

CAPITOLO IX

LA CRISI PER TORSIONE PURA

1. La ricerca del momento torcente limite.

Si intende per torsione pura la sollecitazione semplice di torsione, e cioè quella di una trave ad essa rettilineo e sezione costante (più precisamente di un solido dei De Saint Venant), soggetta alle estremità a due coppie $\mathfrak{M}_z$ e $-\mathfrak{M}_z$ il cui vettore è diretto secondo l'asse z della trave stessa.

Una soluzione equilibrata è notoriamente quella, e solo quella, di un campo τ definito su tutta la sezione retta, che rispetti ovunque la condizione

$$\operatorname{div} \tau = \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

e che su un punto qualsiasi della frontiera fornisca una τ diretta secondo la tangente alla frontiera stessa.

E' anche noto che le due suddette condizioni di equilibrio si traducono nel porre

$$\tau_x = \frac{\partial F}{\partial y} \quad (2)$$

$$\tau_y = - \frac{\partial F}{\partial x},$$

ove F è una qualsiasi funzione $F(xy)$ definita sul dominio della sezione retta, e tale da assumere un valore costante k_i su ciascuna curva chiusa c_i di frontiera. Se la frontiera è unica (sezione monoconnessa) si usa porre su essa $F = 0$. La F si chiama, per una sua proprietà caratteristica, *funzione di flusso*; le curve di livello (e cioè le curve $F =$

$= \text{cost}$) sono le linee di corrente del campo τ . In ogni punto poi il valore di τ è dato dalla *pendenza* della F , e cioè

$$\tau = - \frac{\partial F}{\partial n} . \quad (3)$$

La $\frac{\partial F}{\partial n}$ della (3) è la derivata direzionale della F secondo la normale

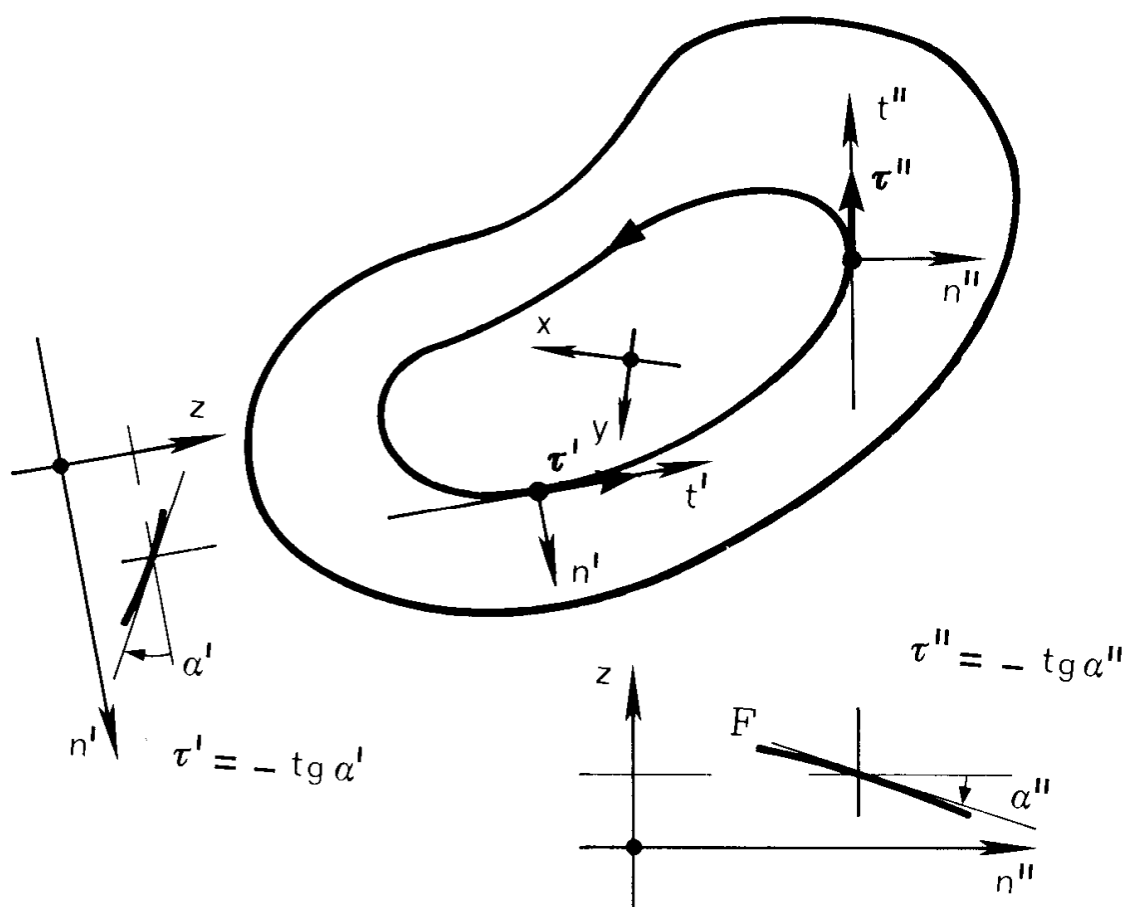


Fig. 1

n alla linea di corrente nel punto considerato (fig. 1), e cioè l'inclinazione della curva intersezione del diagramma $F(xy)$ con il piano ortogonale alla sezione e passante per n .

Perché la (3) definisca anche il verso di τ , e cioè appunto il valore di essa, occorre precisare che sulla faccia di normale concorde a z la

coppia (nt) è antioraria; quindi se un viandante percorre una linea di corrente in modo tale che la F decresca dalla sua sinistra alla sua destra, cammina nello stesso verso della τ .

E' facile osservare che la (3) fornisce il massimo valore delle inclinazioni nel punto secondo le sezioni con piani paralleli all'asse z ; tale valore è appunto la pendenza della superficie.

Nella teoria elastica classica l'altra condizione, di congruenza, impone alla F la relazione $\Delta_z F = -2G\vartheta'$, e quindi la definisce. Nella teoria della piena plasticizzazione si ha invece ovunque

$$\tau = \tau_0 \quad (4)$$

ove secondo *Hencky*, per esempio, $\tau_0 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$. La (4) vale anch'essa,

nei domini monoconnessi, a definire la F , il cui diagramma deve essere una superficie a pendenza costante e pari a $-\tau_0$. Tale superficie deve appoggiarsi al contorno. Se esistono invece contorni interni (dominio pluriconnesso) il diagramma della F deve attingere lo stesso valore lungo ciascuno di tali contorni, e ciò spesso non è ottenibile. Il problema coincide con quello del disegno di un tetto, a falde aventi un'unica pendenza assegnata. Una analogia dovuta al *Nadai*, e detta "del cono di sabbia", sfrutta il fatto che la pendenza di un cumulo di materiale privo di coesione, come la sabbia, è costante, e pari all'angolo φ di attrito interno; versando quindi, a rifiuto, della sabbia su una lamina piana, affine in forma alla sezione della trave, e mantenuta sospesa in modo che la sabbia possa precipitare dal bordo, si forma un cumulo che ha la stessa geometria del diagramma della F .

Ciò naturalmente per sezioni monoconnesse.

La misura del volume della parte compresa tra il piano xy della sezione e il diagramma della F fornisce il momento^(*):

$$M_t = 2V. \quad (5)$$

Ciò è ben noto dalla teoria elastica classica, e si dimostra considerando che il momento relativo ad un canale di flusso elementare (fig. 2)

(*) Poiché la pendenza è una tensione, le ordinate F hanno dimensione $F l^{-1}$, come del resto si evince anche dalla (3).

è fornito, per la relazione di *Bredt*, da

$$dM_t = 2A\tau\delta, \quad (6)$$

dove A è l'area compresa nella linea media, ed il prodotto $\tau\delta$ è, per la (3), pari alla distanza dF tra i due piani $F = \text{cost}$ relativi alle due linee di corrente che limitano il canale.

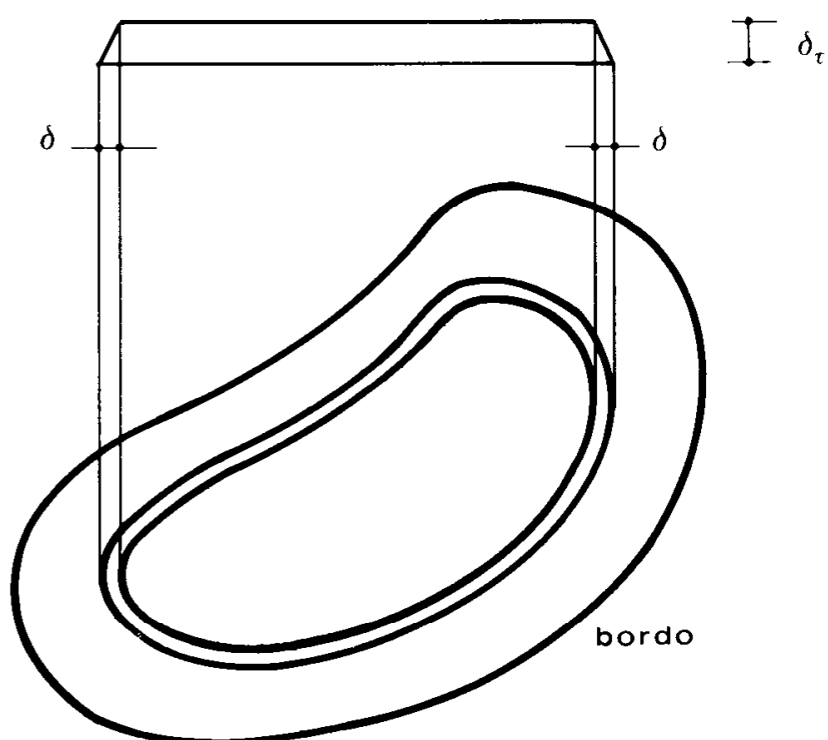


Fig. 2

La (6) si presta al calcolo di M_t una volta tracciate, partendo dal bordo, le successive linee di corrente. Il disegno di tali linee è immediato, poiché, in relazione al generico canale di flusso elementare, dalla relazione

$$\tau\delta = \text{cost}, \quad (7)$$

e dalla (4), si trae $\delta = \text{cost}$, e quindi le linee di corrente sono equidistanti (fig. 3).

Se la sezione è un poligono convesso (fig. 4) il diagramma della F è costituito dai piani che si appoggiano con pendenza τ_0 alle rette di bordo; in ogni punto P della sezione occorre scegliere, tra i valori

definiti dai suddetti piani sulla retta per P parallela all'asse z , il più piccolo, Ne vien fuori un tetto, le cui rette di displuvio si proiettano verticalmente sul piano xy nelle bisettrici degli angoli formati

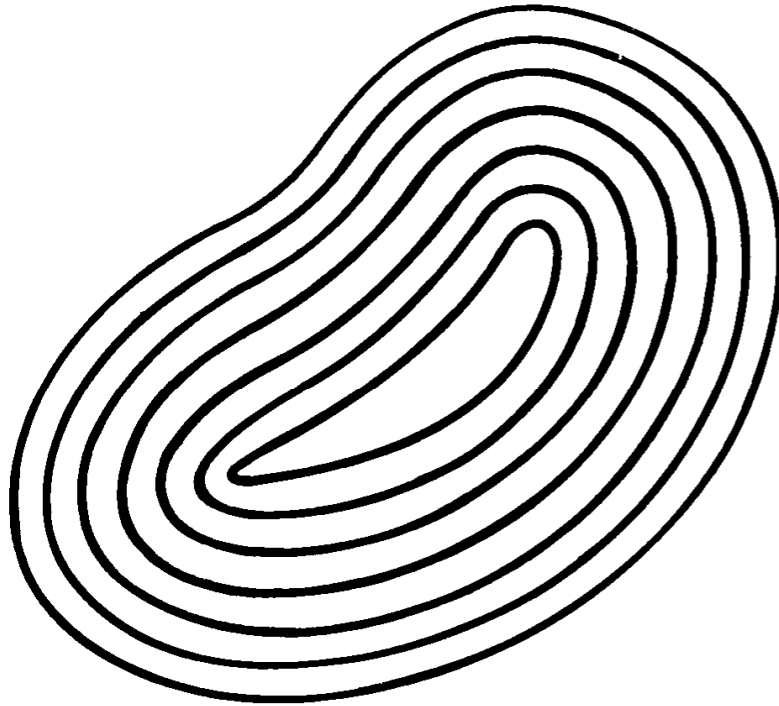


Fig. 3

dai lati del perimetro di base. Le proiezioni dei segmenti di displuvio costituiscono della maglie facilmente individuabili; partendo da un

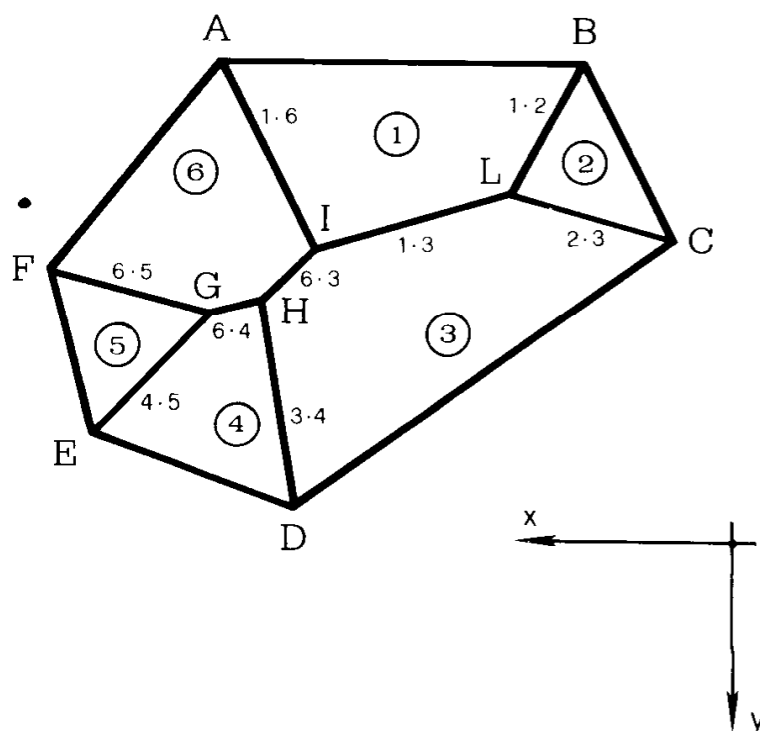


Fig. 4

vertice A del poligono di base, il segmento 1-6 di dispolvio tra il piano 1 ed il piano 6 si proietta sulla bisettrice dell'angolo $AF \cdot AB$, ed il suo estremo I è il punto più vicino ad A ove tale bisettrice incontra altre due bisettrici, nel caso in esame quelle dell'angolo $AB \cdot DC$ e dell'angolo $AF \cdot DC^{(*)}$.

(*) Siano (fig. 5) b_1 , b_2 e b_3 le bisettrici in B , C e T , ed L il punto comune a b_1 e b_2 ; sia poi HK la retta per L tale che $TH = TK$.

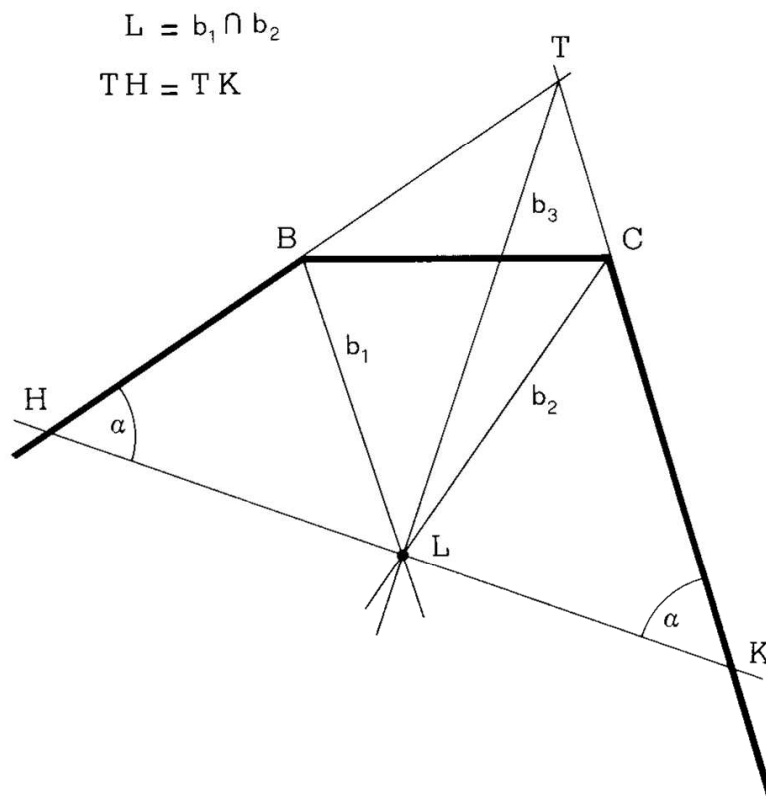


Fig. 5

Per il teorema di Carnot è

$$|TL|^2 = |TH|^2 + |HL|^2 - 2|TH||HL|\cos\alpha$$

$$|TL|^2 = |TK|^2 + |KL|^2 - 2|TK||KL|\cos\alpha.$$

Per l'uguaglianza di $|TH|$ e $|TK|$ è perciò

$$\begin{aligned} |HL|(|HL| - 2|TH|\cos\alpha) &= \\ &= |KL|(|KL| - 2|TH|\cos\alpha), \end{aligned}$$

Si osservi infatti che la retta $6 \cap 1$ è tagliata in un punto P_m dal piano m , e che quindi P_m è il punto comune ai tre piani 6 , 1 ed m ; la proiezione di P_m sul piano xy è punto comune delle tre proiezioni di $1-6$, $1-m$ e $6-m$. Sulla proiezione della $1-6$ si trovano perciò le intersezioni delle proiezioni di

$$(2-6) - (2-1)$$

$$(3-6) - (3-1)$$

$$(4-6) - (4-1)$$

$$(5-6) - (5-1).$$

La più vicina ad A di tali intersezioni è il punto I ; nel caso della fig. 4 tale punto è l'intersezione $(3-6) - (3-1)$

Sulla $6-3$ si trovano le altre intersezioni

$$(2-6) - (2-3)$$

$$(4-6) - (4-3)$$

$$(5-6) - (5-3);$$

la più vicina ad I è la $(4-6) - (4-3)$, indicata con H ; quindi il segmento di dislivello $6-3$ termina in H .

e cioè

$$\frac{|HL|}{|KL|} = \frac{|KL| - C}{|HL| - C},$$

che ammette soluzione $|HL| = |KL|$. La soluzione è unica, perché ovviamente L o biseca o non biseca il segmento HK .

La retta TL , essendo mediana in T del triangolo isoscele HTK , è anche bisettrice in T .

Sulla 4-6 si trovano le altre intersezioni

$$(1-4) - (1-6)$$

$$(2-4) - (2-6)$$

$$(5-4) - (5-6)$$

la più vicina è la $(5-4) - (5-6)$, indicata con G.

Se la sezione poligonale presenta un punto V di concavità (fig. 6), il

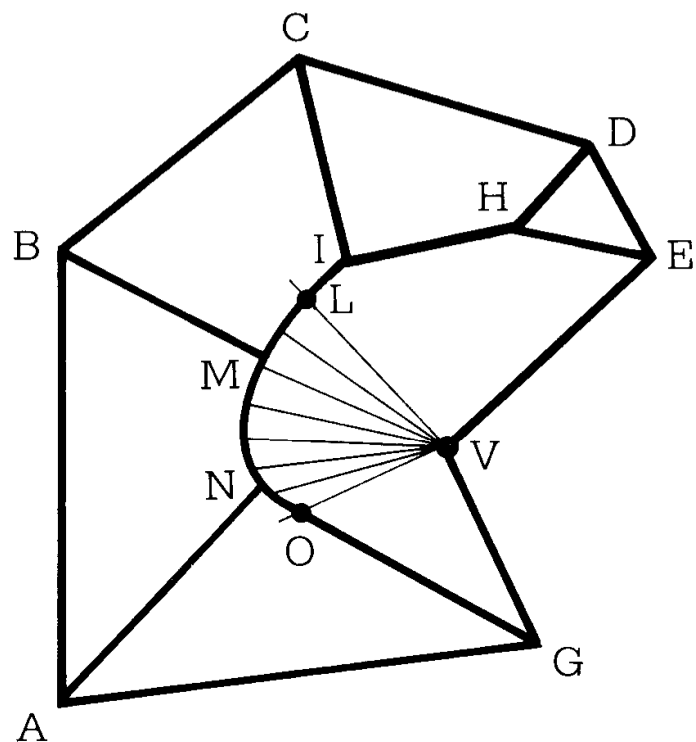


Fig. 6

punto V è vertice di un cono, con asse parallelo a z, di ampiezza $90^\circ - \varphi$; questo cono definisce il diagramma della F limitatamente all'angolo LVO, dove VL è perpendicolare al lato VE, e VO è perpendicolare al lato VG.

Nella sezione a forma di cerchio (fig. 7) il volume V è fornito da

$$V = \frac{\pi R^2 \cdot R \tau_0}{3} = \frac{\pi \tau_0 R^3}{3},$$

e quindi

$$M_{to} = \frac{2}{3} \pi \tau_0 R^3 . \quad (8)$$

Allo stesso risultato si perviene attraverso la (6); le linee di corrente

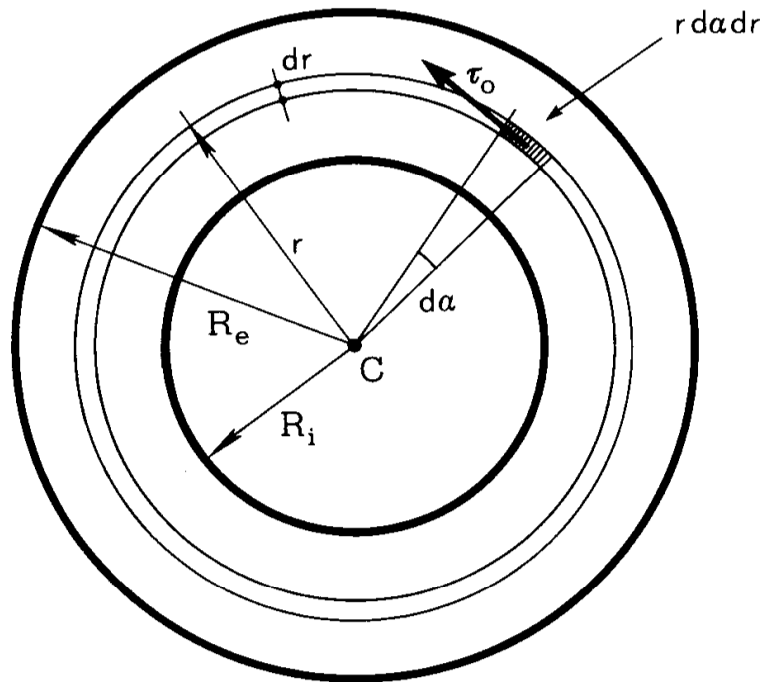


Fig. 7

sono cerchi concentrici del contorno, e si ha

$$dM_t = 2 \tau_0 \pi r^2 dr ,$$

e quindi

$$M_{to} = 2 \pi \tau_0 \int_0^R r^2 dr = \frac{2}{3} \pi \tau_0 R^3 .$$

Il rapporto tra M_{to} ed il momento M_{te} di prima plasticizzazione è

$$\frac{M_{to}}{M_{te}} = \frac{\frac{2}{3} \pi \tau_0 R^3}{\frac{1}{2} \pi \tau_0 R^3} = \frac{4}{3} = 1,33 .$$

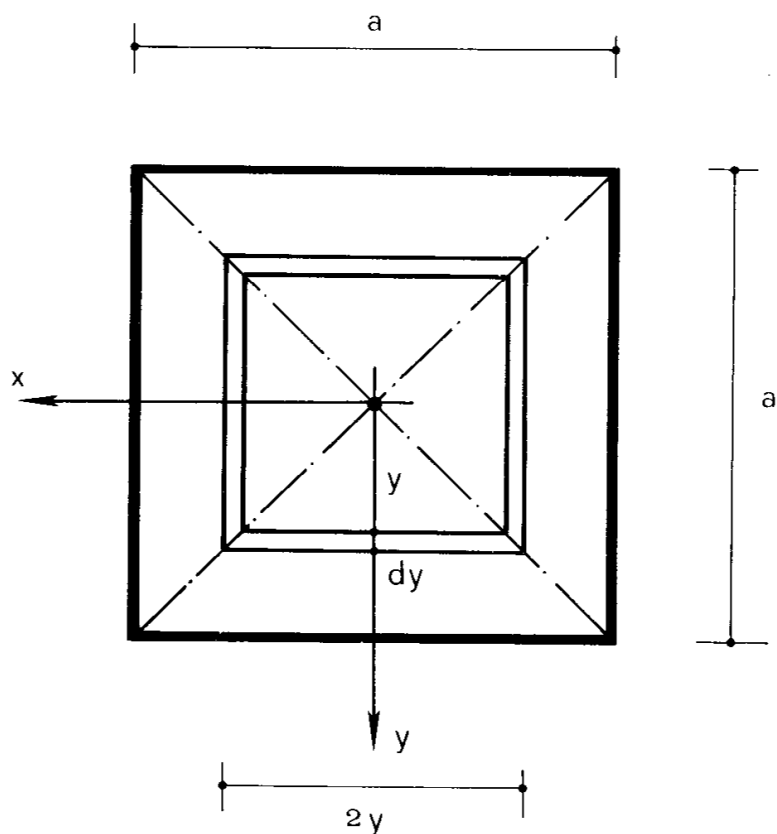


Fig. 8

Nella sezione a forma quadrata di lato a (fig. 8) è

$$M_{to} = \int_0^{\frac{a}{2}} 8 \tau_0 y^2 dy = \frac{1}{3} \tau_0 a^3 ; \quad (9)$$

è così

$$\frac{M_{to}}{M_{te}} = \frac{0,333 \tau_0 a^3}{0,208 \tau_0 a^3} = 1,60 .$$

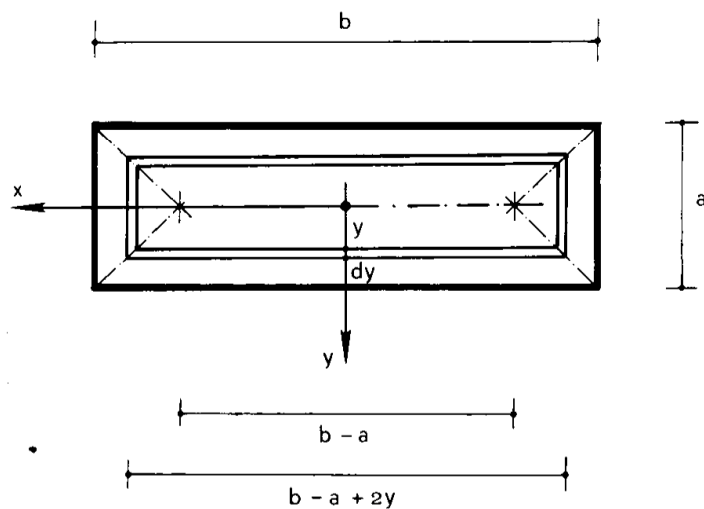


Fig. 9

Nella sezione a forma di rettangolo $a \times b$ (fig. 9) è, per $b > a$,

$$\begin{aligned}
 M_{to} &= \int_0^{\frac{a}{2}} \tau_0 [(b - a + 2y) 2y + 2y (b - a + 2y)] dy = \\
 &= \frac{1}{6} \tau_0 a^2 (3b - a) ;
 \end{aligned} \tag{10}$$

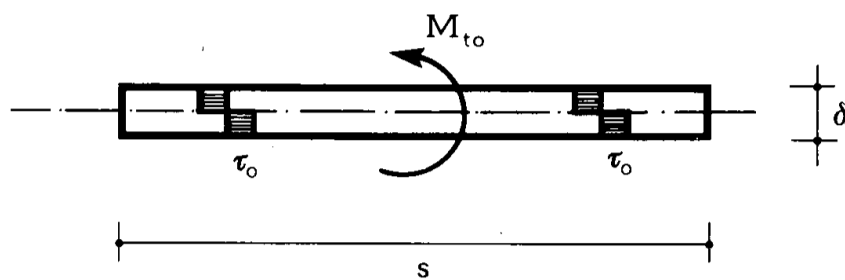


Fig. 10

se il rettangolo è molto allungato ($s \gg \delta$) può porsi (fig. 10)

$$M_{to} = \frac{1}{2} \tau_0 \delta^2 s \tag{11}$$

e risulta

$$\frac{M_{to}}{M_{te}} = \frac{\frac{1}{2} \tau_0 \delta^2 s}{\frac{1}{3} \tau_0 \delta^2 s} = 1,50 .$$

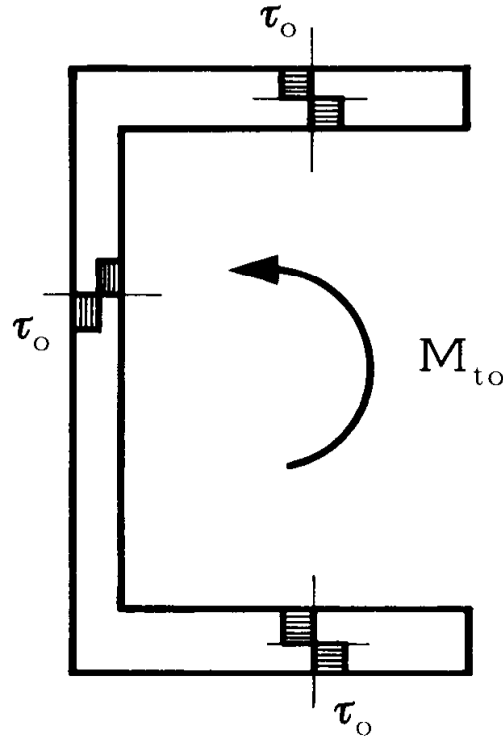


Fig. 11

In un insieme di rettangoli (profilati), ed in genere in una sezione sottile, è (fig. 11)

$$M_{to} = \frac{1}{2} \tau_0 \sum \delta_i^2 s_i , \quad (12)$$

e quindi

$$\frac{M_{to}}{M_{te}} = \frac{\frac{\tau_0}{2} \sum \delta_i^2 s_i}{\frac{\tau_0}{3 \delta_{\max}} \sum \delta_i^3 s_i} = \frac{3}{2} \frac{\sum \delta_i^2 s_i}{\sum \delta_i^3 s_i} \delta_{\max} .$$

2. Le sezioni sottili pluriconnesse.

Se m è il numero delle maglie, n il numero dei nodi, e t il numero dei tratti, è

$$m + n = t + 1. \quad (13)$$

In ogni tratto il prodotto $\tau \delta$ (flusso di τ) deve essere, per la (1), costante; quindi la condizione $\delta = \text{cost}$ nel tratto generico è necessaria — non certo però sufficiente — per la completa plasticizzazione del tratto. Nel caso che δ sia variabile, e $\delta_{\min}$ è il suo minimo, $\tau_0 \delta_{\min}$ è il massimo valore possibile del flusso nel tratto. Si è quindi in presenza di t coppie di disequazioni

$$-\tau_0 \delta_{\min} \leq (\tau \delta)_i \leq \tau_0 \delta_{\min}, \quad (14)$$

che rappresentano le condizioni di compatibilità.

Le equazioni da soddisfare sono le condizioni di equilibrio di nodo, che per ogni nodo si scrivono

$$\sum_h (\tau \delta)_h = 0, \quad (15)$$

dove la sommatoria è estesa a tutti gli h tratti concorrenti nel nodo. Delle n equazioni (15), solo $n - 1$ sono indipendenti. E' da fissare preventivamente il verso di percorrenza in ciascun tratto; nella (15) ogni addendo va scritto con il segno $+$ o $-$ secondo che la τ positiva del tratto è uscente o entrante in relazione al nodo.

Inoltre deve essere soddisfatta l'equazione di equilibrio globale

$$2 \sum_i (\tau \delta)_i A_{si} = M_t, \quad (16)$$

dove A_{si} è l'area settoriale del generico tratto, e la sommatoria è estesa a tutti i tratti. Nella (16) ogni addendo va scritto con il segno $+$ o $-$ secondo che muovendosi nel verso positivo del tratto il raggio vettore che congiunge il punto mobile con il polo ruota in senso antiorario o orario.

E' evidente che le (15) non possono essere in genere soddisfatte se si pone in ogni tratto $\tau = \pm \tau_0$; ciò significa che la condizione

di piena plasticizzazione non può essere raggiunta in tutti i tratti^(*). Ci si rende conto anche di trovarci di fronte ad un classico caso di programmazione lineare: t le variabili $(\tau \delta)$, $n - 1 < t$ le uguaglianze lineari (15), t le disuguaglianze lineari (14), ed M_t (16) funzione obiettivo, lineare, da rendere massima.

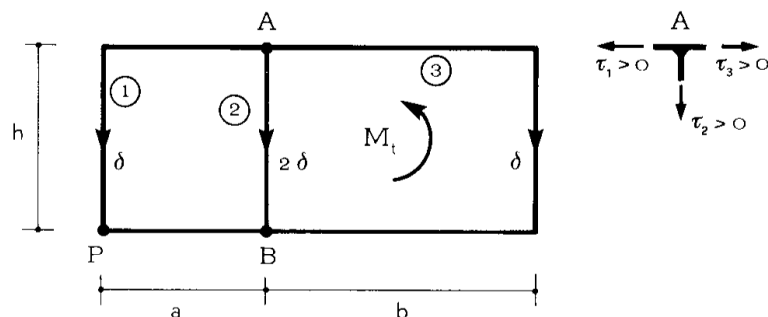


Fig. 12

Si studi il modesto esempio della fig. 12, relativo ad una sezione tri-connessa; i nodi sono due, A e B; ognuno dei tre tratti è di spessore costante pari a δ , 2δ , δ . Si fissa innanzitutto il verso di percorrenza dei tre tratti; dopodiché l'unica equazione cui si riducono nel caso in esame le (15) si scrive

$$\tau_1 \delta_1 + 2\tau_2 \delta_2 + \tau_3 \delta_3 = 0$$

e cioè

$$\tau_1 + 2\tau_2 + \tau_3 = 0. \quad (17)$$

(*) Quanto detto è conseguenza dell'ammettere che τ sia costante lungo ogni spessore δ . In realtà la (7), in corrispondenza del generico spessore, si scrive

$$\int_{\delta} \tau(\delta) \cdot d\delta = \text{cost},$$

e quindi la condizione di piena plasticizzazione si può raggiungere ipotizzando un diagramma birettangolo di τ ($\tau = \pm \tau_0$) lungo lo spessore. L'incremento di M_t è però molto piccolo.

Le disequazioni (14) si scrivono come segue

$$\begin{aligned} -\tau_0 &\leq \tau_1 \leq \tau_0 \\ -\tau_0 &\leq \tau_2 \leq \tau_0 \\ -\tau_0 &\leq \tau_3 \leq \tau_0 . \end{aligned} \quad (18)$$

Dalla (17) si trae

$$\tau_3 = -\tau_1 - 2\tau_2 ,$$

e quindi le variabili si riducono a due, τ_1 e τ_2 ; tutto può essere

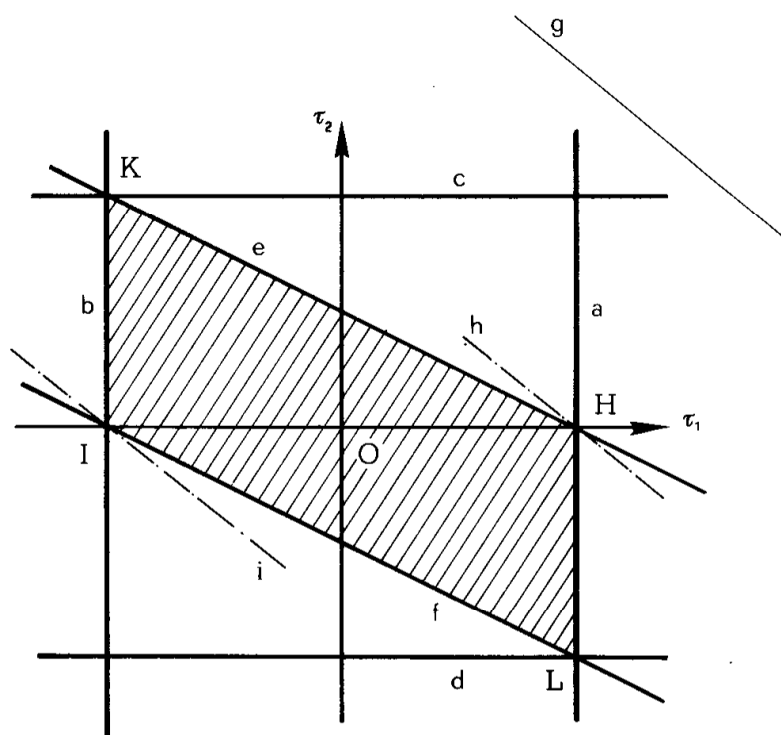


Fig. 13

rappresentato (fig. 13) nel piano $\tau_1 \tau_2$. Le disequazioni (18) si scrivono

$$\begin{aligned}
-\tau_0 &\leq \tau_1 && \leq \tau_0 \\
-\tau_0 &\leq \tau_2 && \leq \tau_0 \\
-\tau_0 &\leq -\tau_1 - 2\tau_2 && \leq \tau_0 .
\end{aligned}
\tag{19}$$

La coppia di disequazioni contenuta nella prima delle (19) è rappresentata dalla fascia compresa tra le due rette parallele

$$\text{a) } \tau_1 = \tau_0$$

$$\text{b) } \tau_1 = -\tau_0 .$$

La coppia di disequazioni contenuta nella seconda delle (19) è rappresentata dalla fascia compresa tra le due rette parallele

$$\text{c) } \tau_2 = \tau_0$$

$$\text{d) } \tau_2 = -\tau_0 .$$

La coppia di disequazioni contenuta nella terza delle (19) è rappresentata dalla fascia compresa tra le due rette parallele

$$\text{e) } -\tau_1 - 2\tau_2 = \tau_0$$

$$\text{f) } -\tau_1 - 2\tau_2 = -\tau_0 .$$

Le (19) quindi delimitano il poligono H K I L, tratteggiato nella fig. 13^(*). Assumendo come polo il vertice P, si ha (fig. 12)

(*) Si osservi che le equazioni di nodo sono $n - 1$, e quindi le t incognite τ si riducono a

$$t - (n - 1) = m ,$$

pari al numero delle maglie.

$$2 A_{s1} = ah$$

$$2 A_{s2} = -ah$$

$$2 A_{s3} = -(a + 2b)h ,$$

e quindi la (16) si scrive

$$ah\delta\tau_1 - 2ah\delta\tau_2 - (a + 2b)h\delta\tau_3 = M_t$$

da cui, per la (17).

$$2h\delta(a + b)\tau_1 + 4h\delta b\tau_2 = M_t . \quad (20)$$

Il primo membro della (20) è la funzione obiettivo; essendo lineare in τ_1 e τ_2 , il suo diagramma su $\tau_1 \tau_2$ è un piano; quindi i suoi valori estremi sono da ricercare nei vertici del poligono H K I L (fig. 13). Si ha così

$$H \rightarrow \begin{cases} \tau_1 = \tau_0 \\ \tau_2 = \tau_0 \end{cases} \quad M_t = 2h\delta(a + b)\tau_0$$

$$K \rightarrow \begin{cases} \tau_1 = -\tau_0 \\ \tau_2 = \tau_0 \end{cases} \quad M_t = 2h\delta(b - a)\tau_0$$

$$I \rightarrow \begin{cases} \tau_1 = -\tau_0 \\ \tau_2 = 0 \end{cases} \quad M_t = -2h\delta(a + b)\tau_0$$

$$L \rightarrow \begin{cases} \tau_1 = \tau_0 \\ \tau_2 = -\tau_0 \end{cases} \quad M_t = -2h\delta(b - a)\tau_0 .$$

In H si verifica $M_t = M_{t_{\max}}$, con $\tau_2 = 0$; in I invece si verifica $M_t = M_{t_{\min}}$, sempre con $\tau_2 = 0$. Nelle condizioni estreme cioè il tratto centrale è scarico.

Il punto H, e così il punto I, possono essere ricercati anche attraverso le seguenti considerazioni. Per M_t variabile la (20) rappresenta una retta g del piano $\tau_1 \tau_2$, che descrive un fascio di rette parallele; una retta

$$Ax + By = C$$

presenta una distanza d dall'origine il cui modulo è

$$|d_{og}| = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Per $A > 0$, $B > 0$, la retta taglia o ambedue i semiassi positivi di rife-

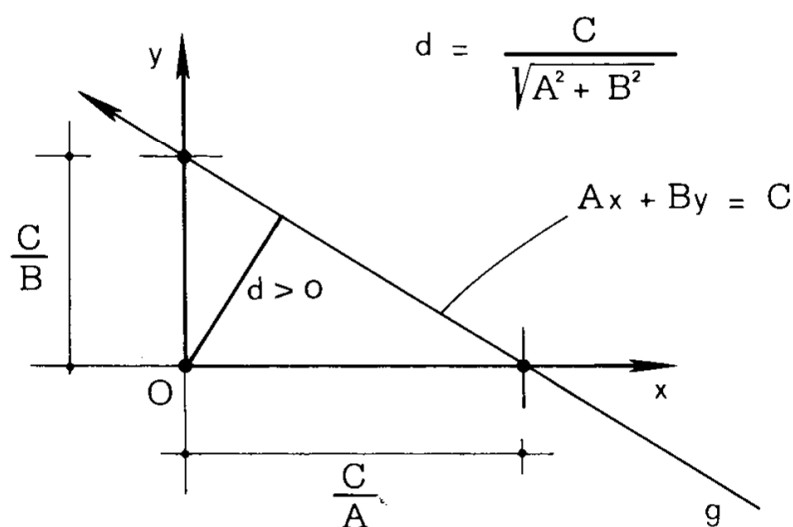


Fig. 14

rimento, o ambedue i negativi; orientandola (fig. 14) in modo che $\cos \hat{g\vec{x}} < 0$, è

$$d_{og} = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Il massimo di M_t , e cioè di C , corrisponde quindi alla massima d , e cioè (fig. 13) al punto H; il minimo di M_t alla minima d , e cioè al punto I.

In definitiva è

$$M_{to} = 2h\delta(a+b)\tau_0. \quad (21)$$

La soluzione del problema in fase elastica importa come quarta incognita del problema l'angolo ϑ' (rotazione specifica), e le due equazioni di maglia

$$\tau_1(2a+h) - \tau_2 h = 2G\vartheta' ah \quad (22)$$

$$\tau_2 h - \tau_3(2b+h) = 2G\vartheta' bh,$$

che si aggiungono alle (17) e (20). Le (22) sono le equazioni di congruenza, ottenute attraverso il teorema di Stokes.

Per la (17), le (22) si esprimono in funzione delle sole τ_1 e τ_2 ; si ottengono così le tre equazioni

$$(2a+h)\tau_1 - h\tau_2 - 2Gah\vartheta' = 0$$

$$(2b+h)\tau_1 + (4b+3h)\tau_2 - 2Gbh\vartheta' = 0 \quad (23)$$

$$2h\delta(a+b)\tau_1 + 4h\delta b\tau_2 = M_t.$$

Per $h = a$, $b = 2a$, le (23) forniscono

$$\tau_1 = \frac{13}{86} \frac{M_t}{\delta a^2}$$

$$\tau_2 = \frac{1}{86} \frac{M_t}{\delta a^2}$$

$$\tau_3 = - \frac{15}{86} \frac{M_t}{\delta a^2}$$

$$\vartheta' = \frac{19}{86} \frac{M_t}{G \delta a^3}$$

Il momento M_{te} al limite elastico si ottiene perciò ponendo $\tau_3 = \tau_0$:

$$M_{te} = 5,73 a^2 \delta \tau_0.$$

La (21) porge

$$\frac{M_{to}}{M_{te}} = 1,047.$$

Si ha perciò

$$\frac{M_{to}}{M_{te}} = 1,03$$

Si trae da questo rapporto che le sezioni pluriconnesse sono ben sfruttate in campo elastico; ciò è particolarmente evidente nelle sezioni biconnesse, ove $\frac{M_{to}}{M_{te}} = 1$ se lo spessore è costante.

3. Le sezioni sottili aperte con ingobbimento impedito.

Nel capitolo dedicato alla “torsione non uniforme” le trattazioni della torsione in campo elastico mostrano come una sezione sottile aperta cui, per disposizioni di vincolo o per simmetria di struttura, sia impedito l’ingobbimento, possa sopportare un momento torcente ben più elevato di quello ottenibile alla De Saint Venant, e presenti anche una rigidità molto maggiore. Ciò è dovuto al contributo flessionale dei fogli di cui è costituita la sezione; se per esempio la sezione della fig. 15 è l’estremo vincolato di una mensola di lunghezza ℓ , ed il vincolo è tale da impedire i w , si è in presenza di quattro mensole a sezione rettangolare sottile. Come è noto dalla teoria elastica, con op-

portuni diaframmi è imposta la conservazione della proiezione della sezione retta generica sul piano $x y$; la sezione di base, per quanto è già detto, è, in più, inalterabile anche nel suo piano ($w = 0$). La cop-

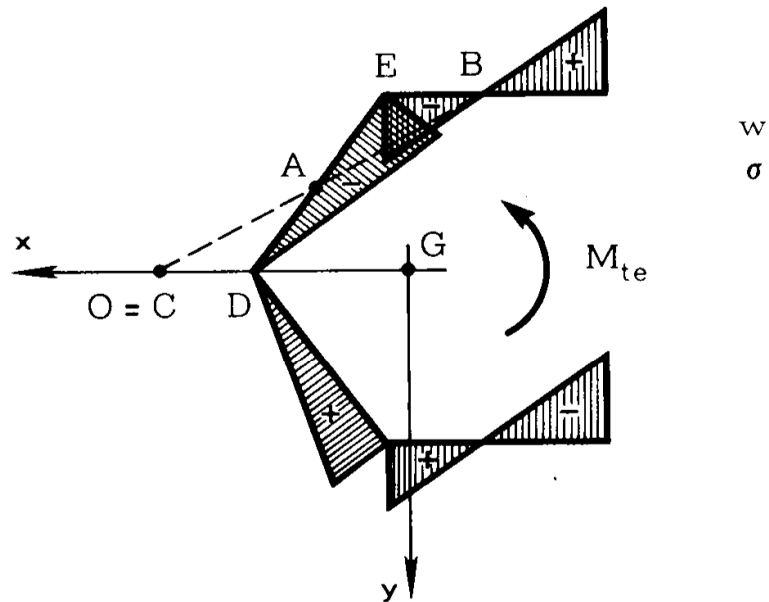


Fig. 15

pia torcente $\mathcal{M}_t$ sulla estremità libera si risolve in tagli T_i secondo gli assi dei tratti, con forza risultante nulla e coppia risultante $\mathcal{M}_t$, ed in sforzi normali N_i , paralleli a z ed applicati in punti dei suddetti assi, con forza e coppia risultanti nulle. I tagli T_i e le forze N_i si riflettono, sulla estremità vincolata, in tensioni tangenziali τ e tensioni normali σ , ottenibili considerando ogni foglio come una mensola soggetta a T_i ed N_i all'estremo libero.

La trattazione elastica fa edotti che le σ sono proporzionali, secondo un coefficiente variabile con l'ascissa z , alle w della sezione studiata, alla De Saint Venant, in relazione ad un centro O di rotazione coincidente con il centro di taglio C ; e cioè alle aree settoriali (cambiate di segno) calcolate con tale polo, e sotto la condizione che la media sia nulla. Nella fig. 15 è riportato appunto il diagramma di tali σ in corrispondenza dell'estremità vincolata; il punto B dove le σ invertono il segno si ha congiungendo O con il punto medio A del tratto DE ; infatti così l'area del triangolo CDA è pari a quella del triangolo AEB , e l'area settoriale in B è nulla. Se si prescinde dall'effetto delle τ , il valore della coppia $\mathcal{M}_t$ al limite elastico si ottiene ponendo la massima σ pari a σ_0 , calcolando i momenti M_i sull'estremo vincola-

to dovuti alle σ dei singoli fogli, i tagli $T_i = \frac{M_i}{\ell}$ sull'estremo libero, ed il momento M_{te} dovuto a tali tagli.

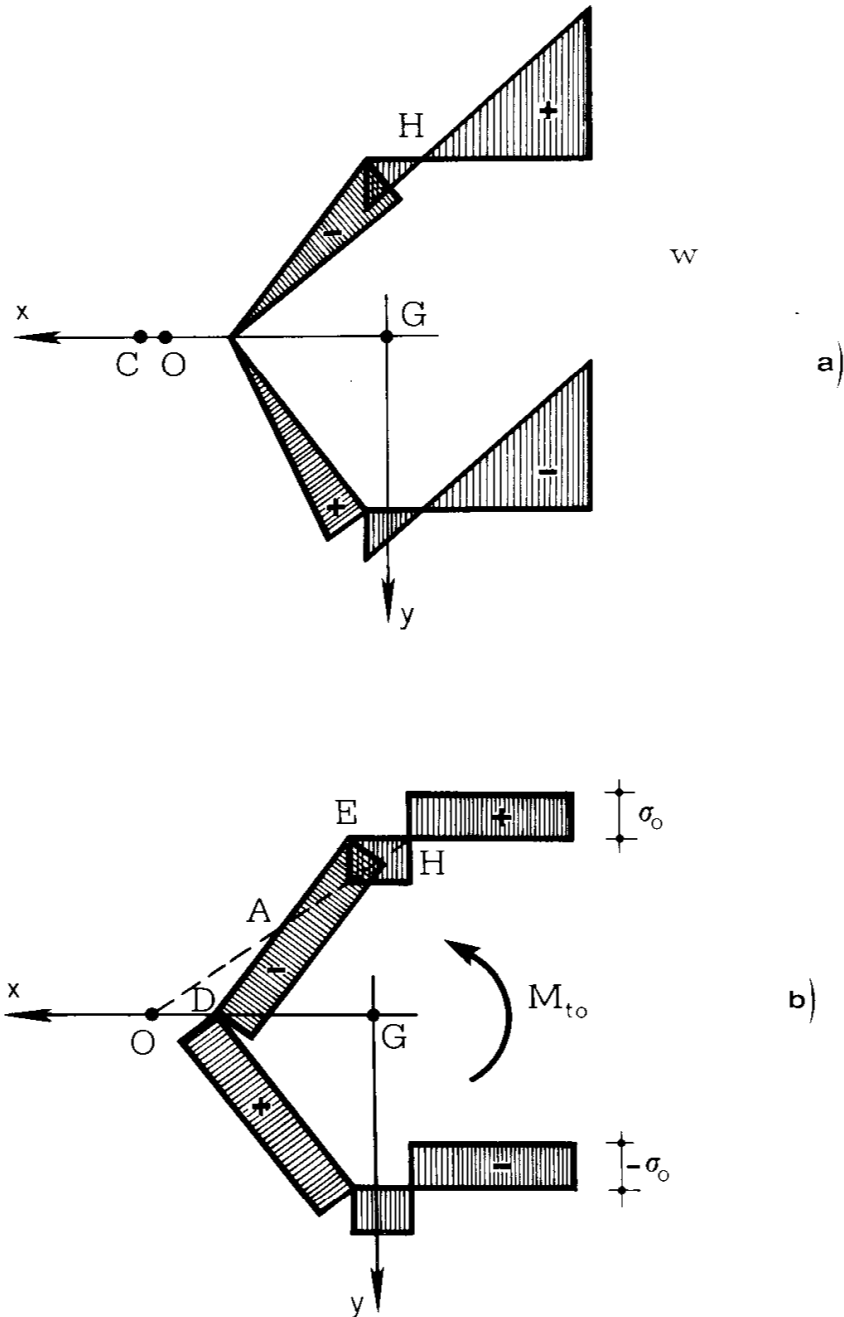


Fig. 16

In regime di completa plasticizzazione il diagramma delle σ nella sezione incastrata si presenta, se si prescinde dalle τ , come nella fig. 16; il momento M_{to} si calcola come sopra. Si fa l'ipotesi che

gli spostamenti w siano ancora proporzionali alle aree settoriali; naturalmente il polo P di tali aree, e cioè il centro di rotazione torsionale O , non coincide più con il centro C di taglio. Si determina prima il diagramma delle σ (fig. 16 b), rispettando la condizione $M_x = M_y = 0$; si ottiene così il punto H di inversione, che assieme al punto medio A di ED definisce la AH ; l'intersezione di AH con l'asse x è il centro O della rotazione plastica.