

CAPITOLO SECONDO

IL PROCEDIMENTO DI LAGRANGE

Premessa

Nel presente capitolo si ricercano reazioni vincolari e caratteristiche della sollecitazione interna utilizzando il *procedimento di Lagrange*. Questo procedimento, noto dalla Meccanica Razionale, sfrutta il *principio dei lavori virtuali* così enunciato per i sistemi olonomi: “una configurazione C di un sistema olonomo è di equilibrio sotto determinate forze F se, e solo se, il lavoro delle F per qualsiasi variazione δC della configurazione C è nullo”. Si precisa che il lavoro deve intendersi come la parte del primo ordine $\delta_1 L$, e cioè quella che contiene le variazioni dc_i delle coordinate lagrangiane c_i alla prima potenza.

Ci si limita a considerare *sistemi piani*, e cioè strutture in cui i vincoli consentano solo rotazioni (di ciascuna parte rigida) rappresentate da vettori ortogonali ad un piano y z, e le forze siano comunque agenti in tale piano (in particolare, le coppie siano rappresentate da vettori ortogonali ad yz); alla fine del capitolo si darà però un esempio elementare di sistema non piano.

Se si tratta di caratteristiche della sollecitazione interna, occorre in più considerare *sistemi monodimensionali*, e cioè sistemi composti di travi collegate tra loro ed al suolo. Si ricorda che per trave si intende il solido generato da un'area piana (*sezione retta*) che si muove lungo una linea (*asse*) sotto le seguenti condizioni:

- 1) Il baricentro dell'area appartiene all'asse.
- 2) L'area è normale all'asse.
- 3) Le dimensioni dell'area sono trascurabili rispetto alla lunghezza della linea descritta.
- 4) Chiamando s l'ascissa curvilinea misurata sull'asse, e a un qualsiasi segmento AB, ove A e B appartengono alla sezione, è

$$da \frac{da}{ds} \ll 1 .$$

- 5) Chiamando r il raggio di curvatura dell'asse, è

$$\frac{a}{r} \ll 1 .$$

Come già detto, è sistema monodimensionale anche una struttura composta di travi, per esempio un portale o un telaio; tutto il sistema non rispetta le condizioni 4 e 5, i singoli componenti (ritti e traversi) invece sì.

Nel seguito di questo capitolo si considerano *sistemi monodimensionali piani*, in cui cioè ogni sezione retta è simmetrica rispetto al piano yz; l'ultimo esempio, come già detto, fa eccezione. Si noti che un sistema monodimensionale piano è qualcosa in più di un sistema che sia nello stesso tempo monodimensionale e piano. Si noti pure che in un sistema monodimensionale piano una delle direzioni principali dell'ellisse centrale d'inerzia della generica sezione retta è contenuta nel piano yz.

Il riferimento nel piano yz sia costituito da due assi ortogonali y e z, tali che la rotazione di 90° che porta y in z sia antioraria. In tal modo nella terna destrorsa xyz l'asse x è diretto verso l'osservatore. In relazione ai segni si adottano le seguenti convenzioni:

- 1) La *distanza* d_{Ca} di un punto C da una retta orientata a è positiva se C è alla sinistra di a ; quindi risulta

$$y_C = - d_{Cz}$$

$$z_C = d_{Cy} .$$

- 2) Le *forze* e gli *spostamenti* paralleli agli assi y e z sono positivi se equivari agli stessi y e z; le *coppie* e le *rotazioni* sono positive se antiorarie (se cioè i loro vettori sono equivari ad x).

Una forza F comunque diretta è positiva se ha lo stesso verso della sua retta d'azione orientata f ; se f è diretta secondo gli assi y e z, deve essere orientata come questi ultimi, per essere in accordo con quanto detto all'inizio di questo comma.

- 3) I vincoli si distinguono, come le *reazioni* da essi esplicate, in *interni* ed *esterni*; i primi collegano due delle parti costituenti la struttura, i secondi una delle parti al suolo. Quando si parla di reazioni si intende *sempre* riferirsi a quelle che il vincolo esercita sulla struttura. Se la reazione è *esterna*, essa è quindi una sola, e per essa ed i relativi *cedimenti vincolari* valgono le stesse convenzioni delle forze (comma 2). Se la reazione è *interna*, occorre considerarne due, che sono uguali e contrarie; per potere estendere ad esse le convenzioni del comma 2, è necessario stabilire a quale delle due si fa riferimento. Il caso a cui ci si può sempre ricondurre è quello di un vincolo che unisce due sezioni rette S_s ed S_d contigue; in tal caso,

stabilito un verso di percorrenza lungo l'asse s della trave, e chiamando S_s la sezione che si incontra prima camminando lungo l'asse nel verso positivo, si intende riferirsi alla reazione R_s che il vincolo esercita su S_s . Il segno di R_s , se R_s è definita in retta d'azione (per es. un pendolo), può fissarsi assegnando un verso a quest'ultima; se invece R_s non è definita in retta d'azione (caso, per es., della cerniera), si preferisce definire il segno delle sue componenti. Queste, poi, non si prendono quasi mai secondo y e z , ma secondo n e t , solidali con la sezione retta S , dove t è la tangente all'asse in S , orientata nel verso positivo di percorrenza, ed n è la normale all'asse, orientata in modo che $nt = + 90^\circ$.

Nel caso di un pendolo che unisce due punti A e B qualsiasi della struttura, si conviene assumere positive le reazioni in A e B quando sono concorrenti (pendolo *tirante*).

Ai cedimenti vincolari esterni corrispondono i *cedimenti vincolari interni*; per meglio comprenderne il senso, si pensi ad una variazione termica in un pendolo, o ad un difetto di montaggio. In analogia con quanto detto prima, essi sono positivi se fanno compiere lavoro positivo alla corrispondente componente positiva della reazione.

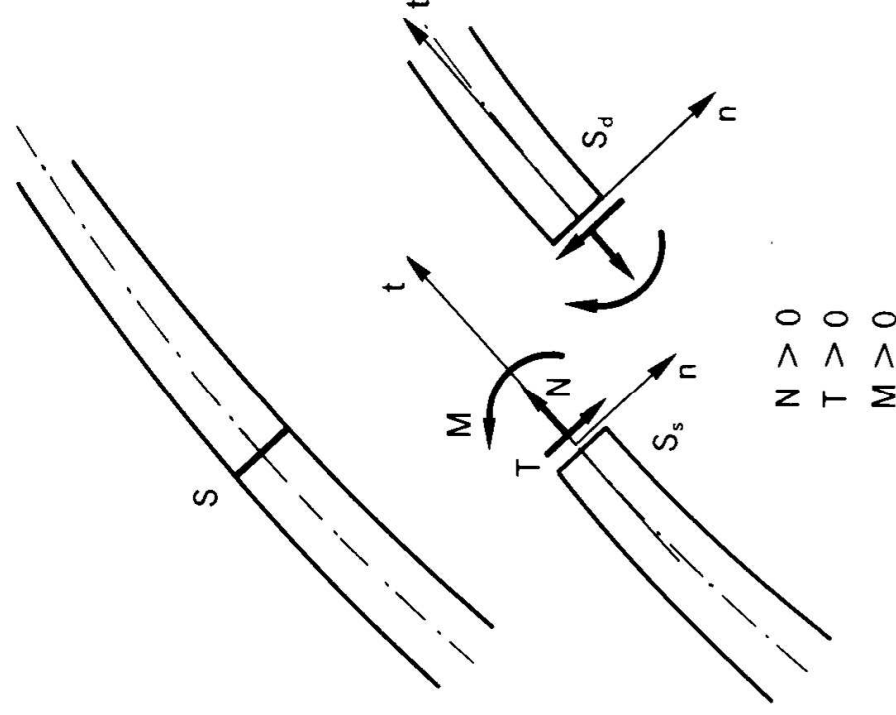
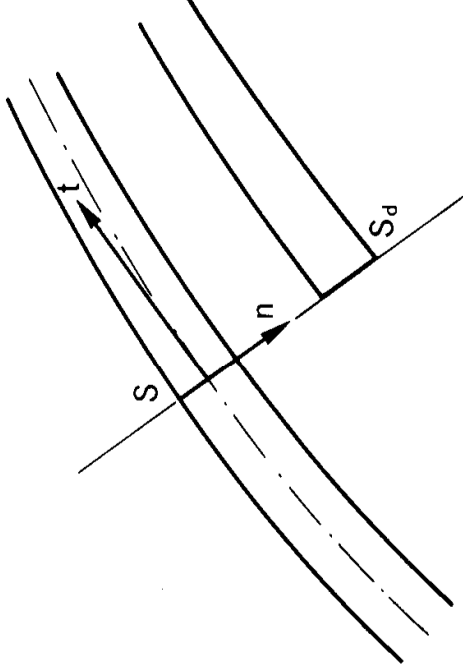


Figura a

4) In una qualsiasi sezione S (Fig. a) si può pensare di eseguire un

taglio, collegando poi le due sezioni S_s ed S_d risultanti con un vincolo triplo. La reazione interna di tale vincolo ha tre componenti, due forze secondo n e t ed una coppia; sono queste le *caratteristiche della sollecitazione interna* in S , rispettivamente *sforzo normale* N , *taglio* T e *momento flettente* M . Adottando le stesse convenzioni sui segni del comma 3, risulta che esse sono le azioni che la parte di struttura a valle di S (nel verso di percorrenza positivo dell'asse) esercita sulla parte a monte; $N > 0$ se di trazione, $T > 0$ se diretta secondo n , $M > 0$ se tende le fibre situate dalla parte di n positiva. E' facile constatare che si può anche definire $T > 0$ se la coppia Tdz , che esso genera sul concio elementare lungo dz , è oraria; ciò indipendentemente dal verso di t .

- 5) In una sezione S possono aversi spostamenti relativi tra S_s ed S_d . Nella *convenzione classica*, le loro tre componenti sono (Fig. b)



$$\Delta_n > 0$$

$$D_n < 0$$

Figura b

$$\Delta S_n = \Delta_n = S_{nd} - S_{ns}$$

$$\Delta S_t = \Delta_t = S_{td} - S_{ts}$$

$$\Delta \varphi_m = \Delta_\varphi = \varphi_{md} - \varphi_{ms}$$

(1)

(si è chiamato con m l'asse ortogonale al piano nt , e tale che mnt sia destrorsa; quindi m è orientato verso l'osservatore). Nella *convenzione di Volterra* esse invece corrispondono ai *cedimenti in-*

terni; si chiamano *distorsioni*, si indicano con la lettera D , e risultano di segno opposto alle (1):

$$\begin{aligned} D_n &= S_{ns} - S_{nd} \\ D_t &= S_{ts} - S_{td} \\ D_\varphi &= \varphi_{ms} - \varphi_{md} . \end{aligned} \quad (2)$$

Si osservi che una caratteristica positiva, (e cioè, come già detto, le forze agenti dal vincolo sulle forze S_s ed S_d della struttura) compie lavoro positivo per effetto della corrispondente distorsione positiva.

$\Delta\varphi$ e D_φ sono misurate in radianti.

- 6) Le reazioni propriamente dette, o *reazioni proprie*, sono quelle sviluppate da vincoli effettivi, interni o esterni. Le caratteristiche della sollecitazione interna sono reazioni *improprie*. Tutte possono essere classificate sotto l'unico nome di *reazioni*, e corrispondentemente cedimenti vincolari e distorsioni possono essere classificate sotto l'unico nome di *cedimenti*.

✕ Problema n. 1.

Premesso quanto sopra, si passi al calcolo della reazione R nella trave della Fig. 1a. Si elimina il vincolo che sviluppa R , e cioè l'appoggio B ; la trave diviene una volta labile (*meccanismo* ad un grado di libertà) ma, sostituendo al vincolo soppresso la reazione R che prima esso esercitava, l'equilibrio sussiste. Il principio dei lavori virtuali permette di scrivere la condizione necessaria di equilibrio imprimendo alla configurazione rettilinea una variazione definita dal valore della coordinata lagrangiana φ ; si ha così

$$\delta L = F v_F + M \varphi_m + q A_q + R v_B = 0$$

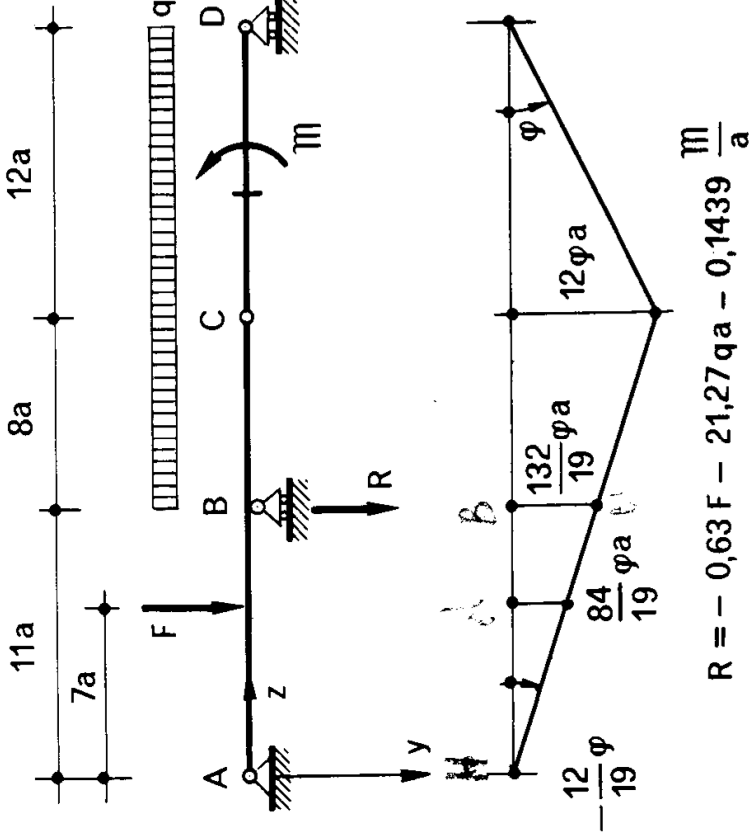
dove A_q è l'area della deformata impegnata dal carico q . Poichè è⁽¹⁾

$$v_F = \frac{12}{19} \varphi \cdot 7a = \frac{84}{19} \varphi a$$

(1) Dato un corpo rigido ed un riferimento Axyz destrorso (Fig. 1b), e se il corpo ruota di un

$$\varphi_m = \varphi$$

$$v_B = \frac{12}{19} \varphi \cdot 11a = \frac{132}{19} \varphi a$$



$$R = -0,63 F - 21,27 qa - 0,1439 \frac{m}{a}$$

Figura 1a

$$A_q = \frac{12 \varphi a \cdot 12a}{2} + \frac{1}{2} \left(12 + \frac{132}{19} \right) \varphi a \cdot 8a = \frac{2808}{19} \varphi a^2$$

risulta

$$\frac{84}{19} F \varphi a + m \varphi + \frac{2808}{19} q \varphi a^2 + \frac{132}{19} R \varphi a = 0$$

angolo φ intorno all'asse x, le due componenti secondo y e z dello spostamento BB' di un punto B all'ascissa d su z sono fornite da

$$v_B = HB' = -d \sin \varphi$$

$$w_B = BH = -d (1 - \cos \varphi) .$$

da cui, eliminando φ ,

$$84 Fa + 19 \mathfrak{M} + 2808 qa^2 + 132 Ra = 0$$

$$R = -\frac{1}{132} \left[84 F + 19 \frac{\mathfrak{M}}{a} + 2808 qa \right]. \quad (4)$$

Nella Fig. 1 si è posto $R > 0$, poichè R è indicata in simbolo. Si ricorda a tale proposito che quando una quantità qualsiasi è indicata in simboli, essa va disegnata, e trattata nei calcoli, come positiva. Nella (4) anche F , $\mathfrak{M}$ e q sono indicate in simbolo; le quantità reali vanno caso per caso introdotte nella (4) in valore e segno.

Sviluppando in serie $\sin \varphi$ e $\cos \varphi$ si ha

$$v_B = -d \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} \dots \right)$$

$$w_B = -d \left(\frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{\varphi^6}{6!} \dots \right)$$

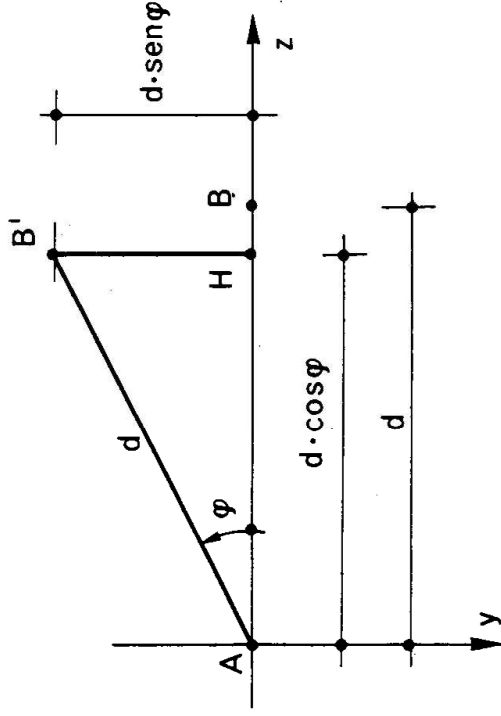


Figura 1b

Limitandosi ai termini del primo ordine, si ha

$$v_B = -\varphi d \quad w_B = 0 \quad (3)$$

✕ Problema n. 2.

Nella Fig. 2 si osserva la stessa struttura dell'esercizio precedente, soggetta ad una sola forza verticale F . Si ha

$$F_{V_F} + R_{V_B} = 0$$

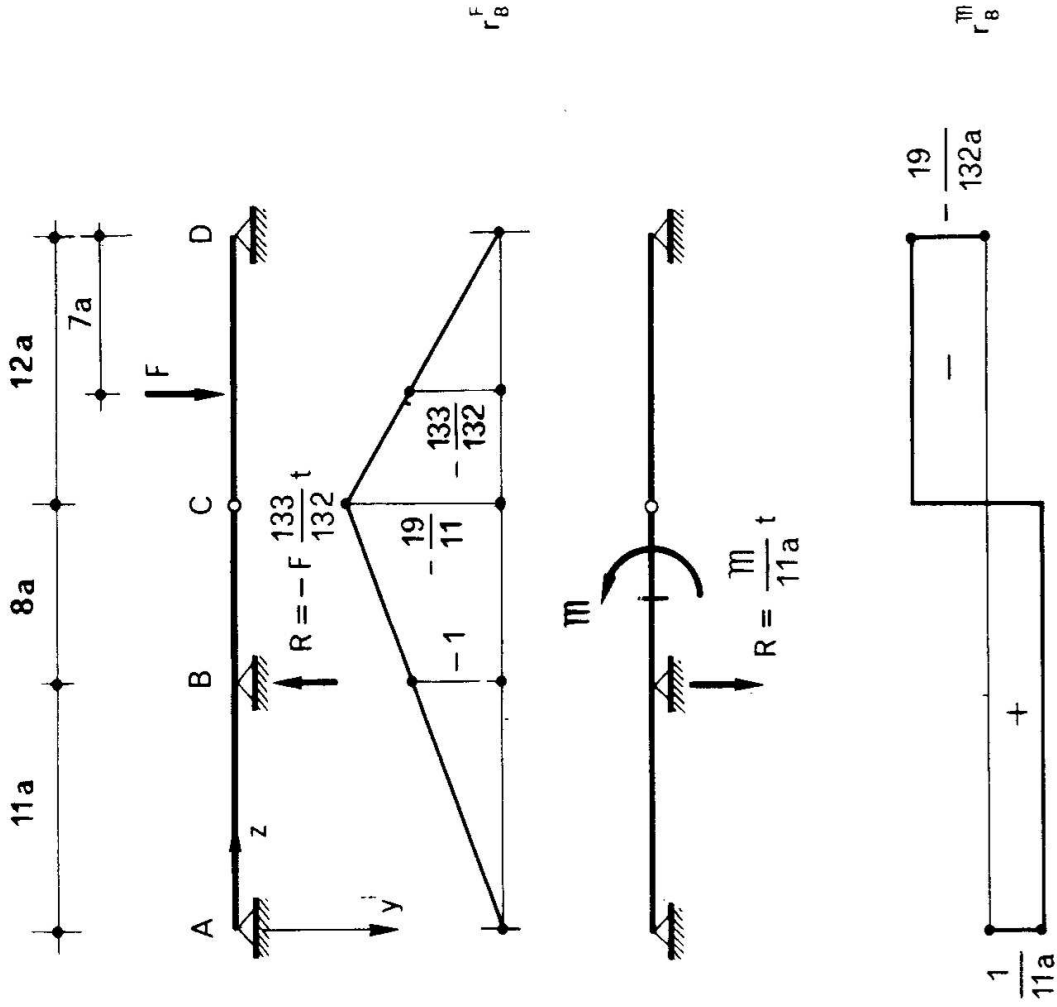


Figura 2.

da cui

$$R = - F \frac{V_F}{V_B} . \tag{5}$$

Ponendo

$$V_B = - 1 \ m \tag{6}$$

la (5) fornisce

$$R = F v_F . \quad (7)$$

Nel caso in esame è

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \frac{1}{11} a \\ v_C &= -\frac{1}{11} a \cdot 19 a = -\frac{19}{11} \\ \varphi_D &= -\frac{19}{11} \cdot \frac{1}{12} a = -\frac{19}{132} a \\ v_F &= -\frac{19}{132} a \cdot 7 a = -\frac{133}{132} \end{aligned}$$

e quindi, dalla (7),

$$R = - F \frac{133}{132} t .$$

Giova notare che l'unità a secondo membro della (6) ha dimensione non di numero, ma di lunghezza; quindi la v_F della (7) ha dimensione di numero, poichè deve sottintendersi che essa è divisa per la lunghezza unitaria; così pure φ_A e φ_D hanno dimensione $[l^{-1}]$, v_C di numero.

Dalla (7) si osserva che se si opera come segue: a) si rende la struttura labile eliminando il vincolo in B, dove agisce la reazione R; b) si traccia una deformata per cui lo spostamento in B sia negativo, per cui cioè $R > 0$ compia lavoro negativo; c) si valuta lo spostamento in B e si divide la deformata per $|v_B|$ — in una parola, se si traccia la deformata corrispondente ad un cedimento unitario negativo in B — si ottiene un diagramma che si presta a questa ovvia e notevole utilizzazione: data una forza F verticale agente in una qualsiasi sezione S, la reazione R provocata da detta forza è il prodotto di F per l'ordinata del diagramma che si legge sotto di essa. Questo diagramma, che si indica con

$$\Gamma_B^F$$

dove B è la sezione in cui agisce R, ed F l'ente viaggiante, si chiama *linea d'influenza* della reazione in B per effetto di una F *viaggiante* sulla struttura. Appare evidente come la conoscenza della r_B^F consenta di calcolare, per sovrapposizione, il valore di R per qualsiasi insieme di forze verticali, concentrate o distribuite, e come, data una forza o un sistema di forze viaggianti, si possano ancora ottenere i valori estremi di R e le corrispondenti posizioni del treno di forze. E' questo l'aspetto più caratteristico del procedimento di Lagrange, che permette, una volta tracciata la deformata per il calcolo di una reazione, di utilizzare tale deformata per lo studio di detta reazione sotto qualsiasi altra condizione di carico.

Se la trave è caricata da una coppia $\mathfrak{M}$ si ha

$$\mathfrak{M}\varphi_m + Rv_B = 0$$

da cui

$$R = -\mathfrak{M} \frac{\varphi_m}{v_B} . \quad (8)$$

Ponendo

$$v_B = -l m$$

si ha

$$R = \varphi_m . \quad (9)$$

Nel nostro caso è

$$\varphi_m = \varphi_A = \frac{1}{11a}$$

e quindi

$$R = \frac{\mathfrak{M}}{11a} t .$$

Dalla (9) si trae che, tracciando il diagramma delle rotazioni conseguente dall'eliminazione del vincolo che sviluppa R, e conseguenti ad un cedimento $-l$ in R, si ottiene la linea d'influenza r_B^m della reazione in R per effetto di una coppia $\mathfrak{M}$ viaggiante sulla struttura; data una coppia $\mathfrak{M}$

agente in una qualsiasi sezione S, la reazione R provocata da detta coppia è il prodotto di $\mathfrak{M}$ per l'ordinata di r_B^m che si legge sotto di essa. La r_B^m ha le dimensioni fisiche di $\frac{\mathcal{L}}{l}$, e cioè $[U^{-1}]$, poichè è ottenuta come diagramma di rotazioni provocate da un cedimento unitario; si ha pure (Fig. 2), per la nota relazione

$$\varphi = - \frac{dv}{dz}, \quad (10)$$

l'espressione che lega r_B^m ad r_B^F :

$$r_B^m = - \frac{dr_B^F}{dz}. \quad (11)$$

Sovente la r_B^F si indica con il simbolo semplificato r_B ; ciò è però sconsigliabile.

I concetti esposti nel presente esercizio si possono esporre in forma unitaria e generale, e suscettibile di ulteriori generalizzazioni, come si mostrerà nel seguito, e come già ben conosce il cultore di Scienza delle Costruzioni. Si può cioè enunciare: "data una struttura isostatica, la linea di influenza r_S^V di una qualsiasi reazione R in S, per effetto di un ente (forza o coppia) viaggiante V si ottiene tracciando il diagramma degli spostamenti V' corrispondenti a V, provocati dal cedimento R' unitario e negativo corrispondente ad R'' ".

In simboli si può scrivere

$$r_B^F(z) = v(z) \uparrow v_B = -1$$

$$r_B^m(z) = \varphi(z) \uparrow v_B = -1$$

e in genere

$$r_S^V(z) = V'(z) \uparrow v_S = -1,$$

dove $\uparrow$ sta per "provocato da ...".

X Problema n. 3.

Si vuol conoscere il momento M_S in S, nella trave della Fig. 3a. Ope-

rando alla Lagrange, si pratica in S la *sconnessione* corrispondente al momento, e cioè si offre alla struttura la possibilità di rotazione relativa intorno all'asse baricentrico di S normale al piano yz; in altre parole, si

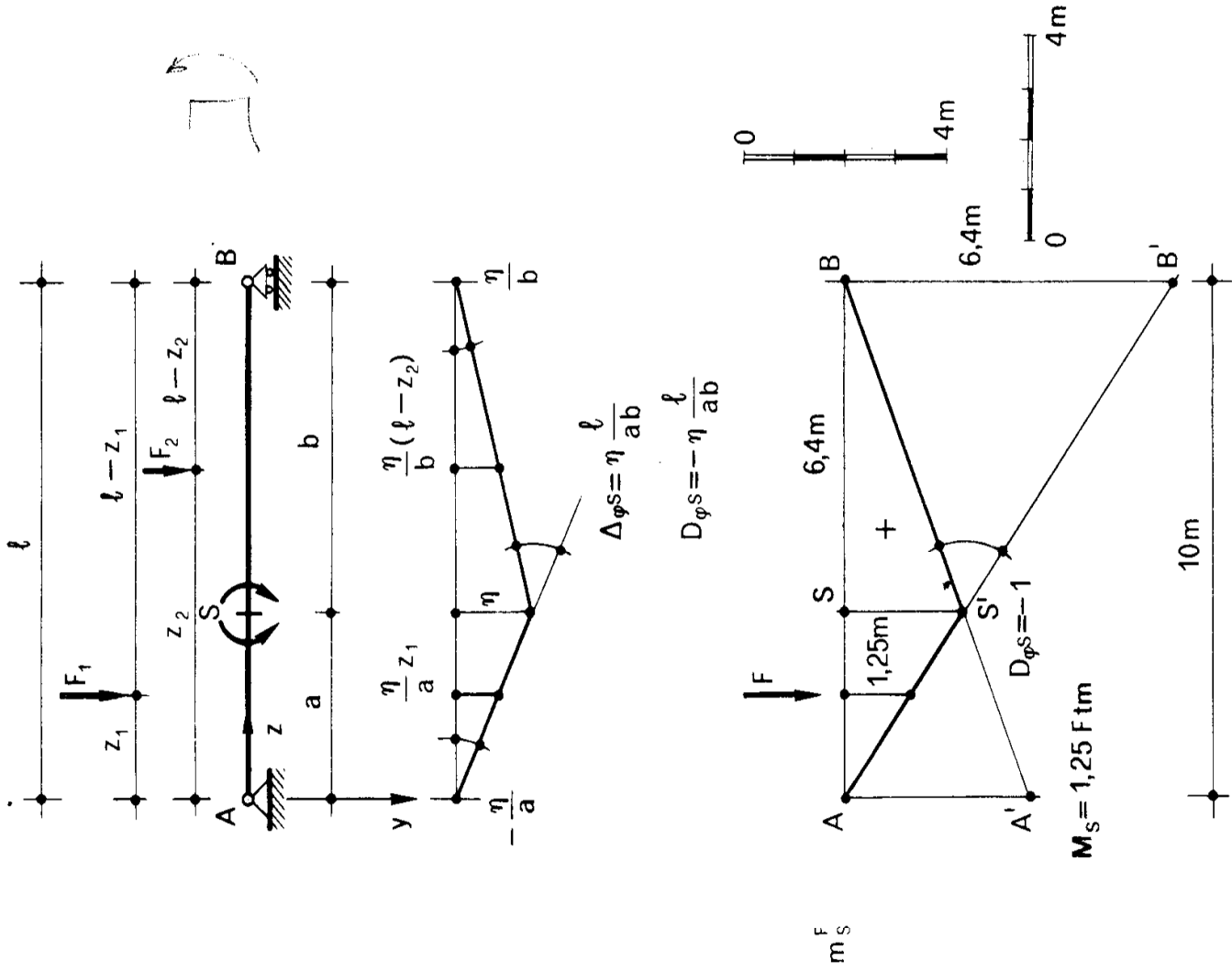


Figura 3a

inserisce una cerniera baricentrica in S. Scrivendo la condizione di equilibrio per la struttura resa così labile (il momento agisce come due coppie uguali e contrarie, corrispondenti in valore e segno ad M_S) si ha

$$F_1 v_1 + F_2 v_2 + M_s D_{\varphi s} = 0 \quad (12)$$

da cui

$$F_1 \frac{\eta}{a} z_1 + F_2 \frac{\eta}{b} (l - z_1) - M_s \eta \frac{l}{ab} = 0$$

e ancora

$$M_s = F_1 \frac{bz_1}{l} + F_2 \frac{a(l - z_1)}{l}$$

Si è presa come coordinata lagrangiana lo spostamento η in S; ovviamente tale parametro viene poi eliminato. Le caratteristiche $M_s > 0$ compiono lavoro positivo per una distorsione positiva, quindi M_s va moltiplicato per $D_{\varphi s}$ (misurato in radianti).

Se sulla trave agisce una sola forza F , si ha

$$F v_F + M_s D_{\varphi s} = 0$$

da cui

$$M_s = - F \frac{v_F}{D_{\varphi s}}. \quad (13)$$

Ponendo

$$D_{\varphi s} = -1 \quad (14)$$

la (13) fornisce

$$M_s = F v_F. \quad (15)$$

La (15) assicura che il diagramma degli spostamenti v conseguenti ad una distorsione negativa unitaria in S è la linea d'influenza m_s^F del momento in S per effetto della forza F viaggiante.

Si osserva immediatamente che esiste perfetta analogia tra quanto ora detto per il momento, e quanto già detto per la reazione; e cioè basta sostituire i termini *caratteristica della sollecitazione interna e distorsione* ai termini *reazione e cedimento* per estendere tutto quanto detto in tema di reazioni nell'ambito delle caratteristiche (momento, taglio, sforzo normale). Si può quindi enunciare con tranquillità: "data una struttura

isostatica, la linea d'influenza C_S^V di una qualsiasi caratteristica C in S per effetto di un ente viaggiante V si ottiene tracciando il diagramma degli spostamenti V' corrispondenti a V , provocati dalla distorsione unitaria e negativa corrispondente a C'' .

L'espressione della m_S^F deve essere sdoppiata in due, una relativa (Fig. 3a) al tratto AS , l'altra al tratto SB . Per essere $D_{\varphi S} = -1$,

$$D_{\varphi S} = -\eta \frac{l}{ab} = -1$$

$$\eta = \frac{ab}{l}$$

e quindi

$$m_S^F = \begin{cases} \frac{b}{l} z & z \in [0, a] \\ \frac{a}{l} (l - z) & z \in [a, l] \end{cases} \quad (16)$$

Si può osservare che il valore $D_{\varphi S}$ unitario è troppo grande per il necessario rispetto dell'ipotesi di piccoli spostamenti; ciò è vero, ma è altresì vero che la deformata non è in realtà quella generata da $D_{\varphi S}$ unitaria, ma quella generata da una $D_{\varphi S}$ molto piccola, divisa per $D_{\varphi S}$ stessa. In rigore, m_S^F è il limite, per $D_{\varphi S} \rightarrow 0$, del rapporto tra la deformata provocata da $D_{\varphi S}$, e $D_{\varphi S}$.

Lo stesso vale per la linea d'influenza di R , trattata nell'esercizio precedente.

Nella Fig. 3a è pure riportata la costruzione grafica di m_S^F , per opportuni valori di l , a , b .

Si è adottata come scala di m_S^F (che ha dimensioni di lunghezza) quella stessa delle lunghezze; si è disegnato in B secondo y il segmento

$$BB' = SB = 6,4 m$$

e si è unito B' con A . Ottenuto così S' sulla verticale per S , $S'B$ è il secondo ramo. Infatti, poichè vale l'ipotesi di piccoli spostamenti, e perciò è lecito confondere l'angolo in radianti con la sua tangente trigonometrica, si ha (in valore assoluto)

$$(BS'B') = \operatorname{tg}(BS'B') = \frac{BB'}{SB} = 1. \quad (17)$$

Il vantaggio di assumere

$$S_m = S_l$$

è quello di poter riportare BB' con un compasso, tracciando il cerchio di centro B e raggio BS ; ma si può anche adottare una scala più grande, per rimpicciolire il disegno, o una scala più piccola, per ingrandirlo. E' quanto si è fatto nella Figura 3b.

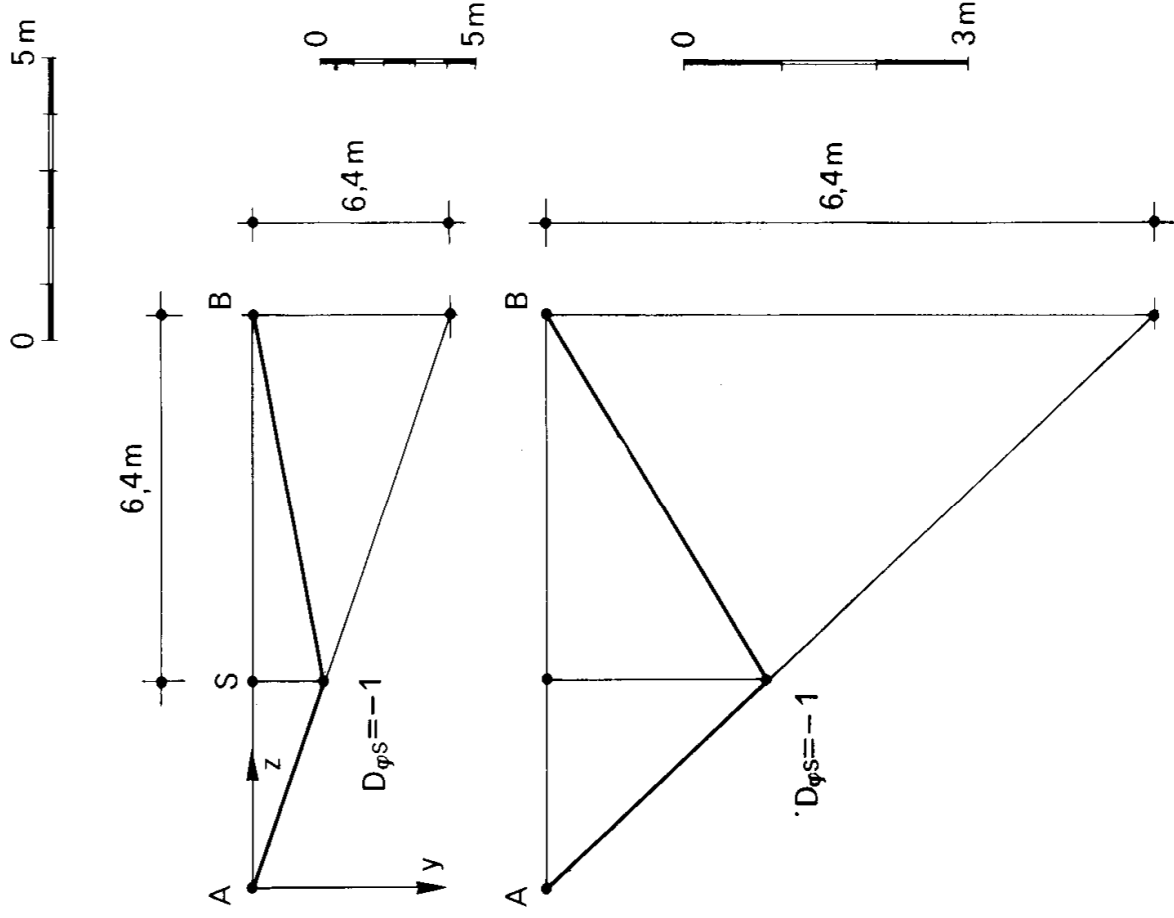


Figura 3b

E' facile osservare che, per una forza di F tonn. verticale viaggiante, il massimo momento in S si attinge quando F passa per S , ed è pari a

$$M_{S \max} = F \cdot \frac{6,4}{10} \cdot 3,6 = 2,304 F \text{ tm}.$$

Così pure, un carico q t/m uniforme provoca in S il momento massimo se è distribuito su tutta la luce, e si ha

$$M_{S \max} = q \cdot \frac{2,304 \cdot 10}{2} = 11,52 q \text{ tm}.$$

Problema n. 4.

Si sono tracciate (Fig. 4) le due linee d'influenza m_S^F e t_S^F per il momento ed il taglio in S , e per una F verticale viaggiante, con riferimento ad una trave appoggiata con sbalzo. Per la costruzione della t_S^F , si è impressa una distorsione $D_t = -1$ in S . La linea t_S^F ha dimensioni di numero, perchè le sue ordinate sono i rapporti tra gli spostamenti provocati da D_t , e D_t stessa; in tal senso infatti è da intendersi, come già chiarito, la frase "imprimere una distorsione unitaria". Basta perciò tracciare il segmento AA' da A secondo y , ed assumerlo come unità; la congiungente $A'B$ è una parte della t_S^F , valevole da S a C , mentre la parallela ad essa per A è l'altra parte, valevole da A ad S .

Analiticamente è

$$t_S^F = \begin{cases} -\frac{z}{l} & z \in [0, a] \\ 1 - \frac{z}{l} & z \in [a, l + c] \end{cases} \quad (18)$$

L'intervallo di definizione di t_S^F è, nel primo e nel secondo caso, aperto in S ; in S infatti t_S^F non è definito, mentre il suo limite è $-\frac{a}{l}$ a sinistra, $\frac{b}{l}$ a destra.

Per la m_S^F la costruzione è identica a quella eseguita nell'esercizio precedente, fatta su A invece che su B ; la linea m_S^F è stata disegnata nella stessa scala delle lunghezze.

Analiticamente si ha

$$m_S^F = \begin{cases} \frac{b}{l} z & z \in [0, a] \\ \frac{a}{l} (l - z) & z \in [a, l + c] \end{cases} \quad (19)$$

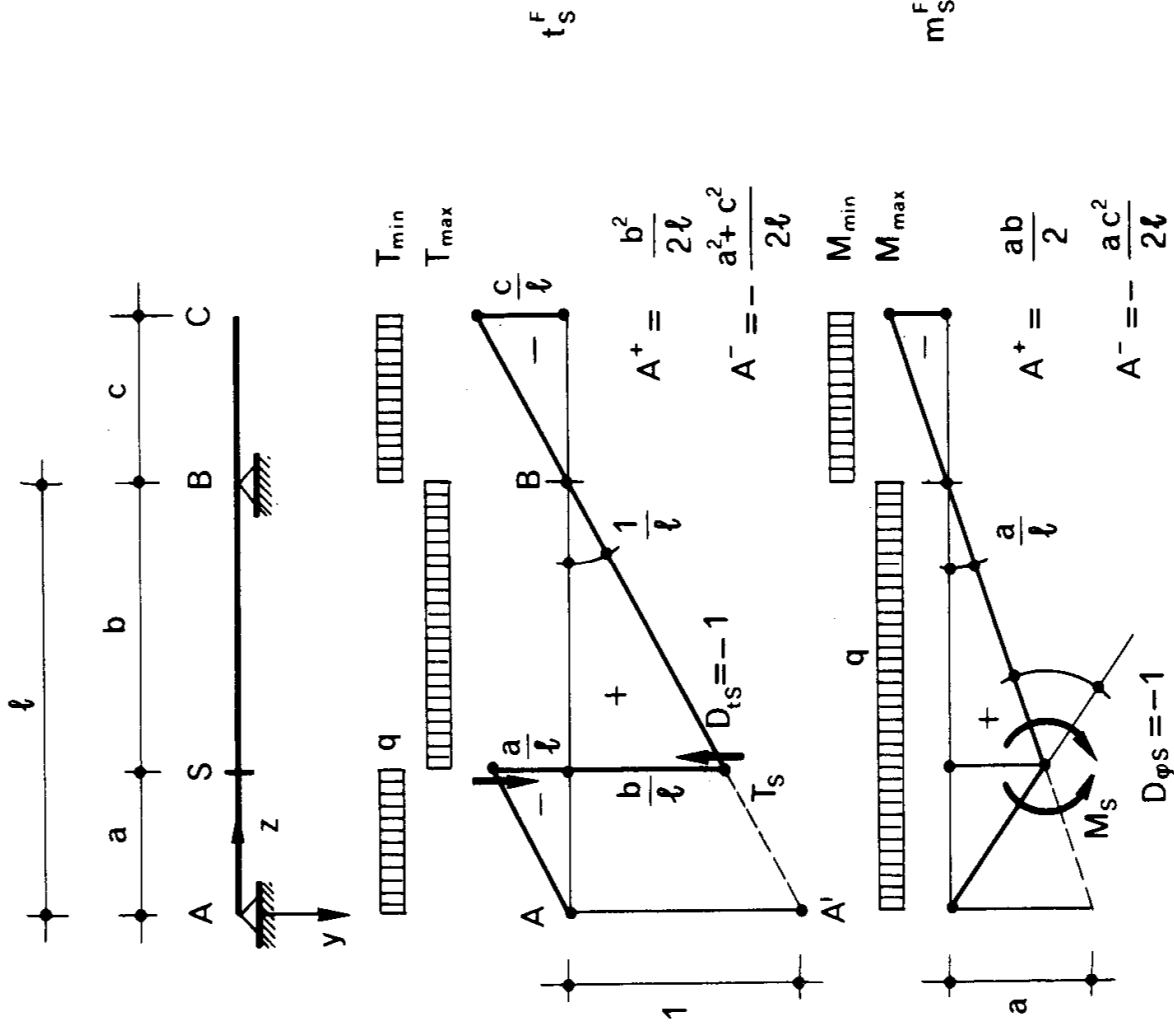


Figura 4

Le (19) sono analoghe alle (16), fatta eccezione per l'intervallo di definizione della seconda funzione, che si estende da S a C.

Si osservi che gli intervalli di definizione di m_S sono ambedue chiusi; in S , m_S^F è definita, e pari ad $\frac{ab}{l}$; inoltre ha limite in S , e tale limite è ancora $\frac{ab}{l}$; quindi m_S^F è pure continua in S . Sempre in S , la m_S^F non è derivabile, ma lo è a sinistra e a destra.

E' interessante notare come, ponendo

$$b = l - a$$

le (19) possono scriversi

$$m_S^F = \begin{cases} \frac{l-a}{l} z & z \in [0, a] \\ \frac{a}{l} (l-z) & z \in [a, l+c], \end{cases}$$

da cui si trae (vedi 18)

$$t_S^F = \frac{dm_S^F}{da} \quad (20)$$

La (20) è analoga, nella forma, alla (11), anche se sostanzialmente ben diversa, e trova la sua dimostrazione generale nei fondamenti della teoria delle linee d'influenza.

Nella Fig. 4 sono consegnate anche le aree delle parti di t_S^F ed m_S^F ad ordinate positive e negative; esse sono utili per il calcolo dei valori estremi di M_S e T_S quando il carico è uniformemente distribuito.

E' noto infatti che l'effetto E in S dovuto ad un carico uniforme q è il prodotto di q per l'area della linea di influenza e_S^F sottostante q stesso. Le stese di carico che producono T_{max} e T_{min} , M_{max} e M_{min} sono perciò (Fig. 4) immediatamente definite, e si ha

$$T_{S \max} = q \frac{b^2}{2l} \quad T_{S \min} = -q \frac{a^2 + c^2}{2l}$$

$$M_{S \max} = q \frac{ab}{2} \quad M_{S \min} = -q \frac{ac^2}{2l}.$$

Problema n. 5.

Si prenda in esame la trave Gerber a tre appoggi ed una cerniera della Fig. 5, onde ottenere le linee d'influenza t_S^F ed m_S^F , per una forza F verticale viaggiante. Il procedimento è identico a quello già seguito nel precedente esercizio; le linee sono costituite ciascuna da spezzate composte da tre segmenti di rette. Analiticamente, t_S^F ed m_S^F sono espresse cia-

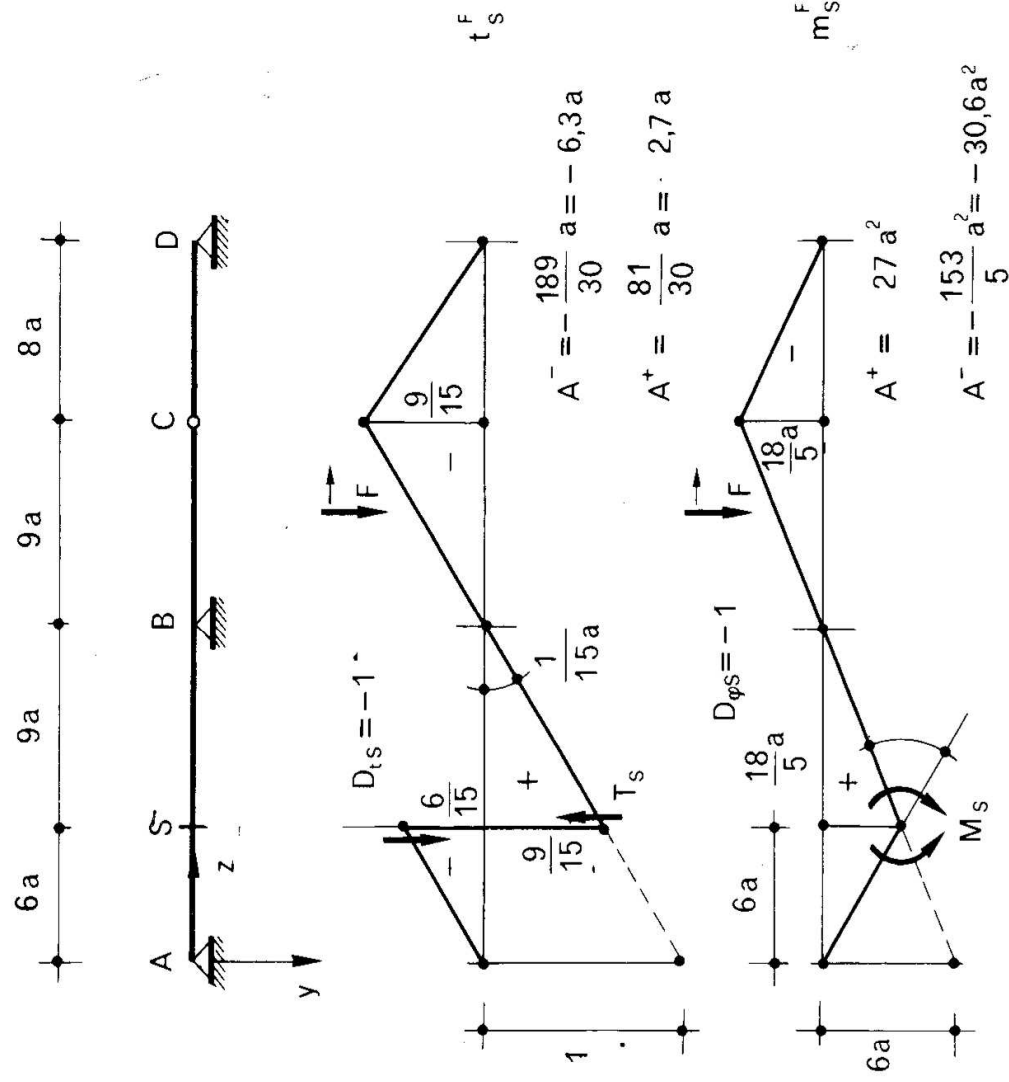


Figura 5

scuna da tre funzioni, definite nei tre intervalli AS, SC e CD; la t_S^F non è definita in S, e quindi neppure continua.

Problema n. 6.

Si sono tracciate le linee t_S^F ed m_S^F , per una forza F verticale viaggiante, relative alla trave Gerber della Fig. 6, su tre appoggi, con bipendolo interno e sbalzo. Le linee sono costituite ciascuna da quattro segmenti

di retta; t_S^F non è definita, e quindi non è continua, in B ed S, m_S^F in B.

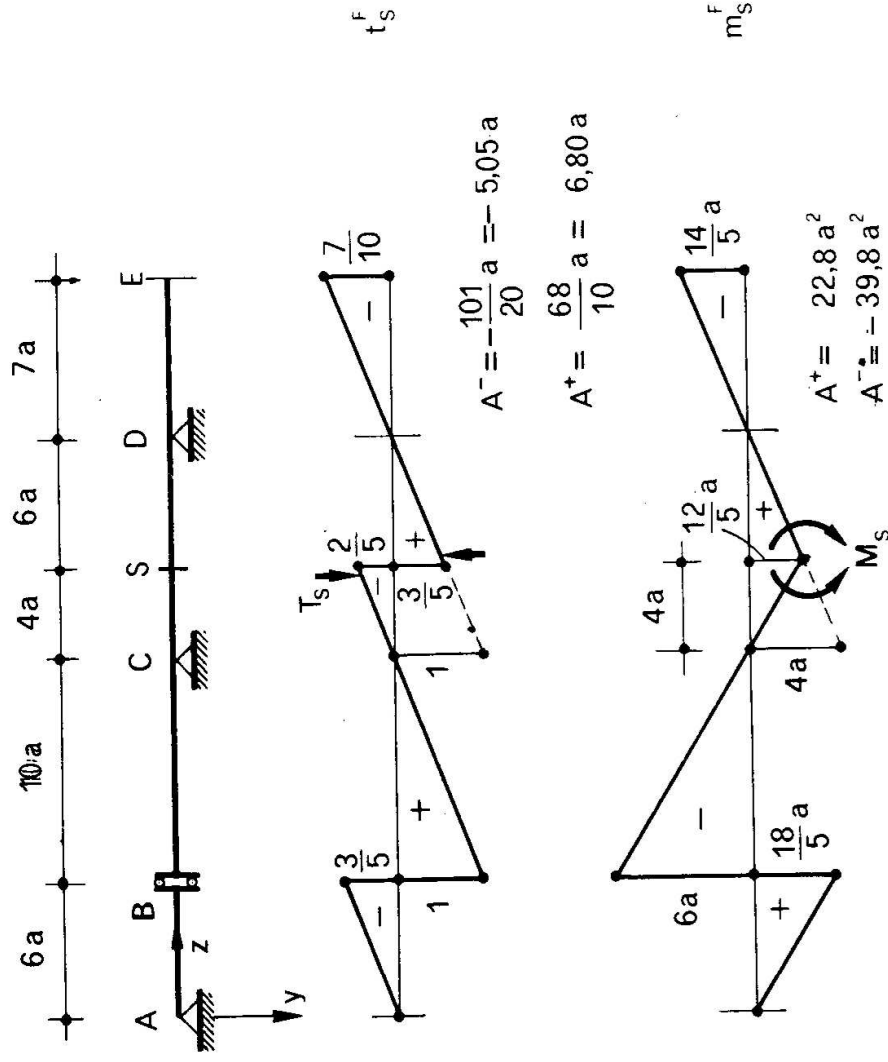


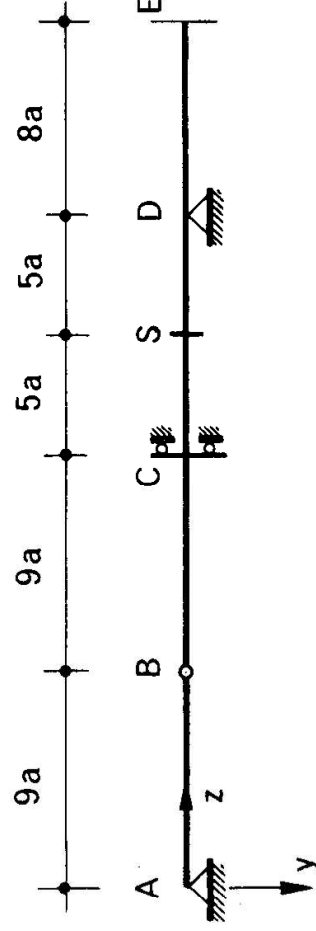
Figura 6

Si noti che il bipendolo interno in B impone che i due segmenti di deformata relativi ai tratti AB e BC siano paralleli.

Problema n. 7.

La trave della Fig. 7 è su due appoggi, con cerniera, bipendolo esterno e sbalzo; nella costruzione delle due linee t_S^F ed m_S^F , il bipendolo ester-

no in C impone che il segmento di deformata relativo al tratto BS sia



$$A^- = -\frac{37}{2}a = -18,5a$$

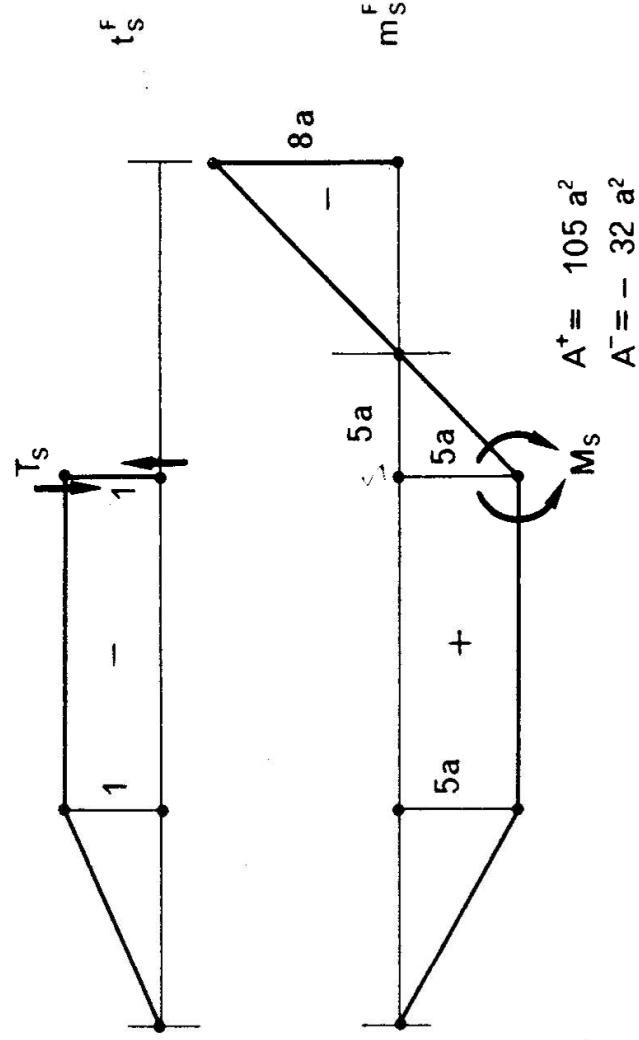


Figura 7

parallelo all'asse z.

Problema n. 8.

Dopo quanto detto negli esercizi 6 e 7 circa le condizioni imposte

dai bipendoli, la compressione delle linee t_S^F ed m_S^F della Fig. 8 è affidata

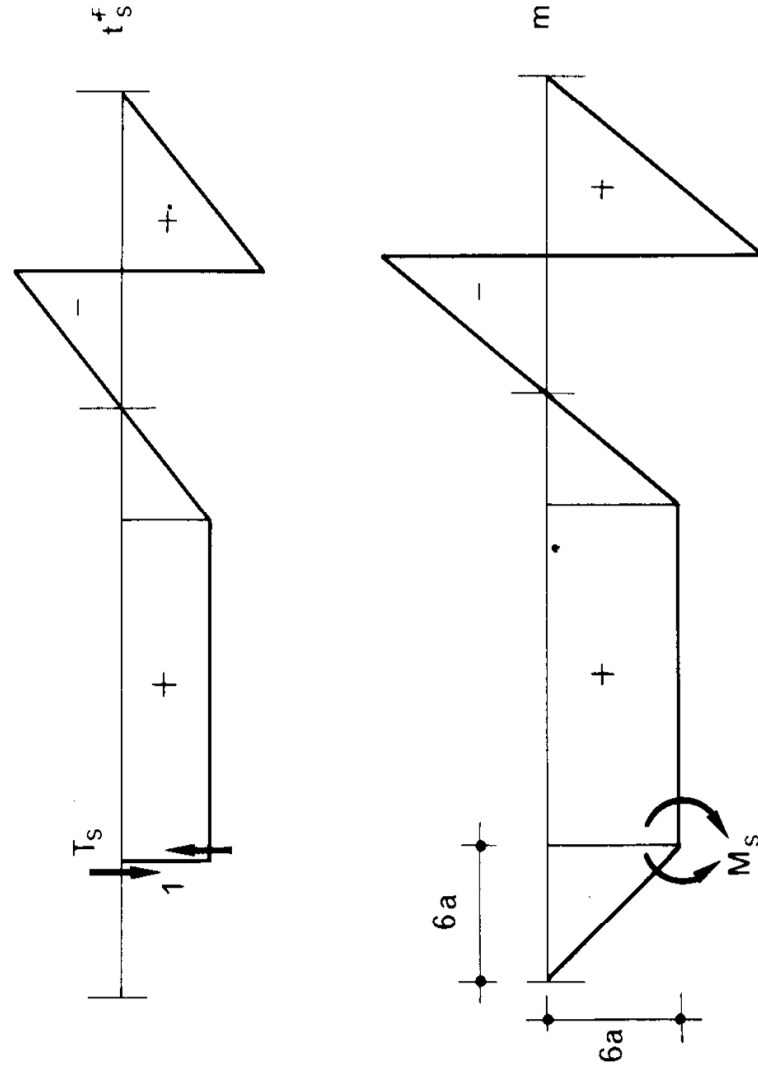
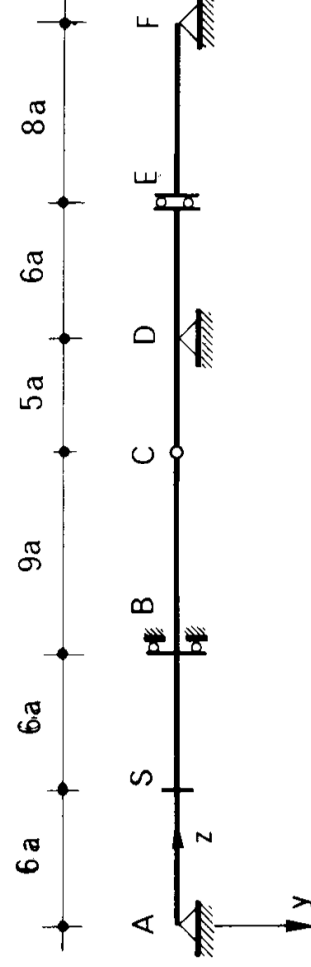


Figura 8

al lettore.

Problema n. 9.

La prima linea disegnata nella Fig. 9 è la r_A^F ; poichè la connessione in A deve essere fatta in modo da consentire il solo spostamento corri-

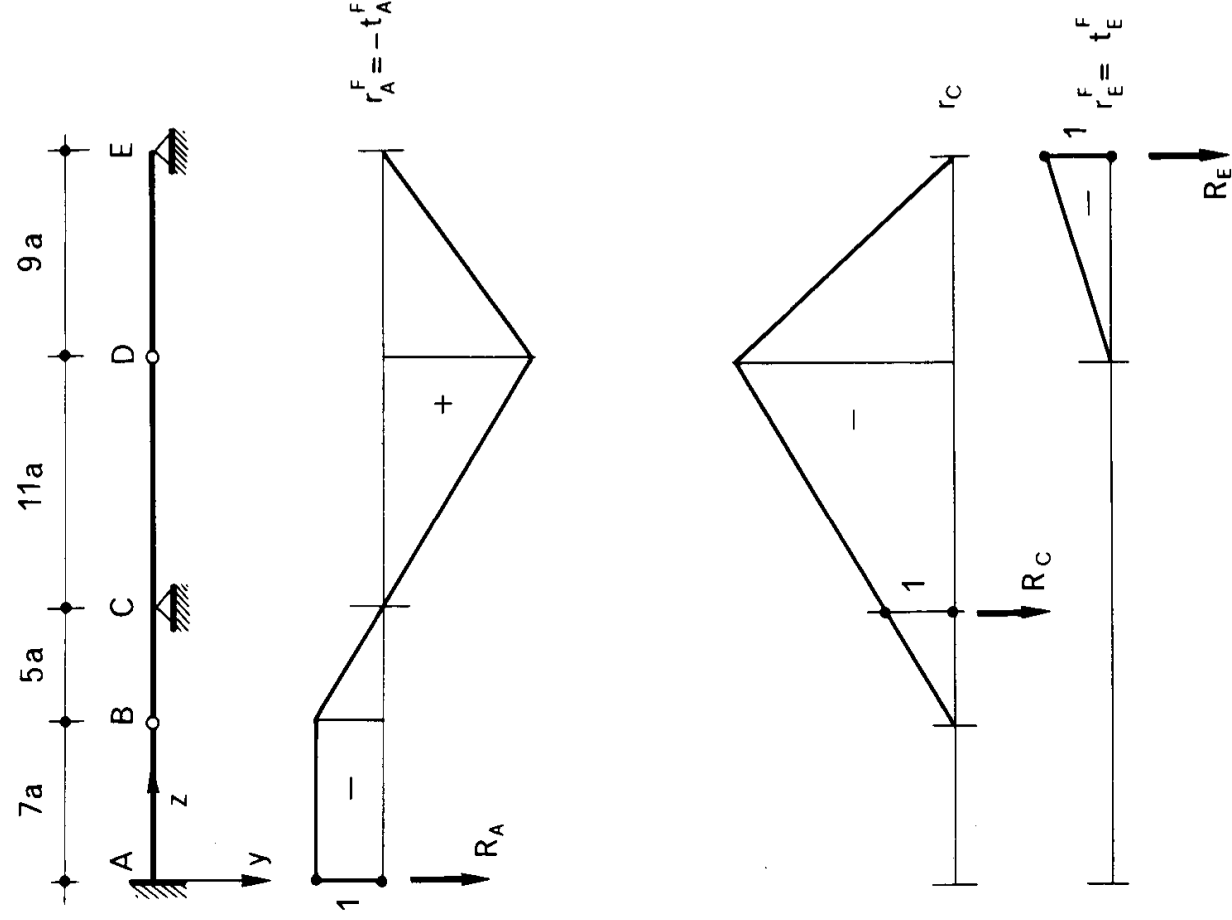
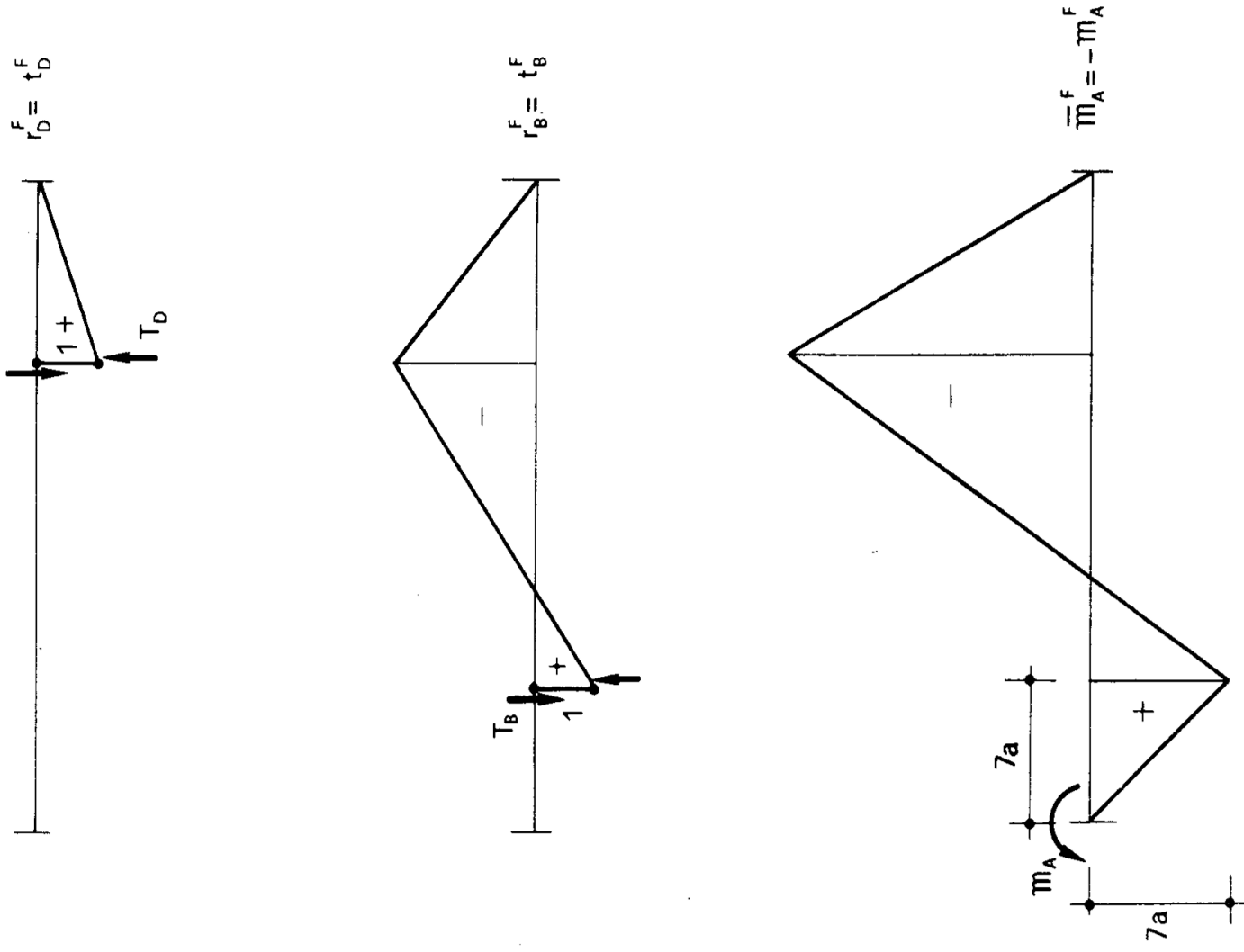


Figura 9



Segue figura 9

spondente ad R_A , in A dovrà essere consentito solo lo spostamento, non certo la rotazione. Si osservi pure che

$$R_A = -T_A \quad (21)$$

e quindi

$$r_A = -t_A \quad (22)$$

Le altre linee si lasciano allo studio del lettore.

Problema n. 10.

Si consideri la trave della Fig. 10a, soggetta ad una distorsione D_φ in

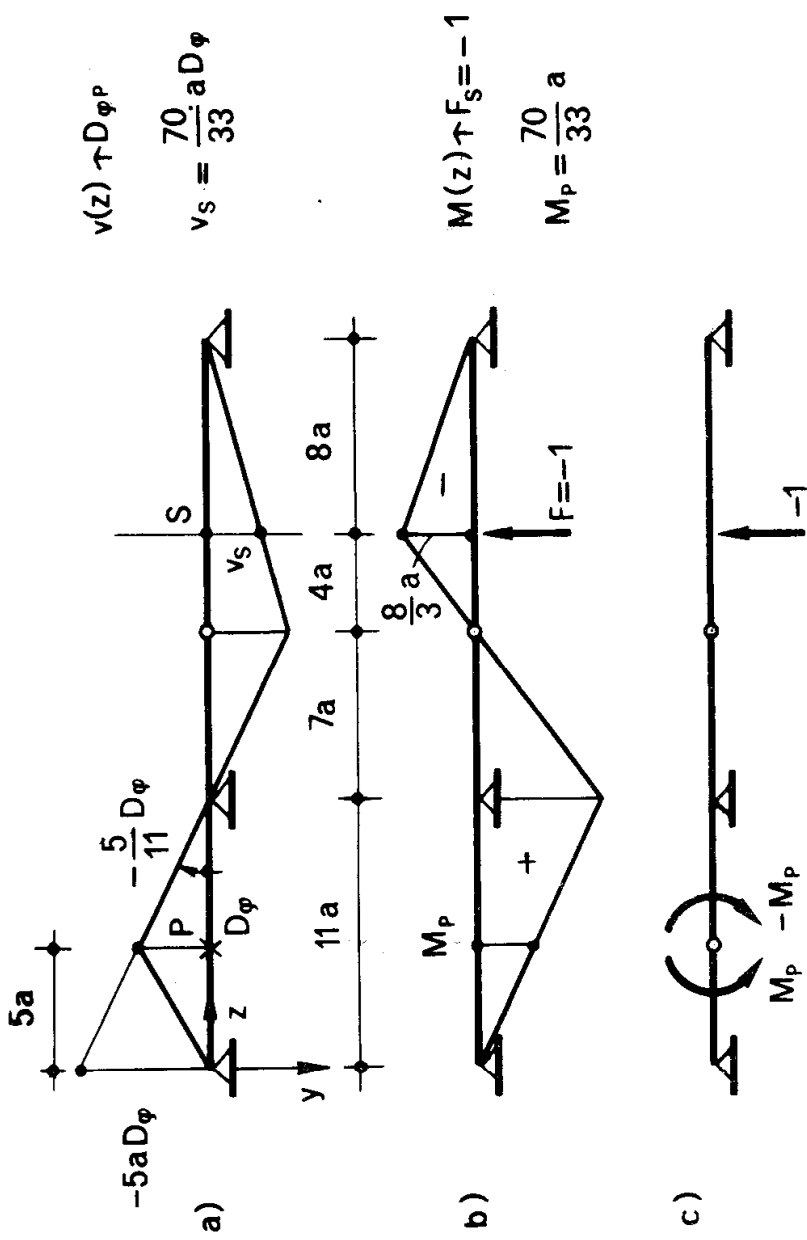


Figura 10

P; si vuole conoscere lo spostamento v_S della sezione S. A ciò fare si assoggetta (Fig. 10b) la trave ad una forza F in S, e si calcola il conseguente momento in M_P in P; la struttura, resa labile interponendo (Fig. 10c), una cerniera in P, è in equilibrio sotto la forza F in S e le coppie M_P e $-M_P$ in P; la deformata da utilizzare per scrivere l'equazione di Lagrange può essere proprio quella provocata dalla distorsione D_φ in P. Si ha così

$$M_P D_\varphi + F v_S = 0$$

da cui

$$v_S = - D_\varphi \frac{M_P}{F} \quad (23)$$

Ponendo

$$F = -1 t$$

la (23) fornisce

$$v_S = D_\varphi M_P ; \quad (24)$$

la M_P della (24) ha dimensioni $[U]$, poichè deve sottintendersi che essa è divisa per la forza unitaria. Dalla (24) si osserva che se si opera come segue: a) si carica la struttura in S con una forza F diretta nel verso contrario ad y ; b) si traccia il diagramma del momento; c) si divide il diagramma per $|F|$ — in una parola; se si traccia il diagramma del momento corrispondente ad una forza unitaria negativa in S — si ottiene un diagramma che può essere utilizzato come segue: data una distorsione D_φ agente in una qualsiasi sezione P, lo spostamento di S secondo y è il prodotto di D_φ per l'ordinata del diagramma che si legge sotto D_φ . Questo diagramma, che si indica con

$$\frac{D_\varphi}{v_S}$$

è la *linea d'influenza* dello spostamento secondo y in S per effetto di una distorsione D_φ viaggiante. In simboli può scriversi

$$\frac{D_\varphi}{v_S}(z) = M(z) \uparrow F_S = -1.$$

E' palese l'analogia con quanto già detto nell'esercizio n. 2; si può estendere perciò ancor più il concetto di linea d'influenza dicendo: "data una struttura isostatica, la linea d'influenza di un qualsiasi ente E in S (spostamento, reazione o caratteristica della sollecitazione interna) per effetto di un ente V viaggiante (distorsione, forza o coppia) si ottiene tracciando il diagramma dell'ente V' corrispondente a V provocato dall'ente E' = ± 1 corrispondente ad E ed agente in S; E' è + 1 se E e V sono equivalenti, - 1 in caso contrario" (*). In simboli

$$e_S^V(z) = V'(z) \uparrow E'_S = \pm 1. \quad (25)$$

La linea d'influenza e si indica sempre con lettera minuscola; se anche l'ente E si indica con lettera minuscola, il possibile equivoco è eliminato dalla presenza dell'esponente V.

La (25) è di carattere generale e vale anche per le strutture iperstatiche, come ben sa il cultore di Scienza delle Costruzioni. Si è preferito fornirla fin da ora nella sua accezione più vasta; è chiaro però che nelle strutture isostatiche rigide la E'_S è sempre pari a - 1; infatti si possono richiedere ad esse soltanto linee d'influenza di spostamenti per distorsioni viaggianti, o di caratteristiche (in particolare reazioni vincolari) per forze o coppie viaggianti, mentre le linee d'influenza di spostamenti per forze viaggianti, o di caratteristiche per distorsioni viaggianti, sono ovviamente appannaggio esclusivo delle strutture elastiche, e nel secondo caso anche iperstatiche.

Problema n. 11.

Nella stessa trave dell'esercizio precedente si ricerca (Figura 11) la linea d'influenza $\Delta\varphi_S^{D\varphi}$ della rotazione relativa tra le due facce unite dalla cerniera S, per una D_φ viaggiante. Posto $n \parallel y$, $t = z$, ai lumi della (25) occorre far agire in S una coppia unitaria negativa sulla faccia destra, e positiva sulla faccia sinistra; infatti $\Delta\varphi_S = \varphi_d - \varphi_s$. Poiché l'ente viaggiante

(*) L'ente V' corrispondente ad un altro ente V è la quantità per cui V' compie lavoro; V e V' sono cioè i due fattori del lavoro ad essi inerente. Due enti E e V sono *equivalenti* se appartenenti ambedue alla *classe delle forze* (forze, coppie, spostamenti, rotazioni) o alla *classe delle distorsioni* (distorsioni, cedimenti vincolari, caratteristiche della sollecitazione interna, reazioni vincolari.)

è una D_φ , occorre tracciare il diagramma dei momenti; in simboli è

$$\Delta \varphi_S^{D_\varphi}(z) = M(z) \uparrow m_{Sd} = -1, m_{Ss} = 1.$$

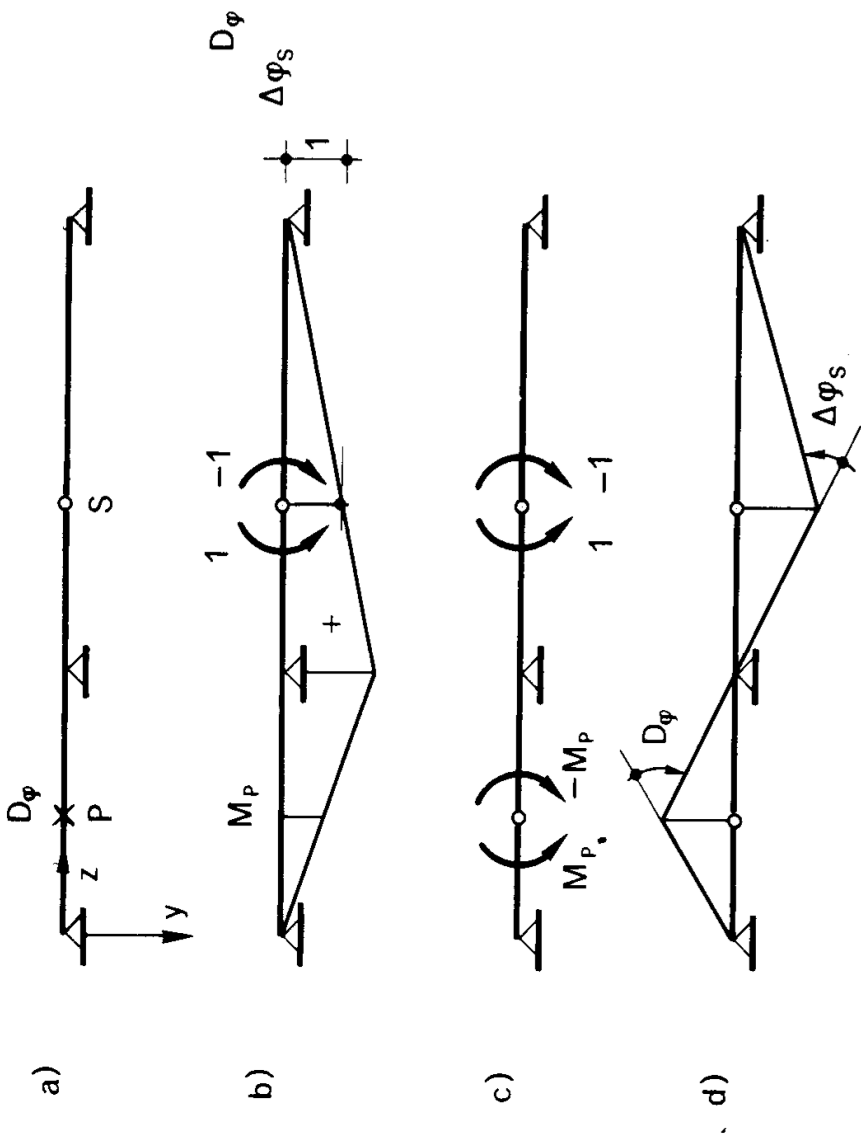


Figura 11

Problema n. 12.

Sempre nella trave dei due precedenti esercizi, si richiede la linea d'influenza $v_S^{D_t}$ dell'abbassamento in S , per una D_t viaggiante. Si ha

$$v_S^{D_t}(z) = T(z) \uparrow F_S = -1.$$

Si è pure verificata l'esattezza della linea per una $D_t = h$ nel tratto

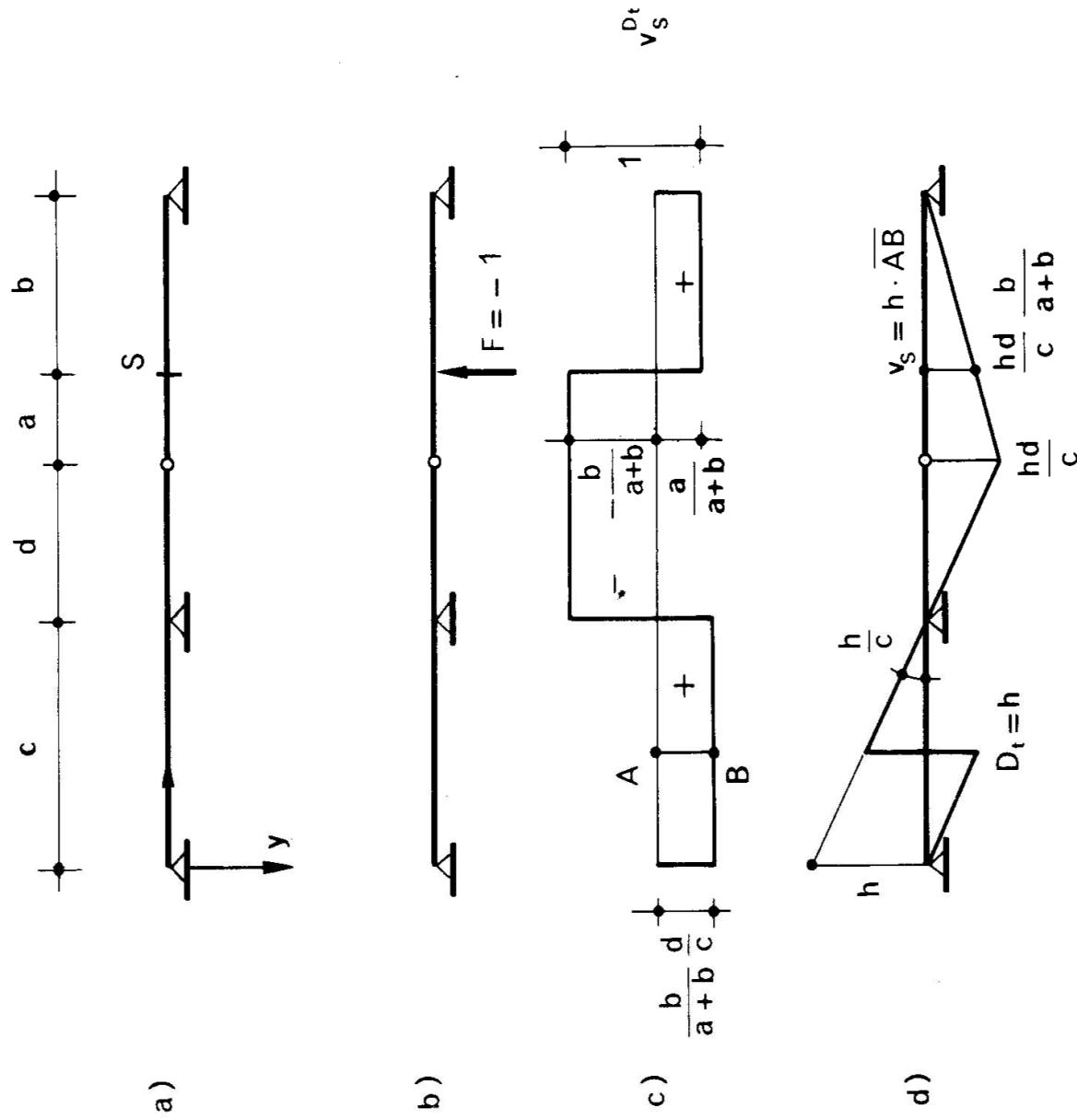


Figura 12

compreso tra i due primi appoggi (Fig. 12d).

Problema n. 13.

La struttura della Fig. 13a è ad asse curvilineo; si vuole la reazione R del pendolo per i seguenti valori dei carichi, applicati come nella figura:

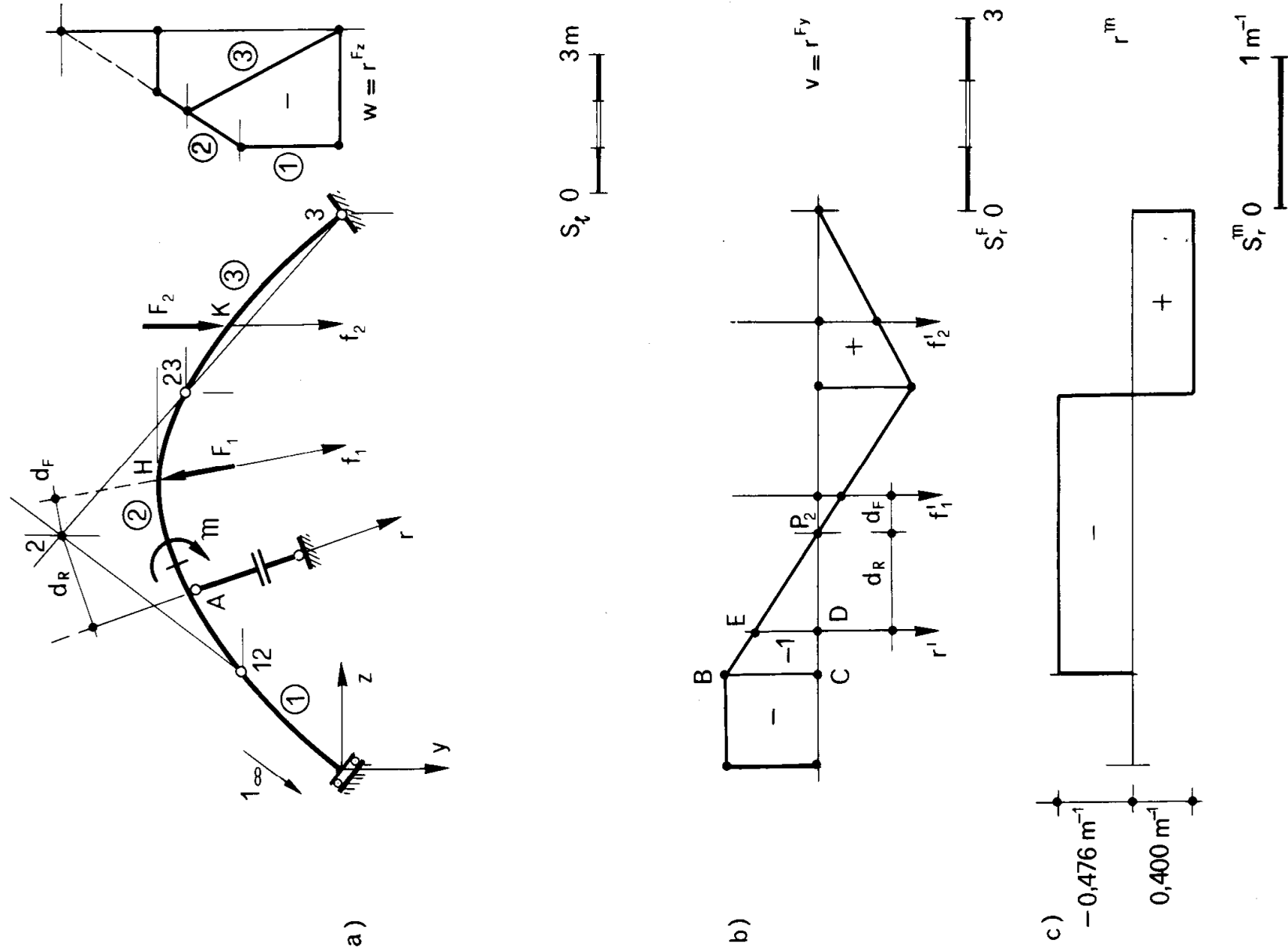


Figura 13

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= -2 \text{ tm} \\ F_1 &= -3 \text{ t} \\ F_2 &= 1,5 \text{ t} . \end{aligned}$$

I segni di F_1 ed R sono definiti, avendo assegnato i versi delle loro rette d'azione f_1 ed r ; la retta d'azione di F_2 è, come d'uso, equiversa ad y . Per poter applicare il procedimento di Lagrange occorre sopprimere il pendolo e sostituire ad esso la reazione R . Se la struttura così ottenuta (*struttura ridotta*) ammette un sol grado di libertà, e cioè un insieme di spostamenti determinato a meno di un sol parametro c (*coordinata lagrangiana*), si ha^(*)

$$c R s_R + c L_F = 0 ,$$

e quindi

$$R = - \frac{L_F}{s_R} ; \quad (27)$$

se è

$$s_R \neq 0 \quad (28)$$

(*) Gli spostamenti sono funzioni ad un sol valore di c , in genere non lineari (vedi nota es. 1). L'espressione di Lagrange

$$d_1 L = \frac{dL}{dc} dc = 0 \quad (26)$$

fornisce una relazione in c , R e le altre forze, che lega R e c nelle varie configurazioni di equilibrio.

Poichè però si fa riferimento ad una configurazione certamente di equilibrio, come è quella reale, e si utilizza la relazione di Lagrange come *necessaria*, i coefficienti della (26) devono essere calcolati nella suddetta configurazione, e sono quindi noti; la (26) è una relazione lineare omogenea in dc , uguagliata a zero, quindi dc scompare, e si ha R in funzione delle forze applicate.

Se si pone $c = 0$ nella configurazione reale, nell'espressione di $d_1 L$ si può usare indifferentemente dc o c . Si osservi inoltre che invece di scrivere l'espressione di L in funzione di c e poi derivarla, si può meglio scrivere direttamente l'espressione di $d_1 L$ introducendo negli spostamenti i soli termini lineari in c .

R è *determinata* poichè il rapporto $\frac{L_F}{s_R}$ è univocamente determinato. La struttura, comunque caricata, costituisce un *sistema isostatico* rispetto alla reazione R.

Per potere tracciare le due *deformate* secondo y e z, e cioè i due diagrammi delle componenti degli spostamenti (v e w) secondo y e z, è necessario ricorrere all'*algoritmo delle catene cinematiche* o dei *meccanismi*, ben noto dalla Meccanica Razionale. Nel caso in esame si è in presenza di tre tratti rigidi, indicati con 1, 2 e 3. I centri noti sono

$$C_1 \quad C_{12} \quad C_{23} \quad C_3$$

indicati per semplicità con i soli deponenti.

Chiamando n il numero dei tratti rigidi della struttura ridotta, è noto che il numero dei centri che basta conoscere per costruire una qualsiasi *deformata* s_a (diagramma delle componenti degli spostamenti secondo una generica retta a) è $2n - 1$; infatti la deformata è costituita da n tratti di retta, e quindi, per es., il primo tratto è definito dalla posizione del suo centro assoluto C_1 , mentre per ogni altro tratto j basta conoscere C_j e C_{ij} (i precede immediatamente j). E' ovvio che i centri sufficienti al tracciamento della deformata possono essere anche altri, però non una scelta arbitraria. D'altro canto, il numero totale dei centri è ovviamente, considerato anche il centro assoluto C_i indicato dalla coppia (0, i) pari al numero di combinazioni di classe 2 di $n + 1$ elementi, e cioè^(*)

$$C_{n+1}^2 = \frac{(n + 1)n}{2}$$

Nel caso in esame è $n = 3$, e quindi

$$2n - 1 = 5$$

$$\frac{(n + 1)n}{2} = 6 .$$

(*) Si ricordi che è

$$C_n^k = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!}$$

La tabella dei centri si costruisce come segue, indicando soltanto i deponenti,

	1	2	3
1	<i>1</i>	<i>12</i>	<i>13</i>
2		2	<i>23</i>
3			3

dove i centri noti sono in corsivo. Dei due centri incogniti si costruisce C_2 , che deve soddisfare alle due condizioni

$$C_2 \in C_3 \ C_{23}$$

$$C_2 \in C_1 \ C_{12} .$$

Il centro C_{13} può costruirsi, a scopo di verifica; esso si ha utilizzando le altre due condizioni

$$C_{13} \in C_1 \ C_3$$

$$C_{13} \in C_{12} \ C_{23} ,$$

La seguente schematizzazione grafica può essere adoperata per inquadrare le successive operazioni:

noti	incogniti
1	$2 = 1 \cdot 12 \cap 3 \cdot 23$
3	$13 = 1 \cdot 3 \cap 12 \cdot 23$
12	
23	

Ottenuti i centri, si sono disegnate le due deformate v e w (Fig. 13b, a). La v ha il segmento sub (1) parallelo all'asse delle z , poichè C_1 è improprio; il segmento sub (2) presenta ordinata nulla in corrispondenza di C_2 (punto P_2); il segmento sub (3) presenta ordinata nulla in corrispon-

denza di C_3 ; i segmenti sub (1), e sub (2) si intersecano in corrispondenza di C_{12} , i segmenti sub (2) e sub (3) in corrispondenza di C_{23} .

Come si vede, non è necessario conoscere C_{13} ; è facile osservare come i segmenti sub (1) e sub (3) si intersechino in corrispondenza di C_{13} .

La deformata w deve avere il segmento sub (1) ortogonale al segmento sub (1) della deformata v , e così per tutti gli altri; infatti è noto che l'angolo fra un qualsiasi segmento della generica deformata s_a e la fondamentale ($\perp a$) è uguale all'angolo di rotazione del tratto rigido corrispondente; dato quindi un tratto rigido i , e due deformate s_a ed s_b , i due segmenti di s_a e di s_b sub (i) devono formare tra loro lo stesso angolo che formano le due fondamentali di s_a e di s_b (o, se si vuole, a e b).

La componente dello spostamento del punto A, dove agisce il pendolo, nella direzione e nel verso di r , è fornita dal prodotto della distanza $d_{C_2 r}$ di C_2 da r per l'angolo di rotazione φ_2 ; nel caso in esame é

$$d_{C_2 r} = 2,1 \text{ m}$$

$$\varphi_2 = \frac{CB}{CP_2} = -\frac{2}{3}$$

e quindi

$$s_{Ar} = -2,1 \cdot \frac{2}{3} = -1,4 \text{ m}.$$

La quantità s_{Ar} può anche ottenersi riportando (Figura 13b) la retta r' parallela ad y nel diagramma v , in modo che r' stia rispetto a P_2 come r sta rispetto a C_2 ; sulla r' si legge $s_{Ar} = DE$, in valore e segno. Così è pure

$$d_{C_2 f_1} = -0,8 \text{ m}$$

e quindi

$$s_{Hf_1} = 0,8 \cdot \frac{2}{3} = 0,533 \text{ m};$$

si ha poi

$$s_{Kf_2} = 1,3 \text{ m}.$$