

$$\delta''_a = 1,4 u.$$

La combinazione

$$r' + kr''$$

con la condizione

$$\delta'_a + k\delta''_a = 0$$

fornisce la  $r^{F_y}$  richiesta. Nel caso in esame è

$$- 4,6 + 1,4k = 0$$

da cui

$$k = 3,2857 .$$

Nella Fig. 24a è disegnata la  $r^{F_y}$ .

Lo spostamento di D secondo  $r$  è negativo, come si evince dalla scomposizione del segmento HK secondo  $z$  ed  $r$ , quindi i segni della linea  $r^{F_y}$  sono esatti. La scala è quella in cui HL è unitario. Attese le dimensioni della figura, si è preferito riportare, invece del segmento HK, un segmento  $H^*K^* = 10 HK$ ;  $H^*L^*$  è perciò non 1, ma 10.

Negli esercizi 22, 23 e 24 si è operato per sovrapposizione, sfruttando la condizione che i vincoli eliminati sono in realtà presenti. E' necessario perciò che nelle strutture variate che successivamente si prendono in esame i vincoli eliminati siano sempre quelli, invece le cerniere, e più in generale gli snodi, la cui libertà si elimina per ricondurre la struttura ad isostatica, possono essere diversi nelle strutture variate successive, poiché l'eliminazione di una libertà reale è sempre in accordo con la congruenza.

### X Problema n. 25.

Nella struttura della Fig. 25 si ricerca la linea  $m_s^{F_a}$ , per forze viaggianti parallele alla retta  $a$ . Occorre tracciare la deformata  $s_a$ , che è quindi riferita ad una fondamentale  $b$  ortogonale ad  $a$ . Nella struttura è  $t = 2$ ,  $s = 6$ ,  $3t - s = 0$ .

Effettuata la sconnessione in S, è  $n = 3$ ,  $2n - 1 = 5$ .

La tabella operativa dei centri è

noti	incogniti
1	$13 = 12 \cdot 23 \cap p$
12	$3 = 1 \cdot 13 \cap r$
23	$2 = 1 \cdot 12 \cap 3 \cdot 23$ ,

dove  $p$  è l'asse del pendolo (che interseca graficamente il tratto 3, ma è

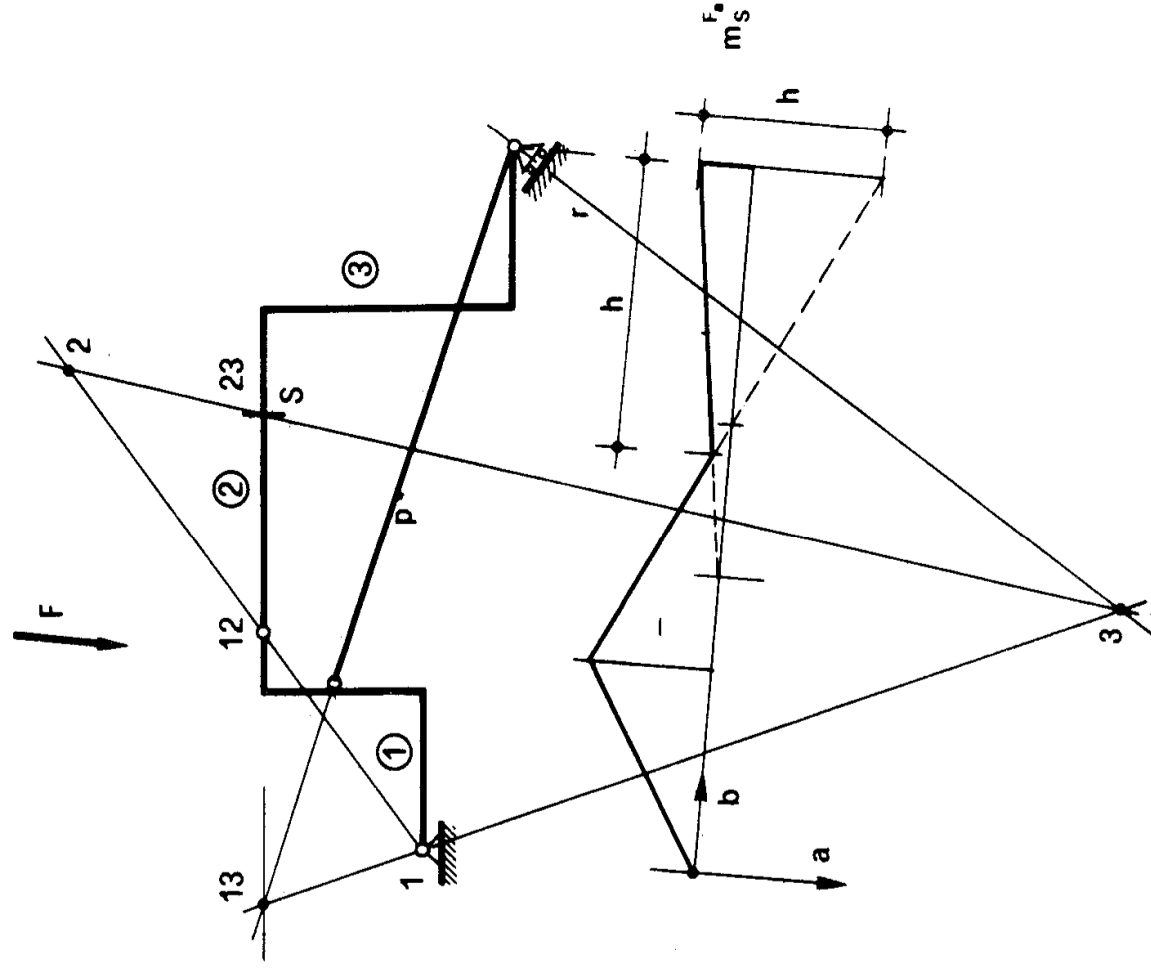


Figura 25

connesso alla struttura solo ai due estremi) ed  $r$  la normale al piano di scorrimento dell'appoggio.



Problema n. 26

Nella struttura della Fig. 26 si ricerca la linea  $t_s^{Fy}$ . Si ha  $t = 4$ ,  $s = 12$ ,

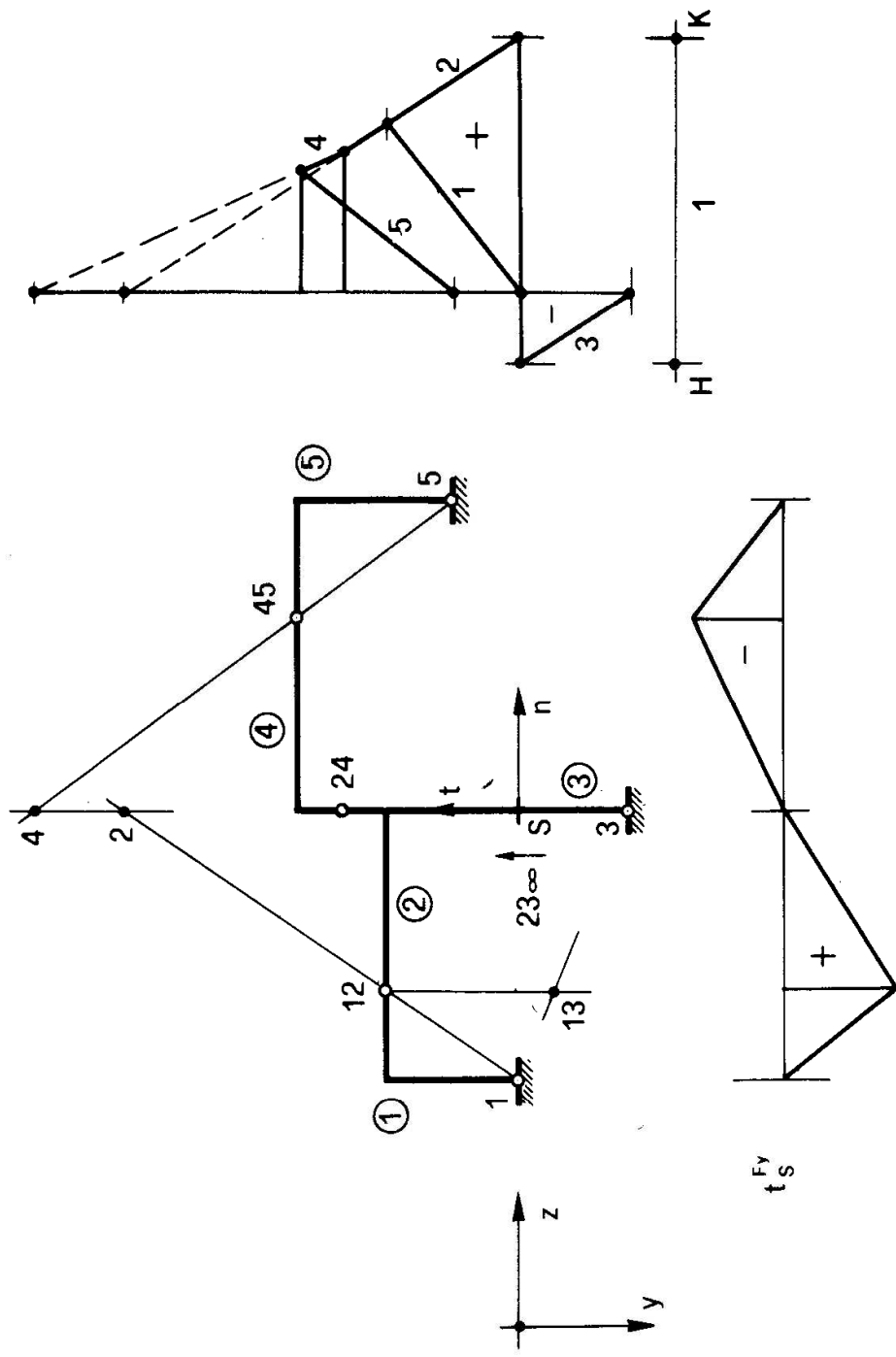


Figura 26

$3t - s = 0$ . E' pure  $n = 5$ ,  $2n - 1 = 9$ . La tabella operativa dei centri è la seguente:

noti	incogniti
1	$2 = 1 \cdot 12 \cap 3 \cdot 23$
12	$13 = 1 \cdot 3 \cap 12 \cdot 23$
3	$4 = 2 \cdot 24 \cap 5 \cdot 45$
24	
45	
5	
23	