

CAPITOLO PRIMO

GEOMETRIA DELLE MASSE

Problema n. 1.

L'ellisse centrale di inerzia è fornita (Fig. 1) mediante le due rette baricentriche *coniugate* s_0 e t_0 , ed i relativi semidiametri GT_1 e GS_1 (semidiametri, o raggi, *coniugati*).

Si ricorda che in geometria delle masse due rette s e t si dicono *coniugate* se l'una contiene il *centro* dell'altra: in simboli

$$t \ni C_s \iff s \ni C_t \iff t, s \text{ coniugate.} \quad (1)$$

Così pure due punti C_s e C_t sono *coniugati* se l'uno appartiene alla retta di cui l'altra è centro. Quindi la (1) si completa sull'altra

$$C_s \in t \iff C_t \in s \iff t, s \text{ coniugate} \iff C_s, C_t \text{ coniugati.} \quad (2)$$

Si dimostra che, dato un fascio di rette, le rette coniugate di tale fascio sono anche coniugate in una involuzione; così pure, data una punteggiata, i punti coniugati di tale retta sono anche coniugati in una involuzione. Ciò giustifica l'aggettivo *coniugato* adottato in geometria delle masse.

Discende da (2) che, data una retta a ed il suo centro C_a , quando una retta s ruota intorno a C_a il suo centro C_s percorre la retta a : due rette coniugate s e t nell'involuzione d'inerzia di centro C_a tagliano la

retta a nei centri rispettivamente C_t e C_s , coniugati nell'involuzione di sostegno a . In simboli

$$s \ni C_a \iff C_s \in a \quad \forall s \quad (3)$$

$$s \ni C_a \text{ coniugata } t \ni C_a \iff s \cap a \text{ coniugato } t \cap a. \quad (4)$$

Particolare interesse riveste il caso in cui la retta a è baricentrica (involuzione baricentrica di inerzia), per esempio la t_0 della Fig. 1. In questo caso il centro di t_0 è improprio, e la retta s_0 , coniugata di t_0 nell'involuzione di centro G , ha per direzione proprio tale centro. Nel fascio

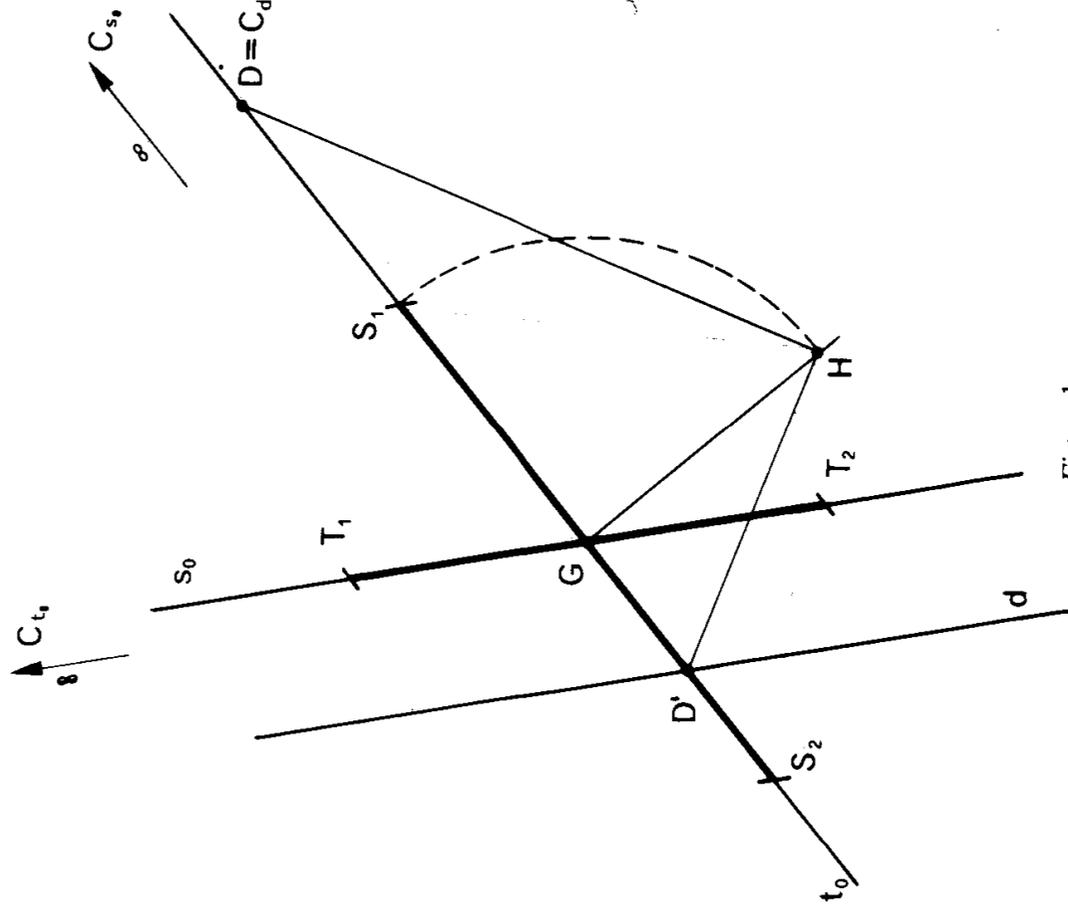


Figura 1

di centro C_{t_0} le coppie coniugate sono definite dai punti DD' corrispondenti nell'involuzione di sostegno t_0 ; dato perciò un punto D su t_0 , la retta d di centro D è parallela ad s_0 , e passa per D' ; data una retta d parallela ad s_0 , il suo centro C_d è il punto D corrispondente di $D' = d \cap t_0$.

La retta generica a ed il suo centro C_a si corrispondono, per masse tutte positive, come retta ed *antipolo*, o come punto ed *antipolare*, rispetto all'ellisse centrale di inerzia; se ne deduce che l'involuzione d'inerzia sulla generica retta baricentrica t_0 ha per centro G , i suoi punti doppi sono immaginari (e quindi D e D' sono da parte opposta rispetto a G), e la sua potenza è data dal quadrato del semidiametro GS_1 giacente su t_0 , quindi

$$GD \cdot GD' = GS_1^2. \tag{5}$$

La (5) si traduce nell'ovvia operazione grafica della figura 1, in omaggio al primo teorema di Euclide. Essa serve ad ottenere la retta d il cui centro C_d giaccia su uno dei due assi coniugati assegnati a definire l'ellisse, oppure a determinare il centro C_d di una retta d parallela ad uno dei due suddetti assi coniugati.

Problema n. 2.

Si vuole determinare, assegnata l'ellisse mediante due semidiametri

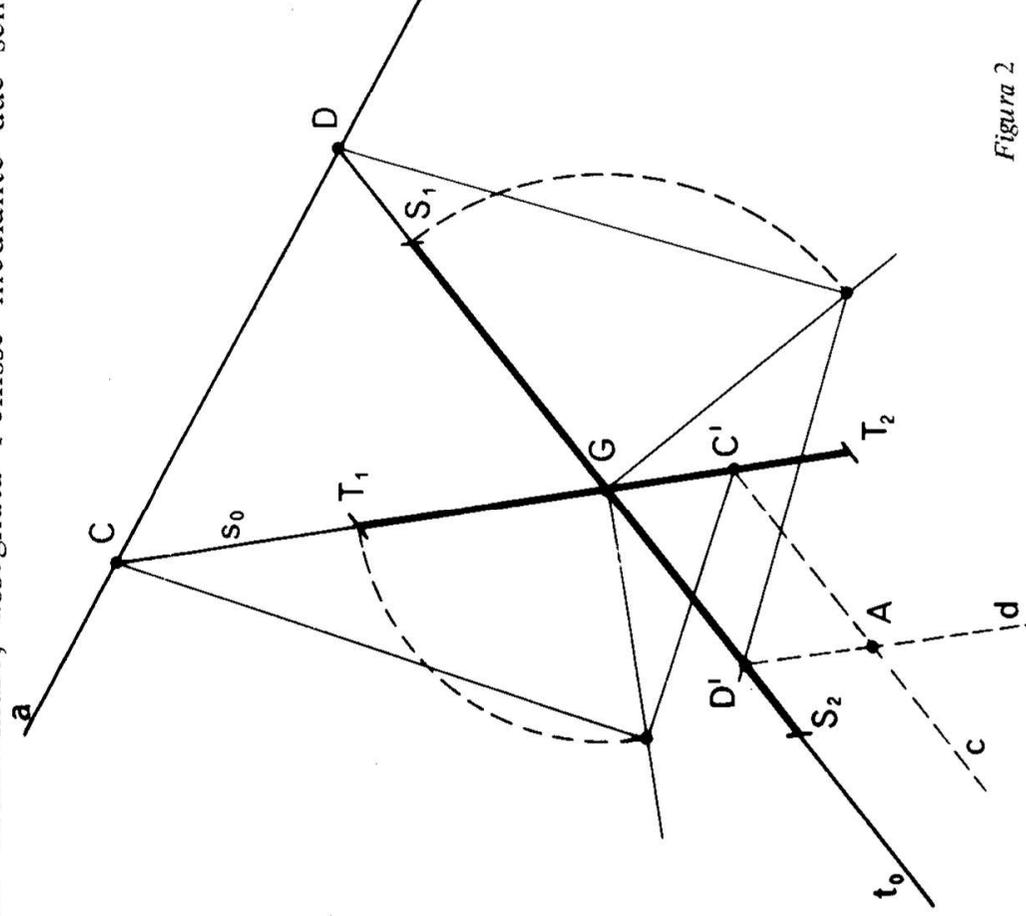


Figura 2

coniugati, il centro di una generica retta, o la retta di cui un generico punto è centro.

Sia a (Fig. 2) la retta; essa intersechi s_0 e t_0 in C e D . La costruzione di C' e D' , coniugati di C e D nelle due involuzioni baricentriche d'inerzia su s_0 e t_0 , si effettua come nell'es. n. 1; la parallela d per D' ad s_0 è la retta di centro $C_d = D$, la parallela c per C' a t_0 è la retta di centro $C_c = C$. Quindi il punto $A = c \cap d$ è il centro C_a della retta a . Viceversa, se è assegnato il punto A , e si vuole la retta a di centro $C_a = A$, basta condurre da A le due rette c e d parallele a t_0 ed s_0 , determinare le intersezioni $C' = c \cap s_0$ e $D' = d \cap t_0$, e costruire i coniugati C e D ; la congiungente CD è la retta a richiesta.

E' utile osservare che la AG e la retta a sono coniugate; e così pure la AG e la parallela a_0 ad a per G sono una coppia di rette baricentriche coniugate nell'involuzione di centro G .

Problema n. 3.

Assegnata l'ellisse centrale d'inerzia mediante due semidiametri co-

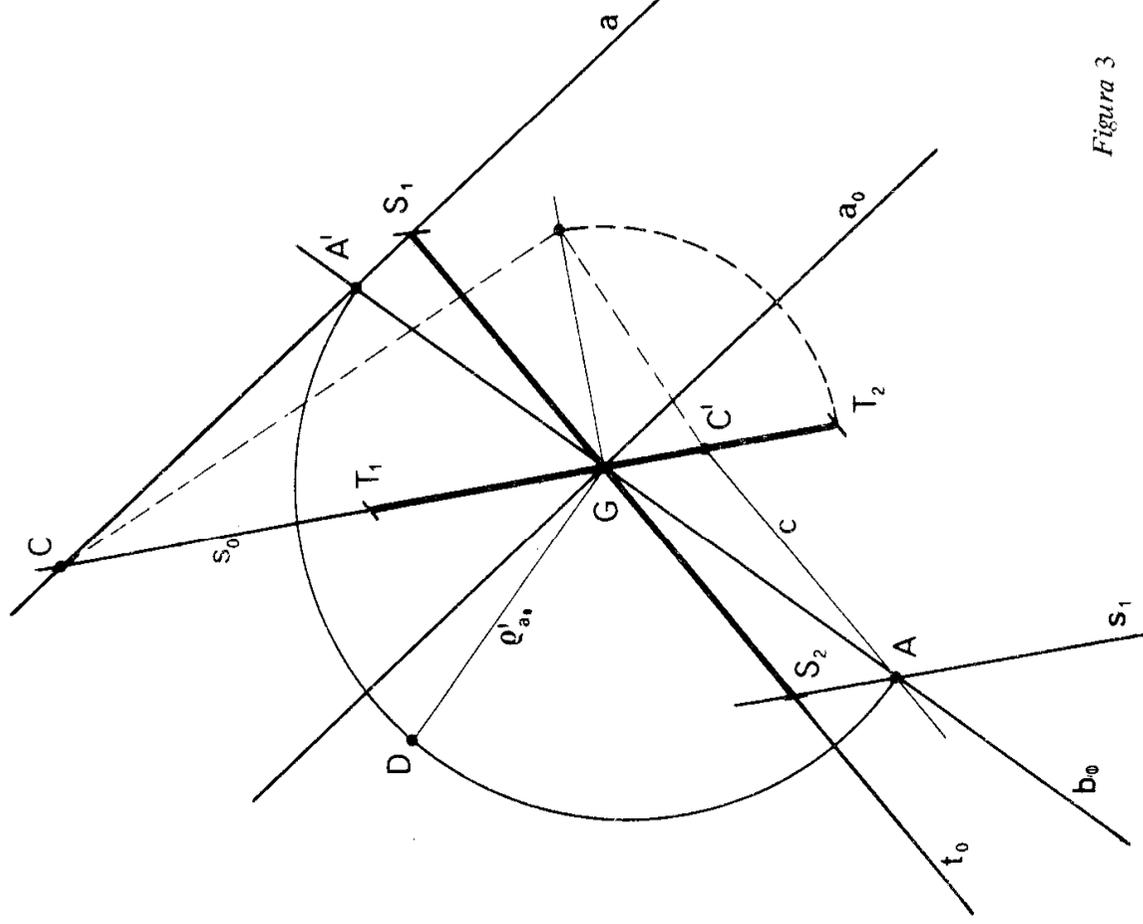


Figura 3

niugati (Fig. 3) si vuole la coniugata b_0 , nella involuzione di centro G , di una generica retta baricentrica a_0 .

Si considera una parallela a ad a_0 ; per semplificare, sia pure di poco, il disegno, la a si fa passare per S_1 . Operando come nell'es. n. 2 si costruisce il coniugato C' di C su s_0 ; il coniugato di S_1 su t_0 è S_2 ; ottenute così s_1 di centro S_1 e c di centro C , si ha il centro $C_a = A$ di a . La retta $b_0 \ni A$, G è la coniugata richiesta (vedi fine es. n. 2).

Si desidera adesso il semidiametro ρ'_{a_0} giacente sulla retta b_0 . Poichè A ed A' si corrispondono sull'involuzione baricentrica di sostegno b_0 , e poichè ancora $\rho'^2_{a_0}$ è la potenza di tale involuzione, si ha

$$GA \cdot GA' = \rho'^2_{a_0} \quad (6)$$

Costruendo il cerchio di diametro AA' e conducendo da G la normale a tale diametro si ottiene in GD la soluzione della (6). Il segmento GD va poi riportato su b_0 , dai due lati di G ; ciò non si è fatto nella fig. 3 per motivi di chiarezza.

Problema n. 4.

1) Si è in presenza di tre masse

$$m_A = 3 m^2$$

$$m_B = 4 m^2$$

$$m_C = 2 m^2$$

aventi dimensioni $[l^2]$, concentrate nei punti ABC (Fig. 4a). Nel seguito la m che indica il simbolo metri si porrà corsiva ogniqualvolta ci sia possibilità di equivoco, per esempio con il simbolo di massa.

La scala delle lunghezze è rappresentata dal segmento lungo $5m$, riportato in metri; è questa la cosiddetta *scala grafica*. La *scala numerica* invece è la quantità S_e per cui occorre moltiplicare la lunghezza $\bar{l}_{AB} = au$ di un segmento AB letta sul disegno (u è l'unità di lettura, che si assumerà pari ad 1 cm, a un numero reale) per ottenere la lunghezza effettiva di AB . Se è

$$S_l = b \frac{m}{cm}$$

è pure

$$l_{AB} = \bar{l}_{AB} \cdot S_l = a \, cm \cdot b \frac{m}{cm} = ab \, m .$$

Il baricentro D delle masse m_A ed m_C si trova nel segmento AC, ed è fornito dalla relazione ($DC = x$)

$$\frac{11,5 - x}{x} = \frac{2}{3}$$

da cui

$$x = 6,90 \text{ m.}$$

Il baricentro G delle masse m_A m_B m_C è il baricentro della massa

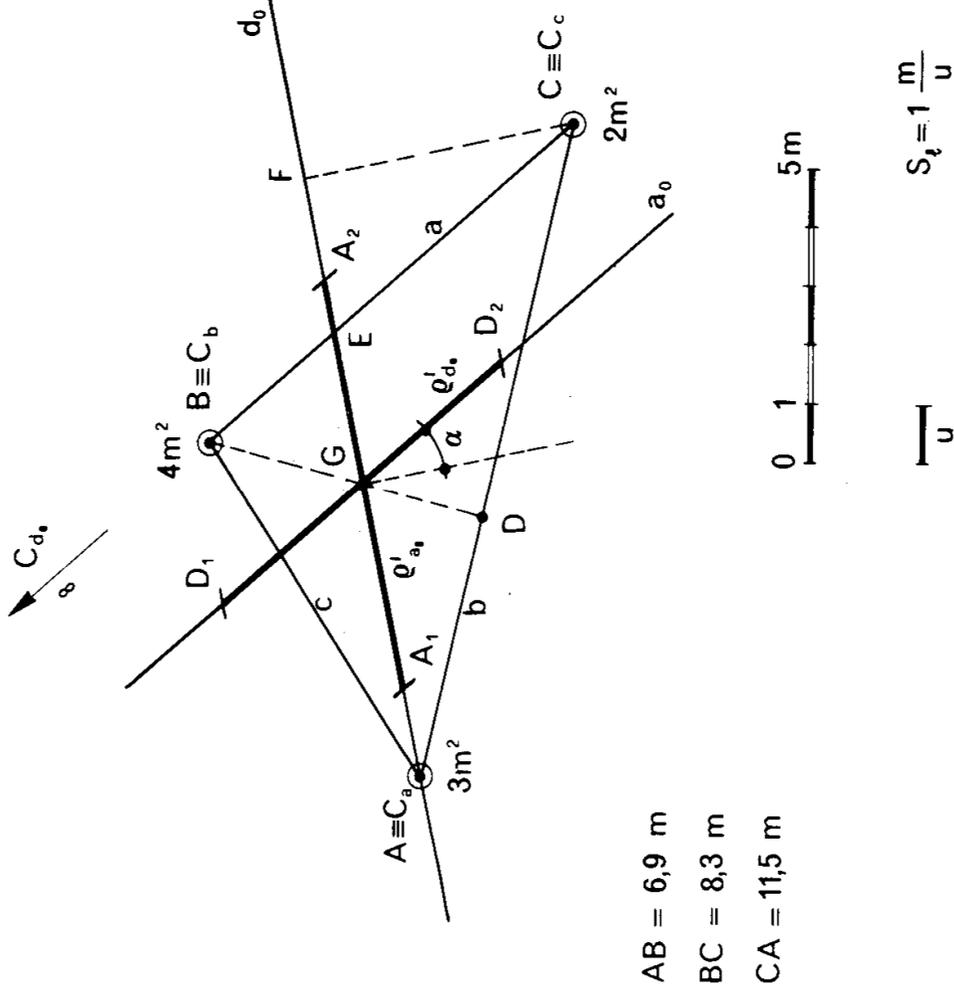


Figura 4a

($m_A + m_C$) concentrata in D, ed m_B concentrata in B. Esso perciò è nel segmento DB; ponendo $GB = x$, è

$$\frac{4,9 - x}{x} = \frac{4}{5}$$

da cui

$$x = 2,722 \text{ m.}$$

Il centro C_a relativo alla retta a (congiungente BC) è il punto A, poichè i momenti statici delle masse m_B ed m_C rispetto ad a sono nulli, e quello della massa m_A è concentrato in A, per definizione. Così pure è $C_b = B$, $C_c = C$. Quindi il triangolo ABC è il *nocciolo centrale di inerzia* delle tre masse.

La retta AG è perciò la coniugata baricentrica della retta a , poichè contiene C_a ; così pure BG è la coniugata baricentrica di b , e CG di c .

La parallela a_0 ad a per G contiene quindi anch'essa il centro relativo alla retta AG = d_0 (tale centro infatti è improprio, perchè AG è baricentrica, e giace su a); a_0 e d_0 sono perciò due rette *baricentriche coniugate*.

Ci si propone di calcolare i diametri A_1A_2 e D_1D_2 dell'*ellisse centrale di inerzia* giacenti rispettivamente su d_0 ed a_0 . Risulta

$$I_a = 3 \cdot 6,73^2 = 135,88 \text{ m}^4$$

$$I_{a_0} = 135,88 - 9 \cdot 2,30^2 = 88,27 \text{ m}^4$$

$$I_{d_0} = 4 \cdot 2,45^2 + 2 \cdot 4,8^2 = 70,09 \text{ m}^4.$$

I suddetti *momenti di inerzia* sono calcolati misurando le distanze secondo la normale alla retta in esame; per il calcolo di I_{a_0} si è utilizzato il *teorema del trasporto*.

Per ottenere i diametri A_1A_2 e D_1D_2 occorre conoscere i momenti d'inerzia I'_{a_0} ed I'_{d_0} dipendenti dalle distanze misurate rispettivamente secondo d_0 ed a_0 . Il coseno dell'angolo α tra la normale a d_0 ed a_0 (coincidente con l'angolo tra la normale ad a_0 e d_0) è fornito in valore assoluto da

$$\cos^2 \alpha = \frac{CF^2}{EF^2} = 0,76$$

da cui si ha

$$I'_{a_0} = \frac{I_{a_0}}{\cos^2 \alpha} = \frac{88,27}{0,76} = 118,14 \text{ m}^4$$

$$I'_{d_0} = \frac{I_{d_0}}{\cos^2 \alpha} = \frac{70,09}{0,76} = 92,22 \text{ m}^4$$

da cui ancora

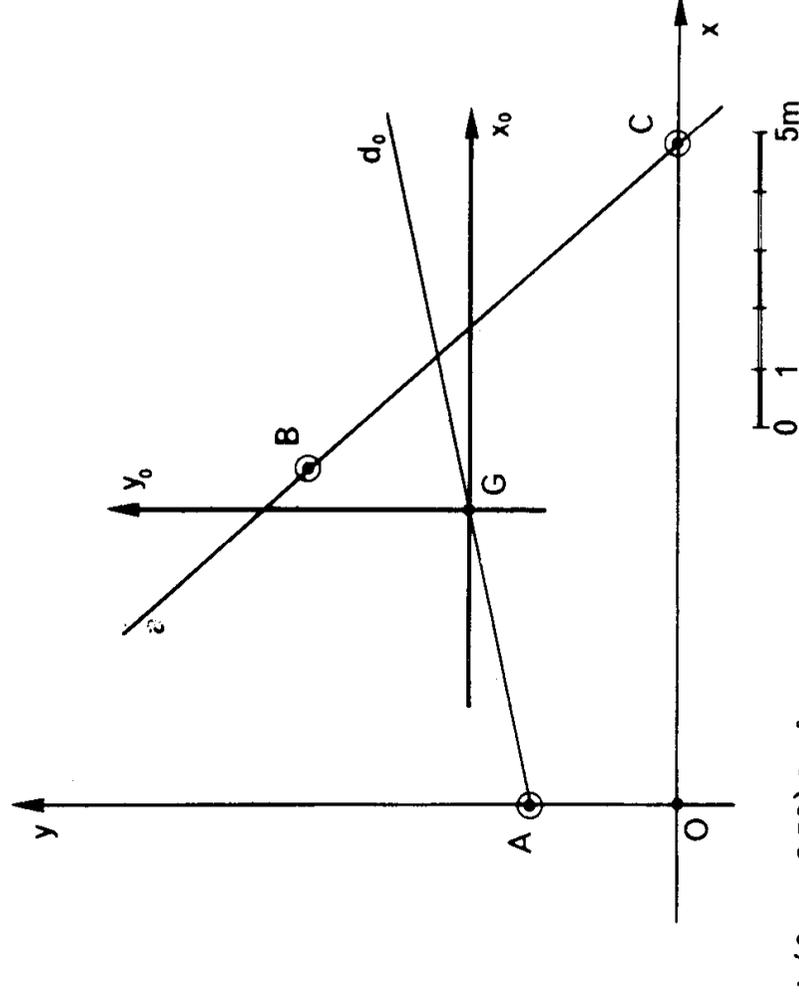
$$\rho'_{a_0} = \sqrt{\frac{116,14}{9}} = 3,59 \text{ m}$$

$$\rho'_{d_0} = \sqrt{\frac{92,22}{9}} = 3,20 \text{ m.}$$

Sono questi i *semidiametri di inerzia* $GA_1 = GA_2$ e $GD_1 = GD_2$ relativi rispettivamente alle rette coniugate a_0 e d_0 .

2) Lo stesso esercizio si vuole risolvere attraverso la teoria dei *cerchi di Mohr*.

Si assume (Fig. 4b) una terna xy di riferimento generica, ortogonale e *destrorsa* (z verso l'osservatore, xy che si susseguono in verso antiorario,



$$A (0 ; 2,50) 3 \text{ m}^2$$

$$B (5,75 ; 6,30) 4 \text{ m}^2$$

$$C (11,25; 0) 2 \text{ m}^2$$

Figura 4b

sì che xyz sono diretti come pollice, indice e medio della mano destra). Per semplificare i calcoli, si procura che x ed y contengano una massa ciascuno.

Si ha così di seguito:

$$A = 9 \text{ m}^2 \text{ (massa complessiva)}$$

$$S_x = 3 \cdot 2,50 + 4 \cdot 6,30 = 32,70 \text{ m}^3$$

$$S_y = -4 \cdot 5,75 - 2 \cdot 11,25 = -45,50 \text{ m}^3$$

$$d_{Gx} = \frac{S_x}{A} = 3,633 \text{ m} = x_G$$

$$d_{Gy} = \frac{S_y}{A} = -5,055 \text{ m} = -x_G$$

$$I_x = 3 \cdot 2,50^2 + 4 \cdot 6,30^2 = 177,510 \text{ m}^4$$

$$I_y = 4 \cdot 5,75^2 + 2 \cdot 11,25^2 = 385,375 \text{ m}^4$$

$$I_{xy} = -4 \cdot 5,75 \cdot 6,30 = -144,900 \text{ m}^4$$

$$I_{x_0} = 177,510 - 9 \cdot 3,633^2 = 58,722 \text{ m}^4$$

$$I_{y_0} = 385,375 - 9 \cdot 5,055^2 = 155,398 \text{ m}^4$$

$$I_{x_0 y_0} = -144,900 - (-9 \cdot 5,055 \cdot 3,633) = 20,383 \text{ m}^4$$

$$\begin{aligned} I_{\xi} & \quad \quad \quad I_{\eta} \\ &= \frac{I_{x_0} + I_{y_0}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{x_0} - I_{y_0}}{2}\right)^2 + I_{x_0 y_0}^2} = \end{aligned} \quad (7)$$

$$= \frac{58,722 + 155,398}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{58,722 - 155,388}{2}\right)^2 + 20,383^2} =$$

$$= 107,060 \pm 52,455 = \begin{cases} 159,515 \text{ m}^4 \\ 54,605 \text{ m}^4 \end{cases}$$

Si verifica l'uguaglianza

$$I_{x_0} + I_{y_0} = I_{\xi} + I_{\eta} = 214,120 \text{ m}^4.$$

L'inclinazione di una delle direzioni principali, ξ o η , sull'asse x_0 è fornita dalla relazione

$$\operatorname{tg} 2(x_0 p) = \frac{2 I_{x_0 y_0}}{I_{x_0} - I_{y_0}} = \frac{40,766}{58,722 - 155,398} = - 0,4217 \quad (8)$$

da cui

$$2(x_0 p) = - 22,865^\circ \pm 180^\circ$$

$$(x_0 p) = - 11,433^\circ \pm 90^\circ .$$

Le relazioni di cui sopra possono essere sostituite dalla costruzione grafica del cerchio di Mohr, che comunque è sempre bene accompagnare

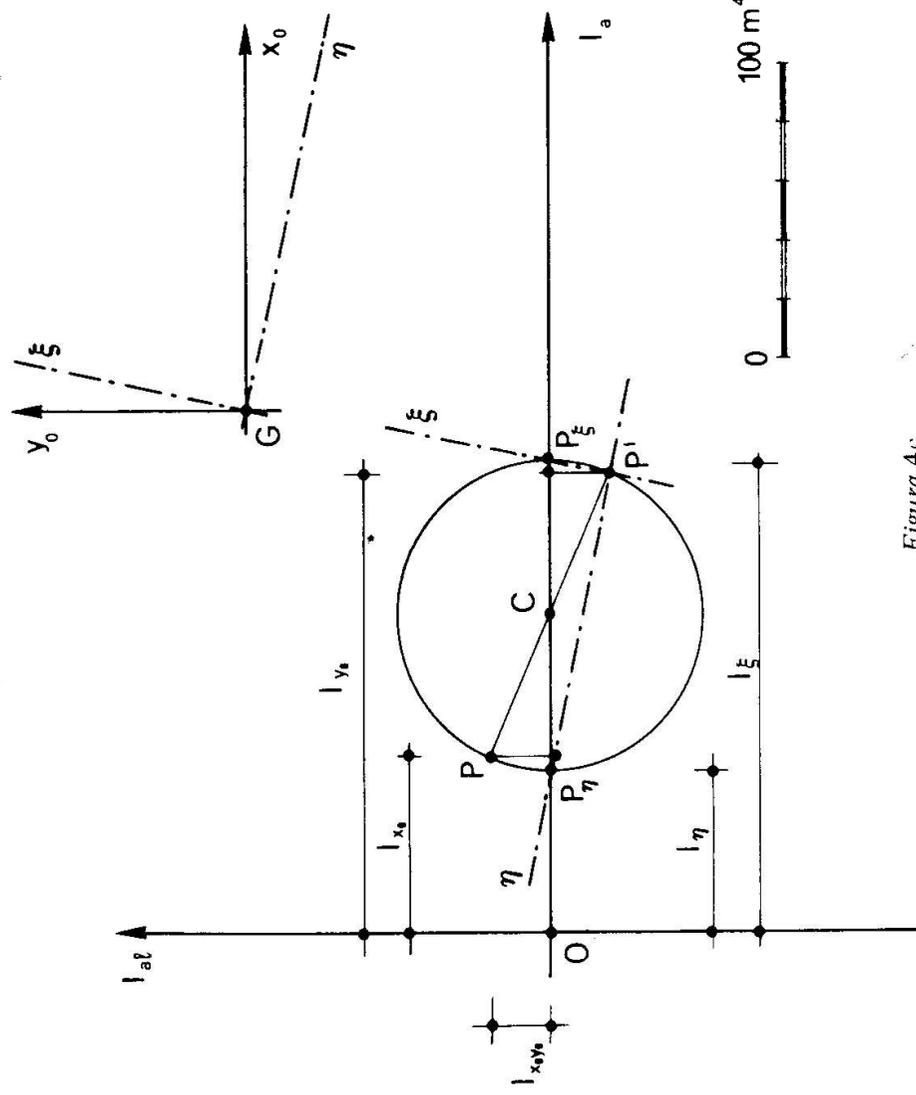


Figura 4c

al calcolo analitico, come verifica dei risultati. Tale costruzione è riportata

nella Fig. 4c. Il punto P ($I_{x_0}, I_{x_0 y_0}$) è un punto del cerchio, che viene chiamato *polo del cerchio* stesso; il punto P' ($I_{y_0}, -I_{x_0 y_0}$) appartiene pure al cerchio, anzi PP' è un diametro del cerchio, che così è definito. Le coordinate del centro C risultano essere pari a

$$x_C = \frac{I_{x_0} + I_{y_0}}{2} = 107,06 \text{ m}^4$$

$$y_C = 0.$$

Dal cerchio si ha

$$I_\xi = OP_\xi = 159 \text{ m}^4$$

$$I_\eta = OP_\eta = 54 \text{ m}^4.$$

La congiungente $P'P_\xi$ è l'asse ξ , la congiungente $P'P_\eta$ è l'asse η ; si definisce così, nella coppia delle direzioni principali fornita dalla (8), la posizione effettiva degli assi di massima e minima inerzia.

Si ha infine

$$\rho_\xi = \sqrt{\frac{I_\xi}{A}} = 4,203 \text{ m}$$

$$\rho_\eta = \sqrt{\frac{I_\eta}{A}} = 2,449 \text{ m};$$

nella Fig. 4d sono riportati gli *assi principali* dell'ellisse ξ ed η ed i relativi *diametri principali* $2\rho_\xi$ e $2\rho_\eta$.

3) si vuole ora verificare, una volta ottenuti ξ ed η , la relazione di coniugio tra a_0 e d_0 .

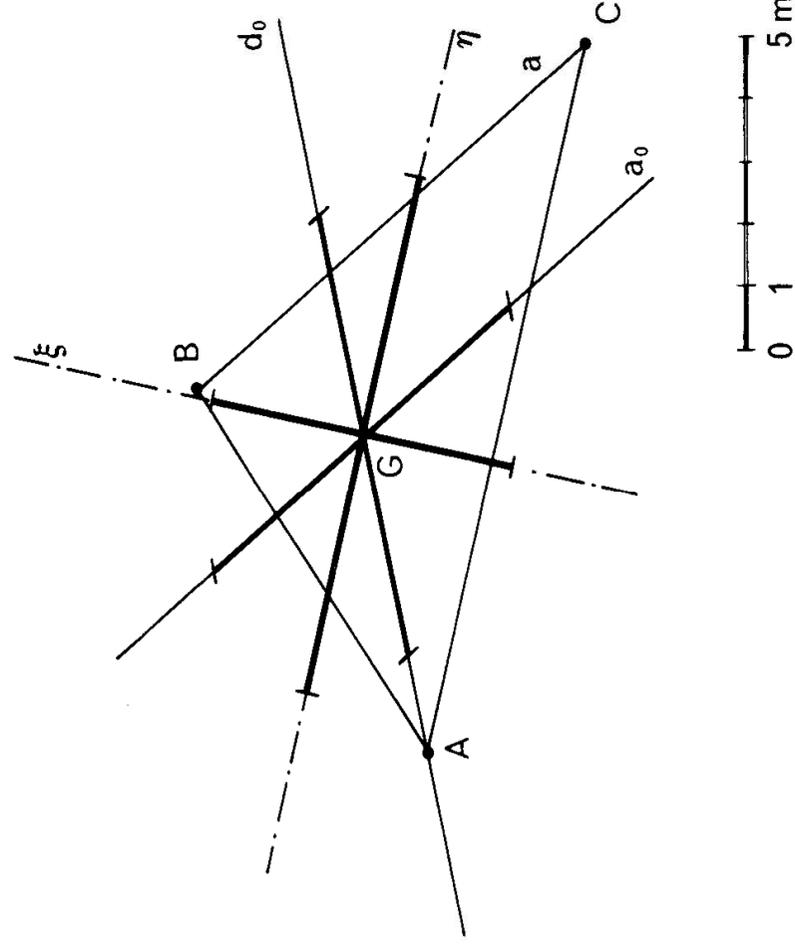


Figura 4d

Date due rette a e b per G (Fig. 4e) può porsi, per un punto generico P ,(**)

$$d_a = d_x \cos \alpha + d_y \sin \alpha$$

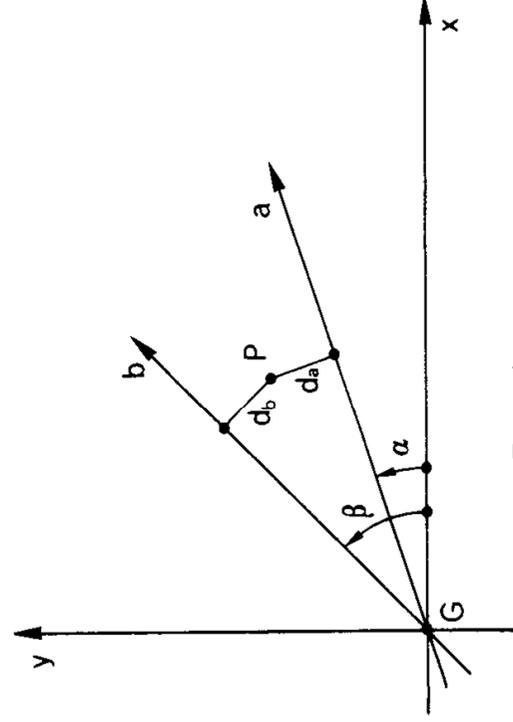


Figura 4e

(*) Le componenti del vettore GP sono $-d_y$ e d_x ; quelle del vettore u della normale ad a sono $-\sin \alpha$ e $\cos \alpha$. Quindi

$$d_a = GP \cdot u = d_y \sin \alpha + d_x \cos \alpha$$

da cui

$$\begin{aligned}
 I_{ab} &= \sum m_i d_{ai} d_{bi} = & (9) \\
 &= \sum m_i (d_{xi} \cos \alpha + d_{yi} \sin \alpha) (d_{xi} \cos \beta + d_{yi} \sin \beta) = \\
 &= \sum m_i [d_{xi}^2 \cos \alpha \cos \beta + d_{yi}^2 \sin \alpha \sin \beta + d_{xi} d_{yi} (\sin \alpha \cos \beta + \\
 &\quad + \cos \alpha \sin \beta)] = \\
 &= I_x \cos \alpha \cos \beta + I_y \sin \alpha \sin \beta + I_{xy} (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) .
 \end{aligned}$$

Se a e b sono coniugate, è $I_{ab} = 0$, e quindi

$$(I_x \cos \alpha + I_{xy} \sin \alpha) \cos \beta = - (I_y \sin \alpha + I_{xy} \cos \alpha) \sin \beta$$

da cui

$$\operatorname{tg} \beta = - \frac{I_x \cos \alpha + I_{xy} \sin \alpha}{I_y \sin \alpha + I_{xy} \cos \alpha} \quad (10)$$

Se il riferimento xy è principale, ed $x = \xi$, si ha

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} (\xi b)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\xi a)$$

e la (10), si scrive, ponendo $I_{\xi\eta} = 0$, $I_x = I_\xi$, $I_y = I_\eta$,

$$\operatorname{tg} (\xi a) \cdot \operatorname{tg} (\xi b) = - \frac{I_\xi}{I_\eta} \quad (11)$$

Nel caso in esame è (Fig. 4b)

$$\operatorname{tg} (\xi a) = \frac{6,30}{11,25 - 5,75} = 1,1454$$

$$(ax) = 48,878^\circ$$

$$(x\xi) = 78,567^\circ$$

$$(\xi a) = (\xi x) + (xa) = -78,567^\circ - 48,878^\circ = -127,445^\circ$$

$$\operatorname{tg}(\xi a) = \operatorname{tg}(\xi a_0) = 1,3058.$$

$$\operatorname{tg}(xd_0) = \frac{3,633 - 2,50}{5,055} = 0,2241$$

$$(xd_0) = 12,631^\circ$$

$$(\xi d_0) = (\xi x) + (xd_0) = -78,567^\circ + 12,631^\circ = -65,936^\circ$$

$$\operatorname{tg}(\xi d) = -2,2393$$

$$\operatorname{tg}(\xi a_0) \cdot \operatorname{tg}(\xi d_0) = -2,924$$

$$\frac{I_\xi}{I_\eta} = 2,921.$$

La (11) è perciò ben soddisfatta, se si considera che i calcoli sono stati effettuati troncando sulla quinta cifra; l'errore infatti è dell'uno su mille.

Problema n. 5

1) Si è in presenza di quattro masse

$$m_A = 0,2 \text{ m}^2$$

$$m_B = 0,4 \text{ m}^2$$

$$m_C = 0,7 \text{ m}^2$$

$$m_D = 0,3 \text{ m}^2.$$

concentrate nei punti ABCD, vertici di un rettangolo (Figura 5a). Si ricerca l'ellisse centrale d'inerzia attraverso la teoria dei cerchi di Mohr.

Assunti

$$\begin{aligned} BD &= x \\ BA &= y \end{aligned}$$

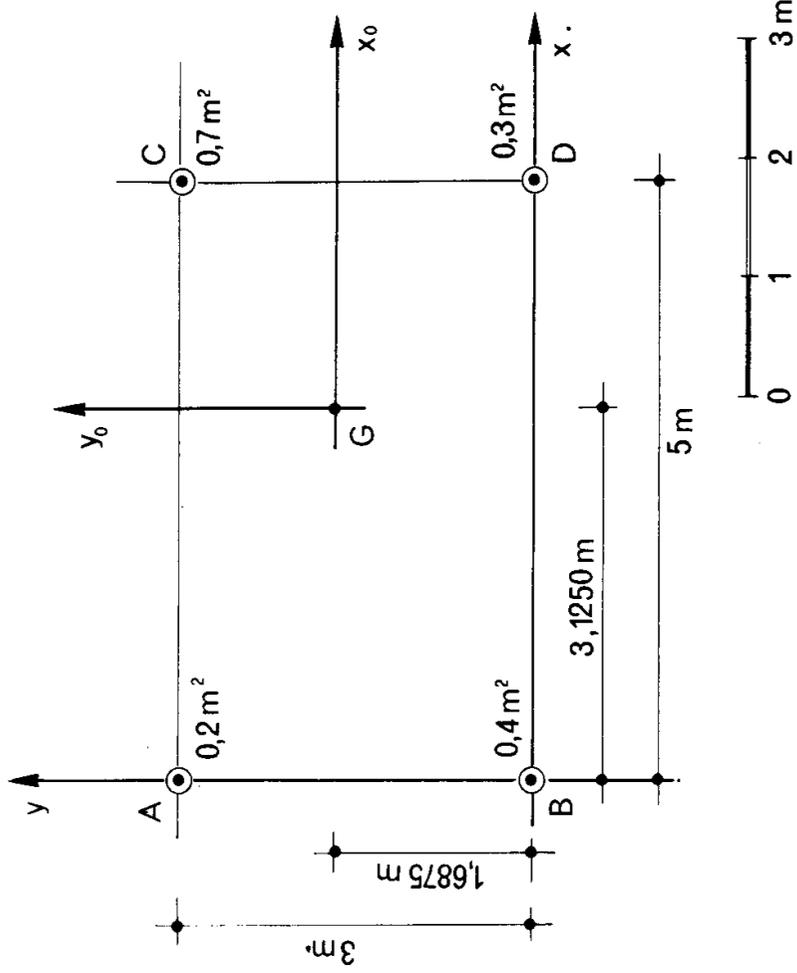


Figura 5a

si ha

$$A = 1,6 \text{ m}^2$$

$$S_x = (0,2 + 0,7) \cdot 3 = 2,7 \text{ m}^3$$

$$S_y = - (0,7 + 0,3) \cdot 5 = - 5 \text{ m}^3$$

$$d_{Gx} = \frac{S_x}{A} = \frac{2,7}{1,6} = 1,6875 \text{ m} = Y_G$$

$$d_{Gy} = \frac{S_y}{A} = - \frac{5}{1,6} = - 3,1250 \text{ m} = - X_G$$

$$I_x = (0,2 + 0,7) \cdot 9 = 8,1 \quad m^4$$

$$I_y = (0,7 + 0,3) \cdot 25 = 25 \quad m^4$$

$$I_{x,y} = -0,7 \cdot 5 \cdot 3 = -10,5 \quad m^4$$

$$I_{x_0} = 8,1 - 1,6 \cdot 1,6875^2 = 3,5437 \quad m^4$$

$$I_{y_0} = 25 - 1,6 \cdot 3,1250^2 = 9,3750 \quad m^4$$

$$I_{x_0,y_0} = -10,5 + 1,6 \cdot 1,6875 \cdot 3,1250 = -2,0625 \quad m^4$$

$$I_{\xi} \quad I_{\eta} = \frac{3,5437 + 9,3750}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3,5437 - 9,3750}{2}\right)^2 + 2,0625^2} =$$

$$= 6,4593 \pm 3,5714 = \begin{cases} 10,0307 \quad m^4 \\ 2,8879 \quad m^4 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} 2(x_0 p) = -\frac{2 \cdot 2,0625}{3,5437 - 9,3750} = 0,7074$$

$$2(x_0 p) = 35,275^\circ \pm 180^\circ$$

$$(x_0 p) = 17,638^\circ \pm 90^\circ$$

Il cerchio di Mohr (Fig. 5b) assicura che

$$(x_0 \xi) = 17,638^\circ + 90^\circ$$

$$(x_0 \eta) = 17,638^\circ$$

Ci ha poi

$$\rho_{\xi} = \sqrt{\frac{10,0307}{1,6}} = 2,5038 \text{ m}$$

$$\rho_{\eta} = \sqrt{\frac{2,8879}{1,6}} = 1,3435 \text{ m}$$

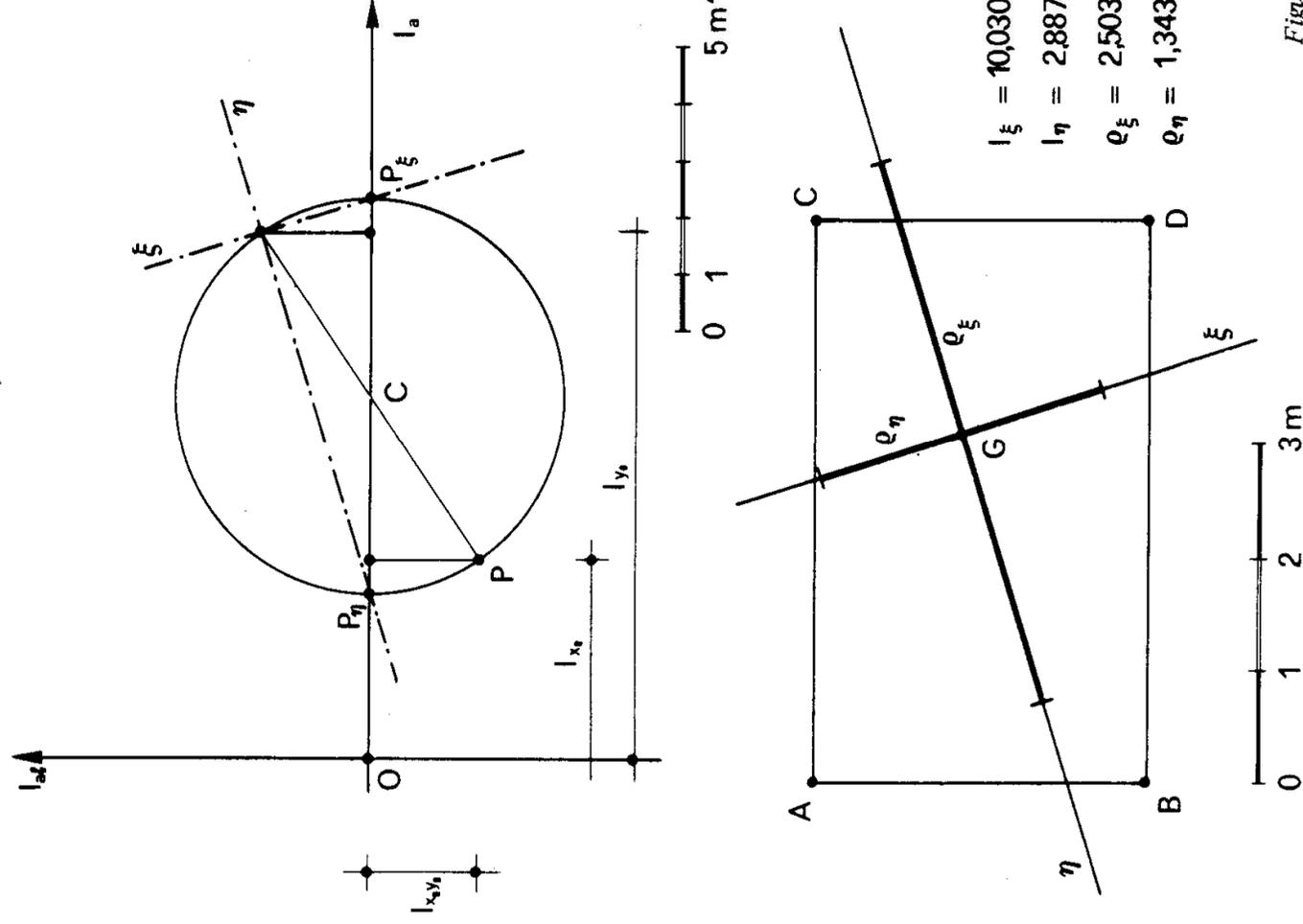


Figura 5b

Nella fig. 5b è riportata l'ellisse centrale di inerzia attraverso i due semidiametri principali ρ_{ξ} e ρ_{η} .

- 2) Nella Fig. 5c è disegnato il *nocciolo* delle quattro masse. Esso è il quadrilatero avente per vertici i centri relativi alle rette *a b c d*; questi centri giacciono ciascuno sulla retta opposta a quella cui sono relativi.

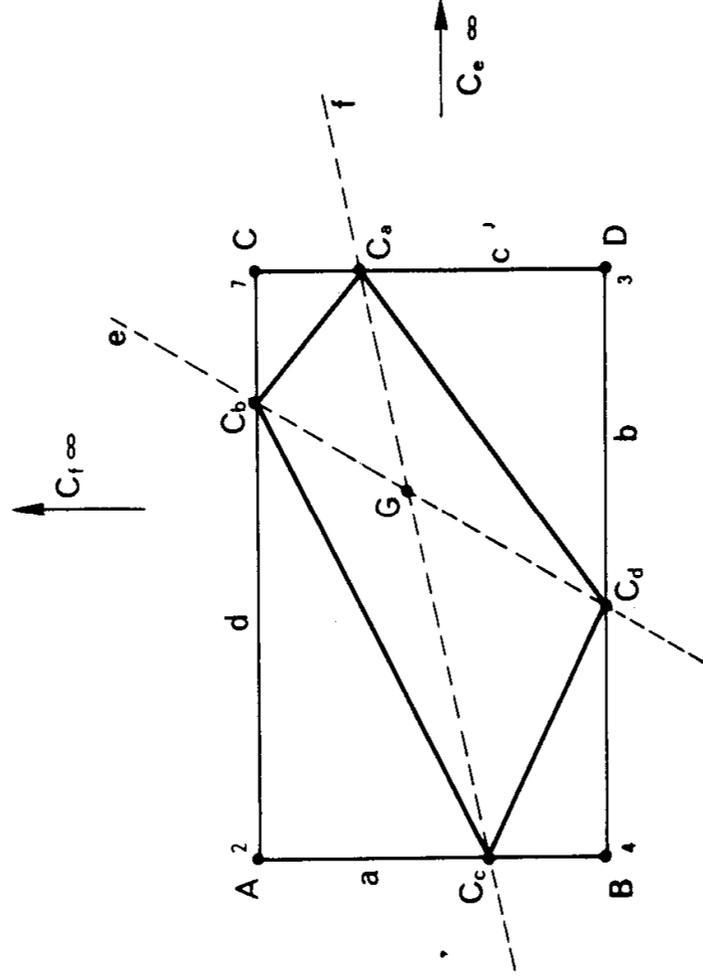


Figura 5c

Per esempio, il centro C_a di a , baricentro dei momenti statici di m_C ed m_D rispetto ad a (la retta a contiene A e B), deve giacere sulla congiungente C e D.

Si ha così, dalla costruzione dei baricentri dei momenti statici,

$$\frac{CC_a}{DC_a} = \frac{0,3 \cdot 5}{0,7 \cdot 5}$$

$$CC_a = 3 \frac{0,3}{0,3 + 0,7} = 0,9 \text{ m}$$

$$DC_a = 3 \frac{0,7}{0,3 + 0,7} = 2,1 \text{ m}$$

Analogamente, per gli altri tre centri si ha

$$BC_c = 3 \frac{0,2}{0,6} = 1 \text{ m}$$

$$AC_c = 3 \frac{0,4}{0,6} = 2 \quad m$$

$$BC_d = 5 \frac{0,3}{0,7} = 2,143 \quad m$$

$$DC_d = 5 \frac{0,4}{0,7} = 2,857 \quad m$$

$$AC_b = 5 \frac{0,7}{0,9} = 3,889 \quad m$$

$$CC_b = 5 \frac{0,2}{0,9} = 1,111 \quad m.$$

Nella Fig. 5d è riportata, per verifica, la costruzione grafica del centro C_b . La retta b incontra i due assi principali ξ ed η in T ed S ; T' ed S' so-

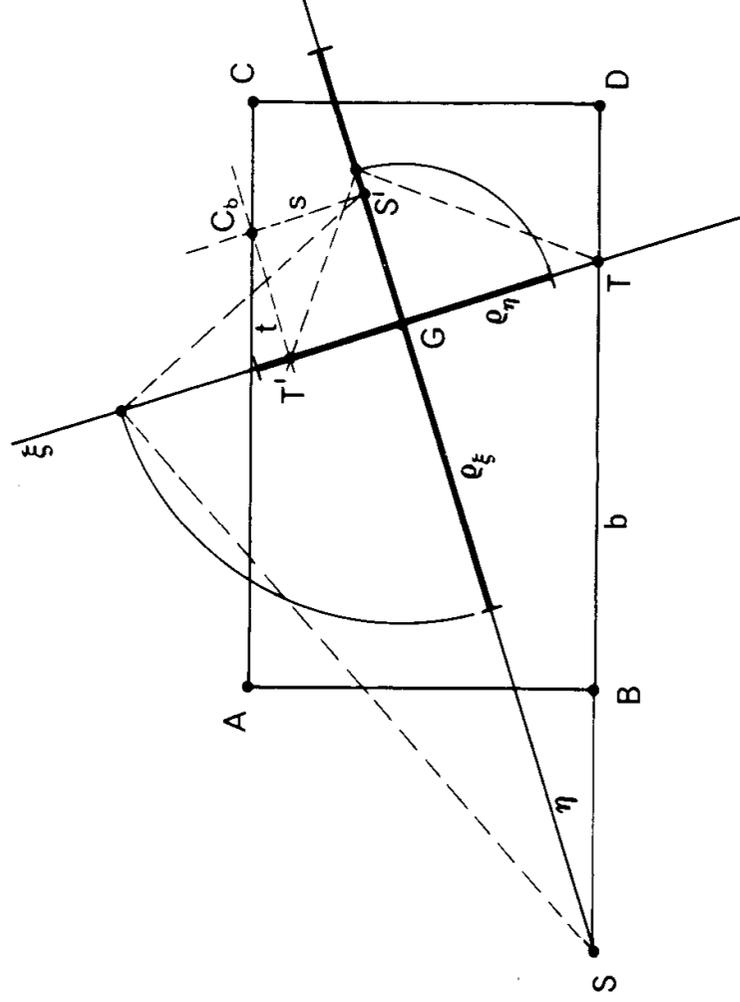


Figura 5d

no i corrispondenti di T ed S nell'involuzione d'inerzia su ξ ed η ; t ($\ni T'$, $\parallel \eta$) ed s ($\ni S'$, $\parallel \xi$) sono le rette di centri T ed S , e quindi C_b ($\in t$, s) è il centro di b ($\ni T$, S).

Problema n. 6.

Si studia (Fig. 6a) l'insieme di cerchi costituenti, per es., la superficie di frontiera fra la base di un plinto rettangolare e la sottostante palificata. La figura è simmetrica rispetto alle due rette x_0 ed y_0 ; è perciò $G = x_0 \cap y_0$.

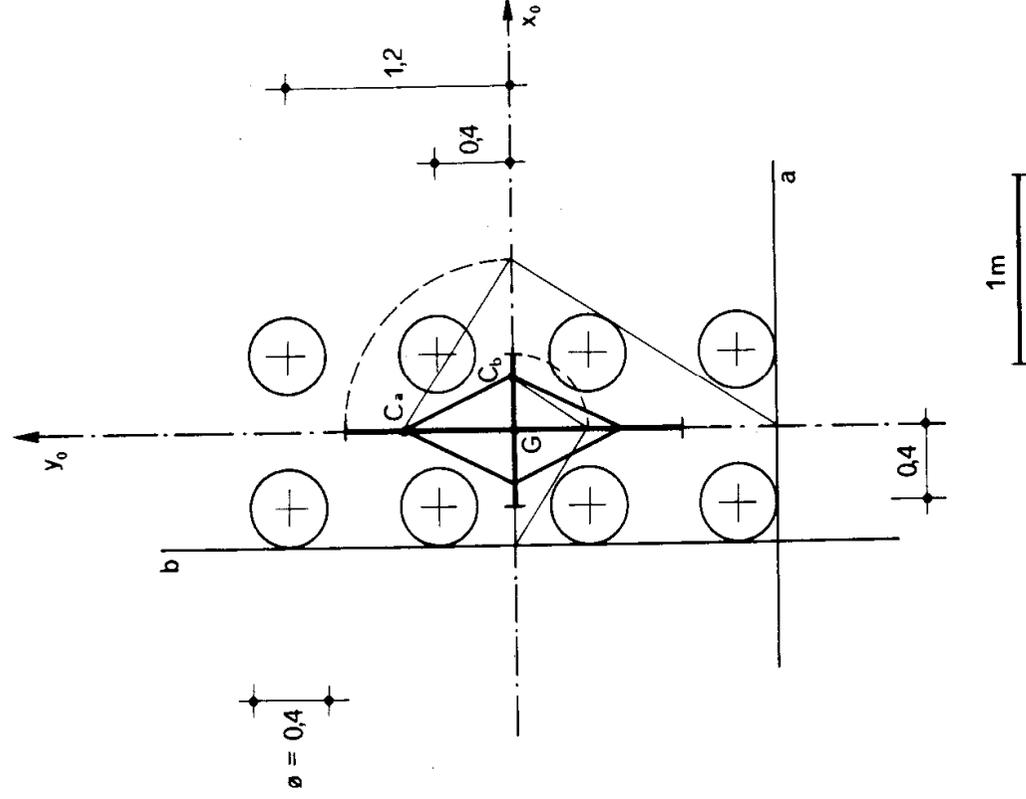


Figura 6a

Poichè inoltre x_0 ed y_0 sono ortogonali, essi sono pure gli assi principali baricentrici d'inerzia ξ ed η .

Si ha, per il singolo cerchio,

$$A^* = \pi R^2 = 0,12566 \text{ m}^2$$

$$I^* = \frac{\pi R^4}{4} = 0,0012566 \text{ m}^4 ;$$

utilizzando il teorema del trasporto si ha:

$$I_{x_0} = 4I^* + 4A^* \cdot 1,2^2 + 4I^* + 4A^* \cdot 0,4^2 = 0,814277 m^4$$

$$I_{y_0} = 8I^* + 8A^* \cdot 0,4^2 = 0,170898 m^4$$

$$\rho_{x_0} = \sqrt{\frac{0,814277}{1,00528}} = 0,9000 m$$

$$\rho_{y_0} = \sqrt{\frac{0,170898}{1,00528}} = 0,4123 m .$$

Molte volte si opera considerando le aree dei pali concentrate nel

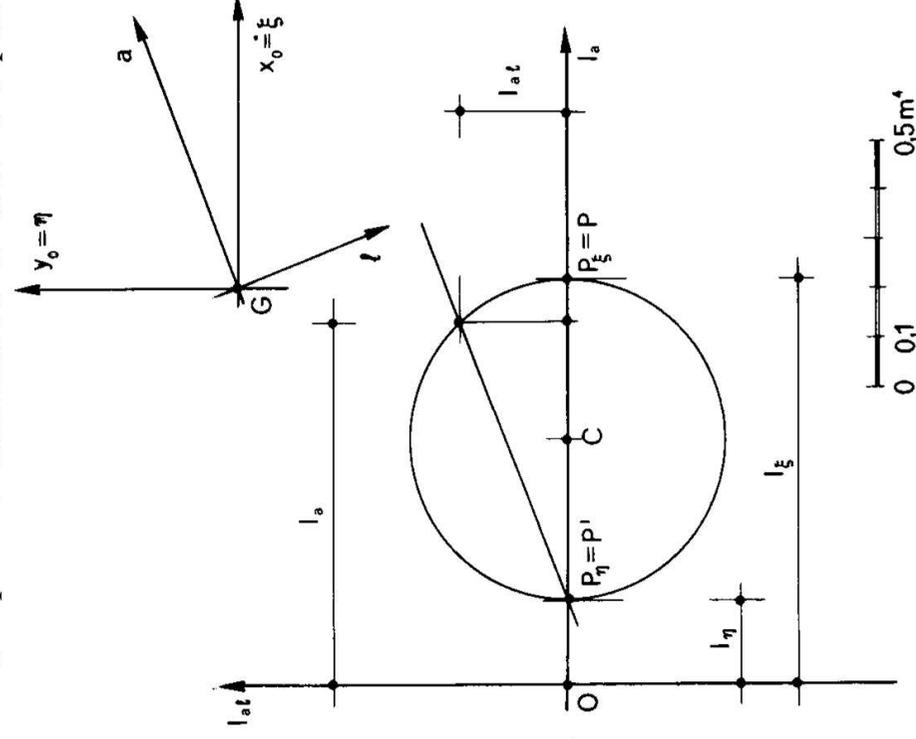


Figura 6b

centro di ogni cerchio; in tal caso si otterrebbe

$$I_{x_0} = 0,804224$$

$$I_{y_0} = 0,160845 ;$$

l'errore percentuale su I_{x_0} è

$$\frac{0,0100528}{0,804224} \cdot 100 = 1,25 \%$$

e quello su I_{y_0} è

$$\frac{0,0100528}{0,170898} \cdot 100 = 5,88 \%$$

Nella Fig. 6b è riportato il cerchio di Mohr, nonchè il momento d'inerzia I_a rispetto ad una retta a , ed il momento centrifugo $I_{a/}$ rispetto alla retta a ed alla retta l tale che $(Ia) = (x_0 y_0)$.

Nella Fig. 6a è fornito anche il nocciolo della sezione; risulta

$$GC_a = \frac{0,9^2}{1,4} = 0,5786 \text{ m}$$

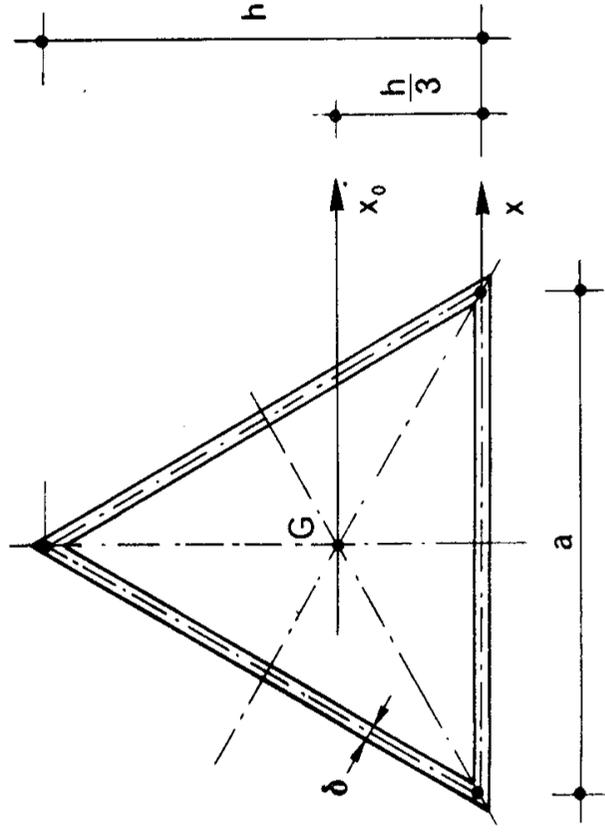
$$GC_b = \frac{0,4123^2}{0,6} = 0,2833 \text{ m} .$$

Problema n. 7.

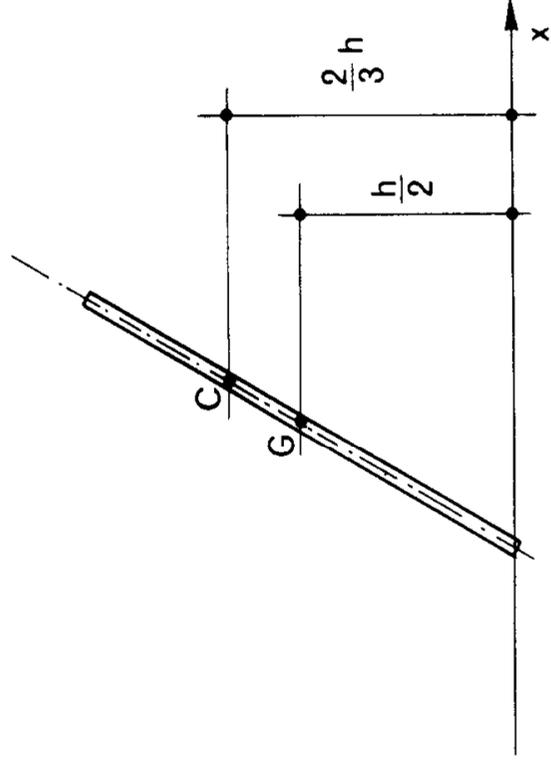
Si considera (Fig. 7a) una *sezione sottile*. Si definisce così la figura descritta da un segmento δ (*spessore*) che si muove lungo una curva piana (*linea media*), aperta o chiusa.

Le condizioni da soddisfare sono le seguenti:

- 1) Il segmento δ deve giacere sul piano della linea media, ed il suo punto medio sulla linea stessa; inoltre, δ deve mantenersi normale alla linea in ogni punto di questa.



a)



b)

Figura 7a, b

- 2) La lunghezza di δ deve essere tale che, chiamata d la dimensione globale della figura, possa reputarsi

$$\frac{\delta}{d} \ll 1. \quad (12)$$

- 3) Chiamando s la coordinata, in genere curvilinea, misurata lungo la linea media, deve essere

$$\frac{d\delta}{ds} \ll 1. \quad (13)$$

- 4) Chiamando r il raggio di curvatura della linea media, deve essere

$$\frac{\delta}{r} \ll 1. \quad (14)$$

Può considerarsi sezione sottile anche la figura costituita da più parti soddisfacenti ciascuna le condizioni suddette.

Si precisa che a rigore basta il rispetto della (12) per soddisfare la condizione di sottigliezza; le (13) e (14) danno luogo ad una definizione più esigente, la cui necessità si renderà palese nello studio delle travi a sezione retta sottile soggette a taglio e torsione. Quando la linea media è aperta, la sezione è *moniconnessa*; quando la linea media è chiusa, la sezione è *pluriconnessa*. Agli effetti della geometria delle masse tale distinzione è soltanto formale; essa è sostanziale nello studio del taglio e della torsione.

Per definire una sezione sottile basta assegnare la linea media e la legge $\delta(s)$. Nel caso in esame la linea media è un triangolo equilatero di lato a , lo spessore δ è costante.

Per ragioni di simmetria, il baricentro G deve trovarsi su ciascuna delle tre mediane, e quindi è definito; inoltre l'ellisse d'inerzia deve, per le stesse ragioni, ricoprire se stessa per rotazione intorno a G di 120° , e quindi è un *cerchio* di centro G . I momenti di inerzia sono gli stessi per tutte le rette passanti per G ; lo calcoleremo rispetto alla x_0 parallela ad uno dei lati (Fig. 7a). Risulta

$$a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h^2$$

da cui

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a. \quad (15)$$

Le aree si considerano *concentrate* sulla linea media. Si ha così il momento d'inerzia I_x^* di uno dei lati obliqui (figura 7b) rispetto alla base x:

$$I_x^* = a\delta \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} h = a\delta \frac{h^2}{3} = \frac{\delta a^3}{4}$$

da cui, per tutta la sezione,

$$I_x = 2 \cdot \frac{\delta a^3}{4} = \frac{\delta a^3}{2}$$

$$I_{x_0} = \frac{\delta a^3}{2} - 3\delta a \cdot \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{\delta a^3}{4} \tag{16}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{\delta a^3}{4 \cdot 3\delta a}} = \frac{a}{\sqrt{12}} = 0,2887 a . \tag{17}$$

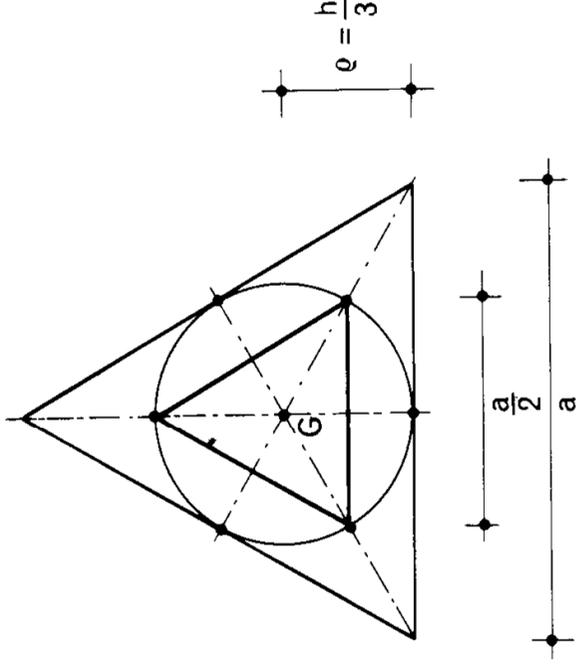


Figura 7c

Nella Fig. 7c è riportata l'ellisse centrale d'inerzia; poichè dalla (17) si trae

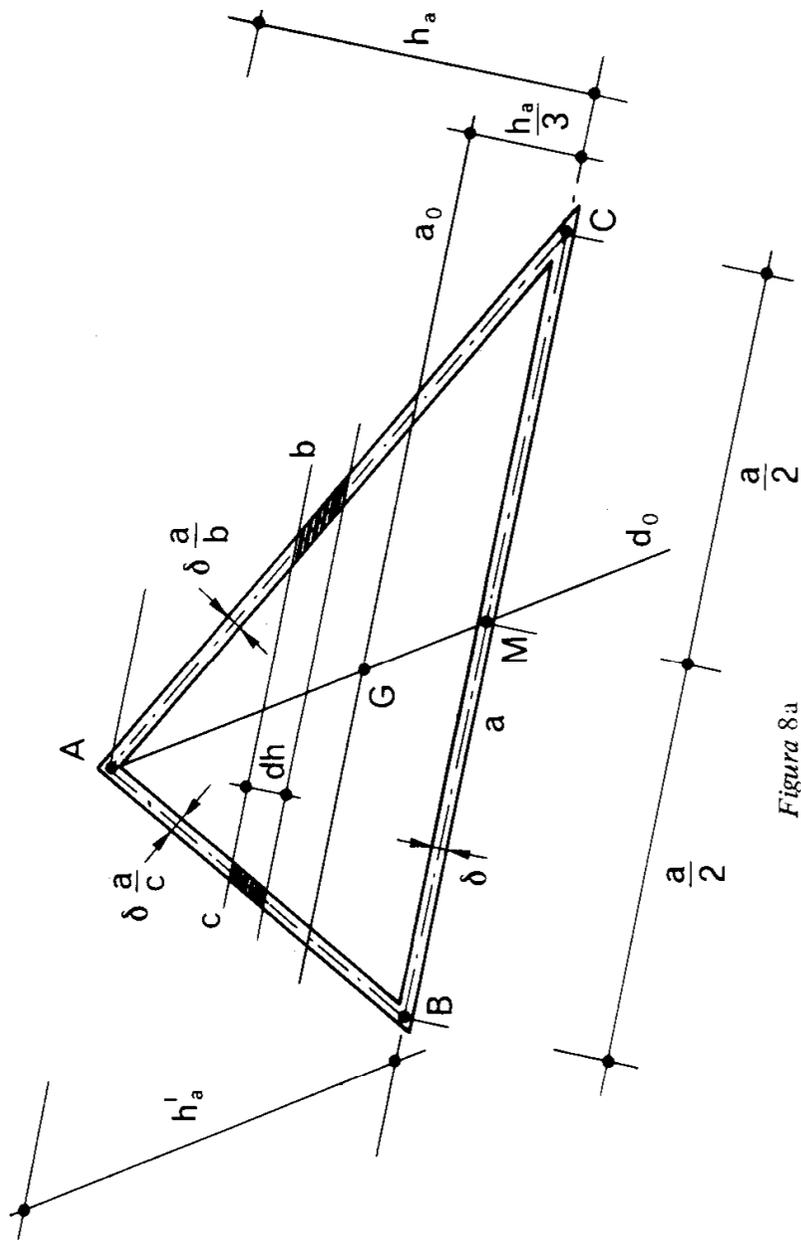
$$\rho = \frac{a}{\sqrt{12}} = \frac{2h}{\sqrt{3} \sqrt{12}} = \frac{h}{3} , \tag{18}$$

l'ellisse è il cerchio inscritto nel triangolo costituente la linea media. Il *nocciolo* è il triangolo avente come vertici i centri delle rette dei tre lati; ciascuno di tali centri giace sulla relativa mediana, e poichè il lato è tangente al cerchio d'inerzia, giace anche sul cerchio, ovviamente dalla parte opposta. Quindi il nocciolo è il triangolo omotetico di centro G alla linea media, ed inscritto nel cerchio d'inerzia.

Il rapporto di omotetia è $\frac{1}{2}$.

Problema n. 8.

1) La sezione sottile della Fig. 8a ha per linea media un triangolo



qualsiasi ABC; lo spessore è costante per ogni lato, ed inversamente proporzionale alle lunghezze dei lati stessi. Si ha così, per i tre lati,

BC	$l = a$	spessore	$= \delta$
CA	$l = b$	"	$= \delta \frac{a}{b}$
AB	$l = c$	"	$= \delta \frac{a}{c}$.

Su ogni lato è distribuita l'area complessiva δa , ed in totale è

$$A = 3a\delta . \quad (19)$$

Le aree possono assimilarsi, per la ricerca del baricentro, a tre aree concentrate nei punti medi dei lati, e pari ciascuna a δa : quindi il baricentro G coincide con l'intersezione delle tre mediane, e cioè con il baricentro del triangolo ABC .

Si osservi che un lato a e la relativa mediana d_0 sono assi di simmetria (più precisamente, d_0 è asse di simmetria secondo la direzione di a); infatti, date due rette qualsiasi parallele ad a e distanti dh , queste impegnano sul lato c un'area,

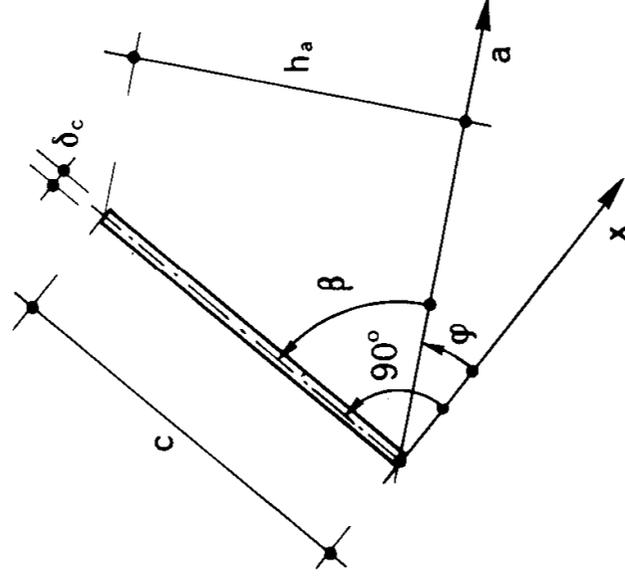


Figura 8b

$$dh \frac{c}{h_a} \cdot \delta \frac{a}{c} = dh \frac{\delta a}{h_a}$$

e sul lato b un'altra area

$$dh \frac{b}{h_a} \cdot \delta \frac{a}{b} = dh \frac{\delta a}{h_a}$$

pari alla prima. Ciò conferma quanto già detto circa la posizione del baricentro; inoltre assicura che una mediana (d_0) e la parallela (a_0) per G al lato (a) dimezzato dalla mediana stessa sono coniugati nell'involuzione di centro G .

Basterà perciò ottenere i momenti d'inerzia rispetto ad a_0 ed a d_0 .
Per il lato AB si ha (Fig. 8b)

$$\begin{aligned} I_a^* &= I_y \operatorname{sen}^2 \varphi + I_x \cos^2 \varphi + 2I_{xy} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi = \\ &= I_x \cos^2 \varphi = \frac{\delta_c c^3}{3} \cos^2 \varphi ; \end{aligned}$$

poichè è pure

$$\cos \varphi = \operatorname{sen} \beta = \frac{h_a}{c}$$

si ha

$$I_a^* = \frac{\delta_c c h_a^2}{3} = \frac{\delta a h_a^2}{3} .$$

Analoga formula vale per il lato AC. E' perciò (Fig. 8c)

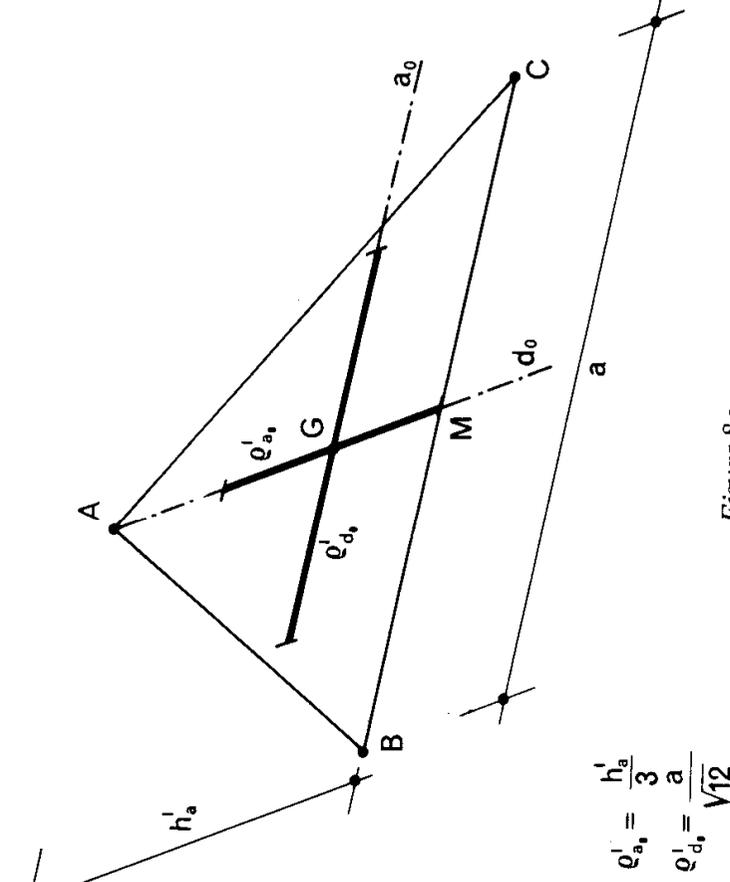


Figura 8c

$$I_a = \frac{2}{3} \delta a h_a^2$$

$$I_{a_0} = \frac{2}{3} \delta a h_a^2 - 3 a \delta \cdot \left(\frac{h_a}{3} \right)^2 = \frac{\delta a h_a^2}{3} \quad (20)$$

$$\rho_{a_0} = \sqrt{\frac{\delta a h_a^2}{3 \cdot 3 a \delta}} = \frac{h_a}{3}$$

$$\rho'_{a_0} = \frac{\rho_{a_0}}{\cos (d_0 h_a)} = \frac{h'_a}{3} \quad (21)$$

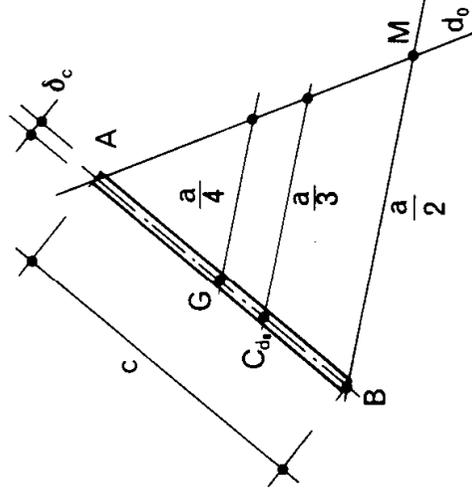


Figura 8d

Così pure si ha, per il momento d'inerzia del lato AB rispetto a d_0 (Fig. 8d).

$$I'_{d_0}^* = a \delta \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^3 \delta}{12}$$

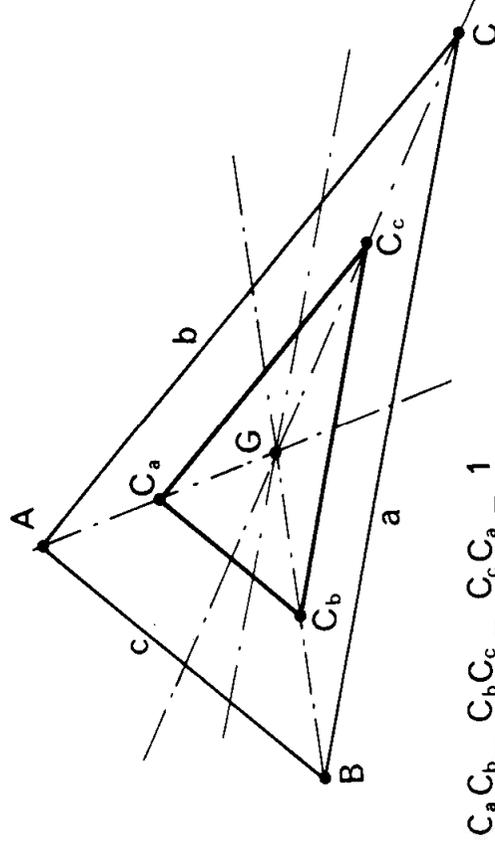
da cui

$$I'_{d_0} = 2 \frac{a^3 \delta}{12} + 2 \frac{a \delta}{2} \frac{a}{4} \frac{a}{3} = \frac{a^3 \delta}{4} \quad (22)$$

$$\rho'_{d_0} = \sqrt{\frac{\delta a^3}{4 \cdot 3a\delta}} = \frac{a}{\sqrt{12}}. \quad (23)$$

Nella Fig. 8c è riportata l'ellisse centrale d'inerzia attraverso i due semidiametri coniugati ρ'_{a_0} e ρ'_{d_0} .

Si vuole ora il nocciolo (Fig. 8e). Si osserva subito dalla Fig. 8c che



$$\frac{C_a C_b}{AB BC} = \frac{C_b C_c}{BC CA} = \frac{C_c C_a}{CA AB} = \frac{1}{2}$$

Figura 8c

C_a , centro del lato $a = BC$, è l'estremo superiore del diametro ρ'_{a_0} ; quindi

$$GC_a = \frac{h'_a}{3}.$$

Se ne trae che il nocciolo è il triangolo omotetico della linea media secondo il centro G ed il rapporto $\frac{1}{2}$; infatti

$$\frac{GA}{GC_a} = \frac{GB}{GC_b} = \frac{GC}{GC_c} = 2.$$

- 2) I risultati ottenuti possono essere utilizzati per il calcolo delle caratteristiche d'inerzia della sezione a forma di triangolo pieno ABC . Infatti (Fig. 8f) si congiunga G con i tre vertici A, B, C ; le aree dei tre triangoli di vertice G sono uguali. Ciò si trae agevolmente dalla considerazione che i due triangoli A_1 ed A_2 hanno la stessa base BG e la stessa altezza ($h_1 = h_2$).

Ne derivano le uguaglianze

$$ad_{G_a} = bd_{G_b} = cd_{G_c} .$$

Considerando il triangolo $A'B'C'$ con lati paralleli a quelli del triangolo ABC , si ha

$$\frac{\delta_a}{\delta_b} = \frac{d_{G_a}}{d_{G_b}} = \frac{b}{a}$$

da cui

$$\delta_b = \delta_a \frac{a}{b} .$$

Quindi la figura compresa tra ABC ed $A'B'C'$ è, a parte la sottigliezza,

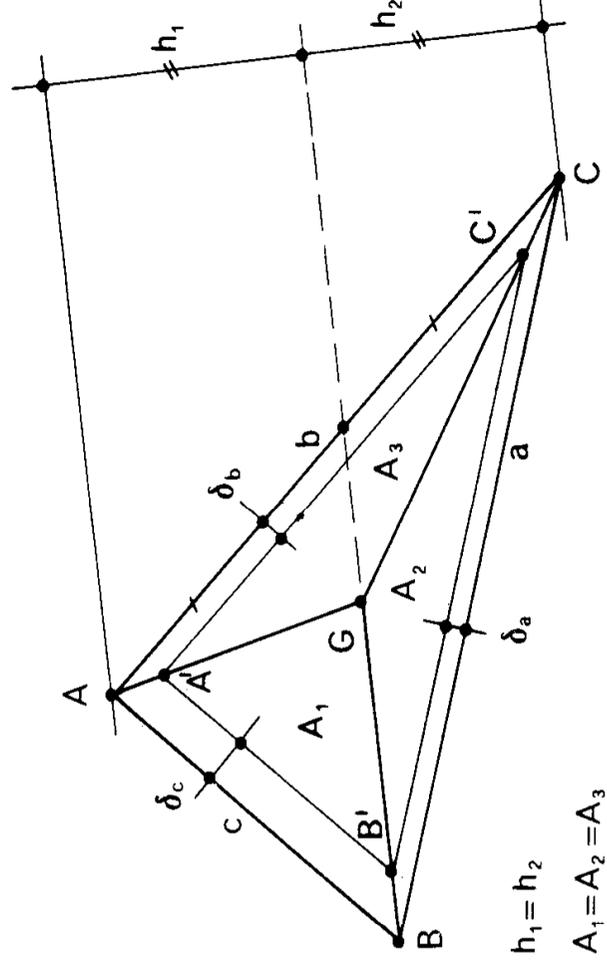


Figura 8f

la stessa della Fig. 8a. Può allora scriversi, chiamando y la distanza da G del lato parallelo ad a di una qualsiasi delle sezioni sottili simili a quella della figura 8a in cui può scomporsi il triangolo, ed a_y la lunghezza del suddetto lato,

$$a_y = \frac{3ay}{h_a}$$

$$I_{a_0} = \int_0^{h_a} \frac{1}{3} \frac{3ay}{h_a} (3y)^2 dy = \int_0^{h_a} 9 \frac{a}{h_a} y^3 dy = \frac{ah_a^3}{36} \quad (24)$$

$$\rho_{a_0} = \sqrt{\frac{ah_a^3 \cdot 2}{36 \cdot ah_a}} = \frac{h_a}{\sqrt{18}} \quad (25)$$

$$I'_{d_0} = \int_0^{h_a} \frac{27a^3}{4h_a^3} y^3 dy = \frac{a^3 h_a}{48} \quad (26)$$

$$\rho'_{d_0} = \sqrt{\frac{a^3 h_a \cdot 2}{48 \cdot ah_a}} = \frac{a}{\sqrt{24}} \quad (27)$$

Problema n. 9.

1) La sezione sottile della Fig. 9a è di spessore δ costante; la linea

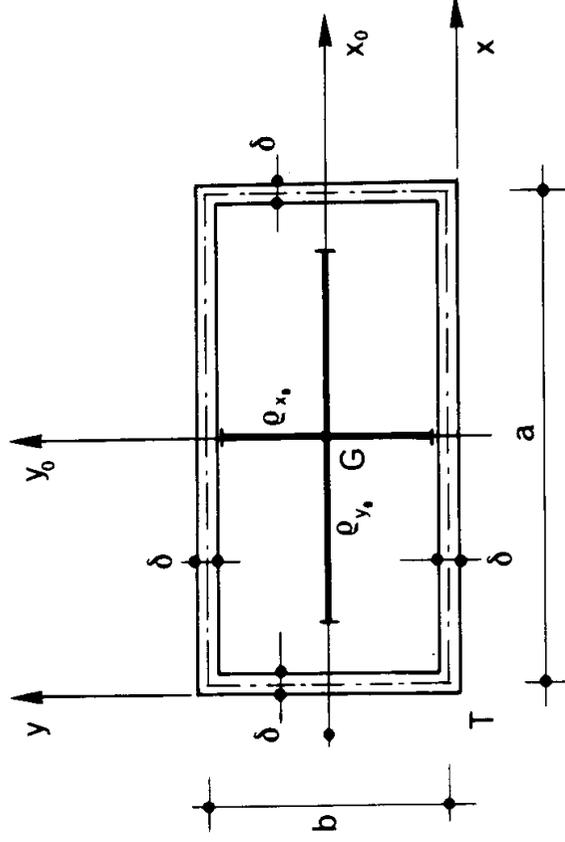


Figura 9a

media è un rettangolo $a \times b$. Il baricentro G e gli assi principali d'inertia x_0 ed y_0 sono di immediato reperimento. L'area complessiva è

$$A = 2\delta (a + b).$$

Si può scrivere

$$I_{x_0} = 2 \frac{\delta b^3}{12} + 2 \delta a \left(\frac{b}{2} \right)^2 = \frac{\delta b^2}{6} (3a + b)$$

$$I_{y_0} = 2 \frac{\delta a^3}{12} + 2 \delta b \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{\delta a^2}{6} (a + 3b)$$

$$\rho_{x_0} = \sqrt{\frac{\delta b^2}{6} \frac{3a + b}{2\delta (a + b)}} = \sqrt{\frac{b^2 (3a + b)}{12 (a + b)}} \quad (28)$$

$$\rho_{y_0} = \sqrt{\frac{\delta a^2}{6} \frac{a + 3b}{2\delta (a + b)}} = \sqrt{\frac{a^2 (a + 3b)}{12 (a + b)}}.$$

2) Ponendo $a = 2b$, si ha

$$\rho_{x_0} = b \sqrt{\frac{7}{12 \cdot 3}} = 0,44096 b$$

$$\rho_{y_0} = b \sqrt{\frac{4 \cdot 5}{12 \cdot 3}} = 0,74536 b = 0,37268 a.$$

3) Si voglia calcolare adesso l'ellisse d'inerzia relativa al vertice T (Fig. 9a). Tale ellisse non è ovviamente centrale; essa è costituita dagli elementi simmetrici delle involuzioni (vedi es. 1) che si instaurano, su ogni retta s passante per T, tra il generico punto A ed il punto A' dove la retta di centro A taglia la retta s (Fig. 9b). Tali involuzioni sono prive di punti doppi reali, poichè una retta non può — per masse tutte positive — contenere il proprio centro; il fascio di ellisse è coniugato del punto improprio di s ; il fascio di centro $S = C_s$ è anch'esso in involuzione; la corrispondenza tra le rette $\ni S$ ed i punti $\in s$, tale che ad ogni retta a corrisponda il proprio centro $C_a = A$, è una applicazione iniettiva e suriettiva, cioè biettiva; rispetto a tutte le generazioni proiettive (birapporti etc.) essa è un isomorfismo.

Si dimostra che, data una retta s passante per T , il semidiametro ρ'_s è

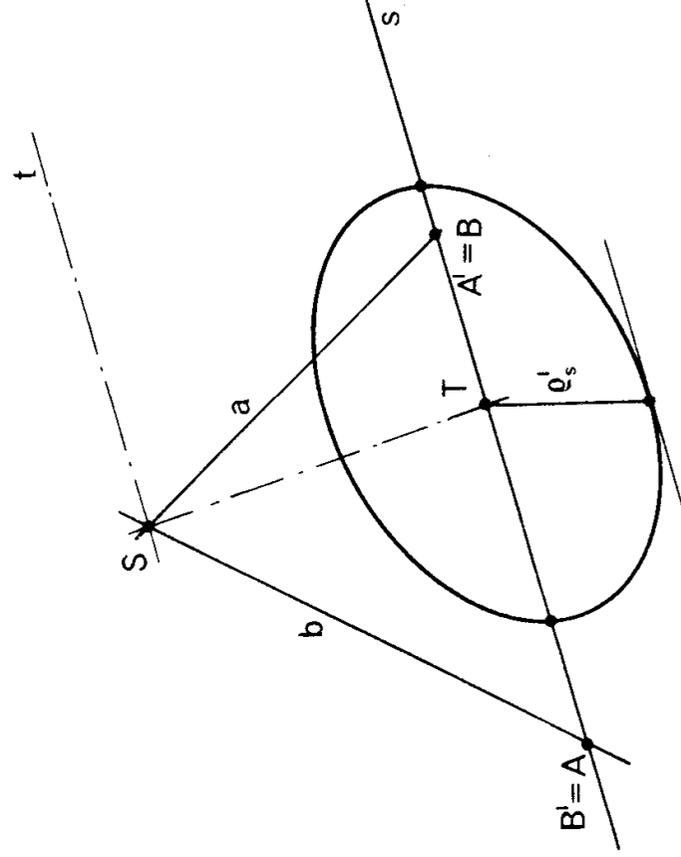


Figura 9b

il raggio d'inerzia relativo ad s ; e cioè, agli effetti del calcolo di I_s , o di I'_s , l'area A può concentrarsi all'estremo di ρ'_s . Tale proprietà è l'unica che l'ellisse d'inerzia generica ha in comune con l'ellisse d'inerzia centrale. Da essa scaturisce però la possibilità di tracciare l'ellisse attraverso il procedimento del cerchio di Mohr; procedimento che, come è noto, è valido per un fascio di rette con sostegno generico, e quindi non necessariamente baricentrico. E' quanto si farà nel seguito. Si ha (Fig. 9a)

$$I_x = \frac{\delta b^2}{6} (3a + b) + 2\delta (a + b) \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{\delta b^2}{3} (3a + 2b)$$

$$I_y = \frac{\delta a^2}{6} (a + 3b) + 2\delta (a + b) \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\delta a^2}{3} (2a + 3b)$$

$$I_{xy} = -2\delta (a + b) \frac{a}{2} \frac{b}{2} = -\frac{\delta ab (a + b)}{2}$$

Si ponga (Fig. 9c) $a = 5\text{ m}$, $b = 3\text{ m}$, $\delta = 0,2\text{ m}$. Risulta

$$A = 2 \cdot 8 \cdot 0,2 = 3,2\text{ m}^2$$

$$I_x = \frac{0,2 \cdot 9}{3} \cdot 21 = 12,6 \quad m^4$$

$$I_y = \frac{0,2 \cdot 25}{3} \cdot 19 = 31,6666 \quad m^4$$

$$I_{xy} = - \frac{0,2 \cdot 15 \cdot 8}{2} = - 12 \quad m^4 ;$$

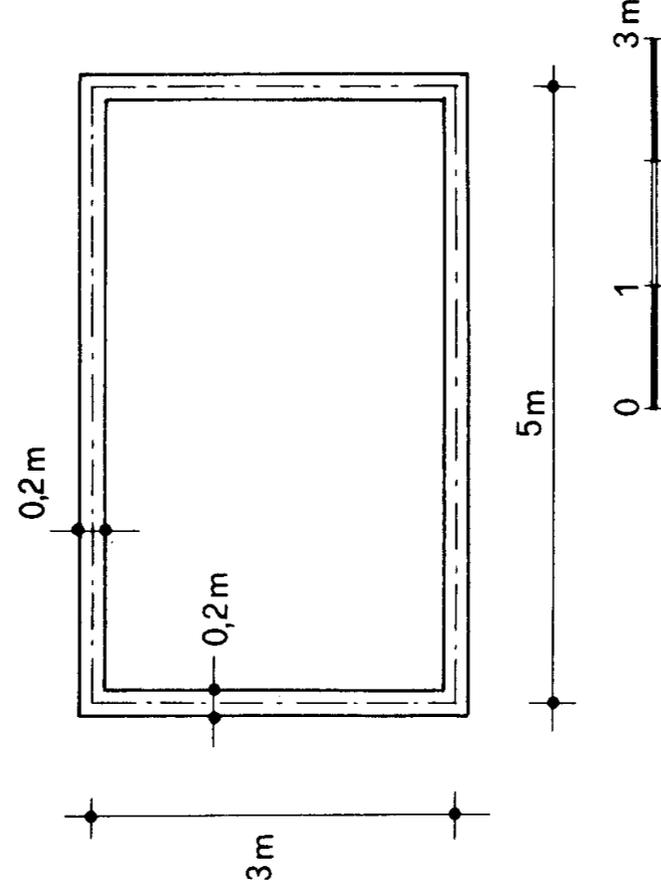


Figura 9c

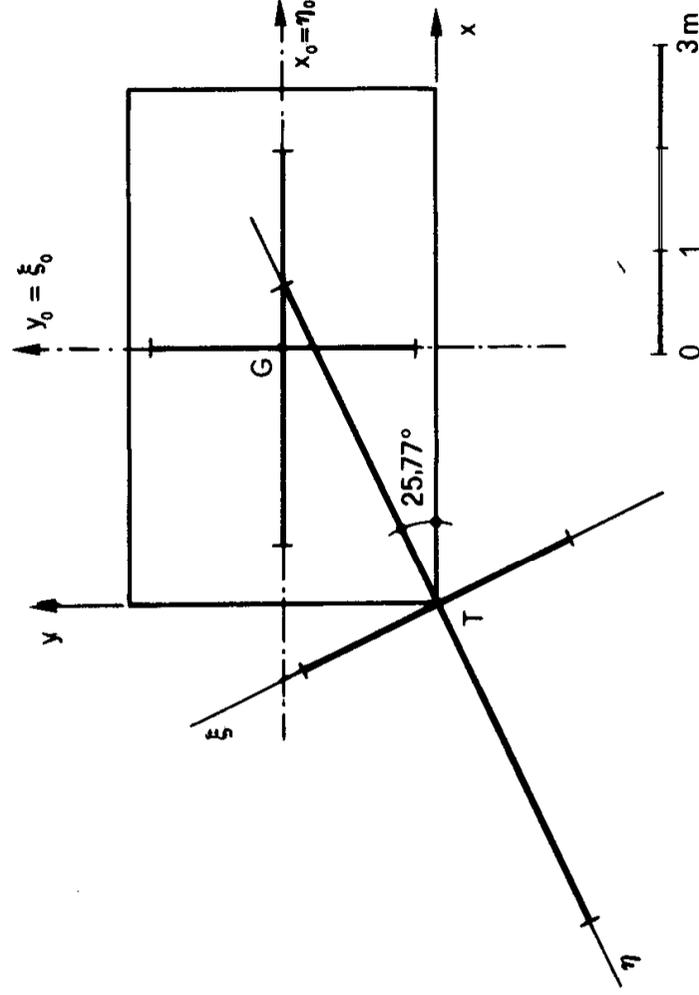
si ha perciò

$$I_{\xi} \quad \quad \quad I_{\eta}$$

$$= \frac{12,6 + 31,6666}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{12,6 - 31,6666}{2}\right)^2 + 12^2} =$$

$$= 22,1333 \pm 15,3259 = \begin{cases} 37,4592 \text{ m}^4 \\ 6,8074 \text{ m}^4 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}(2x p) = \frac{-24}{12,6 - 31,6666} = 1,2587$$



$$\begin{aligned} e_{\xi} &= 3,42 \text{ m} & e_{\xi_0} &= 1,91 \text{ m} \\ e_{\eta} &= 1,46 \text{ m} & e_{\eta_0} &= 1,30 \text{ m} \end{aligned}$$

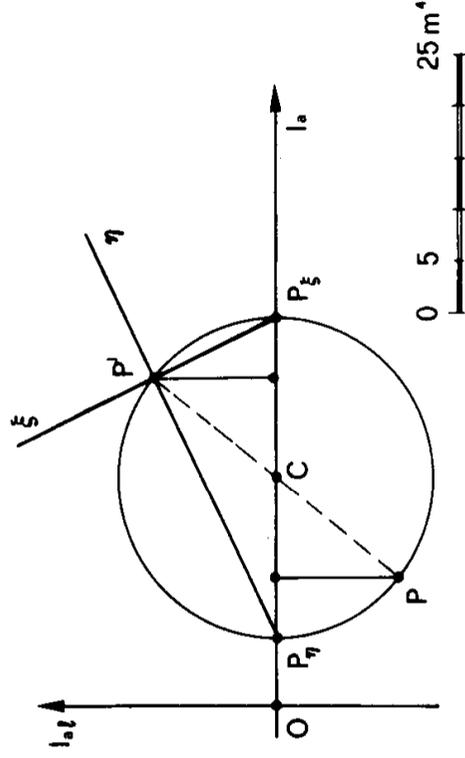


Figura 9d

$$(2x p) = 51,53^\circ \pm 180^\circ$$

$$(x p) = 25,767^\circ \pm 90^\circ$$

Nella Fig. 9d è riportata la costruzione del cerchio di Mohr, che defi-

nisce le direzioni di ξ ed η , nonchè le lunghezze dei semidiametri ρ_ξ e ρ_η , e quindi l'ellisse di centro T; risulta

$$\rho_\xi = \sqrt{\frac{37,4592}{3,2}} = 3,4214 \text{ m}$$

$$\rho_\eta = \sqrt{\frac{6,8074}{3,2}} = 1,4585 \text{ m} .$$

Nella stessa figura è riportata l'ellisse centrale; per essa si ha (28)

$$\rho_{\xi_0} = \sqrt{\frac{25 \cdot 14}{12 \cdot 8}} = 1,9094 \text{ m}$$

$$\rho_{\eta_0} = \sqrt{\frac{9 \cdot 18}{12 \cdot 8}} = 1,2990 \text{ m} .$$

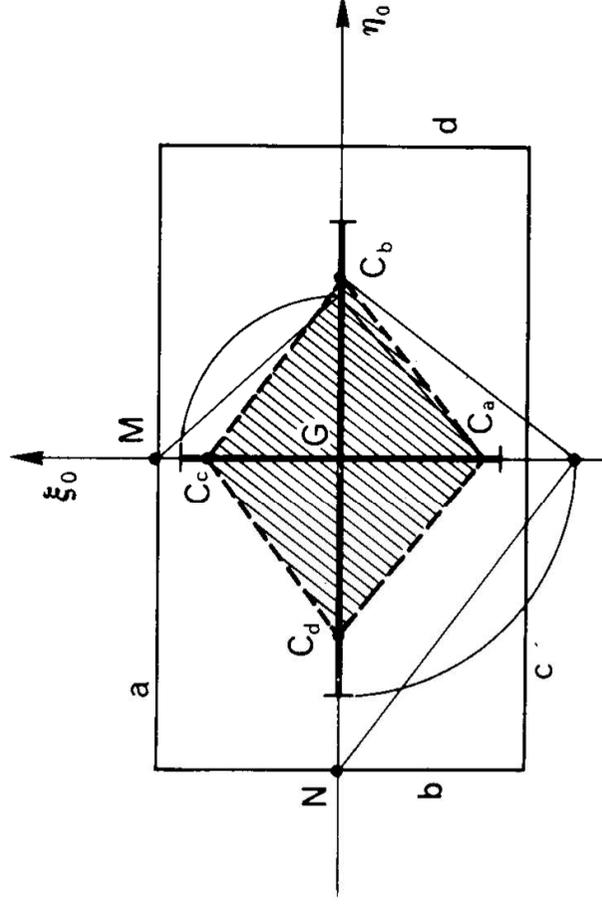


Figura 9e

Nella Fig. 9e è disegnato il nociolo; per esso si ha

$$GC_a \cdot GM = 1,2990^2 \rightarrow GC_a = 1,1249 \text{ m}$$

$$GC_b \cdot GN = 1,9094^2 \rightarrow GC_b = 1,4583 \text{ m} .$$

Problema n. 10.

- 1) Lo stesso problema dell'es. 9 n. 3 è affrontato nell'es. 10, ma con

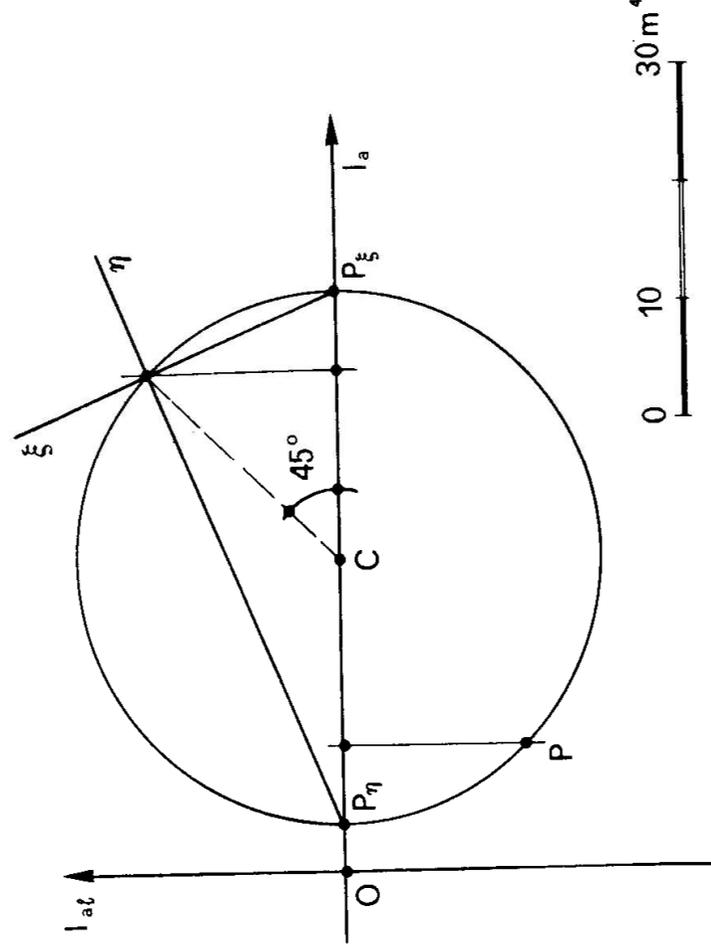
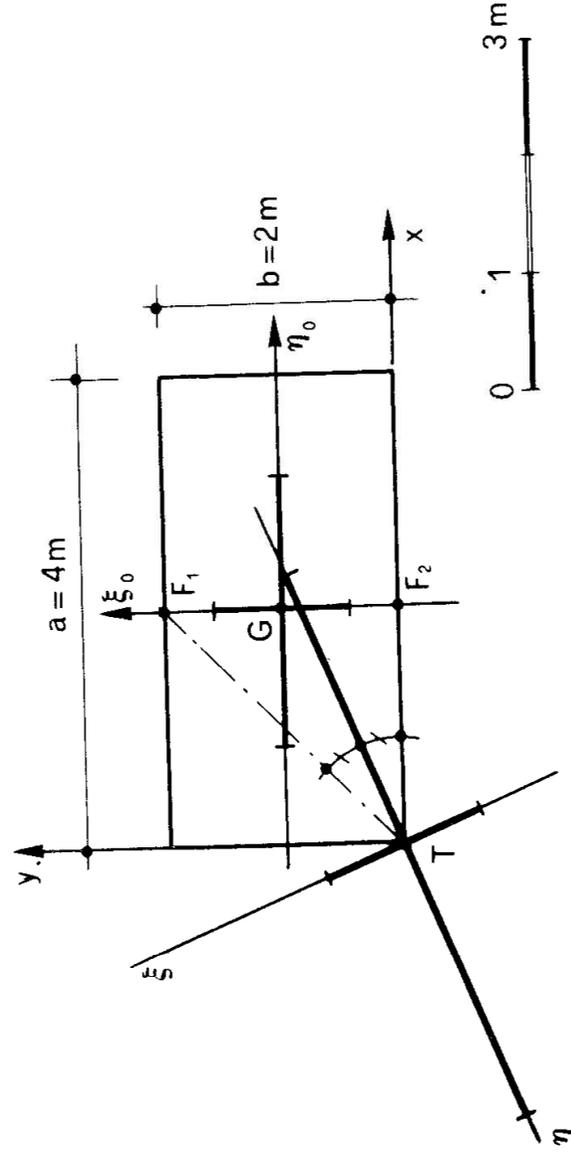


Figura 10a

riferimento ad una sezione rettangolare piena di dimensioni $a \times b$ (Fig. 10a). Si vuole l'ellisse d'inerzia relativa al vertice T . Possiamo scrivere, assunti come assi x ed y i due lati del rettangolo,

$$I_x = \frac{ab^3}{3}$$

$$I_y = \frac{ba^3}{3}$$

$$I_{x,y} = -ab \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = -\frac{a^2b^2}{4}$$

Poichè è

$$I_x - I_y = \frac{ab}{3} (b^2 - a^2)$$

$$I_x + I_y = \frac{ab}{3} (b^2 + a^2)$$

può scriversi

$$I_{\xi} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. I_{\eta} = \frac{ab}{6} (b^2 + a^2) \pm \sqrt{\left[\frac{ab}{6} (b^2 - a^2) \right]^2 + \frac{a^4b^4}{16}} =$$

$$= \frac{ab}{6} (b^2 + a^2) \pm \sqrt{\frac{4a^2b^6 + 4a^6b^2 + a^4b^4}{144}} =$$

$$= \frac{ab}{6} (b^2 + a^2) \pm \frac{ab}{12} \sqrt{4b^4 + 4a^4 + a^2b^2} ;$$

$$\operatorname{tg} 2(xp) = -2 \frac{a^2b^2}{4} \frac{3}{ab (b^2 - a^2)} = -\frac{3}{2} \frac{ab}{b^2 - a^2}$$

Ponendo

$$a = 4m$$

$$b = 2m$$

si ha

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{array}{l} I_{\xi} \\ I_{\eta} \end{array} \right\} &= \frac{8}{6} (4 + 16) \pm \sqrt{\left[\frac{8}{6} (4 - 16) \right]^2 + \frac{256 \cdot 16}{16}} = \\
 &= 26,6666 \pm 22,6274 = \begin{cases} 49,2941 \text{ m}^4 \\ 4,0392 \text{ m}^4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\rho_{\xi} = \sqrt{\frac{49,2941}{8}} = 2,4823 \text{ m}$$

$$\rho_{\eta} = \sqrt{\frac{4,0392}{8}} = 0,7106 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} 2(xp) = -\frac{3}{2} \frac{8}{4 - 16} = 1$$

$$2(xp) = 45^{\circ} \pm 180^{\circ}$$

$$(xp) = 22,5^{\circ} \pm 90^{\circ}$$

Il cerchio di Mohr (Fig. 10a) definisce le posizioni di ξ ed η .

2) Si ha pure (Fig. 10a)

$$I_x = \frac{ab^3}{3} = 10,6666 \text{ m}^4$$

$$I_y = \frac{ba^3}{3} = 42,6666 \text{ m}^4$$

$$I_{xy} = -\frac{a^2 b^2}{4} = -16 \text{ m}^4.$$

Le formule di Mohr

$$\begin{aligned}
 I_x &= I_\xi \cos^2(\xi x) + I_\eta \sin^2(\xi x) \\
 I_y &= I_\xi \cos^2(\xi y) + I_\eta \sin^2(\xi y) = \\
 &= I_\xi \sin^2(\xi x) + I_\eta \cos^2(\xi x)
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

$$I_{xy} = (I_\xi - I_\eta) \sin(\xi x) \cos(\xi x)$$

sono rispettate. Si ha infatti

$$(\xi x) = - (90^\circ + 22,5^\circ)$$

$$(\xi y) = - 22,5^\circ$$

$$\begin{aligned}
 I_\xi \cos^2(\xi x) + I_\eta \sin^2(\xi x) &= 49,2941 \cdot 0,1464 + \\
 &+ 4,0392 \cdot 0,8536 = 10,66 \text{ m}^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_\xi \cos^2(\xi y) + I_\eta \sin^2(\xi y) &= 49,2941 \cdot 0,8536 + \\
 &+ 4,0392 \cdot 0,1464 = 42,67 \text{ m}^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (I_\xi - I_\eta) \sin(\xi x) \cos(\xi x) &= - 45,2549 \cdot 0,9239 \cdot 0,3827 = \\
 &= - 16 \text{ m}^4 .
 \end{aligned}$$

3) Dalla prima delle (29) si ha, dividendo per l'area,

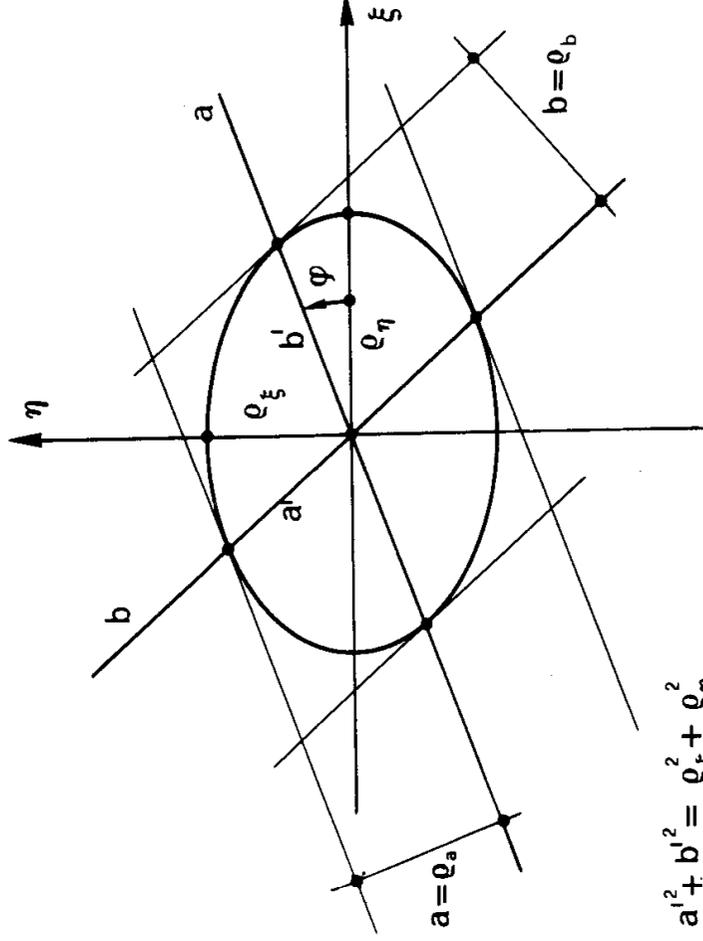
$$\rho_x^2 = \rho_\xi^2 \cos^2(\xi x) + \rho_\eta^2 \sin^2(\xi x), \tag{30}$$

formula che fornisce il raggio d'inerzia per una retta x comunque inclinata su ξ ; anche la (30) è rispettata. E' interessante osservare come la (30) derivi direttamente dal secondo dei teoremi di Apollonio, ricordati nella Fig. 10b. Infatti l'equazione dell'ellisse in forma canonica fornisce ($\varphi = \xi a$)

$$\frac{(b' \cos \varphi)^2}{\rho_\eta^2} + \frac{(b' \sin \varphi)^2}{\rho_\xi^2} = 1 ;$$

dal secondo teorema di Apollonio si trae

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{\rho_\xi^2 \rho_\eta}{b'^2} = \rho_\xi^2 \rho_\eta^2 \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\rho_\eta^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\rho_\xi^2} \right) = \\ &= \rho_\xi^2 \cos^2 \varphi + \rho_\eta^2 \sin^2 \varphi \end{aligned}$$



$$a'^2 + b'^2 = \rho_\xi^2 + \rho_\eta^2$$

$$ab' = a''b'' = \rho_\xi \rho_\eta$$

Figura 10b

4) Si dimostra che, dati i due punti F_1 ed F_2 (*antifuochi*) posti sull'asse minore dell'ellisse d'inerzia centrale, a distanza da G fornita da

$$\pm \sqrt{\rho_{\xi_0}^2 - \rho_{\eta_0}^2}, \quad (31)$$

le due proiettanti da T gli antifuochi formano un angolo bisecato da ξ ed η (Fig. 10c).

Nel caso in esame (Fig. 10a) è

$$\rho_{\xi_0} = \frac{4}{\sqrt{12}} = 1,1547 m$$

$$\rho_{\eta_0} = \frac{2}{\sqrt{12}} = 0,5773 \text{ m}$$

$$\sqrt{\rho_{\xi_0}^2 - \rho_{\eta_0}^2} = \frac{16}{12} - \frac{4}{12} = 1,$$

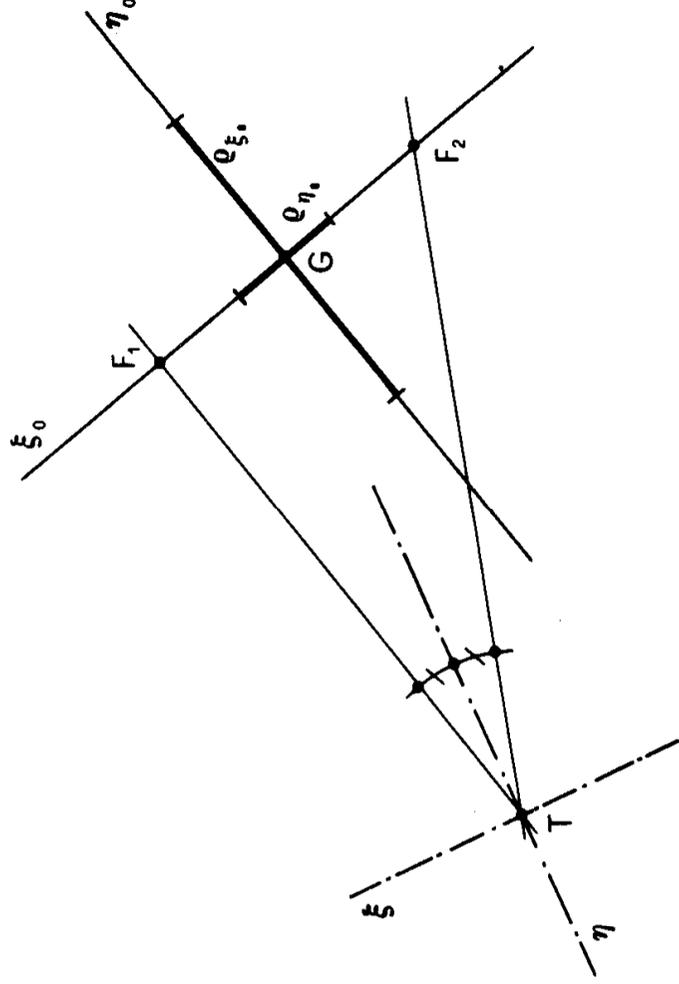


Figura 10c

e gli antifochi sono gli estremi della mediana parallela ad y . Poichè

$$\operatorname{tg} 2(xp) = 1$$

ed ancora

$$\frac{F_1 F_2}{TF_2} = 1$$

da cui

$$\operatorname{tg}(F_1 T F_2) = 1,$$

risulta

$$(xp) = \frac{(F_1 T F_2)}{2}$$

e la proprietà degli antifluochi è rispettata.

Problema n. 11.

1) La sezione in esame (Fig. 11a) è ad L, a lati disuguali: le dimensioni non sono tali da consentire di considerarla sottile. Torna utile, nel ca-

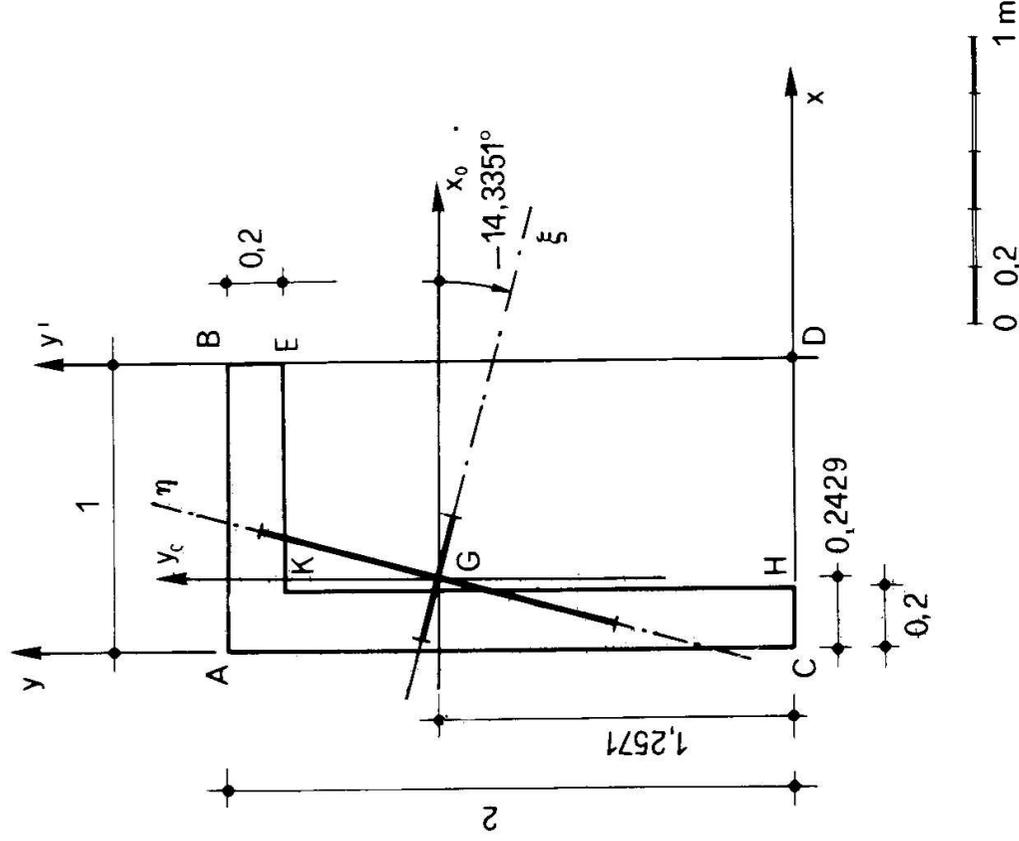


Figura 11a

so, il procedimento di scomposizione in sottosistemi complementari; in particolare, si può pensare che la sezione sia composta da un rettangolo ABCD di area positiva, e da un rettangolo KEHD di area negativa. Si ha così, sommando in ogni calcolo le quantità relative ai due rettangoli (somma algebrica, ovviamente),

$$A = 1 \cdot 2 - 0,8 \cdot 1,8 = 0,560 \text{ m}^2$$

$$S_x = 2 \cdot 1 - 1,44 \cdot 0,9 = 0,704 \text{ m}^3$$

$$S_y = -2 \cdot 0,5 + 1,44 \cdot 0,6 = -0,136 \text{ m}^3$$

$$d_{Gx} = \frac{0,704}{0,560} = 1,2571 \text{ m}$$

$$d_{Gy} = -\frac{0,136}{0,560} = -0,2429 \text{ m}$$

$$I_x = \frac{1 \cdot 2^3}{3} - \frac{0,8 \cdot 1,8^3}{3} = 1,1115 \text{ m}^4$$

$$I_{x_0} = 1,1115 - 0,56 \cdot 1,2571^2 = 0,2265 \text{ m}^4$$

$$I_{y'} = \frac{2 \cdot 1^3}{3} - \frac{1,8 \cdot 0,8^3}{3} = 0,3595 \text{ m}^4$$

$$I_{y_0} = 0,3595 - 0,56 (1 - 0,2429)^2 = 0,0385 \text{ m}^4$$

$$I_{xy'} = 2 \cdot 1 \cdot 0,5 - 1,44 \cdot 0,9 \cdot 0,4 = 0,4816 \text{ m}^4$$

$$I_{x_0 y_0} = 0,4816 - 0,56 \cdot 1,2571 \cdot (1 - 0,2429) = -0,0514 \text{ m}^4$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} I_{\xi} \\ I_{\eta} \end{array} \right\} &= \frac{0,2265 + 0,0385}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0,2265 - 0,0385}{2} \right)^2 + 0,0514^2} = \\ &= 0,1325 \pm 0,1071 = \begin{array}{l} 0,2396 \text{ m}^4 \\ 0,0254 \text{ m}^4 \end{array} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 2(x_0 p) = -\frac{2 \cdot 0,0514}{0,2265 - 0,0385} = -0,5468$$

$$2(x_0 p) = -28,6698^\circ \pm 180^\circ$$

$$(x_0 p) = -14,3349^\circ \pm 90^\circ .$$

Il cerchio di Mohr (Fig. 11b) posiziona ξ ed η .

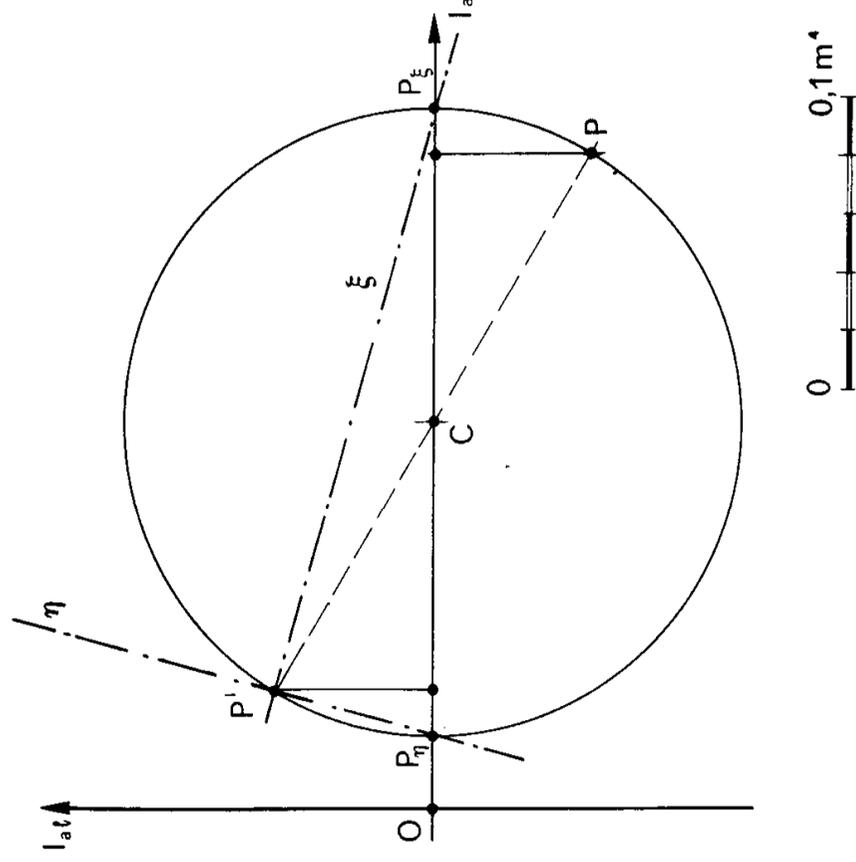


Figura 11b

Dopo aver ricavato

$$\rho_{\xi} = \sqrt{\frac{0,2396}{0,560}} = 0,6541 \text{ m}$$

$$\rho_{\eta} = \sqrt{\frac{0,0254}{0,560}} = 0,2130 \text{ m}$$

si può tracciare (Fig. 11a) l'ellisse centrale d'inerzia.

2) Con riferimento alla sezione già studiata, si desidera ottenere

(Fig. 11c) i punti E_1 ed E_2 dove una generica retta s passante per G interseca il contorno del nocciolo, e cioè i cosiddetti raggi di nocciolo e_{1s} ed

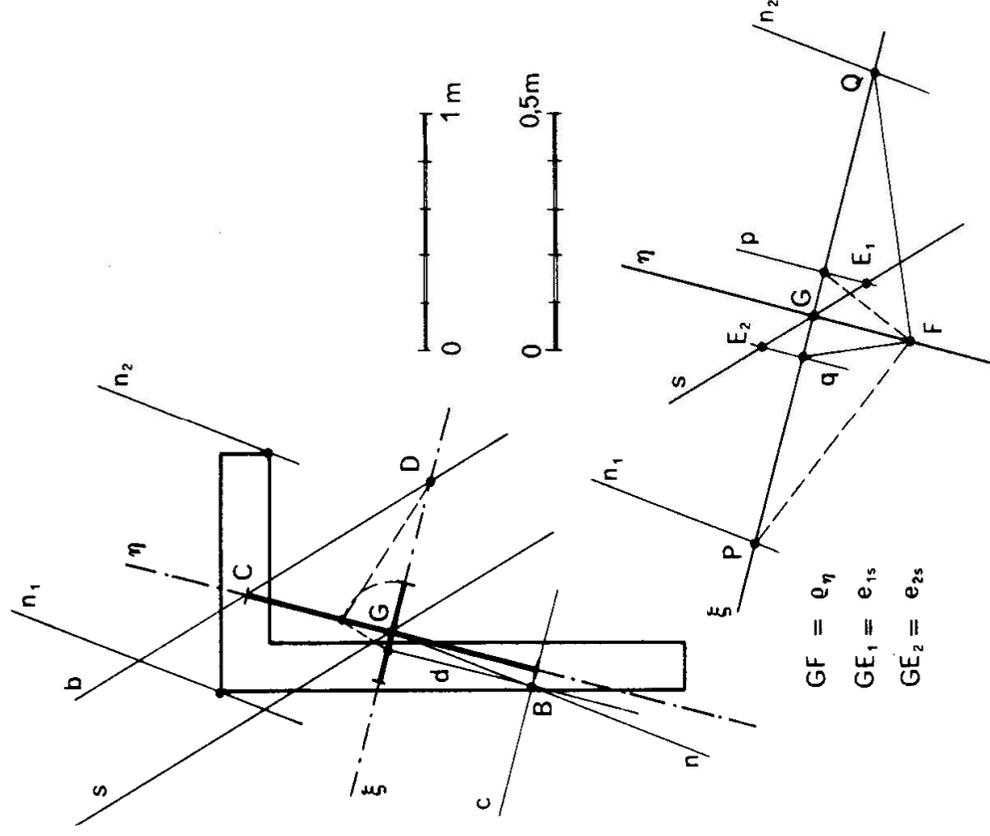


Figura 11c

e_{2s} relativi alla retta s . Si è prima ottenuta la retta n coniugata di s rispetto all'ellisse centrale d'inerzia; a ciò fare (vedi es. 3) si è disegnato il centro B di una retta b parallela ad s , e si è congiunto B con G . Si sono poi ottenuti i centri E_1 ed E_2 delle rette n_1 ed n_2 parallele ad n , e che, pur avendo ancora contatto con la sezione, vedono quest'ultima tutta da una sola parte (*radenti estreme* della sezione); per necessità grafiche tale costruzione si è riportata in scala metà. In particolare, si sono disegnate le due rette p e q di centri P ($\xi \cap n_1$) e Q ($\xi \cap n_2$); è bastato all'uopo ottenere, attraverso la nota costruzione (es. 1) i coniugati di P e Q , poichè p e q devono avere la direzione della coniugata di ξ , e cioè la direzione di η . Avute p e q , si considera che E_1 deve appartenere a p poichè n_1 contiene P , e così per E_2 ; in simboli

$$P \in n_1 \rightarrow p \ni E_1 = C_{n_1}$$

$$Q \in n_2 \rightarrow p \ni E_2 = C_{n_2}$$

D'altro canto è

$$n_1, n_2 \ni C_s \rightarrow E_1, E_2 \in s;$$

quindi è

$$E_1 = s \cap p$$

$$E_2 = s \cap q.$$

Problema n. 12.

1) Nella Fig. 12a è riportata una rudimentale sezione di travata da

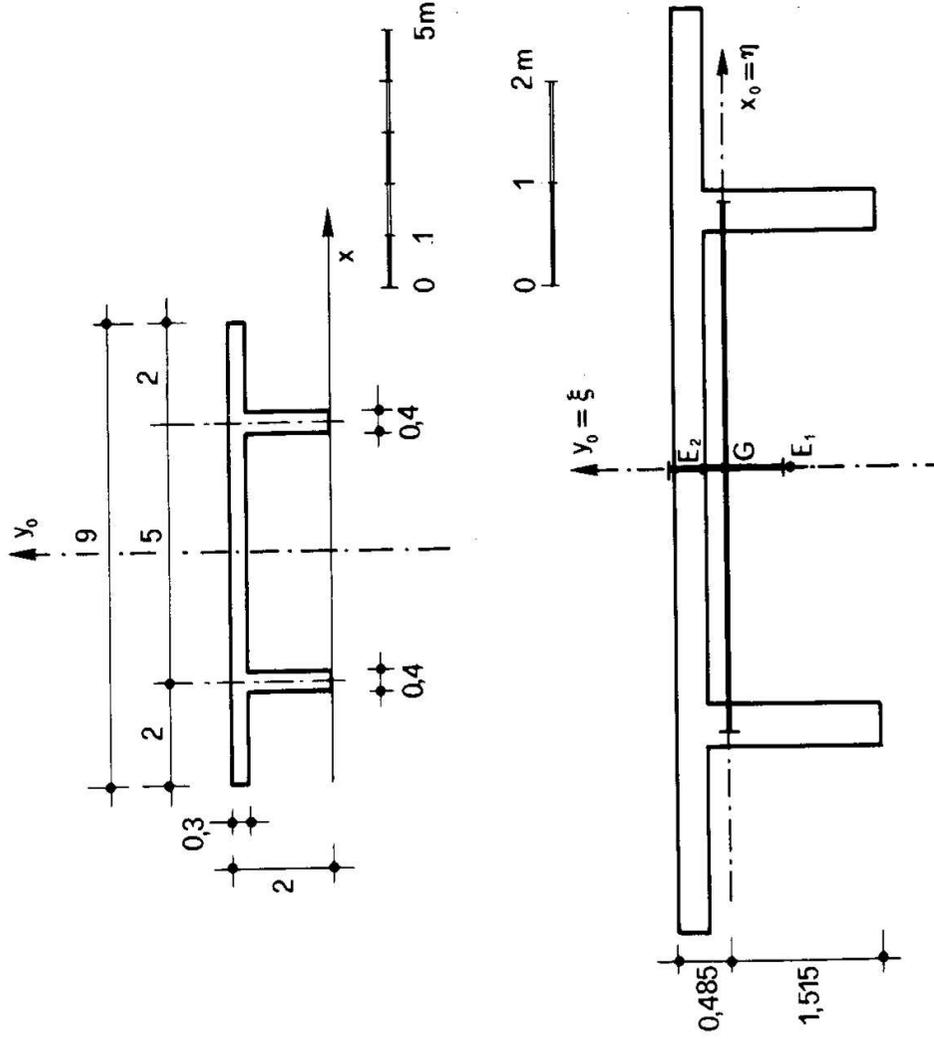


Figura 12a

ponete del tipo *aperto*; si distinguono la soletta di impalcato, le due nervature, e gli sbalzi sui quali trovano collocazione anche i marciapiedi. Anche qui conviene adottare il procedimento di scomposizione; si considera il rettangolo di area positiva che include la sezione radendone i bordi, ed i

tre rettangoli di area negativa ad esso complementari rispetto alla sezione stessa. Si può scrivere

$$A = 9 \cdot 2 - 8,2 \cdot 1,7 = 18 - 13,94 = 4,06 \text{ m}^2$$

$$S_x = 18 \cdot 1 - 13,94 \cdot 0,85 = 18 - 11,849 = 6,151 \text{ m}^3$$

$$d_{Gx} = \frac{6,151}{4,06} = 1,515 \text{ m}$$

$$I_x = \frac{9 \cdot 2^3}{3} - \frac{8,2 \cdot 1,7^3}{3} = 10,5711 \text{ m}^4$$

$$I_{x_0} = 10,5111 - 4,06 \cdot 1,515^2 = 1,2525 \text{ m}^4$$

$$I_{y_0} = \frac{2 \cdot 9^3}{12} - \frac{1,7 \cdot 4,6^3}{12} - 2 \left(\frac{1,7 \cdot 1,8^3}{12} + 1,7 \cdot 1,8 \cdot 3,6^2 \right) =$$

$$= 26,7434 \text{ m}^4$$

$$\rho_{x_0} = \sqrt{\frac{1,2525}{4,06}} = 0,555 \text{ m}$$

$$\rho_{y_0} = \sqrt{\frac{26,7434}{4,06}} = 2,566 \text{ m} .$$

2) I raggi di nocciolo GE_1 e GE_2 appartenenti ad y_0 sono forniti da

$$GE_1 \cdot 0,485 = 0,555^2$$

$$GE_2 \cdot 1,515 = 0,555^2$$

da cui

$$GE_1 = 0,635 \text{ m}$$

$$GE_2 = 0,203 \text{ m} .$$

3) Nella Fig. 12b è riportata la stessa sezione della Figura 12a, con la variante della controsoletta all'intradosso (la soletta di estradosso è quel-

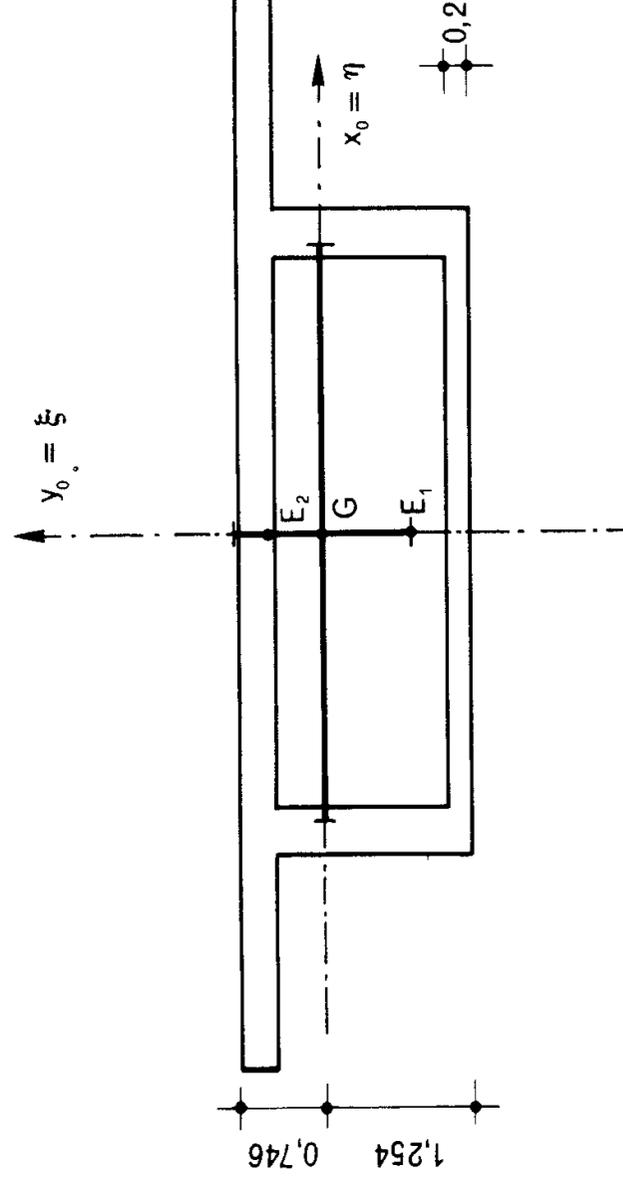


Figura 12b

la di impalcato già considerata). La sezione così è chiusa. Si ha per essa

$$A = 4,06 + 4,6 \cdot 0,2 = 4,06 + 0,92 = 4,98 \text{ m}^2$$

$$S_x = 6,151 + 0,92 \cdot 0,1 = 6,243 \text{ m}^3$$

$$d_{Gx} = \frac{6,243}{4,98} = 1,254 \text{ m}$$

$$I_x = 10,5711 + \frac{4,6 \cdot 0,2^3}{3} = 10,5834 \text{ m}^4$$

$$I_{x_0} = 10,5834 - 4,98 \cdot 1,254^2 = 2,7573 \text{ m}^4$$

$$I_{y_0} = 26,7434 + \frac{0,2 \cdot 4,6^3}{12} = 28,3657 \text{ m}^4$$

$$\rho_{x_0} = \sqrt{\frac{2,7573}{4,98}} = 0,744 \text{ m}$$

$$\rho_{y_0} = \sqrt{\frac{28,3657}{4,98}} = 2,387 \text{ m}$$

$$GE_1 = \frac{0,744^2}{0,746} = 0,742 \text{ m}$$

$$GE_2 = \frac{0,744^2}{1,254} = 0,442 \text{ m} .$$

Problema n. 13.

La Fig. 13 riporta una sezione composta di quattro rettangoli uguali $1 \times 0,5 \text{ m}$; si opera in maniera analoga a quanto fatto negli es. 11 e 12 utilizzando i dati relativi ai rettangoli ed i teoremi del trasporto.

Si ha di seguito

$$A = 4 \cdot 05 \cdot 1 = 2 \text{ m}^2$$

$$S_x = 0,5 (0,5 + 0,25 + 3,75 + 3,5) = 4 \text{ m}^3$$

$$S_y = -0,5 (0,25 + 7,5 + 0,5 + 7,75) = -8 \text{ m}^3$$

$$d_{Gx} = \frac{4}{2} = 2 \text{ m}$$

$$d_{Gy} = -\frac{8}{2} = -4 \text{ m}.$$

Che il baricentro della sezione fosse situato nell'intersezione delle due diagonali del rettangolo costituito dalle radenti, poteva essere desunto a priori dalla posizione delle quattro aree, uguali a $0,5 \text{ m}^2$, concentrate nei baricentri dei rettangoli componenti.

Si ha poi

$$I_{x_0} = 2 \left(\frac{0,5 \cdot 1^3}{12} + 0,5 \cdot 1,5^2 \right) +$$

$$+ 2 \left(\frac{1 \cdot 0,5^3}{12} + 0,5 \cdot 1,75^2 \right) = 5,4166 \text{ m}^4$$

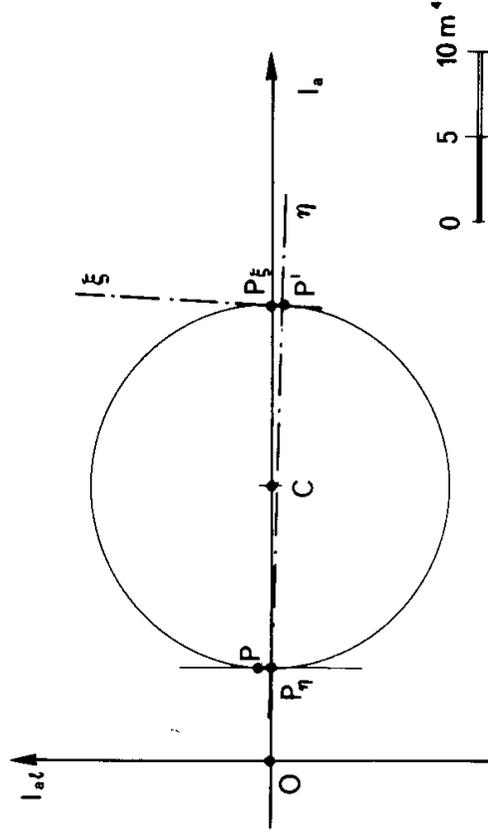
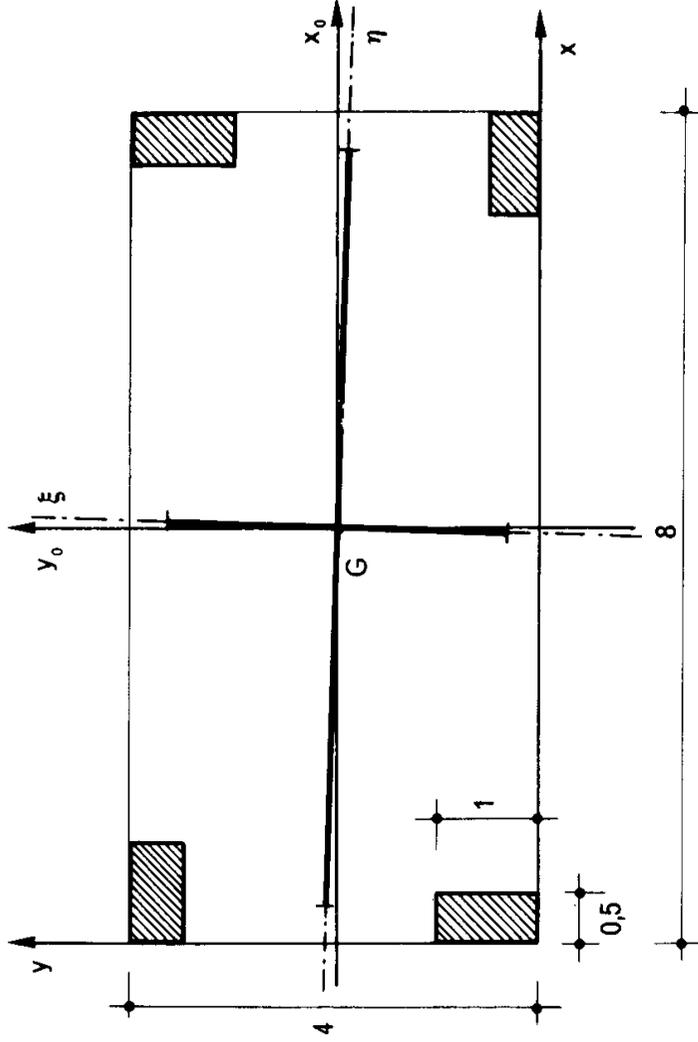


Figura 13

$$I_{y_0} = 2 \left(\frac{1 \cdot 0,5^3}{12} + 0,5 \cdot 3,75^2 \right) +$$

$$+ 2 \left(\frac{0,5 \cdot 1^3}{12} + 0,5 \cdot 3,50 \right) = 26,4166 \text{ m}^4$$

$$I_{x_0, y_0} = - 2 (0,5 \cdot 1,5 \cdot 3,75) + \\ + 2 (0,5 \cdot 1,75 \cdot 3,50) = 0,5 \text{ m}^4$$

$$\begin{array}{l} I_{\xi} \\ I_{\eta} \end{array} \begin{array}{l} \diagdown \\ \diagup \end{array} = \frac{5,4166 + 26,4166}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5,4166 - 26,4166}{2} \right)^2 + 0,5^2} = \\ = 15,9166 \pm 10,5119 = \begin{array}{l} 26,4285 \text{ m}^4 \\ 5,4047 \text{ m}^4 \end{array}$$

$$\operatorname{tg} 2(x_0 p) = \frac{2 \cdot 0,5}{- 21} = - 0,04762$$

$$2(x_0 p) = - 2,7263^\circ \pm 180^\circ$$

$$(x_0 p) = - 1,3632^\circ \pm 90^\circ$$

$$\rho_{\xi} = \sqrt{\frac{26,4285}{2}} = 3,6351 \text{ m}$$

$$\rho_{\eta} = \sqrt{\frac{5,4047}{2}} = 1,6439 \text{ m} .$$

Problema n. 14.

La sezione della Fig. 14 è composta di tre profilati uguali IPE 160, disposti con i lati paralleli a due direzioni ortogonali x ed y.

Dal manuale Italsider si hanno i seguenti dati per il profilato in oggetto (UNI 5398-64), dove x ed y sono gli assi baricentrici di max I e min I:

$$A^* = 20,1 \text{ cm}^2$$

$$I_x^* = 869 \text{ cm}^4$$

$$I_y^* = 68,3 \text{ cm}^4$$

$$\rho_x^* = 6,58 \text{ cm}$$

$$\rho_y^* = 1,84 \text{ cm}$$

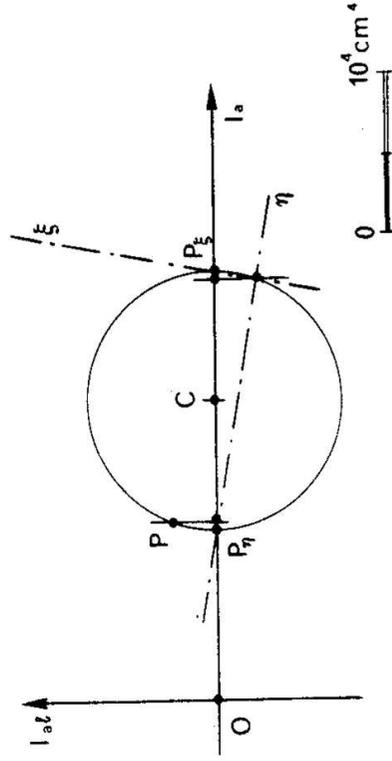
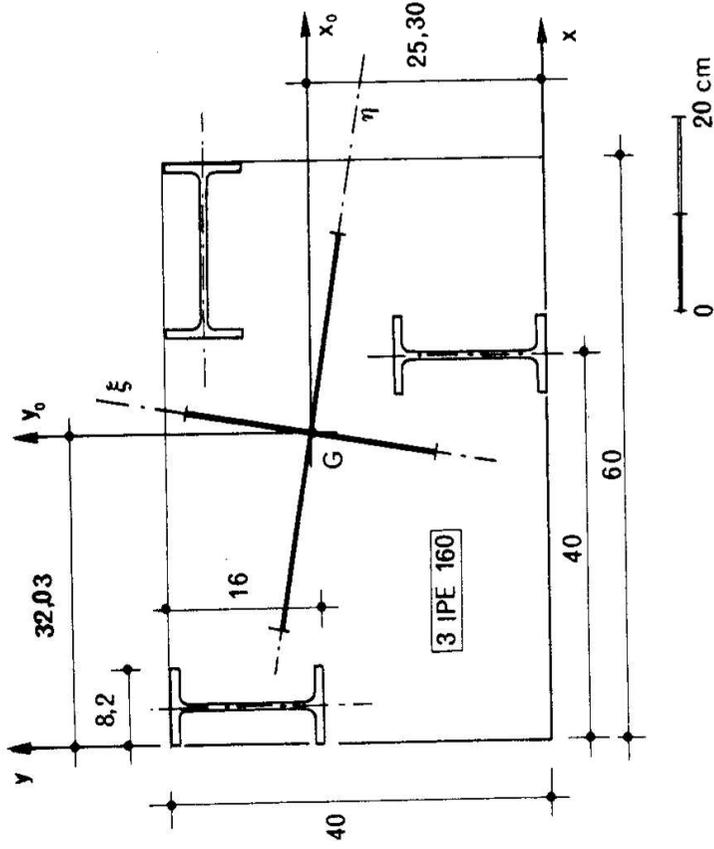


Figura 14

Utilizzando i suddetti elementi, si può scrivere

$$A = 20,1 \cdot 3 = 60,3 \text{ cm}^2$$

$$S_x = 20,1 (8 + 32 + 35,9) = 1525,59 \text{ cm}^3$$

$$S_y = - 20,1 (4,1 + 40 + 52) = - 1931,61 \text{ cm}^3$$

$$d_{Gx} = \frac{1525,59}{60,3} = 25,3 \text{ cm}$$

$$d_{Gy} = - \frac{1931,61}{60,3} = - 32,033 \text{ cm}$$

$$I_x = 869 + 20,1 \cdot 8^2 + 869 + 20,1 \cdot 32^2 + \\ + 68,3 + 20,1 \cdot 35,9^2 = 49,580 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 68,3 + 20,1 \cdot 4,1^2 + 68,3 + 20,1 \cdot 40^2 + \\ + 869 + 20,1 \cdot 52^2 = 87,854 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = - 20,1 (40 \cdot 8 + 32 \cdot 4,1 + 35,9 \cdot 52) = \\ = - 46,592 \text{ cm}^4$$

$$I_{x_0} = 49,580 - 60,3 \cdot 25,3^2 = 10,983 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_0} = 87,854 - 60,3 \cdot 32,033^2 = 25,979 \text{ cm}^4$$

$$I_{x_0 y_0} = - 46,592 + 60,3 \cdot 25,3 \cdot 32,033 = 2,277 \text{ cm}^4$$

$$I_{\xi} \quad \quad \quad I_{\eta}$$

$$= \frac{10,983 + 25,979}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10,983 - 25,979}{2}\right)^2 + 2,277^2} =$$

$$= 18,481 \pm 7,836 = \begin{cases} 26,317 \text{ cm}^4 \\ 10,645 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} 2 (x_0 p) = \frac{2 \cdot 2.277}{-14.996} = -0,3036$$

$$2 (x_0 p) = -16,89^\circ \pm 180^\circ$$

$$(x_0 p) = -8,44^\circ \pm 90^\circ$$

$$\rho_\xi = \sqrt{\frac{26,317}{60,3}} = 20,89 \text{ cm}$$

$$\rho_\eta = \sqrt{\frac{10,645}{60,3}} = 13,29 \text{ cm}$$

Problema n. 15.

La sezione della Fig. 15 è composta di tre profilati uguali HE 140B; il problema è quello di fissare l'altezza d_{Ax} in modo che l'ellisse d'inerzia

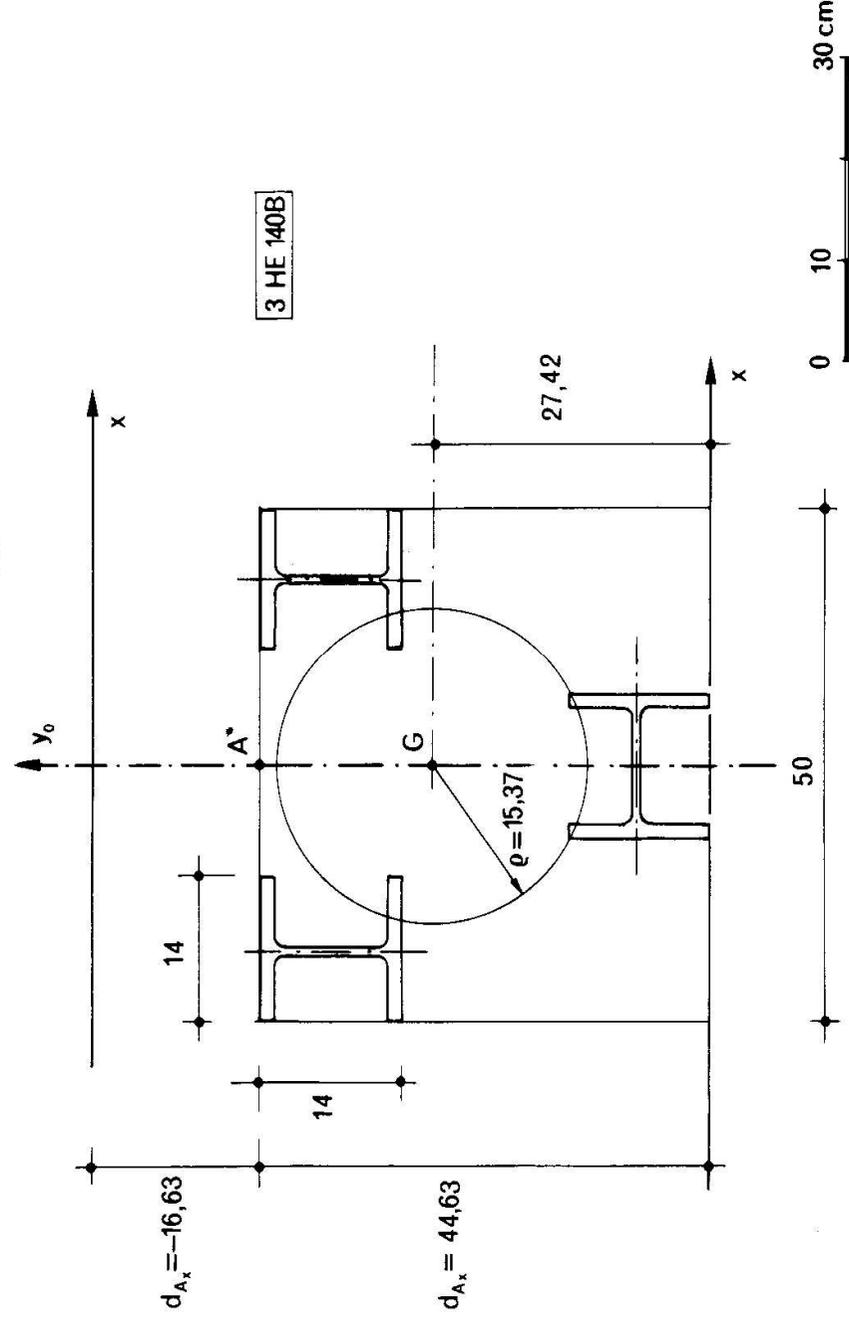


Figura 15

sia un cerchio. Ogni profilato, chiamando x ed y gli assi baricentrici di max I e min I, presenta le seguenti caratteristiche (UNI 5397-64)

$$A^* = 43 \text{ cm}^2$$

$$I_x^* = 1509 \text{ cm}^4$$

$$I_y^* = 550 \text{ cm}^4$$

$$\rho_x^* = 5,93 \text{ cm}$$

$$\rho_y^* = 3,58 \text{ cm}$$

Si ha così

$$A = 43 \cdot 3 = 129$$

$$I_{y_0} = 1.509 + 2 (550 + 43 \cdot 18^2) = 30.473$$

$$\begin{aligned} I_x &= 550 + 43 \cdot 7^2 + 2 [1.509 + 43 (d_{Ax} - 7)^2] = \\ &= 5.675 + 86 (d_{Ax} - 7)^2 \end{aligned}$$

$$S_x = 43 \cdot 7 + 2 \cdot 43 (d_{Ax} - 7)$$

$$d_{Gx} = \frac{S_x}{A} = \frac{43}{129} [7 + 2 (d_{Ax} - 7)] = \frac{2 d_{Ax} - 7}{3}$$

$$I_{x_0} = 5.675 + 86 (d_{Ax} - 7)^2 - 129 \left(\frac{2 d_{Ax} - 7}{3} \right)^2.$$

Dalla relazione

$$I_{x_0} = I_{y_0}$$

si trae l'equazione in d_{Ax}

$$d_{Ax}^2 - 28 d_{Ax} - 742,54 = 0$$

da cui

$$d_{Ax} = 14 \pm 30,6356 = \begin{array}{l} 44,6356 \text{ cm} \\ - 16,6356 \text{ cm} \end{array}$$

Poichè risulta

$$16,6356 + 28 = 44,6356 .$$

la soluzione negativa corrisponde al caso in cui i due profilati con l'asse dell'anima parallelo ad y sono situati al disotto dell'asse x .
Preso

$$d_{Ax} = 44,63 \text{ cm}$$

risulta

$$d_{Gx} = 27,42 \text{ cm} .$$

E' poi

$$\rho = \sqrt{\frac{30,473}{129}} = 15,3696 \text{ cm}.$$