

## CAPITOLO VIII

### LA CRISI IN REGIME DI FLESSIONE DEVIATA

#### 1. La flessione deviata semplice.

Il materiale presenti ovunque la stessa  $\sigma'_0$ , e la stessa  $\sigma''_0$ . Si consideri una generica sezione (fig. 1) ed una generica direzione orientata

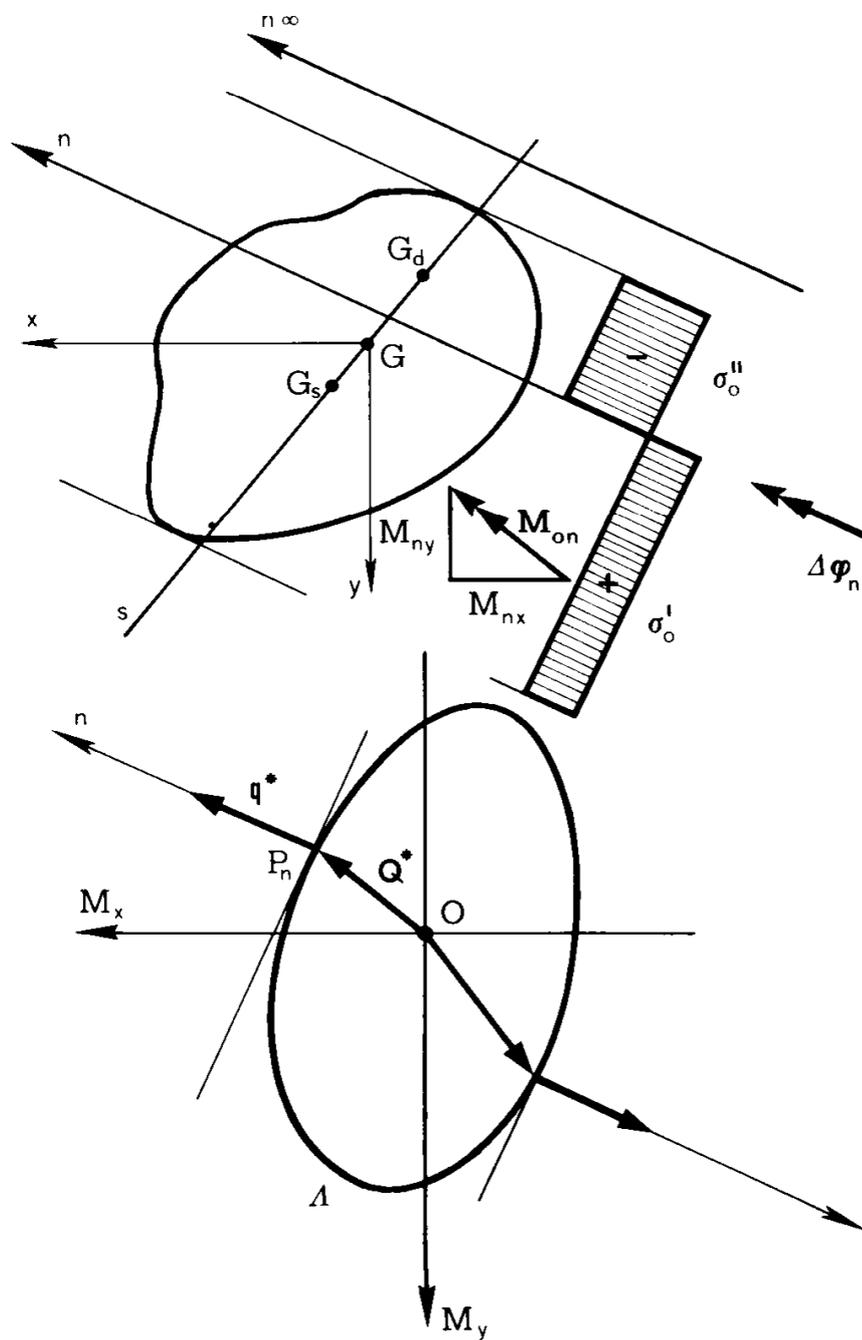


Fig. 1

$n_\infty$  dell'asse neutro; orientare la direzione dell'asse neutro significa assegnare il verso della rotazione plastica, concorde con quello dell'asse neutro. Dato un riferimento ortogonale  $G x y$ , ed un altro riferimento pur esso ortogonale  $O M_x M_y$ , al variare di  $n_\infty$  il punto  $P_n (M_{nx} M_{ny})$ , dove  $M_{nx} M_{ny}$  sono le componenti su  $x$  ed  $y$  del vettore  $M_{on}$  relativo ad  $n$ , descrive una curva limite  $\Lambda$  relativa alla contemporanea presenza di  $M_x$  ed  $M_y$ .

La legge dello scorrimento plastico assicura che il vettore  $q^* (\Delta\varphi_{nv} \Delta\varphi_{ny})$  è ortogonale in  $P_n$  a  $\Lambda$ , e quindi il punto  $P_n$ , dove  $\Lambda$  sia regolare, definisce, oltre al vettore  $Q^* (M_{nx} M_{ny})$ , la direzione orientata  $n_\infty$  dell'asse neutro.

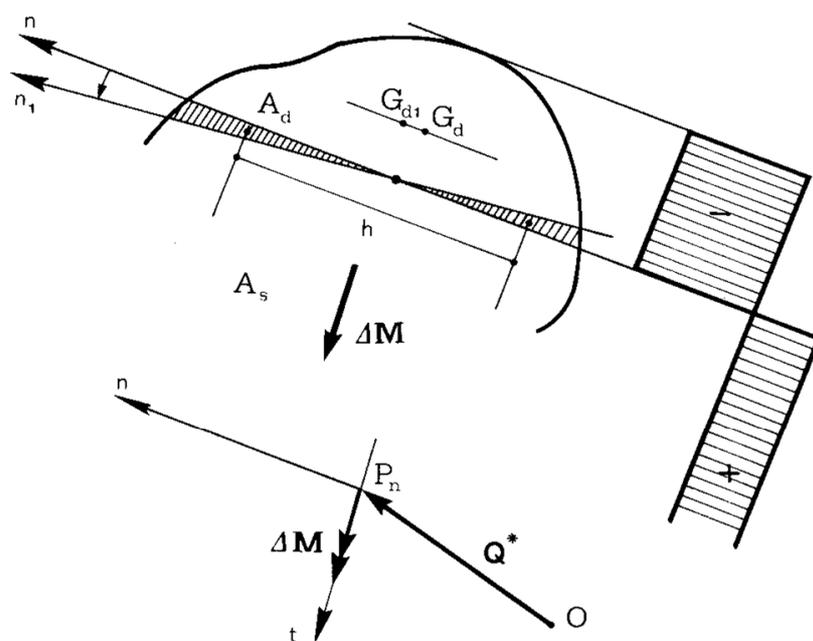


Fig. 2

La legge dello scorrimento plastico si può anche verificare direttamente (fig. 2), considerando che nel passaggio da  $n$  ad  $n_1$  (l'angolo  $\hat{n}_1$  è elementare) la variazione di  $A_s$  (e di  $A_d$ ) è costituita dai due triangoli tratteggiati, di aree  $dA$  uguali e contrarie; quindi la variazione  $\Delta M$  di momento ha modulo

$$(\sigma'_0 - \sigma''_0) dA \cdot h,$$

ed è diretta normalmente ad  $n$ . Poiché  $\Delta M$  è diretto secondo la tan-

gente in  $P_n$ , l'asserto è dimostrato. Si ha pure prova, da quanto sopra, del fatto che  $\Lambda$  è chiusa e convessa, e generalmente regolare.

La condizione che fornisce, dato  $n_\infty$ , la posizione di  $n$  è la solita

$$A_s \sigma'_0 = -A_d \sigma''_0 \quad (1)$$

dove  $A_s$  ed  $A_d$  sono le aree delle parti rispettivamente tesa e compressa della sezione retta, e cioè le aree a sinistra ed a destra di  $n$ . Si trae dalla (1) che, data la direzione  $n_\infty$ , ai due versi di essa, per  $\sigma'_0 \neq$

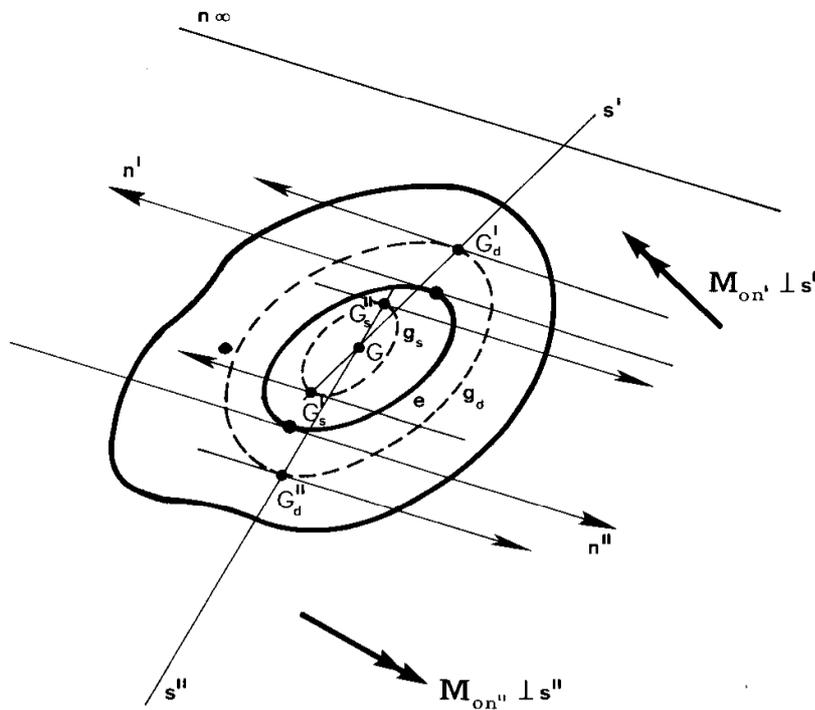


Fig. 3

$\neq -\sigma'_0$ , corrispondono due assi neutri paralleli, ma non coincidenti. I moduli dei due momenti limite  $M_{on^I}$  ed  $M_{on^{II}}$  sono forniti da (fig. 3)

$$|M_{on^I}| = A_s \sigma'_0 |G'_s G'_d| \quad (2)$$

$$|M_{on^{II}}| = A_s \sigma'_0 |G''_s G''_d| ;$$

il prodotto  $A_s \sigma'_0 + A_d \sigma''_0 = 0$  e ricavando  
 due relazioni

$$A_s + A_d = A$$

$$A_s \sigma'_0 + A_d \sigma''_0 = 0$$

da cui

$$A_s = A \frac{\sigma''_0}{\sigma''_0 - \sigma'_0} \quad (3)$$

$$A_d = A \frac{\sigma'_0}{\sigma'_0 - \sigma''_0}$$

Il vettore  $\mathbf{M}_{on}$  è ortogonale al piano di traccia  $s' = G'_s G'_d$ , il vettore  $\mathbf{M}_{on}$  al piano di traccia  $s'' = G''_s G''_d$ ; quindi non solo sono diversi i valori (2), ma anche le direzioni dei due vettori, e cioè sono diversi i due assi di sollecitazione  $s'$  ed  $s''$  connessi con  $n_\infty$ .

La curva  $e$  inviluppo degli assi neutri al variare di  $n_\infty$  può essere utilizzata, una volta costruita, per la determinazione dell'asse neutro  $n$  corrispondente ad una assegnata  $n_\infty$ ; basta infatti (fig. 3), per avere  $n$ , condurre la tangente ad  $e$  parallela ed equiversa ad  $n_\infty$ , e che si lasci il baricentro  $G$  a sinistra se  $\sigma'_0 < -\sigma''_0$ , a destra in caso contrario. Esplicitamente si avverte che la curva  $e$  può non essere chiusa, e può possedere punti isolati. Le due curve  $g_s$  e  $g_d$ , luoghi dei punti  $G_s$  e  $G_d$  al variare di  $n_\infty$ , servono invece a determinare l'asse  $s$  ed il valore di  $\mathbf{M}_{on}$ . Infatti (fig. 2) nel passaggio da  $n$  ad  $n_1$  la forza  $\sigma''_0 A_d$ , applicata originariamente in  $G_d$ , non varia in valore (la (3) vale per qualsiasi asse neutro) ma si sposta, per effetto di  $\Delta \mathbf{M}$ , in  $G_{d1}$ , essendo  $G_d G_{d1}$  ortogonale a  $\Delta \mathbf{M}$  e quindi parallelo ad  $n$ . Analogo ragionamento vale per la forza  $\sigma'_0 A_s$ , che si sposta da  $G_s$  a  $G_{s1}$ , dove  $G_s G_{s1} = -G_d G_{d1}$ . Quindi la tangente a  $g_d$ , parallela ed equiversa ad  $n_\infty$ , e che si lascia  $G$  alla sinistra, definisce  $G_d$ ; e la tangente a  $g_s$ , parallela ed equiversa ad  $n_\infty$ , e che si lascia  $G$  alla destra, definisce  $G_s$ . La retta  $G_d G_s$  definisce l'asse di sollecitazione  $s$ . Viceversa, dato  $s$  ed il verso di  $\mathbf{M}_0$  può ottenersi  $n$ . La  $G_d G_s$  contiene  $G$ ; le curve  $g_d$  e  $g_s$ , per quanto detto, sono chiuse e convesse.

Se  $\sigma'_0 < -\sigma''_0$ , come supposto nelle fig. 1 e 3, la curva  $g_d$  include strettamente la  $g_s$ ; il contrario accade se  $\sigma'_0 > -\sigma''_0$ . Se  $\sigma'_0 = -\sigma''_0 = \sigma_0$  le due curve  $g_d$  e  $g_s$  coincidono, e ad ogni direzione assegnata corrisponde un solo asse neutro ( $n' = n''$ ); quest'ultima circostanza avverte che, data una qualsiasi direzione, la curva  $e$  ha una sola tangente ad essa parallela.

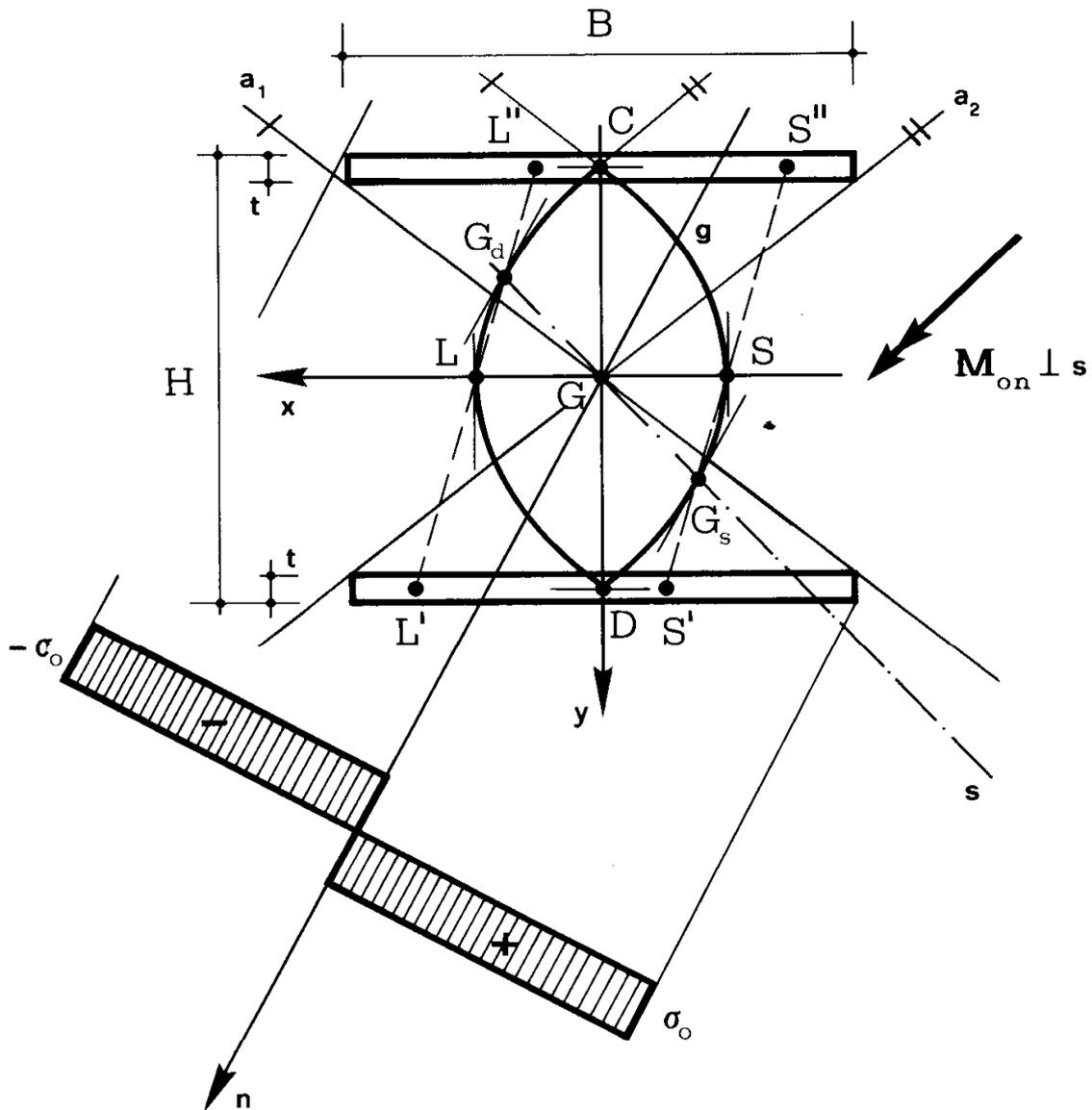


Fig. 1

Nell'ipotesi  $\sigma'_0 = -\sigma''_0 = \sigma_0$ , si consideri la sezione della fig. 4, costituita da due rettangoli allungati ( $t \ll B$ ). Dato  $n$  orientato, passante comunque per  $G$  (nel caso in esame la curva  $e$  si contrae nel punto  $G$ ), il punto  $G_d$  è il baricentro dell'area inferiore compressa e del-

l'area superiore compressa, quindi si trova sulla congiungente i baricentri  $L'$  ed  $L''$  delle due aree suddette; analogamente,  $G_s$ , simmetrico di  $G_d$  rispetto a  $G$ , si trova sulla congiungente i baricentri  $S'$  ed  $S''$  delle aree tese inferiore e superiore. Il momento  $M_{on}$  è ortogonale al piano di traccia  $G_d G_s$ , e tale traccia è l'asse di sollecitazione  $s$ ; il verso di  $M_{on}$  è dettato dal verso di  $n$ ; il modulo di  $M_{on}$  è

$$|M_{on}| = Bt \cdot |G_s G_d| = 2Bt \cdot |G G_s| \quad (4)$$

La curva  $g$  è perciò il diagramma polare dei momenti limite. Inoltre, essa fornisce la relazione  $n \rightarrow s$ ; dato infatti  $n$ , le due tangenti a  $g$  parallele ad  $n$  hanno contatto con  $g$  in  $G_s$  e  $G_d$ , e tale retta è  $s$ . Questo risultato è valido in generale, per  $\sigma'_0 = -\sigma''_0$ . La relazione  $n \rightarrow s$  è biunivoca ( $n \leftrightarrow s$ ) se l'asse  $n$  taglia la sezione, se cioè  $n$  è compreso nell'angolo tra  $a_1$  ed  $a_2$  di asse  $y$ , come nella fig. 3; a tutti gli assi  $n$  che non tagliano la sezione corrisponde invece  $s = y$ . Corrispondentemente, la curva  $g$  ha due punti angolosi in  $C$  e  $D$ , dove le due tangenti sono parallele ad  $a_1$  ed  $a_2$ ; per tutti gli assi neutri che non tagliano la sezione è  $G_s = C$ ,  $G_d = D$  e quindi

$$|M_{ox}| = Bt(H - t).$$

I punti  $G_d = L$  e  $G_s = S$ , corrispondenti ad  $n = y$ , sono ubicati all'ascissa  $x = \pm \frac{B}{2}$ ; e quindi è in tal caso

$$|M_{oy}| = \frac{B^2 t}{2} \quad (6)$$

La retta  $L'L''$ , per  $n$  generico, contiene  $L$ ; infatti, se  $n$  ruota di un angolo  $\varphi$  a partire da  $n = y$ ,  $L'$  si sposta verso destra della stessa quantità di cui  $L''$  si sposta verso sinistra<sup>(\*)</sup>.

---

(\*) Se  $n$  ruota di  $\varphi$ , la larghezza della parte compressa inferiore varia di  $a = \varphi \frac{H-t}{2}$ , quella della parte superiore di  $-a$ . La distanza del baricentro della parte superiore dal bordo di sinistra varia perciò da  $\frac{B}{2}$  a  $\frac{B/2 - a}{2}$ , e quella della parte inferiore da  $\frac{B}{4}$  a  $\frac{B/2 + a}{2}$ .

Siano  $x$  ed  $y$  le coordinate di  $G_d$ , e  $\varphi = \gamma n$ . Si ha

$$x = - \frac{S_{dy}}{A_d} \tag{a}$$

$$y = \frac{S_{dx}}{A_d}$$

e quindi, per una variazione  $d\varphi$  ( $dA_d = 0$ ),

$$dx = - \frac{1}{A_d} dS_{dy} \tag{b}$$

$$dy = \frac{1}{A_d} dS_{dx} .$$

Poiché è

$$dS_{dx} = 2 \cdot t \frac{H}{2} d\varphi \cdot \frac{H}{2} = \frac{tH^2}{2} d\varphi$$

$$dS_{dy} = 2 \cdot t \frac{H}{2} d\varphi \cdot \frac{H}{2} \operatorname{tg}\varphi = \frac{tH^2}{2} \operatorname{tg}\varphi d\varphi$$

si ha, dalle (b) ,

$$\frac{dx}{dy} = - \operatorname{tg}\varphi . \tag{c}$$

La coordinata  $y$  di  $G_d$  è fornita (a) da

$$y = \frac{1}{A_d} 2 \frac{Ht}{2} \operatorname{tg}\varphi \cdot \frac{H}{2} = \frac{H^2 t}{2 A_d} \operatorname{tg}\varphi = \frac{H^2}{2 B} \operatorname{tg}\varphi .$$

Si ha perciò (c)

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2B}{H^2}y \quad (d)$$

da cui si trae che la curva  $g$  è una parabola. Dalla (d) si ha pure, per  $y = \frac{H}{2}$ .

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{B}{H},$$

conformemente a quanto già detto.

La sezione della fig. 5 è costituita da tre rettangoli allungati. Si osserva, che, se  $n_\infty$  ha inclinazione compresa tra quelle di AA e di AT, l'asse neutro passa comunque per il punto medio A dell'anima, mentre, se  $n_\infty = y_\infty$ , è  $n = n_y$ ; la curva  $e$  presenta un punto angoloso in A con le due tangenti AS ed AT, e l'asintoto  $n_y$ . Corrispondentemente, per tutti gli  $n_\infty$  della classe suddetta si verifica  $G_s = C$  e  $G_d = D$ , o viceversa; la curva  $g$  ha perciò in C e D due punti angolosi, con tangenti paralleli ad AS ed AT.

La curva  $g$  (fig. 4 e 5) deve comunque, per  $\sigma'_0 = -\sigma''_0$ , essere simmetrica rispetto al baricentro G; ed infatti, essendo  $A_s = A_d$ ,  $G_s$  e  $G_d$  devono essere equidistanti da G. La curva  $g$ , a meno di  $2\sigma_0 A_s$ , e

ruotata di  $\frac{\pi}{2}$ , fornisce la curva limite  $\wedge$  nel riferimento  $M_x M_y$  coincidente con il riferimento  $x y$ .

E' anche interessante il caso della sezione rettangolare. Si faccia variare l'angolo  $\varphi = xn$  (fig. 6) da  $xd''$  ad  $xd'$ ; l'asse neutro, nell'ipotesi  $\sigma'_0 = -\sigma''_0$ , passa comunque per G. Per  $n = x$ ,  $G_d$  coincide con H, punto medio del segmento GI; per  $n = d'$ ,  $G_d$  coincide con E, ove il segmento GE è la terza parte del segmento GA; e per  $n = d''$ ,  $G_d$  coincide con F, ove GF è la terza parte di GB. Le tangenti a  $g$  in E, H ed F devono essere parallele ai corrispondenti assi neutri, e cioè alle rette  $d'$ ,  $x$  e  $d''$ .

La  $g$ , limitatamente all'arco E H F, è una parabola. Ed infatti (fig. 7) per variazione  $d\varphi$  si ha

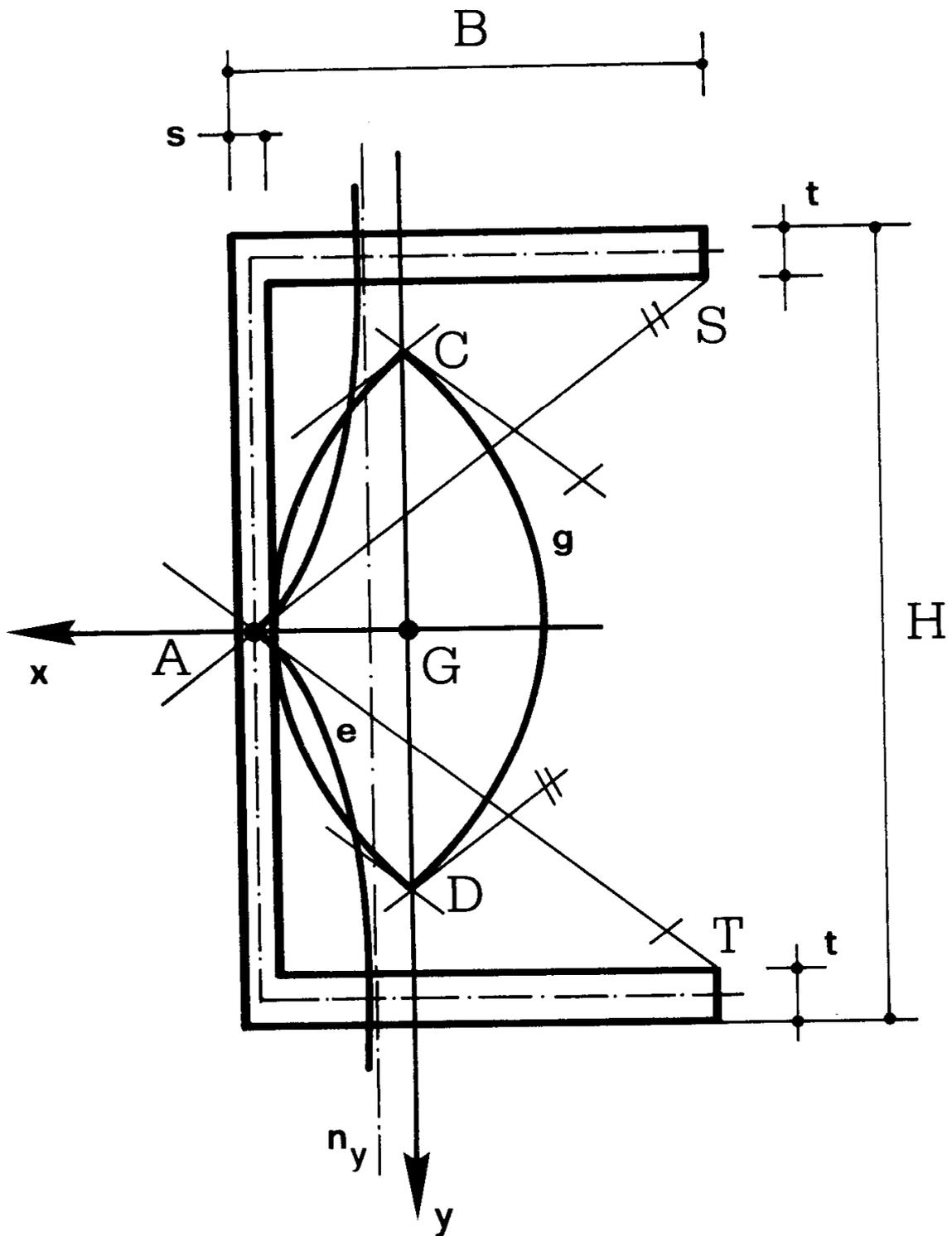


Fig. 5

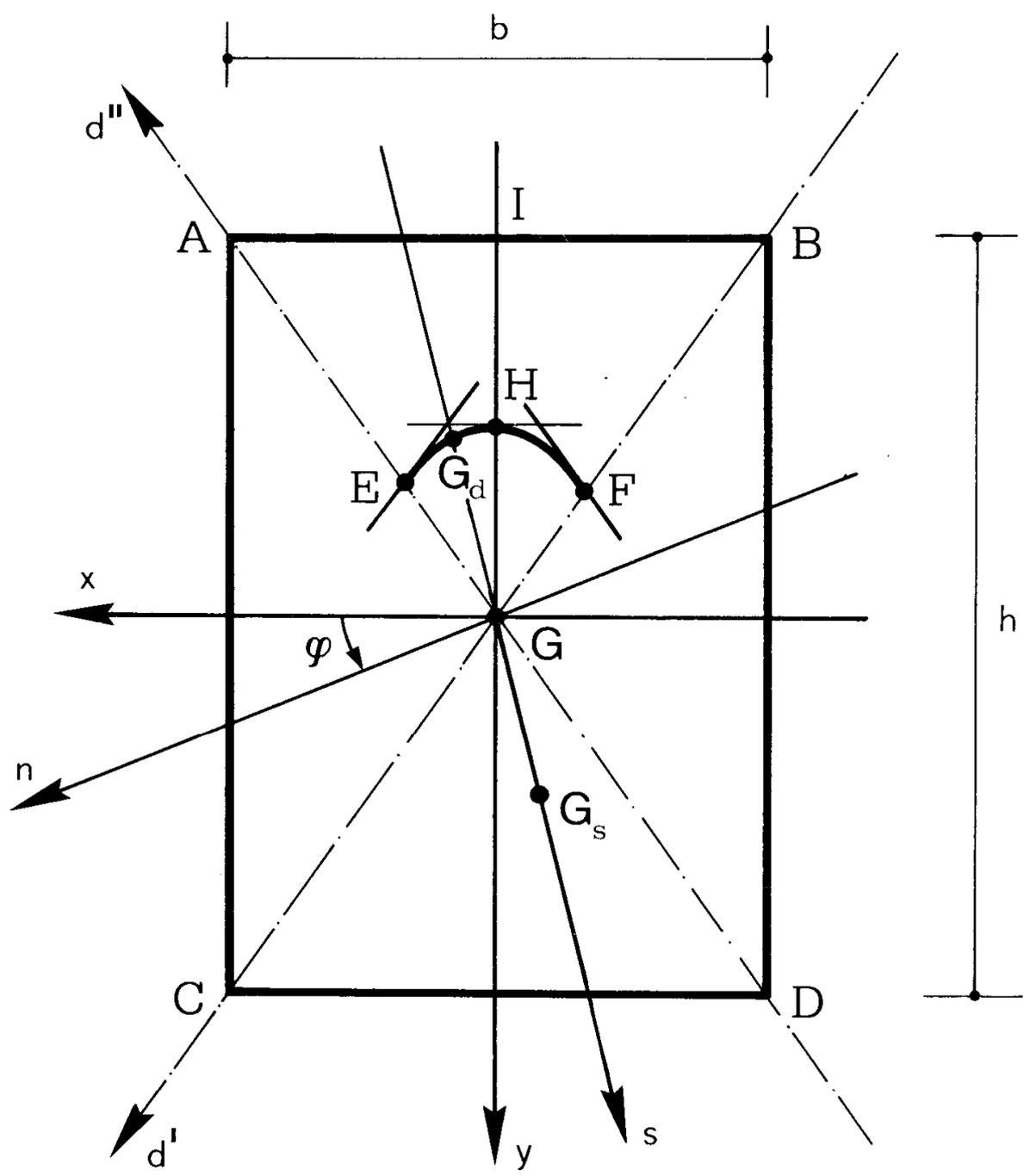


Fig. 6

$$dS_{dx} = 2 \cdot \frac{b^2}{8 \cos^2 \varphi} d\varphi \cdot \frac{2}{3} \frac{b}{2} \operatorname{tg} \varphi = \frac{b^3 \operatorname{tg} \varphi}{12 \cos^2 \varphi} d\varphi,$$

$$dS_{dy} = -2 \cdot \frac{b^2}{8 \cos^2 \varphi} d\varphi \cdot \frac{2}{3} \frac{b}{2} = -\frac{b^3}{12 \cos^2 \varphi} d\varphi,$$

e quindi (b) in  $G_d$  la  $g$  presenta l'inclinazione

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{dS_{dx}}{dS_{dy}} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (e)$$

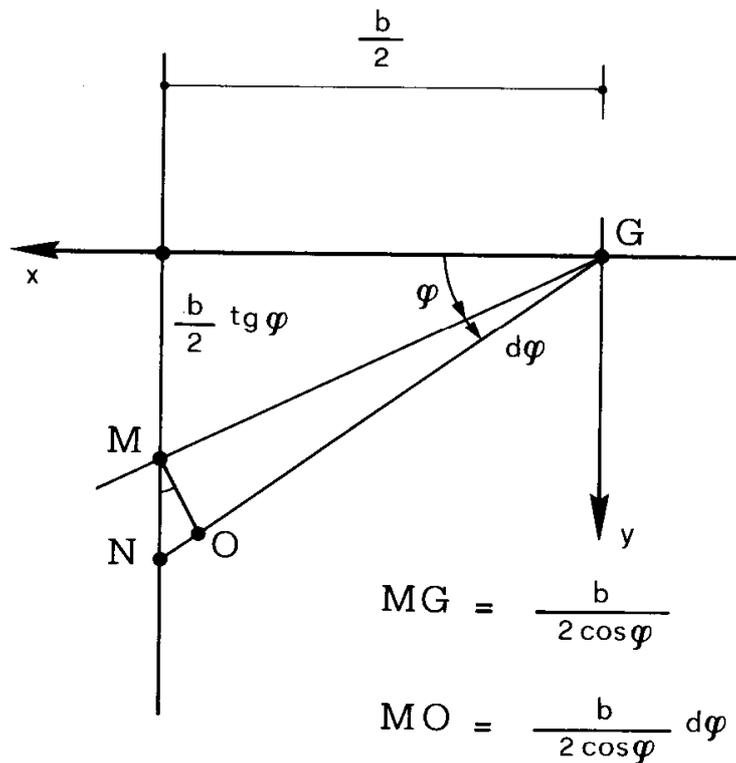


Fig. 7

D'altro canto la coordinata  $x$  di  $G_d$  è fornita da

$$x = -\frac{1}{A_d} S_{dy};$$

Poiché  $A_d = \frac{bh}{2}$ , ed

$$S_{dy} = -2 \cdot \frac{b^2}{8} \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{2}{3} \frac{b}{2} = -\frac{b^3 \operatorname{tg} \varphi}{12},$$

è pure

$$x = \frac{b^2 \operatorname{tg} \varphi}{6h}.$$

E' perciò (e)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6h}{b^2} x,$$

e quindi l'asserto è dimostrato.

La curva  $g$  è l'insieme dei quattro archi di parabola analoghi all'arco  $E H F$  della fig. 6.

## 2. La flessione deviata in presenza di sforzo normale

Se si è in presenza di uno sforzo normale  $N$  (positivo se di trazione) la trattazione precedente resta in sostanza inalterata. La (1) cede il posto alla

$$A_s \sigma'_0 + A_d \sigma''_0 = N$$

che, assieme all'altra

$$A_s + A_d = A$$

fornisce

$$A_s = \frac{\sigma_n - \sigma''_0}{\sigma'_0 - \sigma''_0} A$$

(7)

$$A_d = \frac{\sigma'_0 - \sigma_n}{\sigma'_0 - \sigma''_0} A,$$

dove

$$\sigma_n = \frac{N}{A} .$$

Possono ancora utilizzarsi le figure 1, 2 e 3.

Data la direzione orientata  $n_\infty$ , si ottiene univocamente (fig. 1) l'asse neutro  $n$  dalle (7), ed i baricentri  $G_s$  e  $G_d$  di  $A_s$  ed  $A_d$ .

Il momento baricentrico è rappresentato da un vettore  $Q^*$  ortogonale all'asse di sollecitazione  $s = G_s G_d$ , il modulo

$$|M_{on}| = A_s \sigma'_0 |G_s G| - A_d \sigma''_0 |G_d G| . \quad (f)$$

Data la direzione  $n_\infty$ , ai due orientamenti di essa corrispondono comunque, e cioè anche per  $\sigma'_0 = -\sigma''_0 = \sigma_0$ , due assi neutri paralleli  $n'$  ed  $n''$  (fig. 3), due assi di sollecitazione  $s' = G'_d G'_s$  ed  $s'' = G''_d G''_s$ , due momenti dai moduli

$$|M_{on'}| = A_s \sigma'_0 |G'_s G| - A_d \sigma''_0 |G'_d G| \quad (8)$$

$$|M_{on''}| = A_s \sigma'_0 |G''_s G| - A_d \sigma''_0 |G''_d G| .$$

Anche in presenza di sforzo normale si da luogo perciò alla curva e involuppo degli assi neutri, ed alle due curve  $g_s$  e  $g_d$  luoghi di  $G_s$  e  $G_d$ ; ad una direzione  $n_\infty$  corrispondono (fig. 3) due assi di sollecitazione  $s'$  ed  $s''$  in genere distinti, ad un asse  $s$  di sollecitazione due direzioni  $n'_\infty$  ed  $n''_\infty$  in genere distinte.

### 3. Il caso del conglomerato armato.

Quanto detto nei due paragrafi precedenti è valido se  $\sigma'_0$  e  $\sigma''_0$ , pur diversi tra loro in valore assoluto, sono ciascuno costante su tutta la sezione. Ciò non accade nel conglomerato armato, per il quale quindi occorre modificare qualcuno dei risultati acquisiti. Si prenda in esame il caso, più semplice e più frequente, della sezione rettangolare con quattro tondini uguali ai vertici (fig. 8). Se  $n_\infty$  coincide con  $x_\infty$  o  $y_\infty$ , si è in presenza del già studiato caso di flessione o pres-

soflessione secondo un'asse di simmetria. Per  $n \infty$  qualsiasi si è in presenza, invece, di pressoflessione deviata. Si opera in presenza di  $N$  costante; i momenti sono calcolati rispetto al baricentro  $O$  della sezione interamente reagente. Facendo ruotare  $n \infty$  da  $x \infty$ , e po-

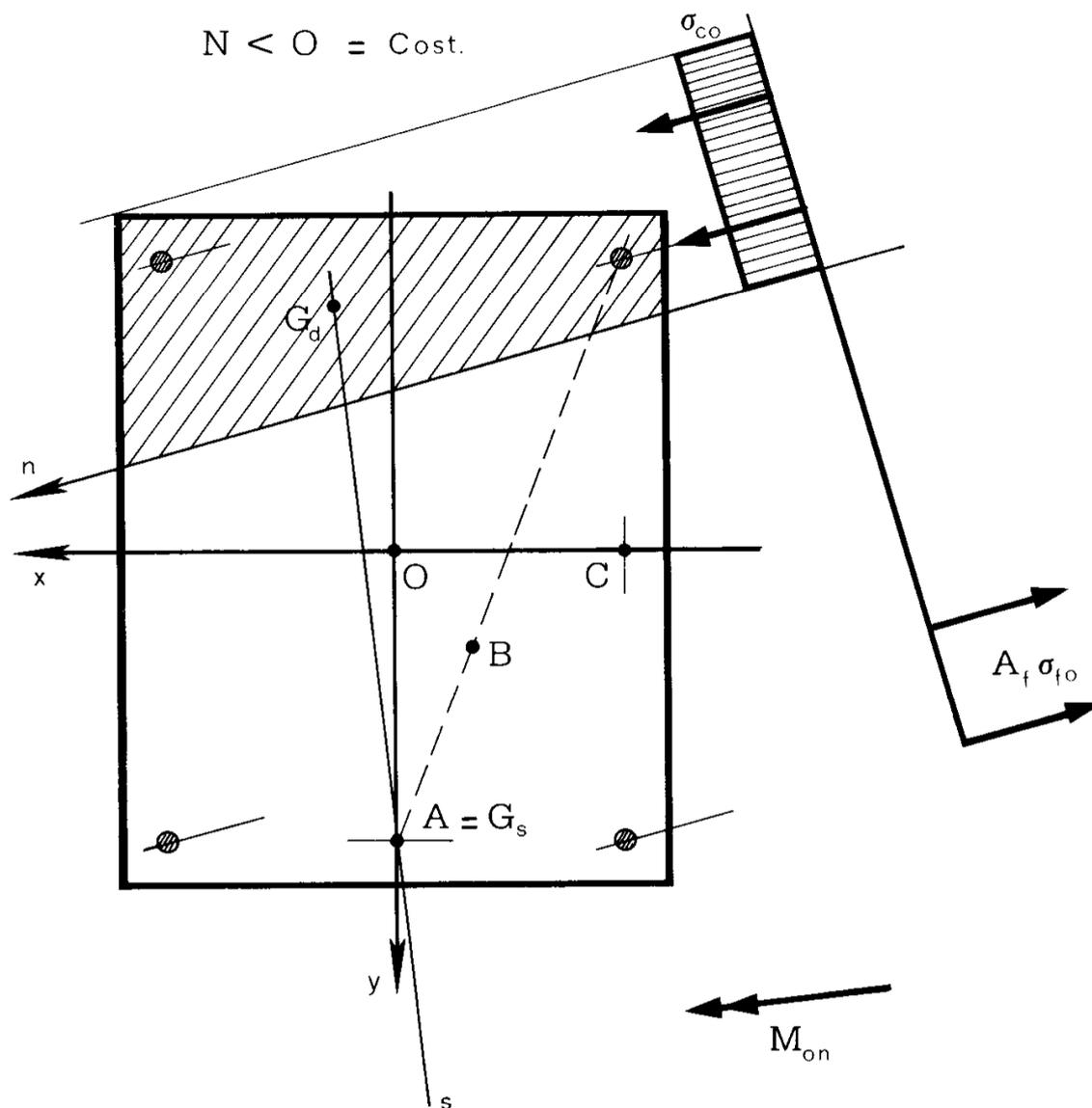


Fig. 8

nendo  $\varphi = xn$ , con riferimento all'intervallo  $\varphi \in [0, \varphi_1]$  soltanto i due tondini inferiori sono tesi. Mentre  $\varphi$  descrive il suddetto intervallo da  $O$  a  $\varphi_1$ , il punto  $G_d$  descrive (fig. 9) l'arco  $DE$ ; la tangente in  $D$  è parallela ad  $x$ , la tangente in  $E$  è inclinata di  $\varphi_1$  su  $x$ . Così pure l'asse neutro involupa l'arco  $MN$ , sui cui estremi le tangenti

hanno le stesse inclinazioni delle tangenti agli estremi dell'arco ED. Mentre quindi sono definiti come nei due paragrafi precedenti un arco di  $g_a$  ed un arco di  $e$ , il punto  $G_s$  è fisso in A, punto medio tra i due tondini inferiori.

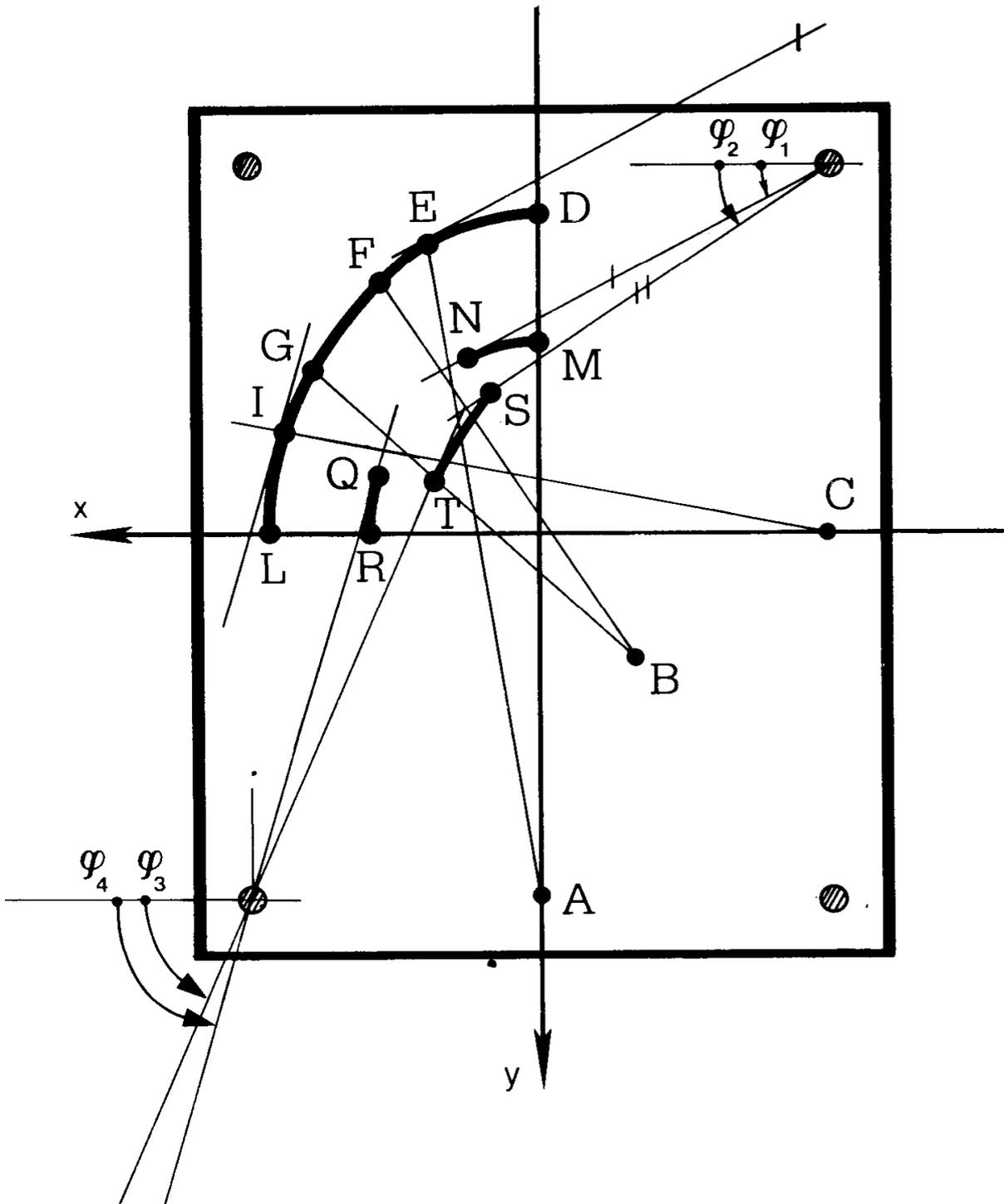


Fig. 9

Analogo comportamento si ha nell'intervallo  $\varphi \in \varphi_4, \left[ \frac{\pi}{2} \right]$ , in relazione al quale sono tesi i due tondini di destra; l'arco di  $g_d$  è IL, l'arco di  $e$  è QR; le tangenti in I e Q sono inclinate di  $\varphi_4$  su  $x$ , le tangenti in L ed R sono ortogonali ad  $x$ . Il punto  $G_s$  è il punto medio C tra i due tondini di destra.

Per  $\varphi \in [\varphi_2, \varphi_3]$  risultano invece tesi i due tondini inferiori, ed il superiore destro; l'area del ferro teso è aumentata della metà, quella del ferro compresso è dimezzata. Deve quindi essere maggiore l'area del conglomerato compresso. Ciò significa che nel passaggio da  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$ , durante il quale l'asse neutro scavalca il tondino superiore destro, la forza in tale tondino passa da  $-A_f \sigma_{fo}$  a  $A_f \sigma_{fo}$ , e cioè varia di  $2 A_f \sigma_{fo}$ , mentre l'area del conglomerato compresso passa da  $\frac{N}{\sigma_{co}}$  a  $\frac{N + 2 \sigma_{fo} A_f}{\sigma_{co}}$ , e cioè varia di  $2 A_f \frac{\sigma_{co}}{\sigma_{co}}$ . In tale passaggio

l'asse neutro ruota intorno al tondino superiore destro. Analogamente, nel passaggio da  $\varphi_3$  a  $\varphi_4$  l'asse neutro ruota intorno al tondino inferiore sinistro.

Per  $\varphi \in [\varphi_2, \varphi_3]$  l'arco di  $g_d$  è FG. Le tangenti in F e G sono rispettivamente inclinate di  $\varphi_2$  e  $\varphi_3$  su  $x$ . L'arco di  $e$  è l'arco ST, che presenta anch'esso le tangenti in S e T inclinate di  $\varphi_2$  e  $\varphi_3$  su  $x$ . Il punto  $G_s$  è B, baricentro di tre masse uguali poste in corrispondenza dei due tondini inferiori e del superiore destro.

Per  $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$  il punto  $G_d$  descrive l'arco EF, ed il punto  $G_s$  il segmento AB, mentre l'asse neutro ruota intorno al tondino superiore destro; per  $\varphi \in [\varphi_3, \varphi_4]$  il punto  $G_d$  descrive l'arco GI, ed il punto  $G_s$  il segmento BC, mentre l'asse neutro ruota intorno al tondino inferiore sinistro.

#### 4. *La verifica al collasso statico di un telaio spaziale.*

Un telaio spaziale (e cioè il complesso dei ritti, delle travi e dei solai di una struttura portante) soggetto, oltre che al peso proprio ed ai carichi accidentali, alle forze orizzontali generati da sisma, o da vento, o da altre cause, deve essere considerato nel suo complesso, se si intende verificare i pilastri; ben difficile è infatti, in questo caso, dettare in generale la legge di distribuzione delle sollecitazioni esterne tra i diversi telai piani in cui la struttura può scomporsi.

Il primo tipo di  $\Sigma_\gamma$  da considerare per ottenere un  $\gamma$  è il cosiddetto "meccanismo di piano", chiamato con lo stesso nome di quello del

par. 3-7, poiché il primo include il secondo. Si ottiene tale  $\Sigma_\gamma$  ipotizzando un concio endoirrigidito a ciascuna delle due estremità dei pilastri di un interpiano, e cioè dei pilastri compresi tra due solai successivi. Ognuno di tali conci si ottiene, in analogia a quanto detto nel par. 6-8, introducendo cinque pendoli infinitamente rigidi e resistenti,

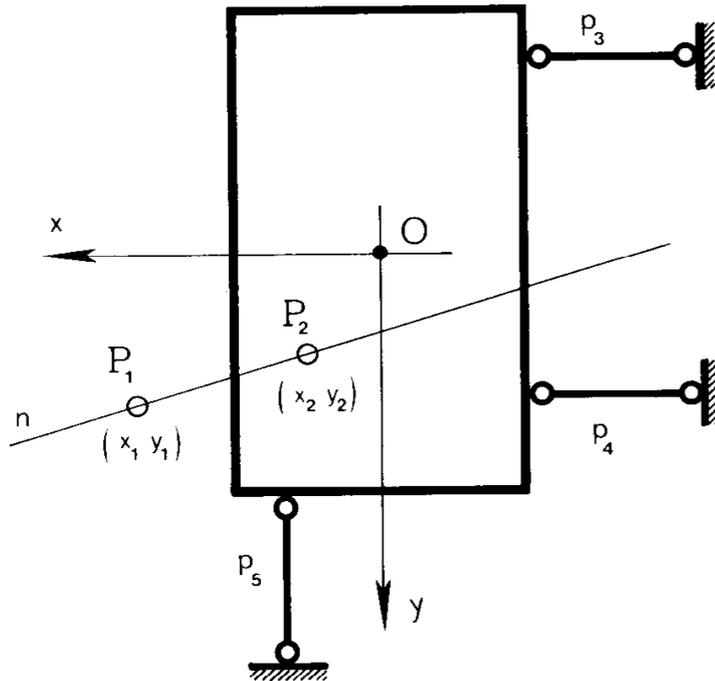


Fig. 10

ti, dei quali (fig. 10) due,  $p_1$  e  $p_2$ , sono paralleli all'asse  $z$ , e tre,  $p_3$ ,  $p_4$ ,  $p_5$ , impediscono nel complesso  $\Delta u$ ,  $\Delta v$ ,  $\Delta \varphi_z$ . Lo spostamento relativo plastico è così imposto, e corrisponde ad un solo grado di libertà; più precisamente, esso è una rotazione relativa tra le due facce intorno all'asse  $n$  appartenente al piano  $xy$ , e definito su tale piano dalle tracce  $P_1$  e  $P_2$  degli assi dei pendoli  $p_1$  e  $p_2$ . Ciò equivale ad imporre tra  $\Delta w^*$ ,  $\Delta \varphi_x^*$  e  $\Delta \varphi_y^*$  i due legami lineari ( $w_1 = w_2 = 0$ )

$$\Delta w^* + \Delta \varphi_x^* y_1 - \Delta \varphi_y^* x_1 = 0 \tag{9}$$

$$\Delta w^* + \Delta \varphi_x^* y_2 - \Delta \varphi_y^* x_2 = 0 \quad ,$$

dove  $x_1$ ,  $y_1$  ed  $x_2$ ,  $y_2$  sono le coordinate di  $P_1$  e  $P_2$ .

Operando sulle sole  $N M_x M_y$ , e cioè ipotizzando che il concio reale sia costituito da un insieme di pendoli paralleli all'asse  $z$ , la  $\Lambda_m$  è

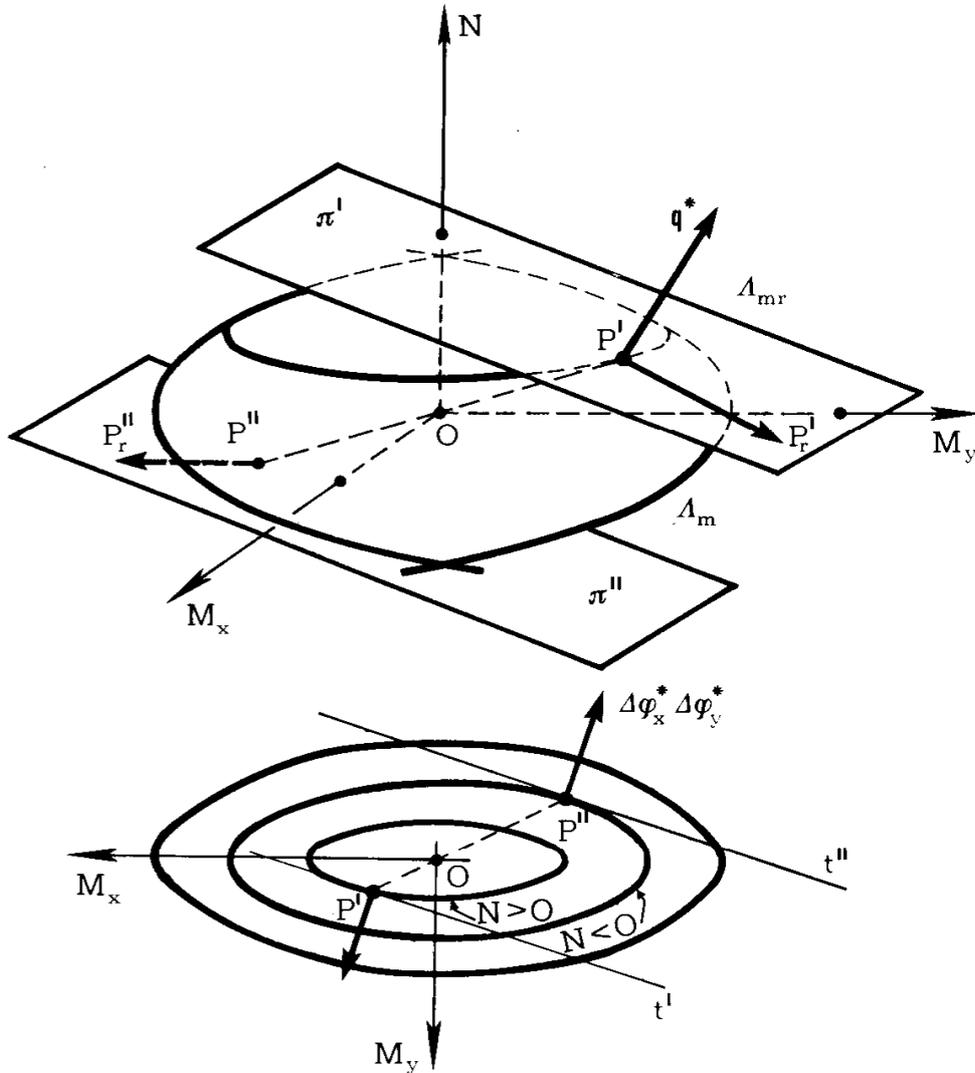


Fig. 11

una superficie dell' $S_3$  (fig. 11). Quando il concio è tutto plasticizzato, tali pendoli (esclusi  $p_1$  e  $p_2$ ) definiscono una terna  $N^* M_x^* M_y^*$  corrispondente ad un punto  $P_m$  di  $\Lambda_m$ ; la presenza dei pendoli  $p_1$  e  $p_2$  introduce poi tre variazioni delle caratteristiche,  $\Delta N$ ,  $\Delta M_x$  e  $\Delta M_y$ , legate dalla relazione lineare (fig. 10)

$$\Delta N \cdot d_{Gn} + \Delta M_x \cos xn + \Delta M_y \cos yn = 0, \quad (10)$$

che esprime l'annullarsi del momento, rispetto all'asse  $n$ , dell'insieme

$\{ \Delta N, \Delta M_x \text{ e } \Delta M_y \}$ , equivalente alle reazioni dei due pendoli  $p_1$  e  $p_2$ . L'equazione (10) nel riferimento  $N M_x M_y$  è quella di un piano, le due equazioni (9) nel riferimento  $w \varphi_x \varphi_y$  definiscono una retta. Nei due riferimenti sovrapposti (par. 5-5 e 5-6) lo stesso segmento rappresenti l'unità di  $N$  e  $w$ , di  $M_x$  e  $\varphi_x$ , di  $M_y$  e  $\varphi_y$ ; in questo caso dato il vettore  $Q^* (N^* M_x^* M_y^*)$  corrispondente ad una condizione di completa plasticizzazione del concio reale, e quindi il punto  $P_m (P_m \in \Lambda_m)$  estremo del vettore  $OP_m = Q^*$ , il vettore  $q^* (w^* \Delta \varphi_x^* \Delta \varphi_y^*)$  è ortogonale a  $\Lambda_m$  in  $P_m$ , per la legge dello scorrimento plastico.

La presenza dei pendoli irrigidenti  $p_1$  e  $p_2$  fissa  $q^*$  in direzione attraverso le (9), e quindi due punti  $P'$  e  $P''$  di  $\Lambda_m$  (fig. 11). Ai vettori  $OP'$  ed  $OP''$  occorre poi sommare, per ottenere i vettori  $Q^{*'} \text{ e } Q^{*''}$  trasmessi dai concii irrigidenti, il vettore  $P'P'_r$  o  $P''P''_r$  di coordinate  $\Delta N, \Delta M_x, \Delta M_y$ . La retta (9) è ortogonale al piano (10).

I numeri direttori della (9) sono proporzionali ai minori della matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & y_1 & -x_1 \\ 1 & y_2 & -x_2 \end{vmatrix},$$

e cioè

$$\lambda = k (-y_1 x_2 + y_2 x_1) \tag{g}$$

$$\mu = k (x_2 - x_1)$$

$$v = k (y_2 - y_1).$$

D'altro canto i coefficienti della (10) sono esprimibili nella forma

$$\begin{aligned} d_{Gn} &= \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \\ \cos x n &= \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \\ \cos y n &= \frac{y_1 - y_2}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \end{aligned} \tag{h}$$

Quindi il punto  $P'_r$  descrive il piano  $\pi'$  tangente in  $P'$  a  $\Lambda_m$ , il punto  $P''_r$  descrive il piano  $\pi''$  tangente in  $P''$ . L'insieme dei due piani  $\pi'$  e  $\pi''$  è la superficie limite  $\Lambda_{mr}$  del conco endoirrigidito.

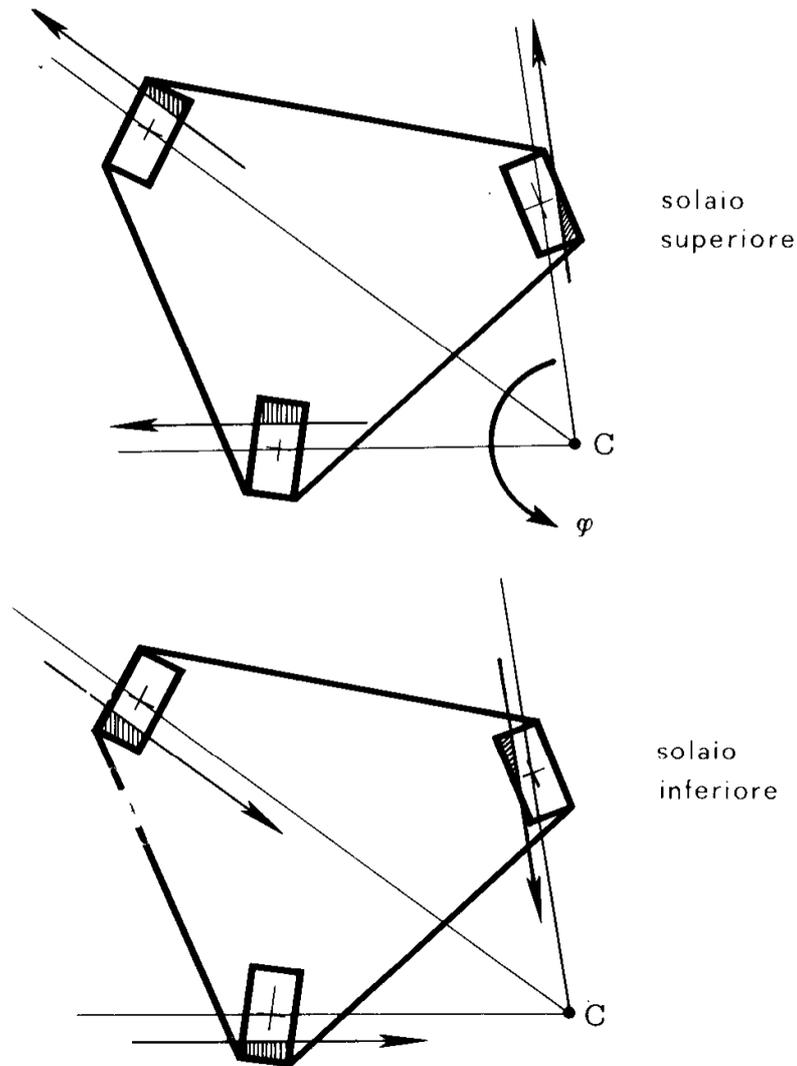


Fig. 12

I conci endoirrigiditi dell'interpiano devono rendere possibile un piccolo moto rigido del solaio superiore, definito (fig. 12) dalla rotazione  $\varphi$  del solaio nel proprio piano, intorno ad un centro C, e dalle componenti verticali degli spostamenti di tre punti. Trascurando gli spostamenti orizzontali del generico pilastro, e ciò è lecito se le dimensioni della sezione del pilastro sono trascurabili rispetto alla distanza del pilastro stesso dal centro C, gli assi neutri relativi alle due sezioni estreme del pilastro generico sono paralleli alla congiun-

gente C con il baricentro della sezione nel c. a., baricentro della figura racchiusa dal contorno della sezione); se  $\varphi$  è positivo, e cioè antiorario, gli assi neutri sul solaio inferiore sono orientati dal pilastro al centro (zona compressa alla destra dell'asse così orientato), quelli sul solaio superiore dal centro al pilastro. In ciascun pilastro,

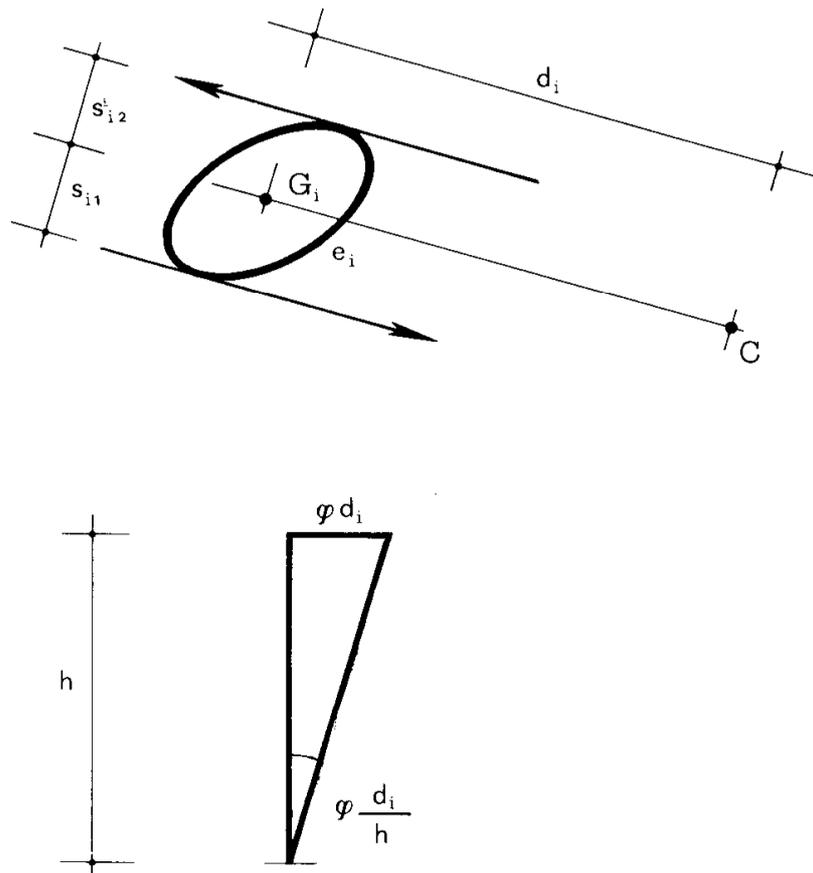


Fig. 13

l'asse neutro inferiore e quello superiore (fig. 13) devono essere tangenti alla stessa curva  $e_i$ , poiché lo sforzo normale può considerarsi costante; se  $h$  è l'altezza dell'interpiano, e  $d_i$  la lunghezza del segmento  $CG_1$ , il punto  $G_1$  della sezione superiore presenta uno spostamento secondo  $z$  di componente

$$w_i = \varphi \frac{d_i}{h} (s_{i1} + s_{i2}). \quad (i)$$

I segmenti  $w_i$  devono definire un piano. Se i pilastri sono più di tre, la curva  $e_i$  non può quindi essere scelta ad arbitrio per i pilastri in

ed in relazione a tale valore scegliere la  $e_i$ . Per i primi tre pilastri può scegliersi la  $e_i$  corrispondente ad uno sforzo normale pari a quello di esercizio moltiplicato per un presunto valore di  $\gamma$ .

Dato  $\varphi$ , con il verso corrispondente ad  $L_F > 0$ , sono definiti per ogni

pilastro le rotazioni relative  $\Delta\varphi_i = \frac{\varphi}{h} d_i$  nelle due sezioni di estremità, e lo spostamento  $w_i$  della sezione superiore; e cioè per ogni concio endoirrigidito il vettore  $\mathbf{q}_m^*$ . È definito pure, in relazione alle  $\Lambda_m$ , il generico  $\mathbf{Q}_m^*$  ( $N_m \ M_{x_m} \ M_{y_m}$ ), e quindi la componente secondo  $\mathbf{q}_m^*$  del vettore  $\mathbf{Q}_{\gamma m}^* = \mathbf{Q}_m^* + \mathbf{P}_m \ P_{mr}$  con estremo  $P_{mr}$  su  $\Lambda_{mr}$ .

L'equazione di Lagrange

$$\gamma L_F - \sum \mathbf{Q}_m^* \cdot \mathbf{q}_m^* = 0$$

porge

$$\gamma = \frac{\sum \mathbf{Q}_m^* \cdot \mathbf{q}_m^*}{L_F} \quad (\ell)$$

In  $L_F$  giocano sia le forze orizzontali che le verticali. Ottenuto  $\gamma$ , occorre calcolare un  $\psi$ . A ciò fare, si carica la  $\Sigma_{\gamma\ell}$  con le  $\gamma F$  e le  $\mathbf{Q}_m^*$ ; sotto tali forze, la  $\Sigma_{\gamma\ell}$  è in equilibrio.

Si calcolano poi in ogni sezione di estremità le reazioni dei due pendoli  $p_1$  e  $p_2$  (fig. 10), per esempio alla Lagrange, eliminandoli uno alla volta. Ottenute così  $R_1$  ed  $R_2$ , si calcolano in ogni sezione comprese quelle di estremità, i vettori  $\mathbf{Q}_\gamma$ ; nelle sezioni di estremità si verifica che gli estremi di tali vettori, applicati nell'origine del riferimento  $N M_x M_y$ , appartengono a  $\Lambda_{mr}$ . Calcolati così in ogni sezione

il  $\rho = \frac{OP}{OP'}$ , è al solito

$$\psi = \frac{\gamma}{\rho_{\max}} \quad (m)$$

Il calcolo del  $\rho$  generico può essere eseguito sul piano  $M_x M_y$ , ove siano tracciate le curve limiti  $M_x M_y$  per i successivi valori negativi di  $N$ ; a partire (fig. 14) della curva  $N = 0$ , le curve si dilatano per  $N$

crescente in valore assoluto. Il vettore  $Q_\gamma$  si proietta sul piano  $M_x M_y$  nel vettore  $OP$ , dove  $P$  ha le coordinate  $M_{x\gamma} M_{y\gamma}$ ; riducendo nel

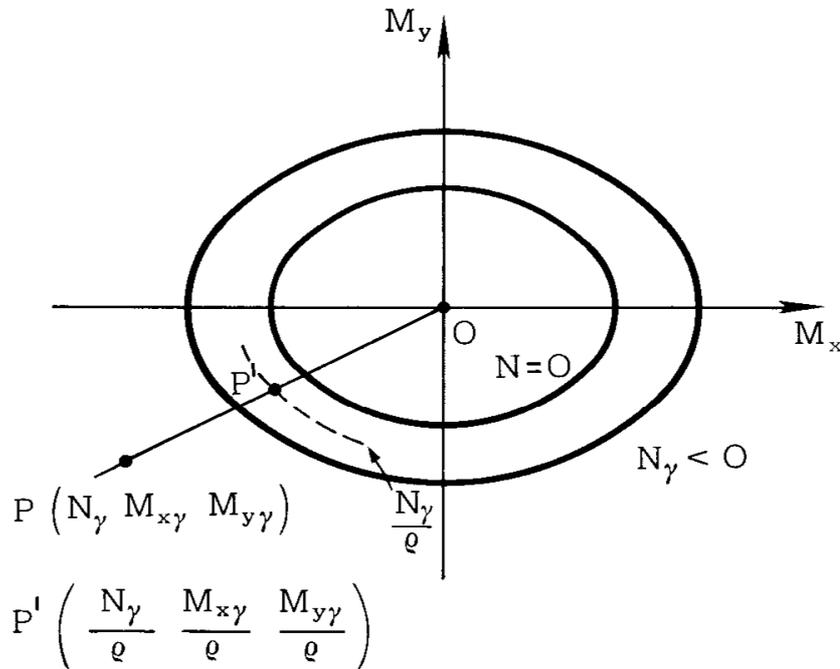


Fig. 14

rapporto  $k$  il vettore  $Q_\gamma$ ,  $P$  si porta in  $P'$ , essendo  $OP' = \frac{OP}{k}$ . Il numero  $k$  è il desiderato  $\rho$  se  $P'$  si trova sulla curva corrispondente ad  $\frac{N_\gamma}{k}$ ; è facile soddisfare per tentativi tale condizione

**5. La verifica di un telaio spaziale sotto azioni variabili.**

La legge per le zone sismiche contempla un sisma unidirezionale, e chiede al progettista il calcolo secondo due sole direzioni, ortogonali e peraltro qualsiasi. Data tale interpretazione del fenomeno, il calcolo al collasso statico può sembrare sufficiente; infatti è pur vero che può risultare  $\tilde{s}_r < s_{rmin}$ , ma non può sfuggire che la ripetizione alterna dei due sismi di intensità tale da indurre collasso incrementale è piuttosto unidirezionale; e cioè sembra più aderente al vero riferirsi, piuttosto che ad un insieme di forze orizzontali di direzione assegnata ed alternantisi, allo stesso insieme ruotante. In tal caso la ricerca di  $s_{rmin}$  cede il posto a quella di  $\tilde{s}_r$ ; del resto, l'alternanza dell'insieme unidirezionale importa già per sua natura la necessità del

calcolo dell' $\tilde{s}_r$  alla fatica plastica. Sia quindi assegnato un insieme di orizzontali parallele ed equiverse  $\{H_i\}$ ; la generica  $H_i$  è applicata in corrispondenza del baricentro  $G_i$  delle masse del solaio i.esimo

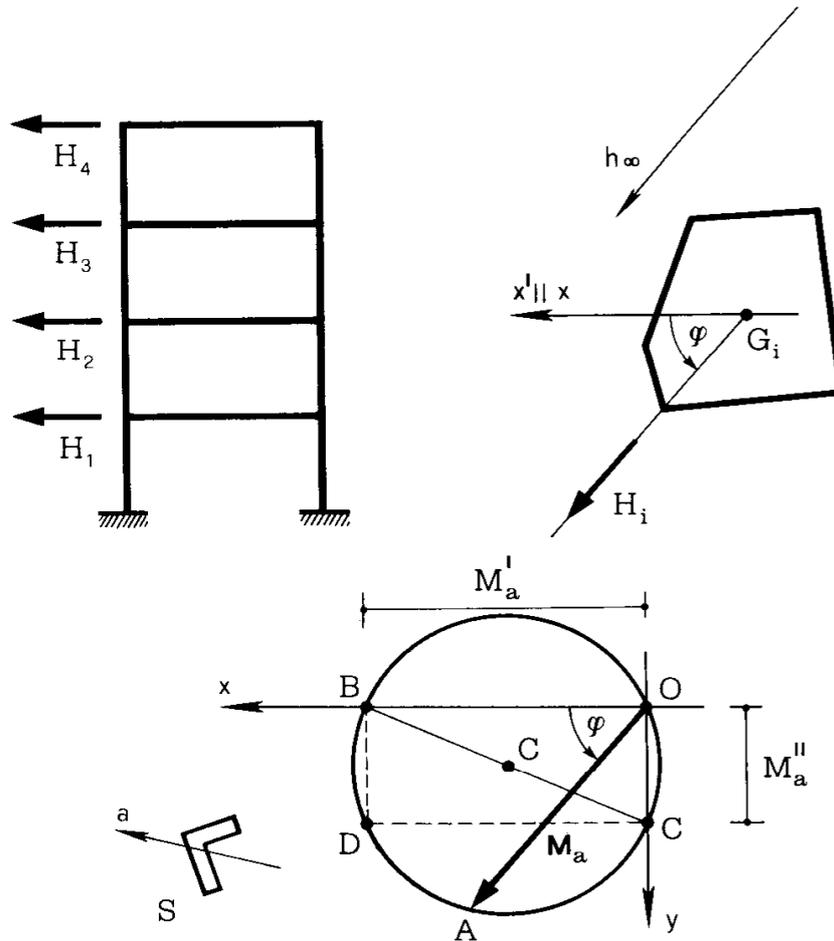


Fig. 15

(fig. 15). Assegnato un riferimento orizzontale ortogonale  $xy$ , si consideri un qualsiasi effetto, per esempio la componente normale  $M_a$ , del momento flettente in una sezione  $S$  di un pilastro, secondo una retta  $a$  di  $S$ . Si indichi con  $\varphi$  l'angolo che la direzione orientata  $h_\infty$  delle  $H_i$  forma con  $x$  ( $\varphi = x \cdot h_\infty$ ). Sia  $M'_a$  il valore di  $M_a$  per  $\varphi = 0$ ,  $M''_a$  per  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Per un generico valore  $\varphi$  è

$$M_a = M'_a \cos \varphi + M''_a \sin \varphi . \quad (11)$$

Si disegni con origine in  $O$ , direzione e verso quelli di  $h_\infty$ , il vettore

OA =  $M_a$  di valore  $M_a$ , e si faccia variare  $\varphi$  in  $[0 \pi]$ . Le coordinate di A sono

$$x_A = M_a \cos \varphi = M'_a \cos^2 \varphi + M''_a \cos \varphi \sin \varphi$$

$$y_A = M_a \sin \varphi = M'_a \sin \varphi \cos \varphi + M''_a \sin^2 \varphi .$$

Si ha perciò

$$x_A = \frac{M'_a}{2} (1 + \cos 2\varphi) + \frac{M''_a}{2} \sin 2\varphi$$

$$y_A = \frac{M'_a}{2} \sin 2\varphi + \frac{M''_a}{2} (1 - \cos 2\varphi) ,$$

da cui

$$\left(x_A - \frac{M'_a}{2}\right)^2 + \left(y_A - \frac{M''_a}{2}\right)^2 = \left(\frac{M'_a}{2}\right)^2 + \left(\frac{M''_a}{2}\right)^2 , \quad (12)$$

equazione di un cerchio di centro

$$C\left(\frac{M'_a}{2}, \frac{M''_a}{2}\right)$$

e raggio

$$R^2 = \left(\frac{M'_a}{2}\right)^2 + \left(\frac{M''_a}{2}\right)^2 .$$

Tale cerchio passa per l'origine. Dal suo esame si trae che il valore estremo di  $M_a$  si ha per un angolo  $\varphi$  fornito da<sup>(\*)</sup>

$$\operatorname{tg} \varphi_{am} = \frac{M''_a}{M'_a} , \quad (13)$$

$$M_{am} = \pm \sqrt{M_a'^2 + M_a''^2} \quad , \quad (14)$$

pari al valore del diametro del cerchio.

Così pure, per  $\varphi = \varphi_{am} + \frac{\pi}{2}$  si ha  $M_a = 0$ . Nel caso in esame, per

$\varphi \in \left[0, \varphi_m + \frac{\pi}{2}\right]$  è  $M_a > 0$ , per  $\varphi \in \left[\varphi_m + \frac{\pi}{2}, \pi\right]$  è  $M_a < 0$ .

Considerando le componenti normali  $M_x$  ed  $M_y$  secondo due rette ortogonali x ed y di S (fig. 1), esse sono ambedue, per la (11), funzioni sinusoidali di  $\varphi$ , di ampiezze  $M_{xm}$  ed  $M_{ym}$ ; può quindi porsi

$$M_x = M_{xm} \cos(\varphi - \varphi_{xm}) = M_{xm} \cos \psi \quad (15)$$

$$M_y = M_{ym} \cos(\varphi - \varphi_{ym}) = M_{ym} \cos(\psi - \alpha)$$

dove

$$\alpha = \varphi_{ym} - \varphi_{xm} \quad . \quad (16)$$

Si ha così

$$M_y = M_{ym} \cos \psi \cos \alpha + M_{ym} \sin \psi \sin \alpha$$

---

(\*) Alla (13) si può giungere anche dalla (11):

$$\frac{dM_a}{d\varphi} = -M_a' \sin \varphi \quad M_a'' \cos \varphi = 0$$

da cui

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{M_a''}{M_a'}$$

e ancora

$$M_y - \frac{M_{ym}}{M_{xm}} M_x \cos \alpha = M_{ym} \sin \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{M_x}{M_{xm}}\right)^2}$$

da cui

$$-\frac{M_x}{M_{xm}} \cos \alpha + \frac{M_y}{M_{ym}} = \sin \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{M_x}{M_{xm}}\right)^2}$$

Elevando a quadrato e sommando si trae

$$\frac{M_x^2}{M_{xm}^2} + \frac{M_y^2}{M_{ym}^2} - 2 \frac{\cos \alpha}{M_{xm} M_{ym}} M_x M_y = \sin^2 \alpha. \quad (17)$$

La (17) è l'equazione di una ellisse di centro O, e compresa nel ret-

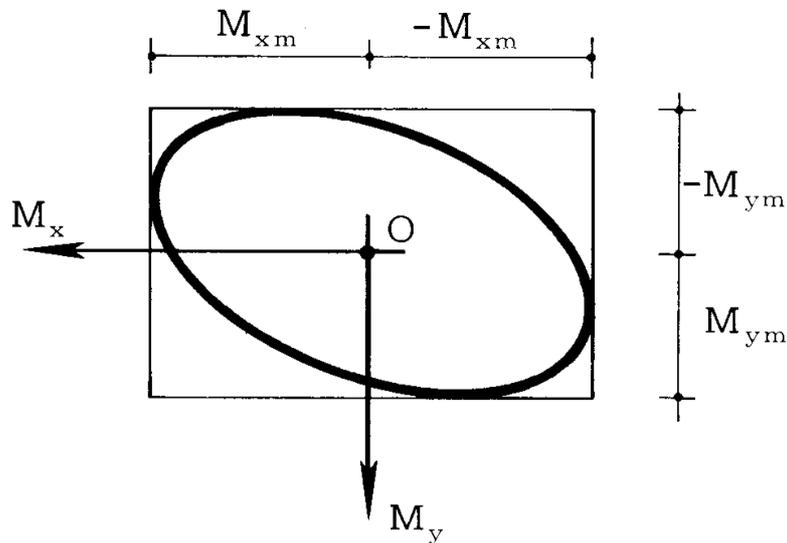


Fig. 16

tangolo (fig. 16)

$$\begin{aligned} -M_{xm} &\leq M_x \leq M_{xm} \\ -M_{ym} &\leq M_y \leq M_{ym} ; \end{aligned} \quad (18)$$

nelle fig. 17 a, b, c è riportata l'ellisse (17) per  $\alpha = 0$

$$\frac{M_x}{M_{xm}} - \frac{M_y}{M_{ym}} = 0 ;$$

per  $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{M_x^2}{M_{xm}^2} + \frac{M_y^2}{M_{ym}^2} = 1 ;$$

per  $\alpha = \pi$

$$\frac{M_x}{M_{xm}} + \frac{M_y}{M_{ym}} = 0 .$$

L'ellisse (17) è il dominio di esercizio  $(M_x, M_y)$  per forze ruotanti. Occorre però ottenere il dominio  $(NM_x, M_y)$ , che in analogia a quanto precedentemente eseguito può dimostrarsi essere un ellissoide. Conoscendo così nella generica sezione il vettore  $Q_g (N_g, M_{xg}, M_{yg})$  ed i due vettori  $Q_{2t}$  e  $Q_{1t}$  dovuti alle variazioni termiche positive e negative, si può per tale sezione costruire il dominio di esercizio  $D_s$ . Per ottenere un  $\tilde{\gamma}$  si procede in modo analogo a quello seguito nel caso della pressoflessione retta. Fissato cioè un meccanismo di piano  $\Sigma_\gamma$  (fig. 10 e 12), e quindi per ognuno dei concetti endoirrigiditi il punto  $P_m$  di  $\Lambda_m$  cui corrisponde crisi, dalla relazione

$$\sum_m Q_{\gamma m} \cdot \mathbf{q}_m^* = 0$$

si trae, per definizione di  $\tilde{\gamma}$  (vedi 7-b),

$$\sum_m (OQ_m - \tilde{\gamma} Q_{jm}^*) \cdot \mathbf{q}_m^* = 0$$

da cui al solito

$$\tilde{\gamma} = \frac{\sum_m OP_m \cdot \mathbf{q}_m^*}{\sum_m Q_{jm}^* \cdot \mathbf{q}_m^*} . \quad (19)$$

Nella (19), identica alla (7.7), occorre calcolare esplicitamente i lavori delle caratteristiche  $N^* M_x^* M_y^*$  ed  $N_j^* M_{xj}^* M_{yj}^*$  definite in ogni concio dai punti  $P_m$  (o meglio, per le  $C_j^*$ , dal piano tangente in  $P_m$  a  $\Lambda_m$ , e quindi al  $D_{sm}$  di esercizio).

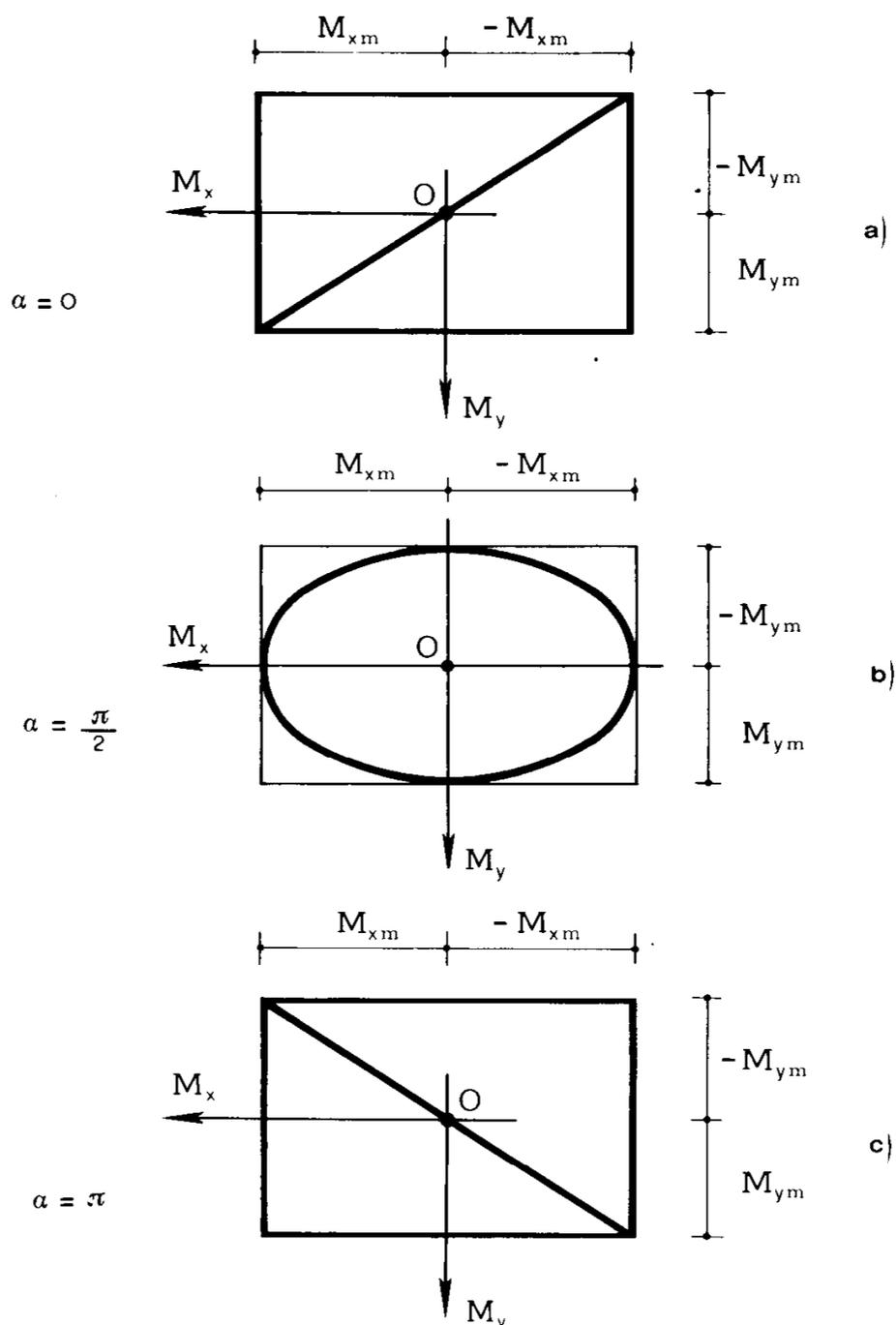


Fig. 17

Per ottenere i  $Q_{\gamma m}$  si segue lo stesso procedimento del cap. 7; si rimanda perciò alla fig. 7-5, in cui però i domini piani  $\Lambda_m$  e  $D_{sm}$ .

cedono il posto agli analoghi domini in  $NM_x M_y$ , e le due rette  $t'$  e  $t''$  (in particolare la retta  $t_m$ , e cioè quella tra  $t'$  e  $t''$  che corrisponde al prescelto verso del meccanismo) ai due piani  $\pi'$  e  $\pi''$  (in particolare a  $\pi_m$ ). I vettori

$$Q_{\gamma m} = OA_m = OQ_m - \tilde{\gamma} Q_{jm}^*$$

non sono noti, poiché sono incogniti i vettori  $OQ_m$ , e cioè i vettori  $P_m Q_m$ ; invece i vettori

$$Q'_{\gamma m} = OA'_m = OP_m + Q_m A_m = OP_m - \gamma Q_{jm}^*$$

sono noti. Dalla

$$Q'_{\gamma m} = OA'_m = OA_m + A_m A'_m = OA_m - P_m Q_m = Q_{\gamma m} - P_m Q_m$$

si trae il generico  $Q'_{\gamma m}$  dal  $Q_{\gamma m}$  come somma di quest'ultimo, e di un vettore  $P_m Q_m$  corrispondente ad una reazione parallela all'asse  $z$  e giacente nel piano di traccia  $P_1 P_2$  (fig. 10). Segue da ciò che la  $\Sigma_{\gamma q}$ , che è labile, è equilibrata sotto le sollecitazioni  $Q'_{\gamma m}$  con le quali può essere caricata. Per quanto già detto nel par. 7.2, i  $Q_{\gamma m}$  si ottengono dai  $Q'_{\gamma m}$  sommando ad essi i vettori  $A'_m A_m$  rappresentativi delle reazioni dei pendoli irrigidenti.

Ottenuti i  $Q_{\gamma m}$ , si procede al calcolo dei  $Q_\gamma$  su tutta la struttura, e quindi, al solito modo, del  $\rho_{\max}$  e del  $\tilde{\psi}$ .

L'automatizzazione del calcolo di  $\tilde{s}_r$  come  $\psi_{\max}$  può essere eseguita in programmazione lineare, secondo un procedimento analogo a quello del par. 7.5.