

CAPITOLO VII

LA CRISI SOTTO AZIONI VARIABILI IN PRESENZA DI MOMENTO FLETTENTE E SFORZO NORMALE

1. Il dominio di esercizio

Una struttura sia soggetta a più condizioni di carico $\{F_j\}$ ($j = 1, 2, \dots, h$), presenti una alla volta, e comunque alternantisi; in genere, ogni $\{F_j\}$ è costituita dalla unione di un insieme $\{F_g\}$ fisso, comune a tutte le $\{F_j\}$, chiamato *peso proprio*, e di un insieme $\{F_{vj}\}$ chiamato *carico variabile*. In fase elastica, nella generica sezione S sono così definiti, se valgono le ipotesi a base del principio di Kirchhoff, gli h vettori

$$Q_j = Q_g + Q_{vj}, \quad (1)$$

le cui componenti sono lo sforzo normale ed il momento flettente in S dovuti alla $\{F_g\}$ ed alla $\{F_{vj}\}$. All'insieme degli estremi dei vettori $\{Q_j\}$ applicati in O (fig. 1) si dà impropriamente il nome di *dominio di esercizio* D_s relativo alla sezione S ed ai carichi $\{F_j\}$.

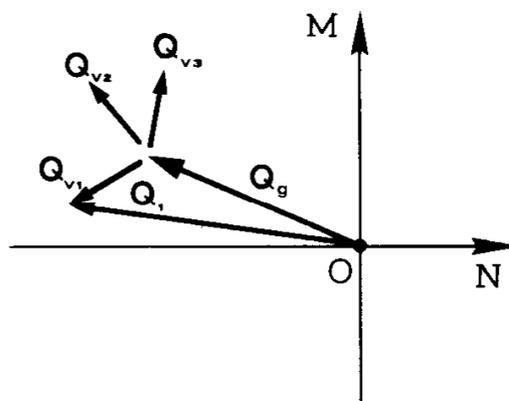


Fig. 1

La dicitura diviene propria se le condizioni $\{F_j\}$, come accade nei ponti, sono infinite, per esempio una stesa di carico a uniforme

comunque segmentabile; in questo caso infatti (fig. 2) gli estremi dei vettori Q_j applicati in O sono (par. 4) tutti i punti di una superficie definita da una curva chiusa (che si dimostrerà essere convessa), ivi compresa la curva stessa.

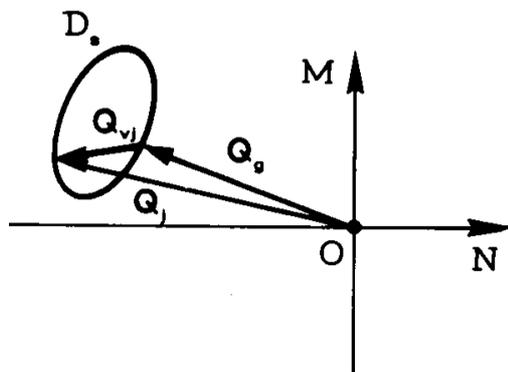


Fig. 2

Si indica con αD_s il dominio costituito dagli estremi dei vettori αQ_j applicati in O , dove α è un numero reale; αD_s è omotetico a D_s secondo il centro O e il rapporto α .

Così pure si indica con

$$\frac{r}{D_s} \rightarrow$$

il dominio costituito dagli estremi dei vettori $Q_r + Q_j$ applicati in O , essendo Q_r un vettore fisso per ogni sezione. Il $\frac{r}{D_s}$ è quindi il

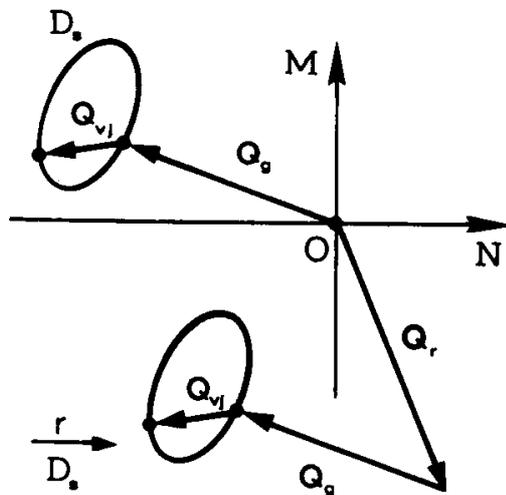


Fig. 3

dominio D_s traslato di Q_r (fig. 3). Nel paragrafo 4 si tratterà del tracciamento dei D_s sotto condizioni di carico in numero infinito.

2. Il collasso incrementale

Se si tien conto della contemporanea presenza di momento flettente e sforzo normale continua ad essere valido quanto detto nel cap. 4 con riferimento al solo momento flettente. Può darsi cioè che esista un numero \tilde{s}_r , rispettante la condizione

$$s_{ejmin} < \tilde{s}_r < s_{rjmin} \quad (2)$$

tale che in presenza delle condizioni di carico $\tilde{s}_r \{F_j\}$ comunque alternantisi si verifichi il *collasso incrementale*. Di tale fenomeno occorre però dare una definizione un pò più complessa di quella che è stato sufficiente fornire nel cap. 4: un insieme di successive deformazioni plastiche, dovute al fatto che $\tilde{s}_r > s_{ejmin}$, può generare dopo un certo numero di alternanze un insieme di reazioni iperstatiche cui sono connesse le caratteristiche $N_r T_r M_r$, e quindi un campo di *vettori residui* $Q_r (N_r M_r)$ definito sull'asse della struttura, tale che in un certo numero di sezioni S_m e relativi punti di crisi P_m , associati ad un meccanismo totale o parziale definito anche in segno, si abbia (fig. 4)

$$P_m = \frac{r}{\tilde{s}_r D_{sm}} \cap \Lambda_m, \quad A_m P_m \cdot q_m^* > 0, \quad (3)$$

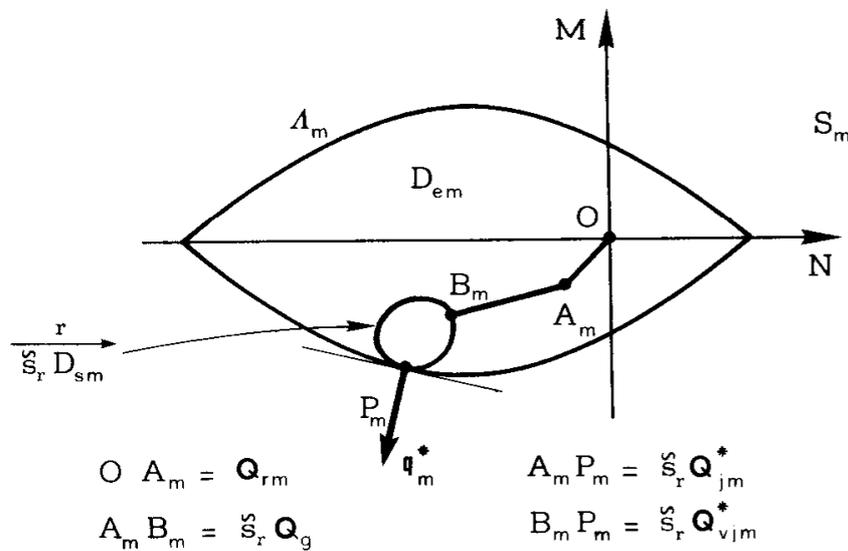


Fig. 4

mentre in tutte le sezioni, comprese le S_m , si verifica la condizione di compatibilità

$$\frac{r}{\tilde{s}_r D_s} \rightarrow \in D_e. \quad (4)$$

Se le (3) e (4) sono verificate, e a partire dal momento in cui i Q_r si sono formati, l'azione alternata delle $\tilde{s}_r \{F_j\}$ genera nelle sezioni S_m spostamenti relativi plastici q_m^* , definiti in direzione e verso dalla posizione di P_m secondo la legge dello scorrimento plastico. Non appena il valore delle q_m^* risulta tale che una loro parte corrisponde ad uno spostamento rigido, questo si verifica. La somma di questi piccoli spostamenti, tutti corrispondenti al meccanismo cui si riferiscono le (3), diviene alla fine intollerabile. Occorre perciò calcolare il valore di \tilde{s}_r sotto il quale può verificarsi il collasso incrementale, per garantire la struttura da tale tipo di crisi. A ciò fare, si definiscono i moltiplicatori staticamente ammissibili e cinematicamente sufficienti. Un numero $\tilde{\psi}$ reale positivo si definisce *moltiplicatore staticamente ammissibile* se esiste un campo Q_ψ , generato da sole iperstatiche, tale che ovunque sia rispettata la condizione di compatibilità

$$\frac{\psi}{\tilde{\psi} D_s} \rightarrow \in D_e. \quad (5)$$

Un numero $\tilde{\gamma}$ reale si definisce *moltiplicatore cinematicamente sufficiente* se è coefficiente di sicurezza \tilde{s}_r in relazione ad una Σ_γ ; se cioè esiste un campo Q_γ , generato da sole iperstatiche, tale che in relazione ad una Σ_γ , e ad uno degli spostamenti dei due segni ad essa consentito, si abbia in ciascuna delle S_m sezioni di Σ_γ , chiamando t_m quella delle due rette costituenti Λ_{mr}^m che corrisponde al segno dello spostamento (fig. 5),

$$\frac{\gamma}{\tilde{\gamma} D_{sm}} \rightarrow \in D_{mr} \quad (6)$$

$$\exists ! Q_m = \frac{\gamma}{\tilde{\gamma} D_{sm}} \cap t_m, \quad A_m Q_m \cdot q_m^* > 0.$$

Confrontando le (5) con le (4), e le (6) con le (3), si trae che \tilde{s}_r è nello stesso tempo un particolare $\tilde{\psi}$, ed un particolare $\tilde{\gamma}$.

(b) si trae

$$\tilde{\gamma} = \frac{\sum_m OQ_m \cdot \mathbf{q}_m^*}{\sum_m Q_{jm}^* \cdot \mathbf{q}_m^*} = \frac{\sum_m OP_m \cdot \mathbf{q}_m^*}{\sum_m Q_{jm}^* \cdot \mathbf{q}_m^*} \quad (7)$$

Dalla (7) risulta, per l'ultima delle (6), $\tilde{\gamma} > 0$. Ottenuto $\tilde{\gamma}$, in ogni sezione S_m si deve poi ricavare $Q_{\gamma m}$. Per fare ciò, si considerino (fig. 5) le sollecitazioni

$$Q_{\gamma m} = OA_m = OQ_m - A_m Q_m = OQ_m - \tilde{\gamma} Q_{jm}^*$$

e le

$$Q'_{\gamma m} = OA'_m = OP_m - \tilde{\gamma} Q_{jm}^* \quad (8)$$

Le $Q'_{\gamma m}$ sono note, e quindi noti i punti A'_m . Così pure è noto che i punti A_m stanno sulle parallele alle t_m per gli A'_m . Ciò, unitamente alla condizione che le reazioni R_m generate dalle $Q_{\gamma m}$ sui pendoli irrigidenti della $\Sigma_{\gamma\ell}$ sono nulle, definisce le $Q_{\gamma m}$; ed infatti ogni variazione di A_m sulla parallela alla t_m per A'_m si esaurisce in una reazione del pendolo irrigidente in S_m .

Poiché $Q_{\gamma m} - Q'_{\gamma m} = A'_m A_m$, vettore parallelo a t_m , e poiché tale vettore rappresenta una forza diretta secondo il pendolo irrigidente in S_m , si può dire che le $Q'_{\gamma m}$ sono, come le $Q_{\gamma m}$, in equilibrio sulla $\Sigma_{\gamma\ell}$. Le reazioni R'_m dei pendoli irrigidenti sulla $\Sigma_{\gamma\ell}$ sotto le $Q'_{\gamma m}$ sono definite. Se si fanno agire sulla $\Sigma_{\gamma\ell}$ le $Q'_{\gamma m}$ e le R'_m , le R'_m scaricano completamente i pendoli irrigidenti; i punti A_m che così si ottengono definiscono le $Q_{\gamma m}$, per quanto detto sopra.

Vale ancora il teorema fondamentale, per cui dati un $\tilde{\psi}$ ed un $\tilde{\gamma}$ qualsiasi è

$$\tilde{\psi} \leq \tilde{\gamma} \quad (9)$$

Ed infatti, con riferimento alla $\Sigma_{\gamma\ell}$ ed allo spostamento che consentono di scrivere la (a), ed alle Q_{ψ} connesse con $\tilde{\psi}$, si può scrivere la relazione

$$\sum_m Q_{\psi m} \cdot \mathbf{q}_m^* = 0; \quad (c)$$

dalle (a) e (c) si trae

$$\sum_m (Q_{\gamma m} - Q_{\psi m}) \cdot \mathbf{q}_m^* = 0,$$

e cioè

$$\sum_m (OQ_m - \tilde{\gamma} Q_{jm}^* - Q_{\psi m}) \cdot \mathbf{q}_m^* = 0. \quad (d)$$

Poiché per definizione di $\tilde{\psi}$ è

$$(Q_{\psi m} + \tilde{\psi} Q_{jm}^*) \cdot \mathbf{q}_m^* \leq OQ_m \cdot \mathbf{q}_m^*,$$

da cui

$$Q_{\psi m} \cdot \mathbf{q}_m^* \leq (OQ_m - \tilde{\psi} Q_{jm}^*) \cdot \mathbf{q}_m^*,$$

la (d) porge

$$(\tilde{\psi} - \tilde{\gamma}) \sum_m Q_{jm}^* \cdot \mathbf{q}_m^* \leq 0.$$

La sommatoria è composta di termini tutti positivi (vedi ultima della (6)), quindi $\tilde{\psi} - \tilde{\gamma} \leq 0$, da cui la (9).

Poiché, come già fatto osservare, \tilde{s}_r è nello stesso tempo un $\tilde{\psi}$ ed un $\tilde{\gamma}$, la (9) porge, dati due qualsiasi $\tilde{\psi}$ e $\tilde{\gamma}$,

$$\tilde{\psi} \leq \tilde{s}_r \leq \tilde{\gamma}. \quad (10)$$

Ottenuto un $\tilde{\gamma}$ nel modo già indicato, e determinati i vettori $Q_{\gamma m}$, si calcolano i Q_{γ} in tutta la struttura; ciò si esegue sottoponendo $\Sigma_{\gamma \ell}$ alle $Q_{\gamma m}$, ed occorre attendersi che i pendoli posti a definire gli assi neutri non siano sollecitati. Naturalmente le Q_{γ} sono univocamente definite se e solo se $\Sigma_{\gamma \ell}$ non è iperstatica. Ottenuti per ogni sezione i Q_{γ} , e quindi i punti A (fig. 6), si costruiscono i domini

$$\frac{\gamma}{\tilde{\gamma} D_s},$$

e si calcolano i rapporti $\rho = \frac{OQ}{OQ'}$; se ρ_{\max} è il massimo tra i massimi ρ calcolati in tutte le sezioni, è immediato verificare che $\frac{\tilde{\gamma}}{\rho_{\max}}$

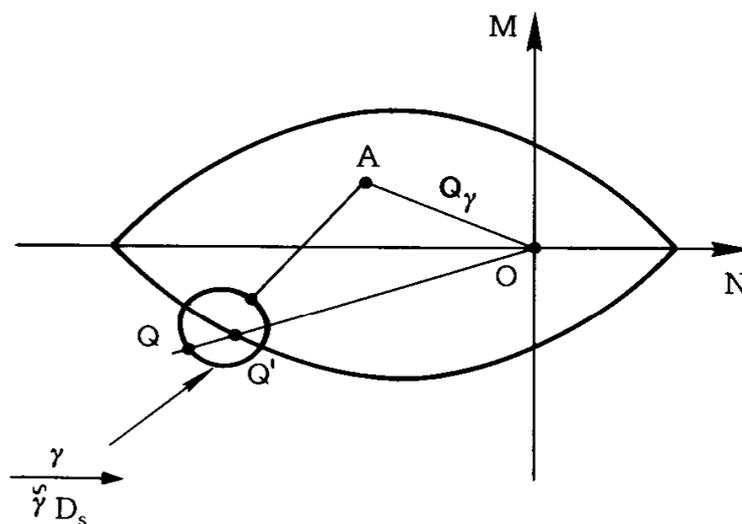


Fig. 6

è un $\tilde{\Psi}$, e quindi, per la (10),

$$\frac{\tilde{\gamma}}{\rho_{\max}} \leq \tilde{s}_r \leq \tilde{\gamma}. \quad (11)$$

3. Il collasso da fatica plastica

Sempre in presenza di più condizioni di carico $\{F_j\}$, può esistere un \tilde{s}_r rispettante le (2) tale che in presenza delle condizioni di carico $\{F_j\}$ comunque alternantesi si verifichi il *collasso per fatica plastica*; e cioè dopo un certo numero di alternanze si può generare un campo di vettori residui Q_r rispettoso delle (4), e per il quale in una sezione S_a il dominio

$$\frac{r}{\tilde{s}_r D_{sa}}$$

sia tangente alla Λ_a in due punti P'_a e P''_a ove i due q^* risultano paral-

da cui

$$(\tilde{\gamma} - \tilde{\psi}) (Q_{ja}^{*'} \cdot u' + Q_{ja}^{*''} \cdot u'') \geq 0.$$

Poiché la seconda parentesi è positiva, è $\tilde{\gamma} - \tilde{\psi} \geq 0$, da cui

$$\tilde{\gamma} \geq \tilde{\psi}.$$

La costruzione di un $\tilde{\gamma}$ da fatica plastica si effettua con (fig. 9) una

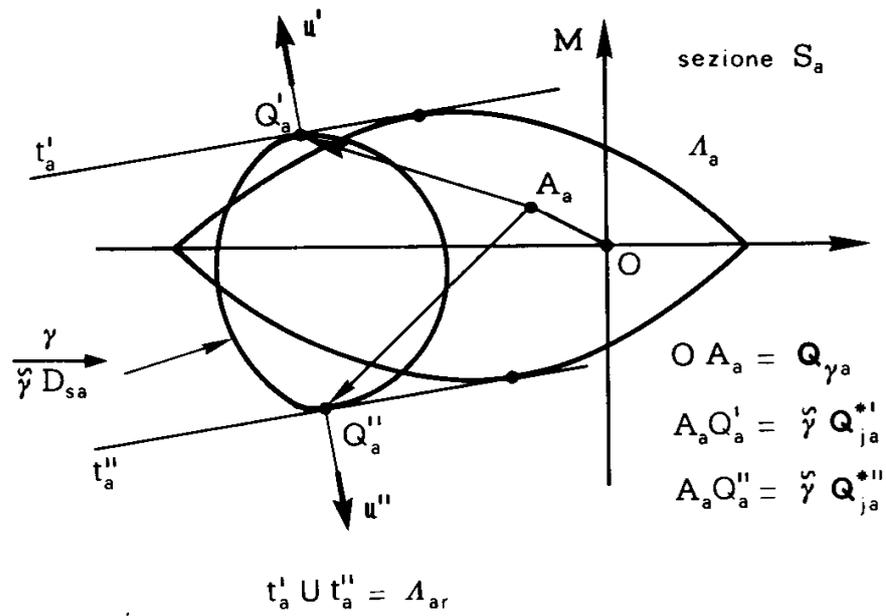


Fig. 8

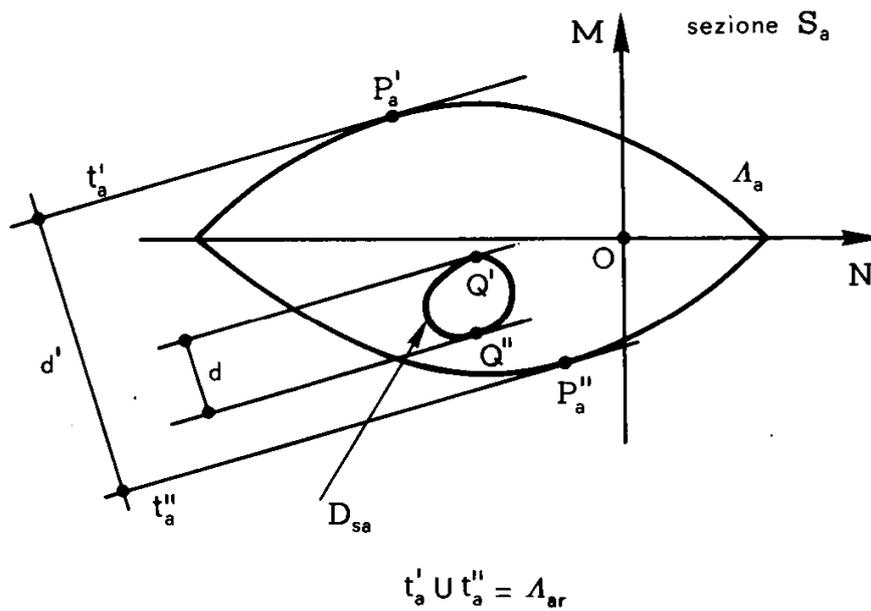


Fig. 9

generica sezione S_a , ed un generico concio endoirrigidito in S_a ; si ha

$$\tilde{\gamma} = \frac{d'}{d},$$

dove d' è la distanza tra le due rette t'_a e t''_a di Λ_{ar} , e d la distanza tra le due tangenti a D_{sa} parallele a tali rette. Il vettore $OA_a = Q_{\gamma a}$ (fig. 8) dipende dalla posizione del dominio $\tilde{\gamma} D_{sa}$, che comunque conviene sia tale da ridurre quanto possibile le fuoriuscite di $\tilde{\gamma} D_{sa}$ da Λ_{ar} ; basta infatti considerare in D_{sa} il vettore $Q_{ja}^{*'}$, e tracciare il vettore $\tilde{\gamma} Q_{ja}^{*'}$ con estremo in Q'_a ; l'altro estremo è il punto A_a tale che $OA_a = Q_{\gamma a}$. Ottenuto $Q_{\gamma a}$, si può in un modo qualsiasi calcolare il campo Q_γ nel rispetto dell'equilibrio, e quindi nel solito modo ottenere ρ_{max} e $\tilde{\psi}$.

La (9), valida sia per un $\tilde{\gamma}$ da collasso incrementale che per un $\tilde{\gamma}$ da fatica plastica, garantisce l'unicità di \tilde{s}_r , quale che sia tra le due l'effettiva crisi per carichi alternantisi (par. 4-2).

4. Il dominio di esercizio in presenza di carico accidentale uniforme comunque applicato.

Il caso del carico accidentale uniformemente distribuito si presenta di frequente nella pratica. Esso è dettato dai regolamenti per le strutture generiche; ma anche in strutture speciali, come quelle da ponte, ove sono imposte colonne indefinite di automezzi standard, tali colonne possono almeno in prima approssimazione essere assimilate ad un carico uniformemente distribuito. Se si tiene conto di una sola caratteristica, le zone impegnate dal carico accidentale uniformemente distribuito sono definite dalle linee d'influenza, che permettono così di ottenere i diagrammi dei valori massimi e minimi della caratteristica lungo l'asse della struttura. Può darsi però che occorra tener conto di due caratteristiche, come nelle strutture ad arco, ove non può prescindersi dalla contemporanea presenza di N ed M ; in tal caso le linee d'influenza possono solo fornire in ogni sezione le quattro coppie di valori $(M_{max} \ N')$ $(M_{min} \ N'')$ $(M' \ N_{max})$ $(M'' \ N_{min})$, dove N' ed N'' sono gli sforzi normali che accompagnano

M_{\max} ed M_{\min} , M' ed M'' i momenti flettenti che accompagnano N_{\max} ed N_{\min} . E' chiaro che, anche in un calcolo di tipo tradizionale condotto in fase elastica, le condizioni di carico più svantaggiose per la sezione generica possono non ritrovarsi nelle quattro suddette. Occorre quindi ottenere l'insieme di tutte le possibili coppie (MN), e cioè il già definito dominio di esercizio D_s , per metterlo in relazione con il dominio delle coppie (MN) cui si associa la fuoriuscita della sezione dal campo elastico; tale dominio è strettamente incluso nel dominio D_e di frontiera \wedge , poiché nel calcolo di tale dominio si assimila il diagramma reale $M\Delta\varphi$ alla bilatera ideale, e quindi il momento corrispondente all'apparire delle prime plasticizzazioni coincide con quello di prima plasticizzazione.

Nella verifica allo stato limite ultimo da meccanismo si è poi visto come la conoscenza del D_s nelle varie sezioni sia indispensabile per il calcolo del coefficiente \tilde{s}_r .

In presenza di carico accidentale uniformemente distribuito, è piuttosto facile determinare il D_s , sfruttando la conoscenza delle linee d'influenza delle due caratteristiche; nel seguito lo si farà in relazione alle coppie (NM), ma il procedimento è di carattere del tutto generale.

a) con riferimento^(*) ad una sezione generica S (fig. 10) si osserva anzitutto che se a è il valore del carico accidentale prescritto dal regolamento, tale valore può variare da zero ad a ; quindi, se P è un punto di D_{ss} , lo sono pure tutti i punti del segmento PO. Se ne trae che ogni semiretta OP di origine O ha in comune un solo punto A con la frontiera di D_{ss} . Si badi che un punto come P, interno a D_{ss} , può anche essere attinto per un valore del carico accidentale pari a quello a di regolamento, agente su una zona diversa da quelle che forniscono i punti di frontiera; viceversa, un punto di frontiera come A non può essere attinto, per quanto detto sopra, che sotto il valore a di regolamento. Se perciò si vuole tracciare la frontiera di D_{ss} occorre riferirsi sempre ad a .

b) Una variazione elementare della condizione di carico che fornisce un punto A di frontiera è in tal caso costituita comunque da una forza dF verticale di valore $a dz$ agente nella zona scarica, o da una

(*) Nella trattazione che segue si prescinde dal carico fisso, di cui si tiene conto poi traslando il dominio D_{ss} .

forza verticale dF di valore $-a dz$ agente nella zona carica (fig. 10). Nel primo caso è

$$\frac{dM}{dN} = \frac{a dz \cdot m_S(z)}{a dz \cdot n_S(z)} = \frac{m_S(z)}{n_S(z)}, \quad (12')$$

nel secondo

$$\frac{dM}{dN} = \frac{-a dz \cdot m_S(z)}{-a dz \cdot n_S(z)} = \frac{m_S(z)}{n_S(z)} ; \quad (12'')$$

l'inclinazione del vettore AA_v di componenti dM e dN è perciò sempre data dal rapporto $\frac{m_S(z)}{n_S(z)}$, dove z è l'ascissa di applicazione della

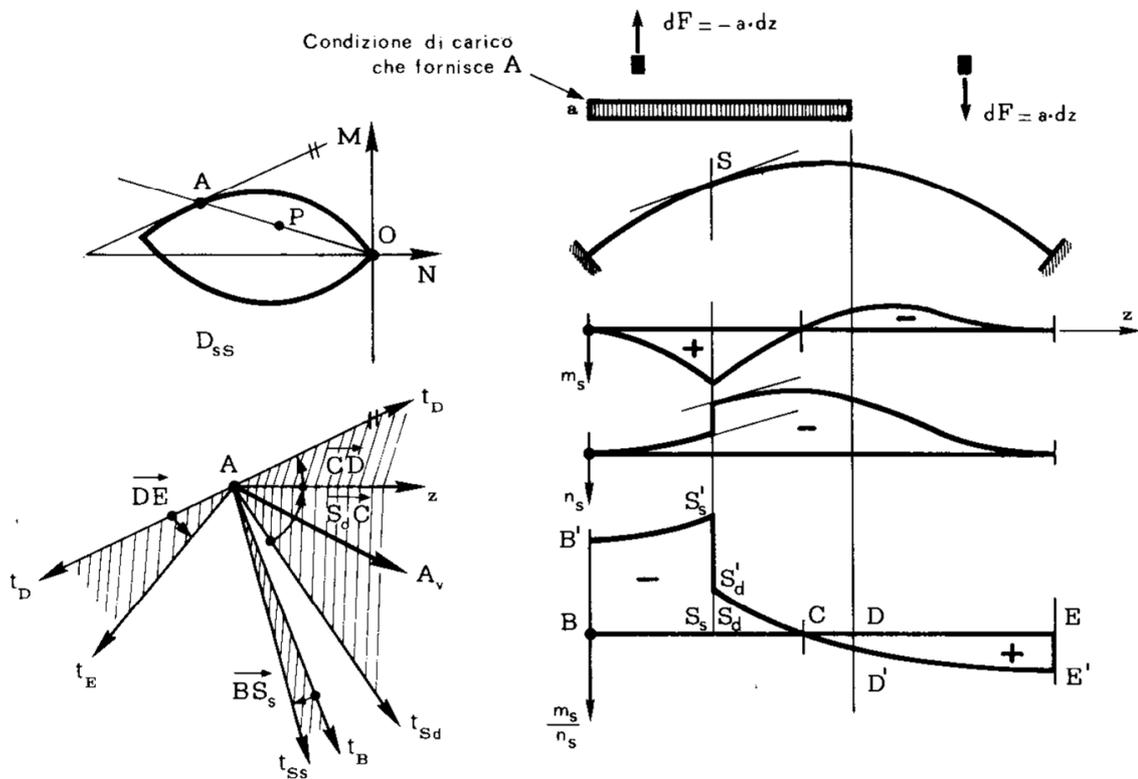


Fig. 10

forza $\pm a dz$, ma il vettore ha verso opposto nei due casi. Costruito il diagramma $z \rightarrow \frac{m_S}{n_S}$, è facile dalle (12') e (12'') ricavare la parte di

piano, e cioè gli angoli con vertice in A, entro cui il vettore AA_v può essere compreso; comunque, si riconosce così immediatamente che la frontiera di D_{s_s} è una curva chiusa.

Nella fig. 10 sono contenuti gli elementi per determinare gli angoli suddetti. Se la variazione avviene in BS_s è

$$dM = -a \, dz \, m_s < 0$$

$$dN = -a \, dz \, n_s > 0$$

$$\frac{dM}{dN} < 0 ;$$

mentre la forza $-a \, dz$ viaggia da B ad S_s la semiretta t di origine A, che definisce in direzione e verso il vettore AA_v , ruota da t_B a t_{S_s} , ove

$$\operatorname{tg} \hat{z} t_B = BB'$$

$$\operatorname{tg} \hat{z} t_{S_s} = S_s S'_s .$$

Si ha così il quadro seguente:

	dF	m_s	n_s	$\frac{m_s}{n_s}$	dM	dN	$\operatorname{tg} \hat{z} t_1$	$\operatorname{tg} \hat{z} t_2$
\vec{BS}_s	-	+	-	-	-	+	$BB'(-)$	$S_s S'_s(-)$
$\vec{S}_d C$	-	+	-	-	-	+	$S_d S'_d(-)$	O
\vec{CD}	-	-	-	+	+	+	O	$DD'(+) $
\vec{DE}	+	-	-	+	-	-	$DD'(-)$	$EE'(-)$

Si osserva da questo quadro che una variazione elementare della zona di carico cui A si riferisce, fermo restando il valore a del carico distribuito, induce una variazione dM dN delle caratteristiche MN fornita da un vettore AA_v compreso in uno dei tre angoli tratteggiati della fig. 10. Nel caso in esame la tangente in A è unica, ed è fornita dalla retta t_D inclinata di DD' sull'asse delle z .

c) I punti K' e K'' (fig. 11) corrispondenti ad M_{\max} ed M_{\min} sono punti di frontiera per D_{ss} , e così pure i punti H' ed H'' corrispondenti ad N_{\max} ed N_{\min} . Se infatti K' non fosse di frontiera, esisterebbe un aperto contenente K' ed appartenente a D_{ss} , e cioè un punto di ordinata $M > M_{\max}$ appartenente a D_{ss} , e questo è assurdo.

Il rettangolo incluso tra le due rette parallele all'asse delle N per K' e K'' , e tra le due rette parallele all'asse delle M per H' ed H'' , include strettamente D_{ss} .

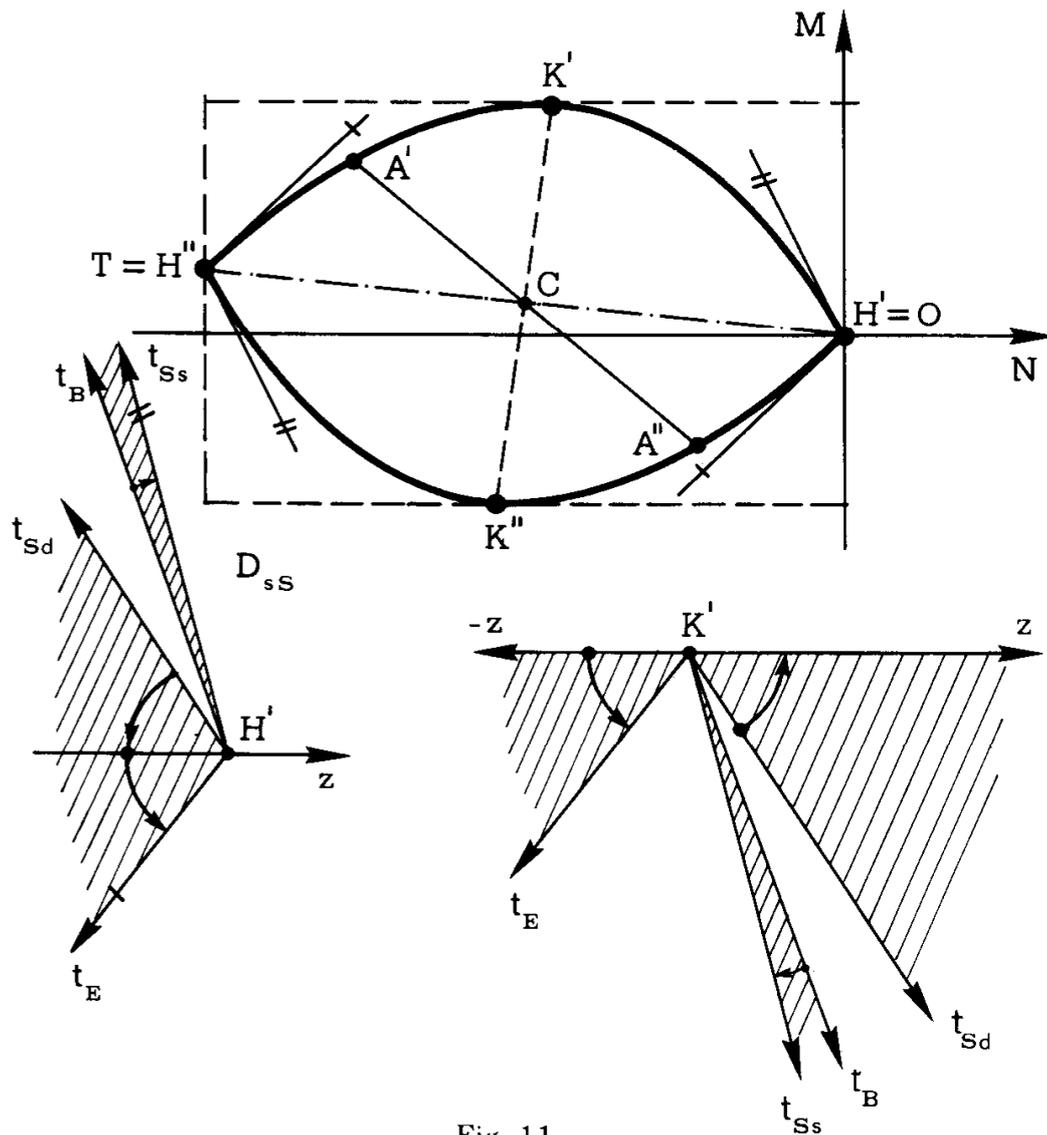


Fig. 11

E' facilmente verificabile che, chiamando T il punto di coordinate $N_T M_T$ corrispondenti al carico a esteso a tutta la luce, ed A' e A'' i punti corrispondenti a due qualsiasi condizioni complementari di carico, si ha

$$M_T = M_A + M_{A'}$$

$$N_T = N_A + N_{A'}$$

e quindi

$$\frac{M_A + M_{A'}}{2} = \frac{M_T}{2}$$

$$\frac{N_A + N_{A'}}{2} = \frac{N_T}{2} ;$$

ciò significa che il punto C del segmento OT, di coordinate $\frac{N_T}{2} \frac{M_T}{2}$, è anche punto medio del segmento $A'A''$, e quindi la frontiera di D_{sS} è dotata di simmetria polare rispetto a C. Le coordinate di C corrispondono alle caratteristiche NM in S per effetto di un carico $\frac{a}{2}$ esteso a tutta la luce. Nel caso in esame T coincide con H'' , O con H' .
d) Conviene tracciare innanzitutto i quattro punti $H' H'' K' K''$, e le rispettive tangenti; questo potrebbe già essere sufficiente per disegnare con buona approssimazione la frontiera di D_{sS} . Nel caso in esame, come già detto, il punto H corrisponde alla struttura scarica; qualsiasi variazione è una forza $a dz$, e si ha il quadro

	dF	m_s	n_s	$\frac{m_s}{n_s}$	dM	dN	$\text{tg } \hat{z}t_1$	$\text{tg } \hat{z}t_2$
\rightarrow BS _s	+	+	-	-	+	-	BB'(-)	S _s S' _s (-)
\rightarrow S _a C	+	+	-	-	+	-	S _a S' _a (-)	O
\rightarrow CE	+	-	-	+	-	-	O	EE'(-)

Quindi, i due angoli in cui il vettore $H'H'_v$ può essere compreso sono quelli definiti (fig. 11) dalle semirette $(t_B t_{S_s})$ e $(t_{S_d} t_E)$; la t_{S_s} e la t_E forniscono le due tangenti in H' alla frontiera di D_{sS} . Le inclinazioni di queste due rette sono date dai segmenti $S_s S'_s$ ed EE' della fig. 10; e cioè dai massimi e minimi di $\frac{m_s}{n_s}$.

Per H'' può ripetersi il ragionamento fatto per H' ; poiché infatti H'' corrisponde alla struttura soggetta al carico a su tutta la luce, qualsiasi variazione è una forza $-a dz$, e si riottiene così il quadro riportato per H' , con i soli segni della colonna a cambiati. Ciò era da attendersi, per quanto detto circa la simmetria polare della frontiera di D_{sS} .

Il punto K' corrisponde al carico a agente su BC . Si ha così il quadro

	dF	m_s	n_s	$\frac{m_s}{n_s}$	dM	dN	$\text{tg } \hat{z}t_1$	$\text{tg } \hat{z}t_2$
\vec{BS}_s	-	+	-	-	-	+	$BB'(-)$	$S_s S'_s(-)$
$\vec{S_d C}$	-	+	-	-	-	+	$S_d S'_d(-)$	O
\vec{CE}	+	-	-	+	-	-	O	$EE'(+)$

i tre angoli in cui il vettore $K'K'_v$ può essere compreso sono quelli definiti (fig. 11) dalle semirette $(t_B t_{S_s})$, $(t_{S_d} z)$ e $(-z, t_E)$, e quindi la tangente alla frontiera di D_{sS} in K' è unica e parallela all'asse delle ascisse. Altrettanto accade in K'' .

e) Il dominio D_{sS} è convesso. Infatti, si consideri il generico punto A (fig. 10) e la variazione $AA_v = AA_1$ secondo la tangente t_D ascendente.

Tale AA_1 è dovuta ad una dF agente all'ascissa \bar{z} , e corrisponde allo scarico in \bar{z} di un tratto dz ($dF = -a dz$), o al carico in \bar{z} dello stesso tratto ($dF = a dz$), secondo che detto tratto è soggetto o meno ad a nella condizione di carico corrispondente ad A .

Nella condizione di carico corrispondente ad A_1 si voglia poi la tangente ascendente in A_1 ; non si può operare sul tratto dz prima considerato, perché la dF sarebbe di segno contrario a quello che porta

da A ad A_1 , e porterebbe quindi da A_1 ad A sulla tangente discendente. Quindi in A_1 i possibili vettori $A_1 A_{1v}$ coincidono con i possibili vettori AA_v in A , ad eccezione di AA_1 che invece è di segno opposto. Se ne trae che la tangente in A_1 è meno inclinata di quella in A .

Operando come sopra detto, è possibile tracciare (fig. 11) una delle due parti $H'K'H''$ o $H'K''H''$ della frontiera di D_{ss} , per successivi segmenti di tangente; l'altra parte è simmetrica della prima rispetto a C .

f) Il dominio della fig. 11 è dovuto al solo carico accidentale, come già precisato. Occorre adesso tener conto del peso proprio, e della variazione termica uniforme Δt variabile tra $\Delta t_1 < 0$ e $\Delta t_2 > 0$ (fig. 12).

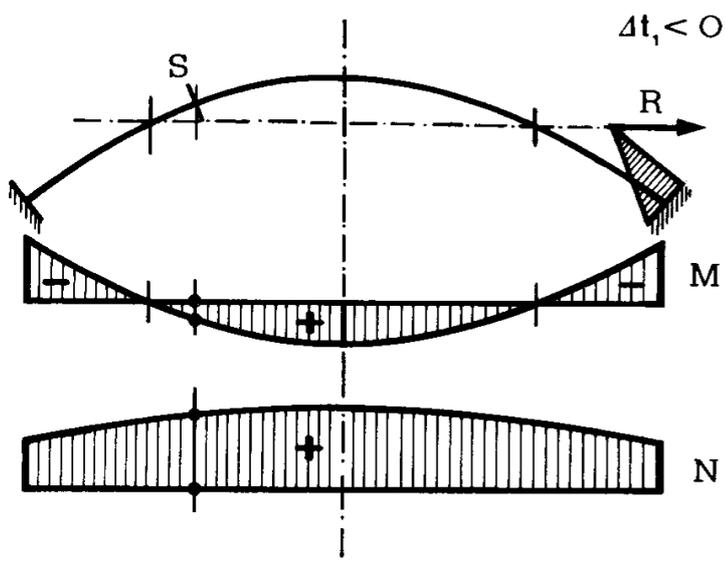


Fig. 12

In genere l'asse dell'arco coincide con una funicolare del peso proprio; se si trascura la caduta di spinta per accorciamento da sforzo assiale, il punto (fig. 13) di coordinate $N_g M_g$ giace sull'asse delle ascisse, ed N_g è la base della funicolare (punto H). Ciò è lecito però solo se l'arco è snello, e poco ribassato; la caduta di spinta equivale ad una $\Delta t < 0$, e perciò tenerne conto equivale a spostare il punto H verso destra in A sulla retta $B_1 B_2$ delle variazioni termiche (vedi appresso).

E' quindi

$$OA = Q_g .$$

L'effetto in S di $\Delta t_1 < 0$ è (fig. 12) un momento positivo M'_{ts} ed uno sforzo normale positivo N'_{ts} ; il vettore AB_1 di tali componenti definisce (fig. 13) il punto B_1 . Analogamente, $\Delta t_2 > 0$ definisce B_2 .

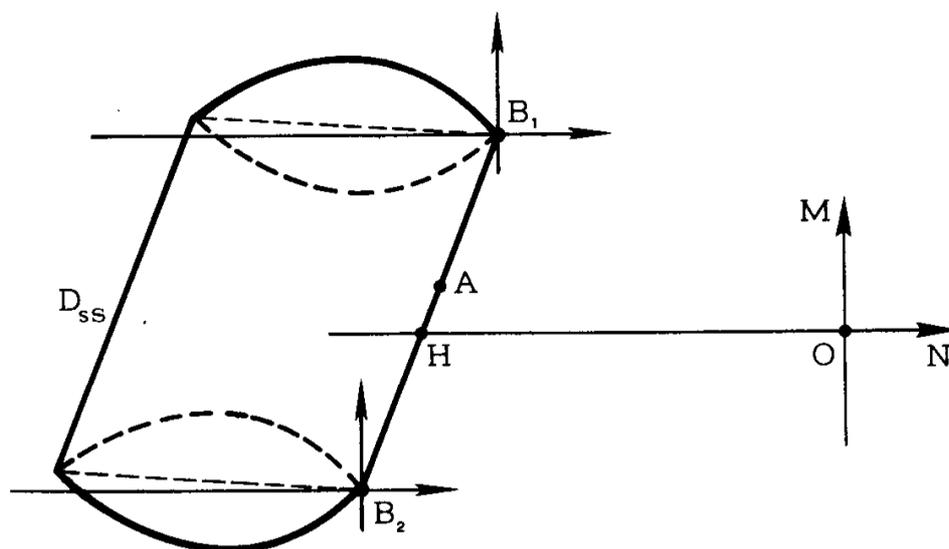


Fig. 13

Per effetto delle variazioni termiche Δt , l'estremo del vettore $Q(NM)$ percorre quindi su e giù il segmento B_1B_2 (*retta delle variazioni termiche*). Il dominio di esercizio si ottiene eseguendo la costruzione della fig. 11 con riferimento alla coppia di assi NM traslata con origine in B_1 e B_2 ; D_{ss} è la zona ricoperta dal dominio della fig. 11 (*dominio del carico accidentale*) nella traslazione da B_1 a B_2 .

Un calcolo in fase elastica imporrebbe di tener conto dell'effetto del ritiro; e cioè il punto A dovrebbe ulteriormente spostarsi verso destra sulla retta delle variazioni termiche, poiché anche il ritiro equivale ad una $\Delta t < 0$. Però le distorsioni costanti non giocano alcun ruolo nella determinazione del coefficiente di sicurezza a rottura; ed infatti le caratteristiche da esse generate rientrano nel vettore Q_r del par. 2. Altrettanto non accade per le variazioni termiche, ed in generale per tutte le distorsioni variabili, nel quadro più generale della verifica di sicurezza sotto azioni variabili.

A tale proposito si fa osservare che anche lo spostamento HA dovuto alla caduta di spinta per accorciamento assiale può in rigore non essere chiamato in gioco; anche gli HA infatti sono in equilibrio con forze nulle, e quindi rientrano nei Q_r del par. 2.

5. Il calcolo automatico del coefficiente di sicurezza

Può ripetersi qualcosa di analogo a quanto detto in fine del par. 6-7 circa la possibilità di calcolare numericamente \tilde{s}_r utilizzando i procedimenti di programmazione lineare. Date infatti le X_j , che stavolta sono le n reazioni iperstatiche, sono definiti in ogni sezione i vettori Q_ψ . Linearizzando il D_s , la disequazione (6 u)

$$-c_2 \leq aN + bM \leq -c_1 \quad (e)$$

continua a valere; N ed M sono forniti da

$$N = N_\psi + \psi N_c \quad (f)$$

$$M = M_\psi + \psi M_c ,$$

dove N_c M_c sono le coordinate di uno dei vertici di D_s . Dalle (f) si trae che N ed M sono funzioni lineari delle X_j e di ψ ; le (f) sono in numero di $2hk\ell$, se k è il numero delle sezioni di assaggio, h il numero di coppie di rette che definisce \wedge in ogni sezione, ℓ il numero di coppie di rette che definisce D_s in ogni sezione.

Le (f), unitamente alla condizione $\psi = \max$, si prestano al calcolo di \tilde{s}_r secondo le tecniche della programmazione lineare; infatti $\tilde{s}_r = \max \{ \psi \}$. Si osservi che comunque, anche seguendo la via del calcolo numerico testé esposta, è opportuno il calcolo di un γ e relativo ψ per via diretta, per un controllo della esattezza dei risultati forniti dall'elaboratore di dati.

6. Un esempio numerico

a) si prende in considerazione l'arco cellulare incastrato della fig. 14, di luce 100 m e freccia 20 m. Le dimensioni e l'armatura della sezione retta sono costanti; solo l'altezza varia da 2,50 m all'imposta ad 1,80 m in chiave. Le stilate di collegamento sono alle ascisse 10 m, 20 m, 30 m dalle imposte; al centro, per 28 m, la soletta superiore dell'arco ha pure funzione di impalcato. Nella tab. 1 sono riportati i valori caratteristici degli scarichi G_s delle stilate sull'arco, ed i pesi G_a dei tronchi dell'arco ottenuti con sezioni orizzontalmente equidistanti di 5 m.

TABELLA 1

z(m)	G _s (t)	G _a (t)
2,5		64
7,5		61
10	91	
12,5		58
17,5		55
20	84	
22,5		53
27,5		51
30	64	
32,5		49
36	24	
37,5		47
42,5		46
47,5		45

L'asse dell'arco coincide con una funicolare dei suddetti pesi propri; H = 884 t.

Il carico accidentale caratteristico, uniformemente distribuito, è pari a 6 t m⁻¹; è poi Δt ∈ [-15°, +15°].

Per il tracciamento dei domini di esercizio D_s si è preso γ_f = 1,5 sia per il peso proprio, che per il carico accidentale e per la variazione termica; ciò anche se in genere il γ_f per peso proprio è minore.

Si è poi assunto R'_{b_k} = 180 Kg cm⁻², e per l'acciaio R_{ak}(s) = 3000 Kg cm⁻²; si è operato quindi con le tensioni di calcolo (cap. 2, par. 3)

$$\sigma_{fo} = \frac{R_{ak}(s)}{1,15} = 2600 \text{ Kg cm}^{-2} \tag{g}$$

$$\sigma_{co} = \frac{0,85 R'_{bk}}{1,4} = 110 \text{ Kg cm}^{-2} .$$

Nelle figg. da 15 a 20 si sono disegnate, per le sezioni alle ascisse 0, 10 m, 20 m, 30 m, 40 m, 50 m, le linee d'influenza m_s ed n_s , ed i diagrammi $\frac{m_s}{n_s}$. Sono anche disegnati i domini D_{ss} dovuti soltanto ad un carico distribuito di 1 t m^{-1} , ed in scala più ridotta i domini D_{ss} dovuti al carico $\gamma_f a = 9 \text{ t m}^{-1}$ ed a $\Delta t \in [\gamma_f \Delta t_1, \gamma_f \Delta t_2]$ e cioè $\Delta t \in [-22,5^\circ, +22,5^\circ]$.

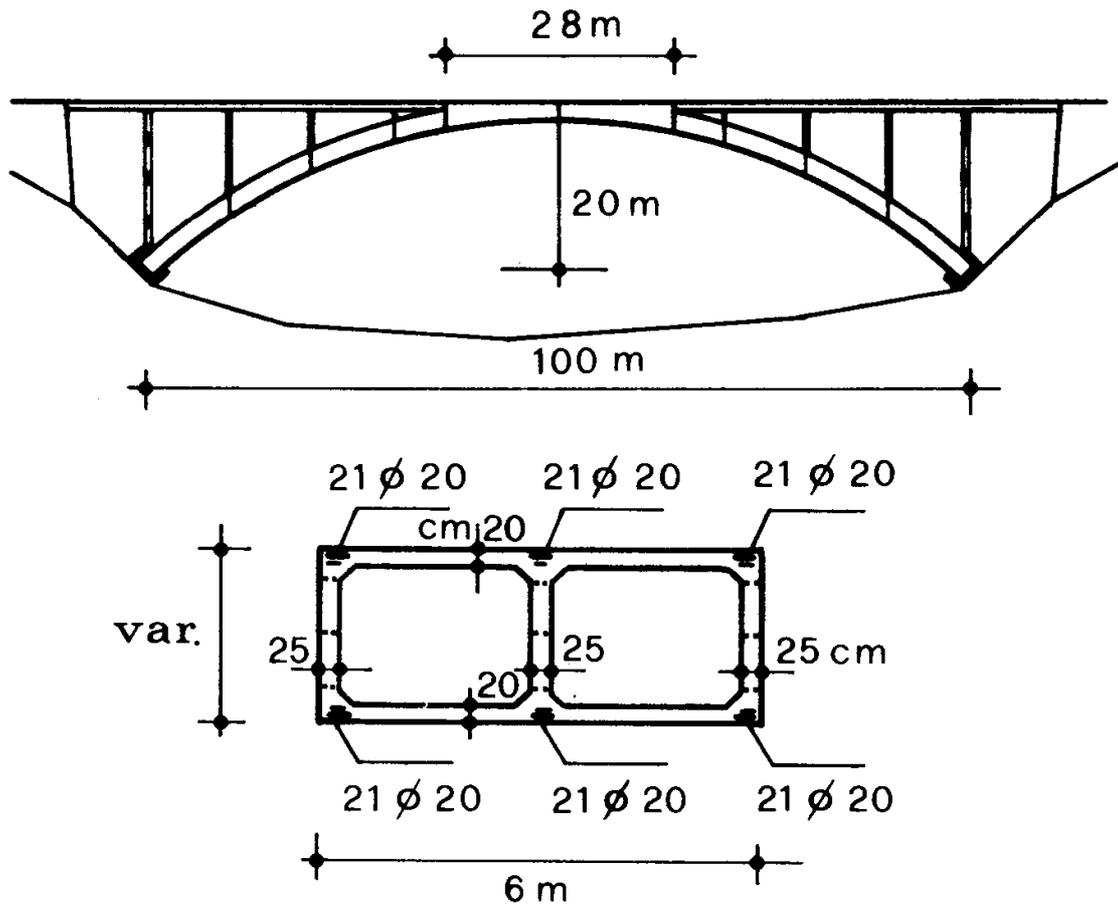


Fig. 14

Nella fig. 21 sono disegnate, per le sei sezioni suddette, le curve Λ di calcolo, ottenute attraverso i valori (g), e nella stessa scala i domini D_{es} di calcolo a $\gamma_f a$, $\gamma_f g$ e $\gamma_f \Delta t$. Accettando in un calcolo tradizionale i diagrammi $M \Delta \varphi$ bilateri, il calcolo del coefficiente s_e di sicurezza nei riguardi dell'emergere delle prime plasticizzazioni va eseguito con i dati della fig. 21; le sezioni S ove si verificano le suddette plasticizzazioni sono infatti quelle (almeno due) ove il rapporto $\rho = \frac{OP}{OP'}$ è più basso, e la condizione di carico che le produce è quella (fig. 1) corrispondente al vettore Q_{vj} (definito dal punto P') del D_{es} dovuto soltanto al carico accidentale ed alle variazioni termiche.

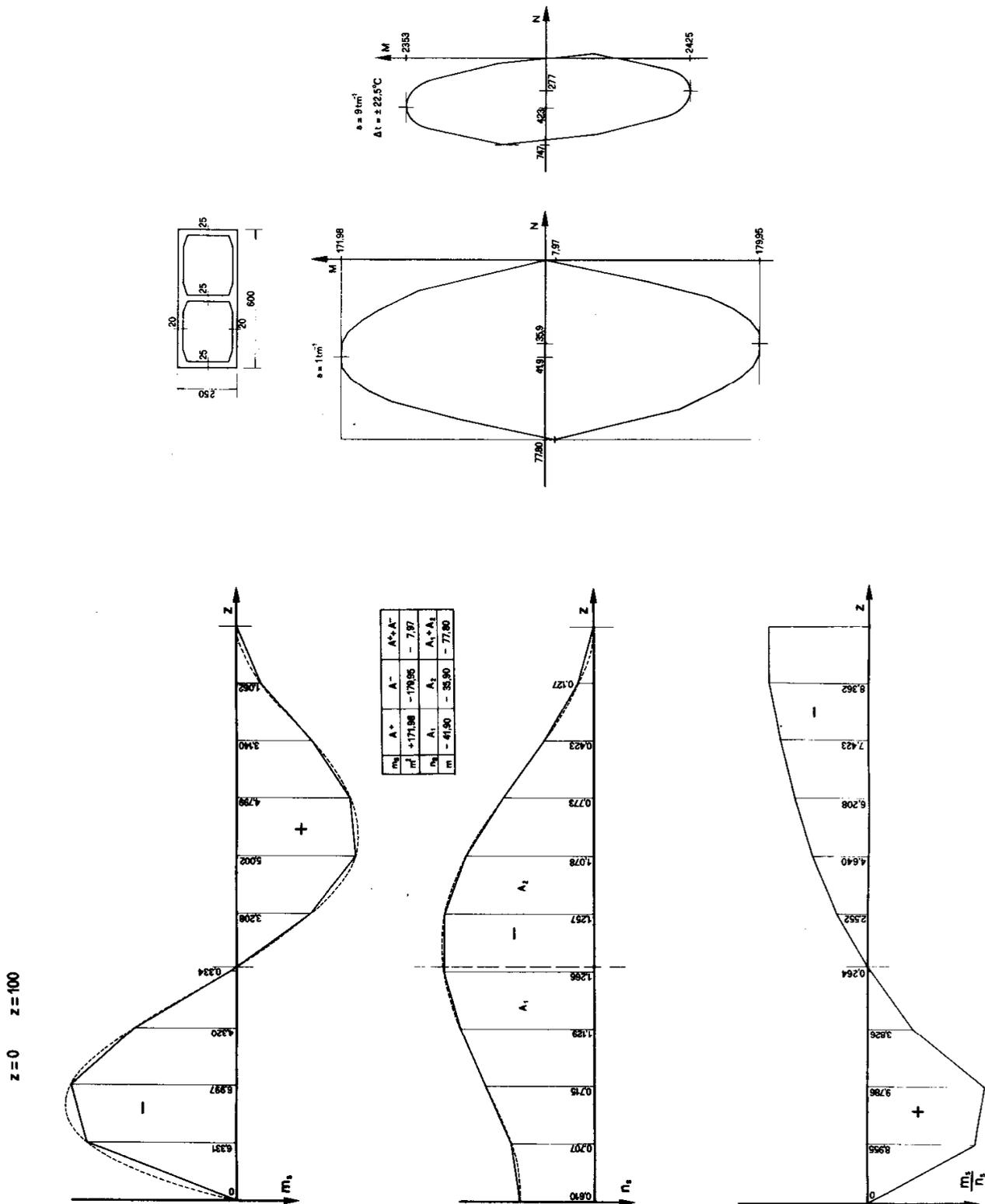


Fig. 15

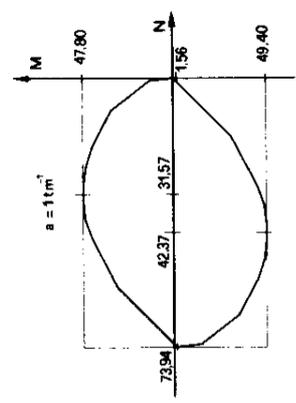
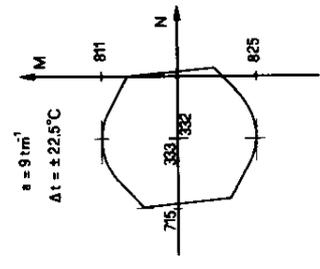
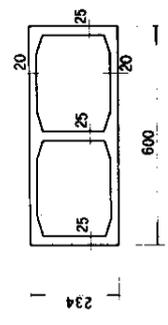
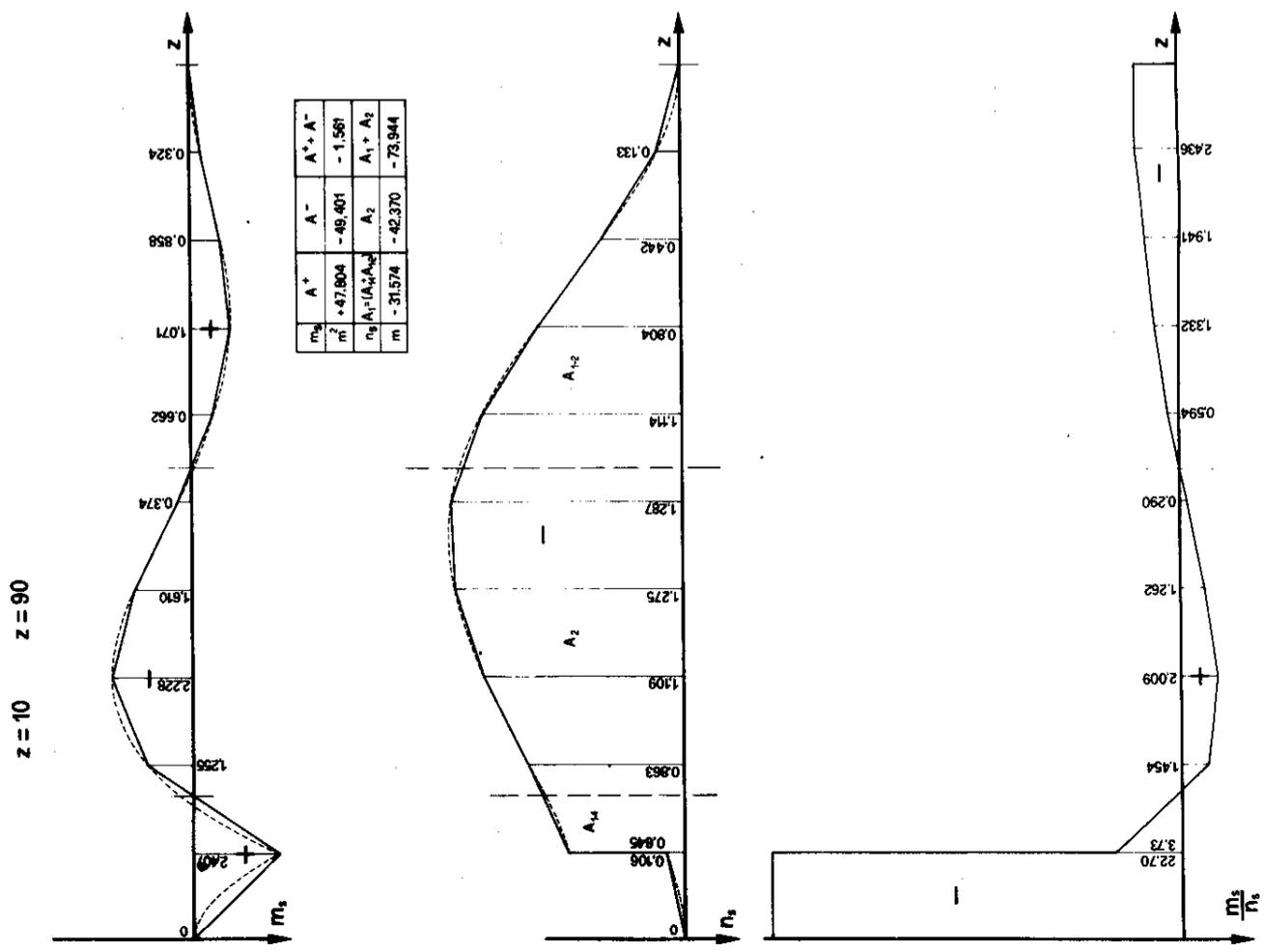


Fig. 16

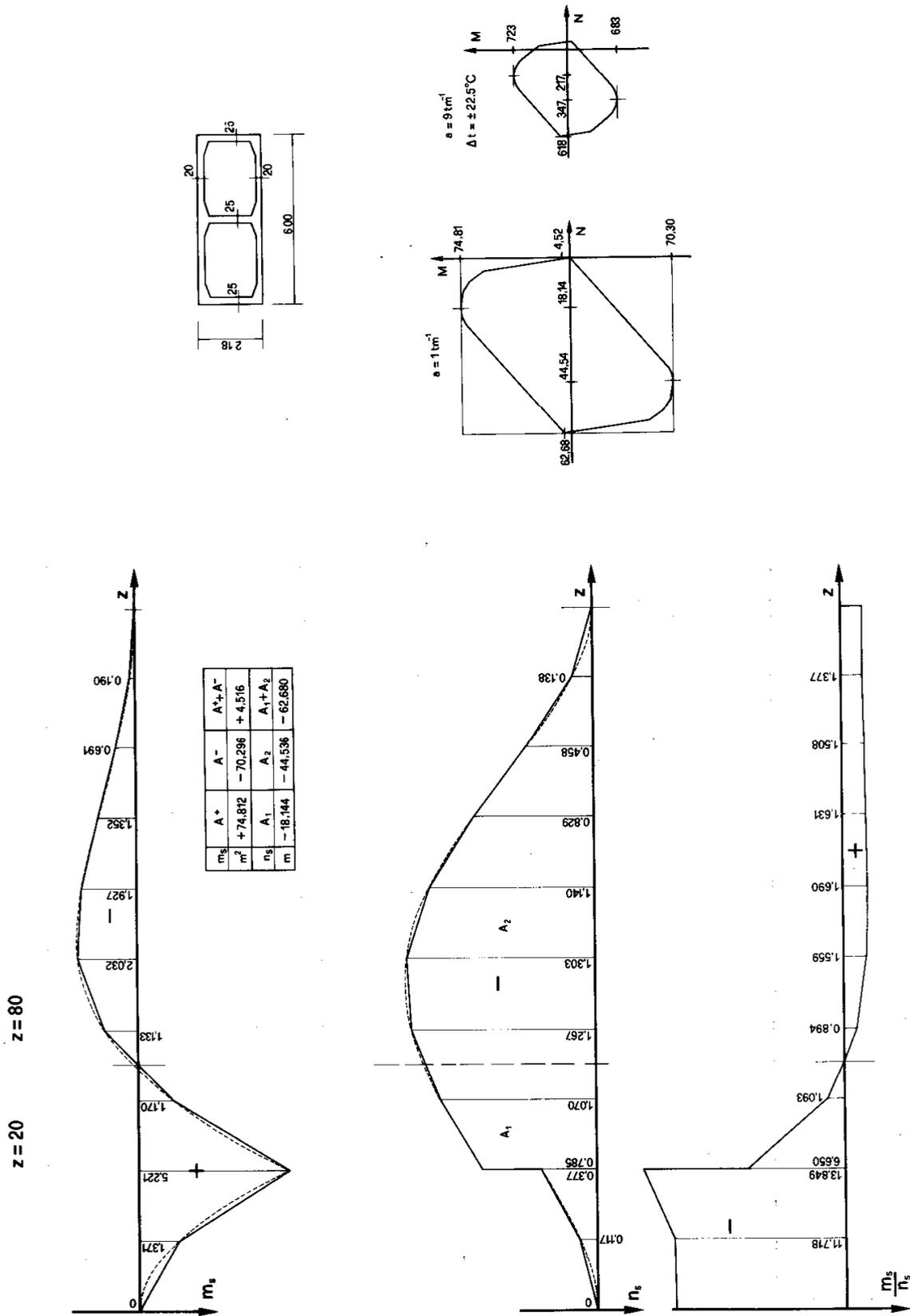


Fig. 17

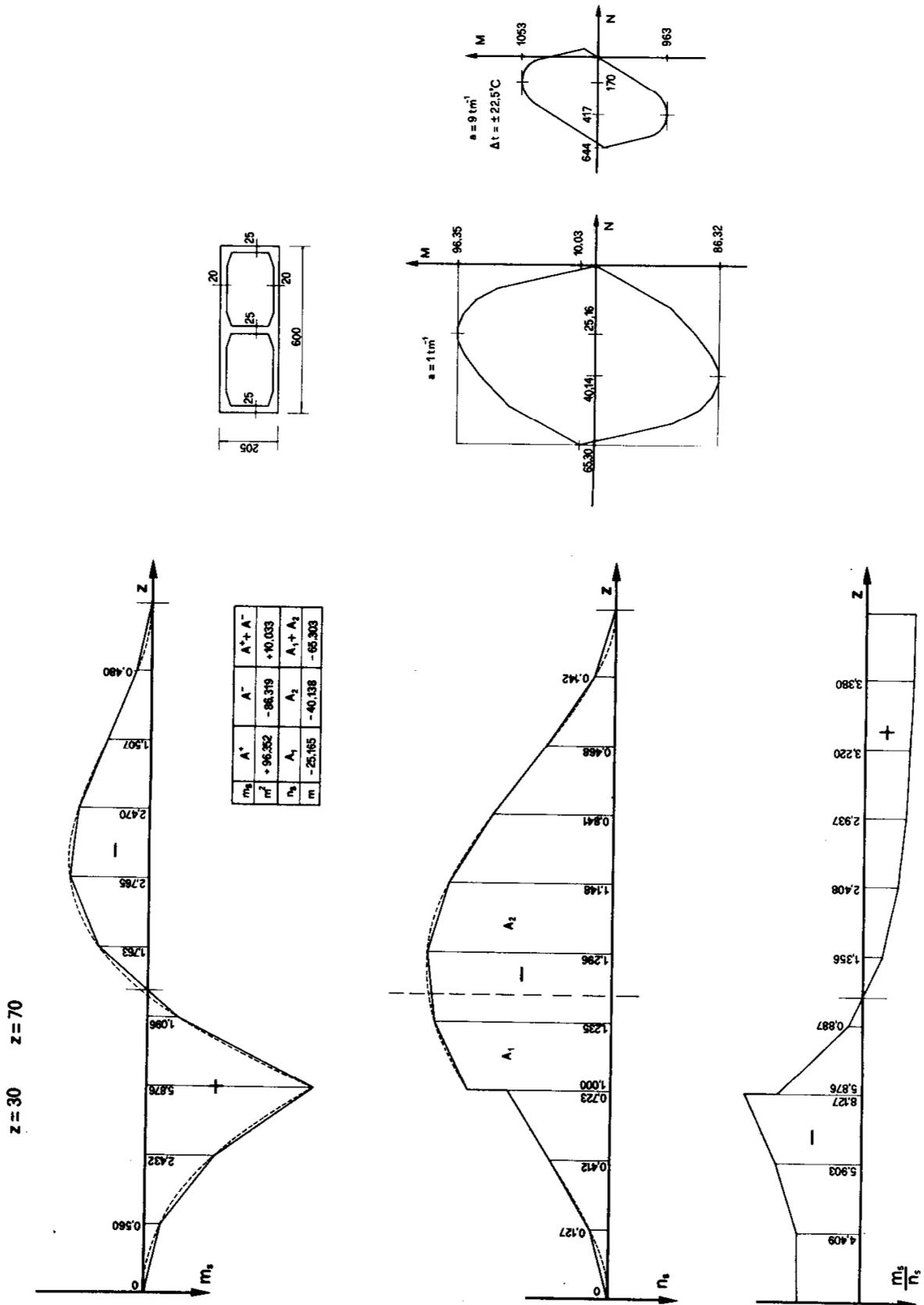


Fig. 18

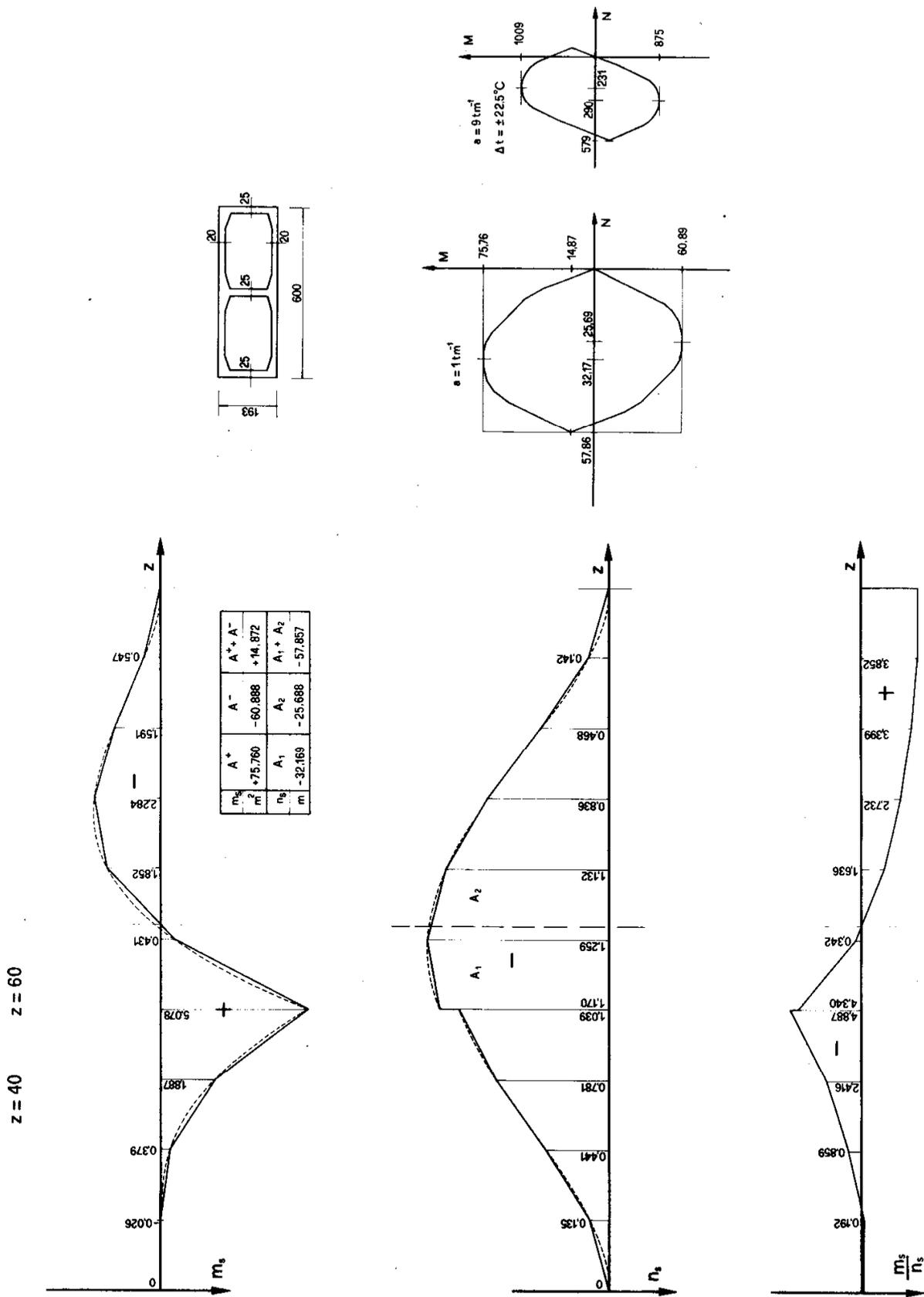


Fig. 19

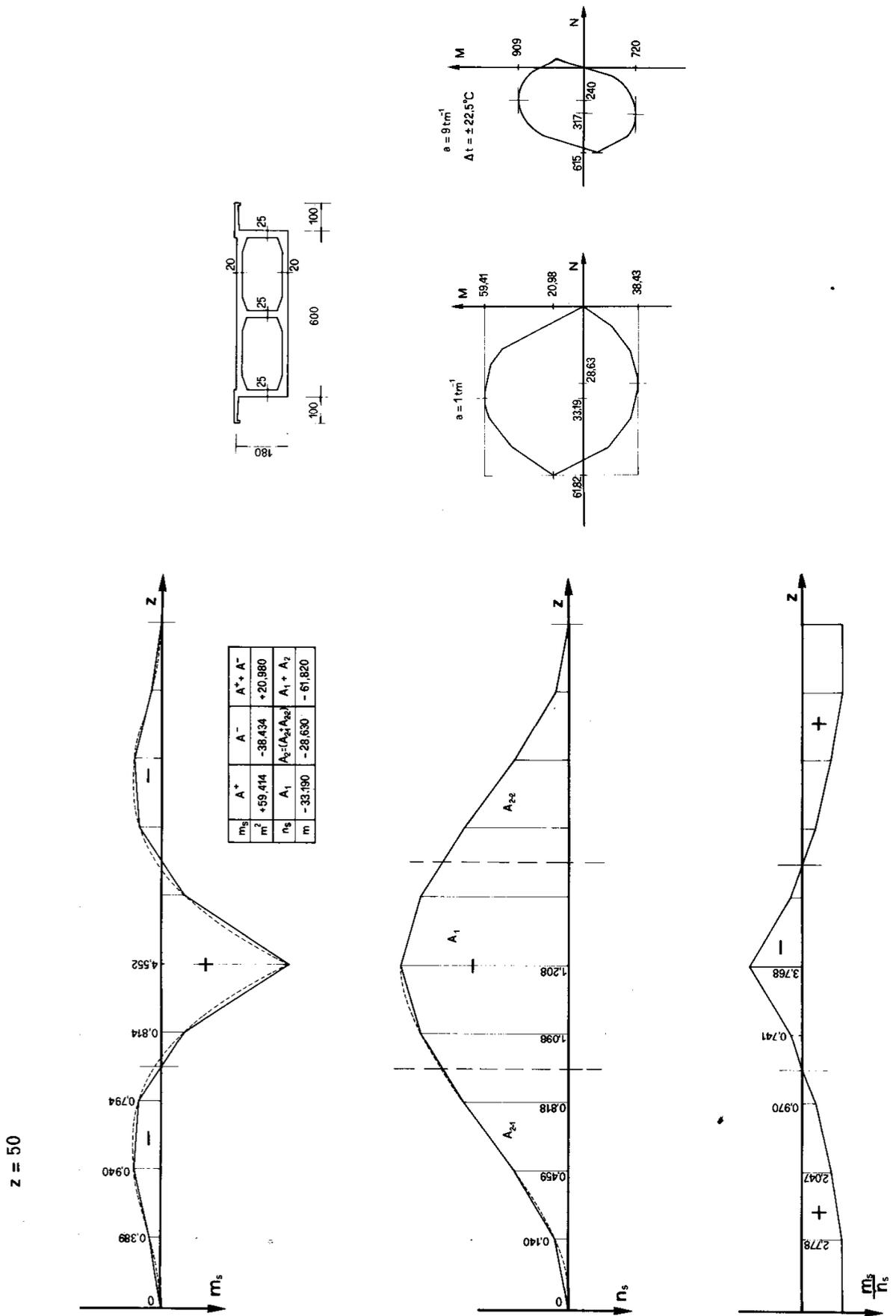


Fig. 20

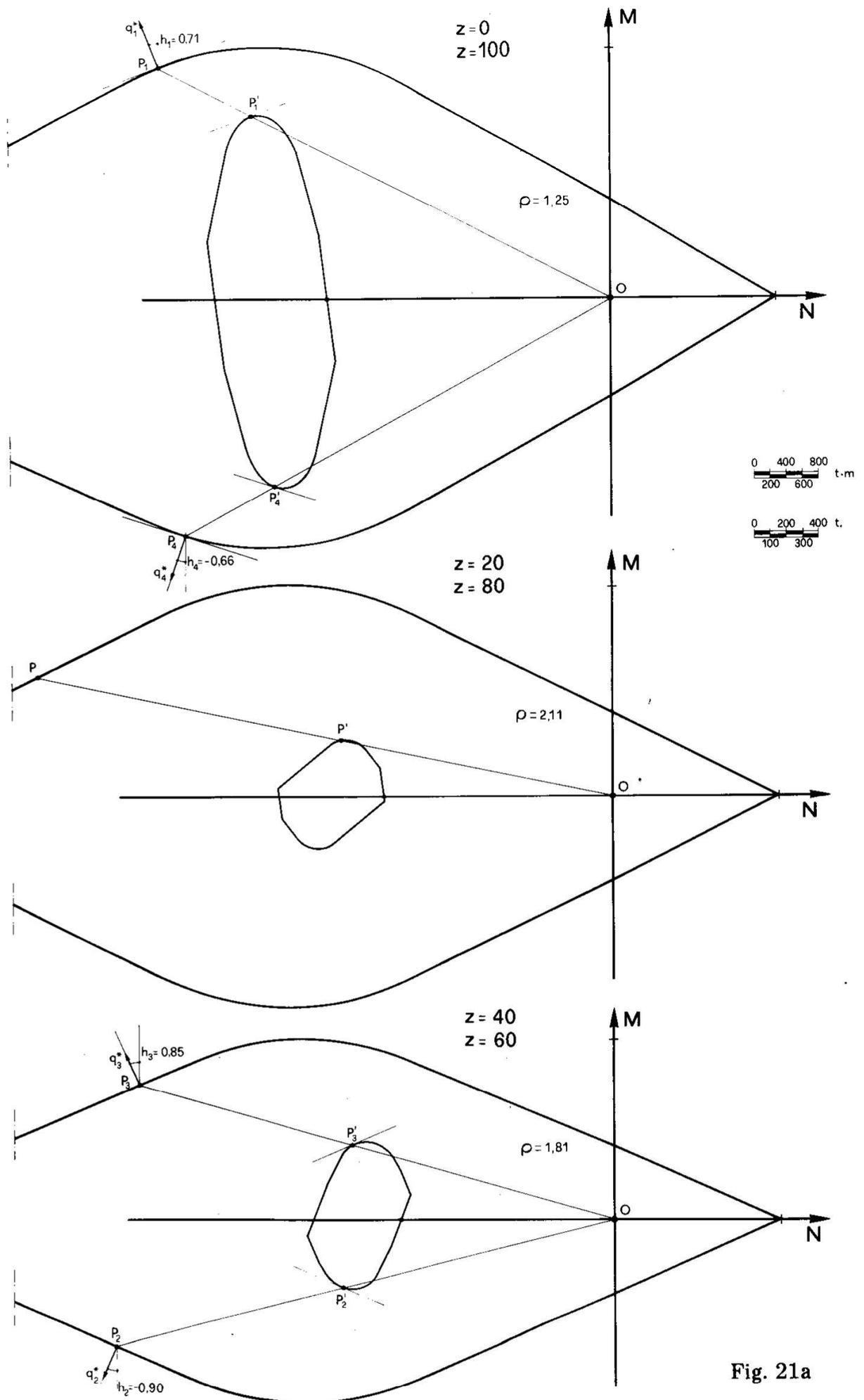


Fig. 21a

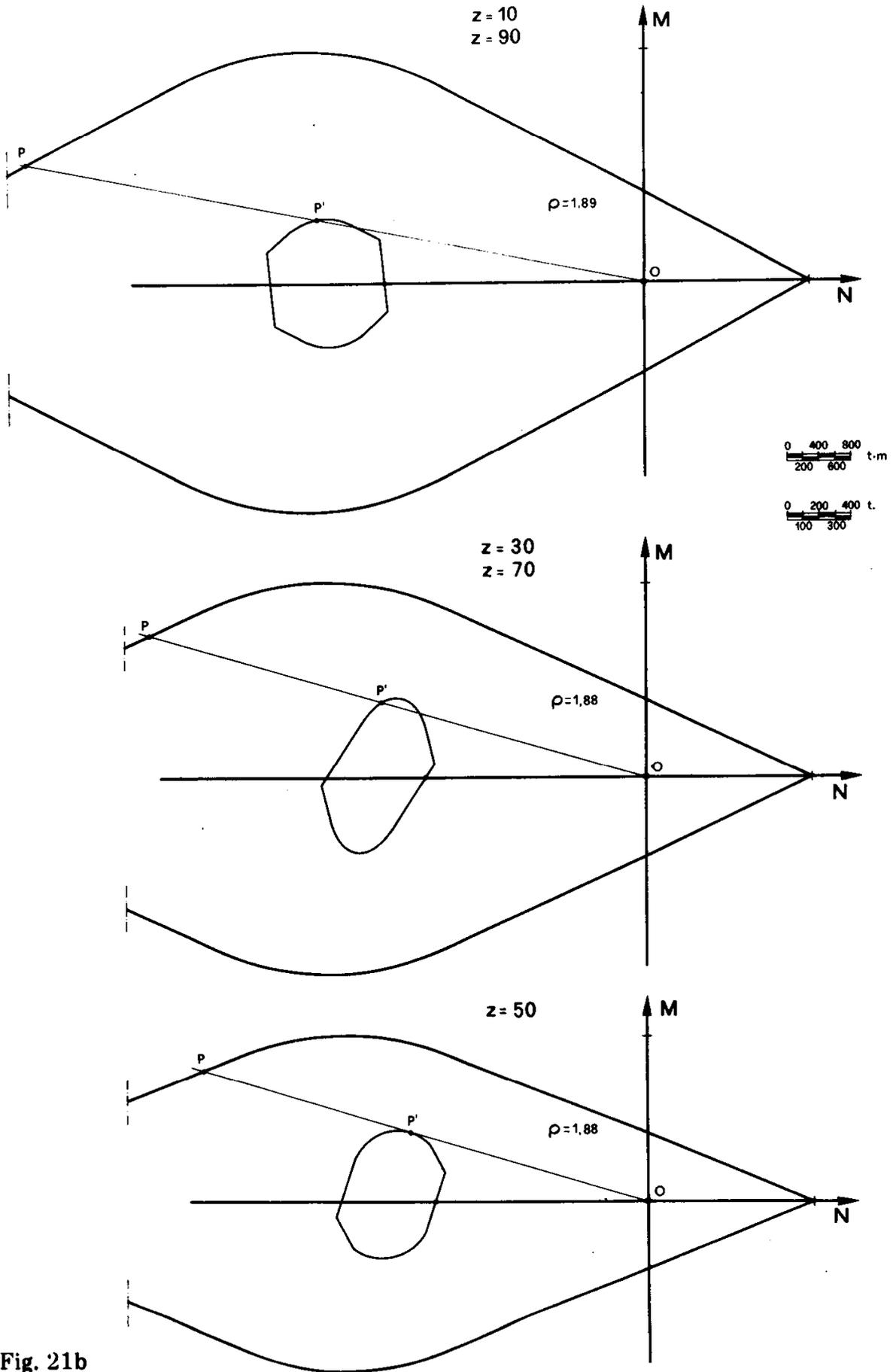


Fig. 21b

Nel caso in esame le sezioni di crisi sono solo quelle d'imposta, e risulta

$$s_e = 1,25 . \quad (h)$$

Ci si dovrà attendere quindi

$$\tilde{s}_r > 1,25 . \quad (i)$$

b) Per fissare la Σ_γ onde ottenere il primo γ , è molto utile lo studio delle situazioni della fig. 21; converrà infatti che i conchi endoirrigiditi siano ubicati nelle quattro sezioni ove ρ è più basso, e cioè nelle due di imposta, e nelle due alle ascisse $z = 40$ m e $z = 60$ m (fig. 22).

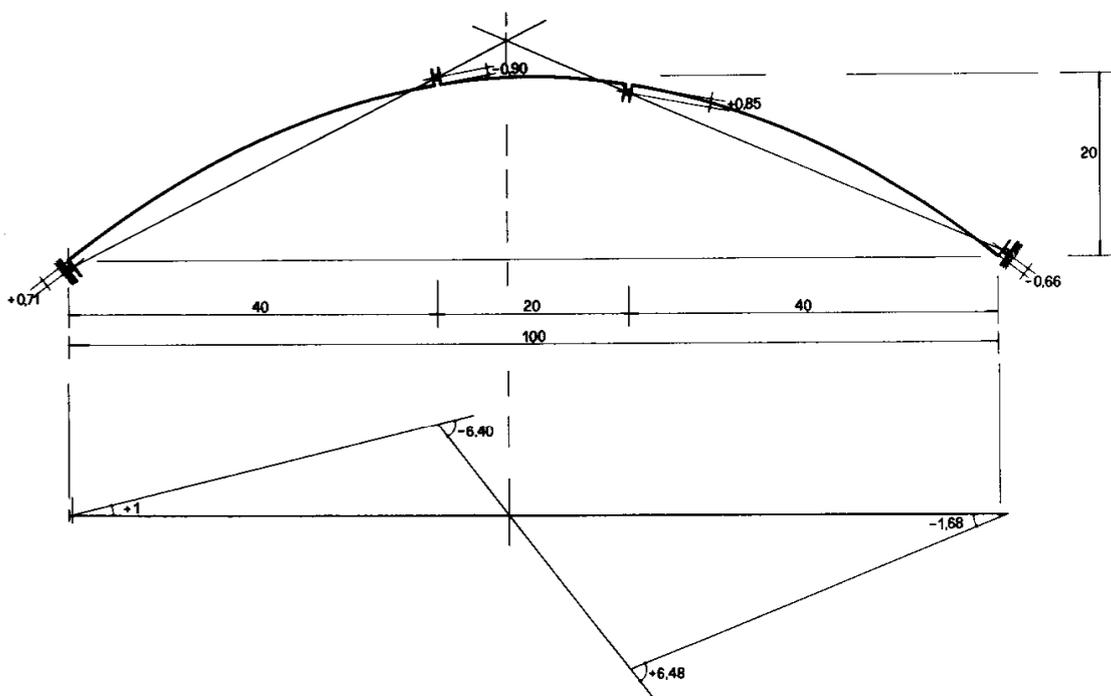


Fig. 22

Converrà poi in tali conchi prevedere i pendoli irrigiditi tali da imporre assi neutri corrispondenti ai punti P_m che forniscono i suddetti valori più bassi di ρ ; quindi le quote h di tali pendoli sono forniti dalla tabella 2, dove sono anche riportati i valori N_0 M_0 delle componenti dei vettori OP_m , i valori $N_y + N_g$ ed M_v delle componenti dei vettori Q_{jm}^* (vedi fig. 5) dei domini D_{sm}^g corrispondenti ai punti P_m , nonché un insieme di $\Delta\varphi$ compatibili con il dato Σ_γ . Si osservi che, dato il verso dello spostamento e quindi il segno degli angoli $\Delta\varphi$ (fig. 22), sono definiti nelle quattro sezioni i versi di q^* ; in particolare, in $z = 0$ è $\Delta\varphi > 0$, e quindi vale il punto P_1 di Λ_0 (fig. 21), mentre

in $z = 100$ m è $\Delta\varphi < 0$, e quindi vale il punto P_2 di Λ_{100} ; così pure in $z = 40$ m è $\Delta\varphi < 0$ (punto P_2), ed in $z = 60$ m è $\Delta\varphi > 0$ (punto P_1).

TABELLA 2

z (m)	h (m)	$\Delta\varphi$	N_0 (t)	M_0 (tm)	$N_v + N_g$	M_v
0	0,71	1,00	-2825	2950	-2255	2350
40	-0,90	-6,40	-3110	-1600	-1685	- 860
60	0,85	+6,48	-2965	1730	-1645	970
100	-0,66	-1,68	-2665	-3060	-2100	-2420

La (7) porge così

$$\tilde{\gamma} = \frac{\sum M_0 \Delta\varphi - \sum N_0 h \Delta\varphi}{\sum M_v \Delta\varphi - \sum (N_v + N_g) h \Delta\varphi} = 1,68. \quad (\ell)$$

Per ottenere (fig. 5) i vettori $OA_m = Q_{\gamma m}$ si calcolano le componenti dei vettori $OA'_m = OP_m - A'_m P_m = OP_m - \tilde{\gamma} Q_{jm}^*$; esse sono date dalla tabella 3.

TABELLA 3

z	$N_0 - \gamma(N_v + N_g)$	$M_0 - \gamma M_v$
0	963	-998
40	-279	-155
60	-201	100
100	863	1006

Sulla $\Sigma_{\gamma\ell}$ si fanno agire, in assenza di altre forze, ed in corrispondenza delle sezioni ove nella Σ_γ erano ubicati i conci endoirrigiditi, forze e coppie di valori pari a quelli della tab. 3, con il verso corrispondente al segno; e quindi, per esempio, in $z = 0$ si applica sulla struttura una forza assiale di trazione pari a 963 t, ed una coppia oraria pari a 998 tm.

Le reazioni sulla struttura dei pendoli irrigidenti sono fornite, con il segno che loro compete come caratteristiche N_p M_p della sollecitazione interna, dalla tabella 4

TABELLA 4

z	N_p	M_p	N_γ	M_γ	$\frac{M_p}{N_p}$
0	-986	-702	-23	-1700	0,71
40	278	-250	- 1	- 405	-0,90
60	204	173	3	273	0,85
100	-840	552	23	1558	-0,66

Si osserva che il rapporto $\frac{M_p}{N_p}$ è uguale al valore h della tab. 2, e

cioè il vettore $A'_m A_m$ (fig. 5), le cui componenti sono proprio N_{pm} ed M_{pm} , è diretto ovunque secondo la tangente in P_m .

Sommando alle componenti degli OA'_m (tab. 3) quelle degli $A'_m A_m$ (tab. 4) si ottengono nelle quattro sezioni di labilità della $\Sigma_{\gamma\ell}$ le componenti $N_{\gamma m}$ $M_{\gamma m}$ (tab. 4) degli OA_m .

Le componenti del vettore Q_γ (fig. 6) in tutte le sezioni si evincono dalla tabella 5.

TABELLA 5

z	N_γ	M_γ
0	-23	-1700
10	-19	-1378
20	-16	-1054
30	-12	-730
40	-1	-405
50	-0,4	-100
60	3	273
70	12	574
80	16	901
90	19	1229
100	23	1558

In ogni sezione sono così noti i domini

$$\frac{\gamma}{\tilde{\gamma} D_s};$$

essi, attraverso la costruzione della fig. 6, forniscono ψ come $\left(\frac{OQ}{OQ'}\right)_{\max}$. Si è operato, per opportunità, disegnando (fig. 23) i domini D_s traslati dei vettori $\frac{Q_\gamma}{\gamma}$, e calcolando su questi i rapporti $\frac{OQ}{OQ'}$; Poiché nel caso in esame tali domini sono tutti strettamente inclusi nei D_e , il più piccolo dei rapporti $\frac{OQ}{OQ'}$ è ovviamente un $\tilde{\psi}$;

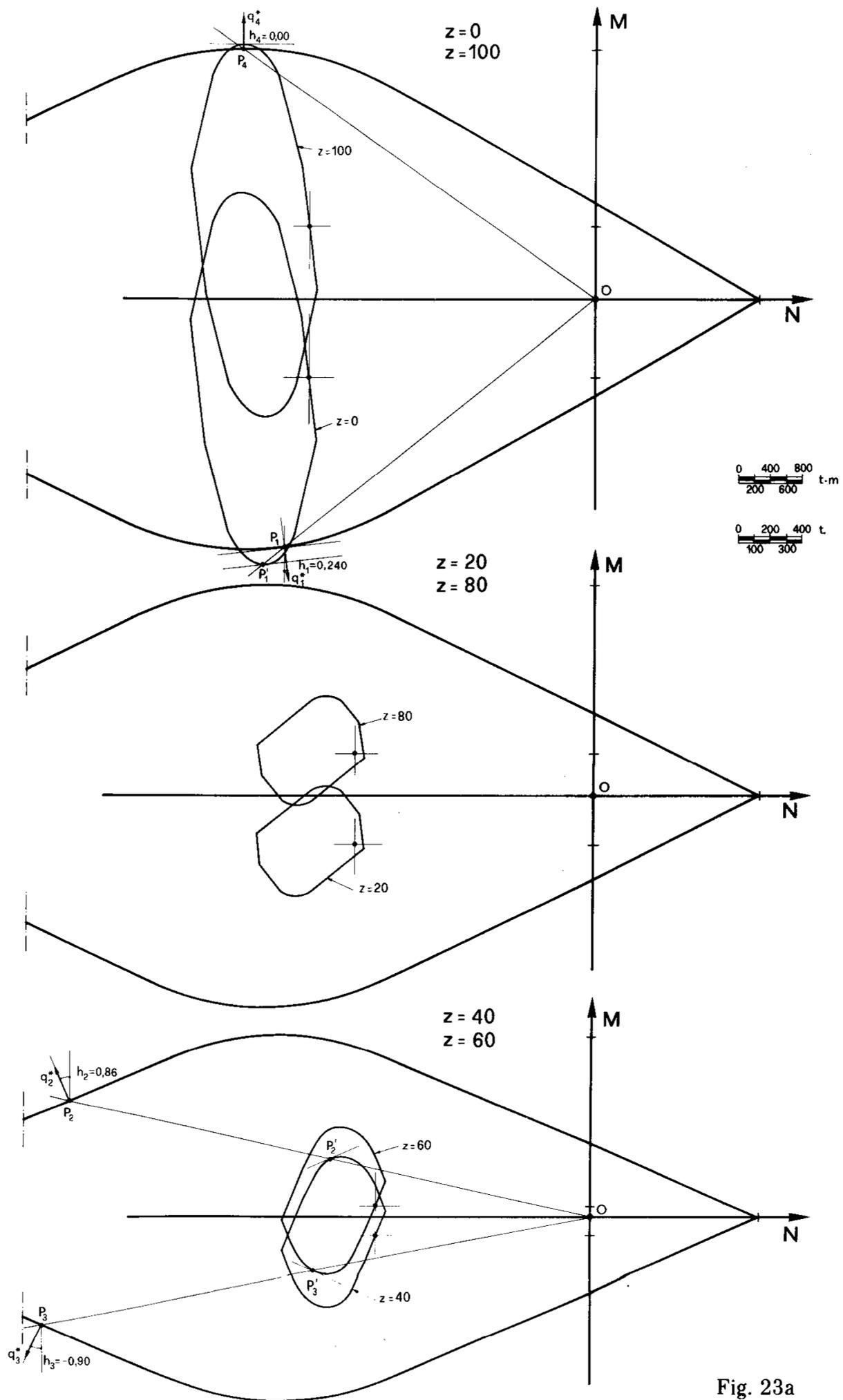


Fig. 23a

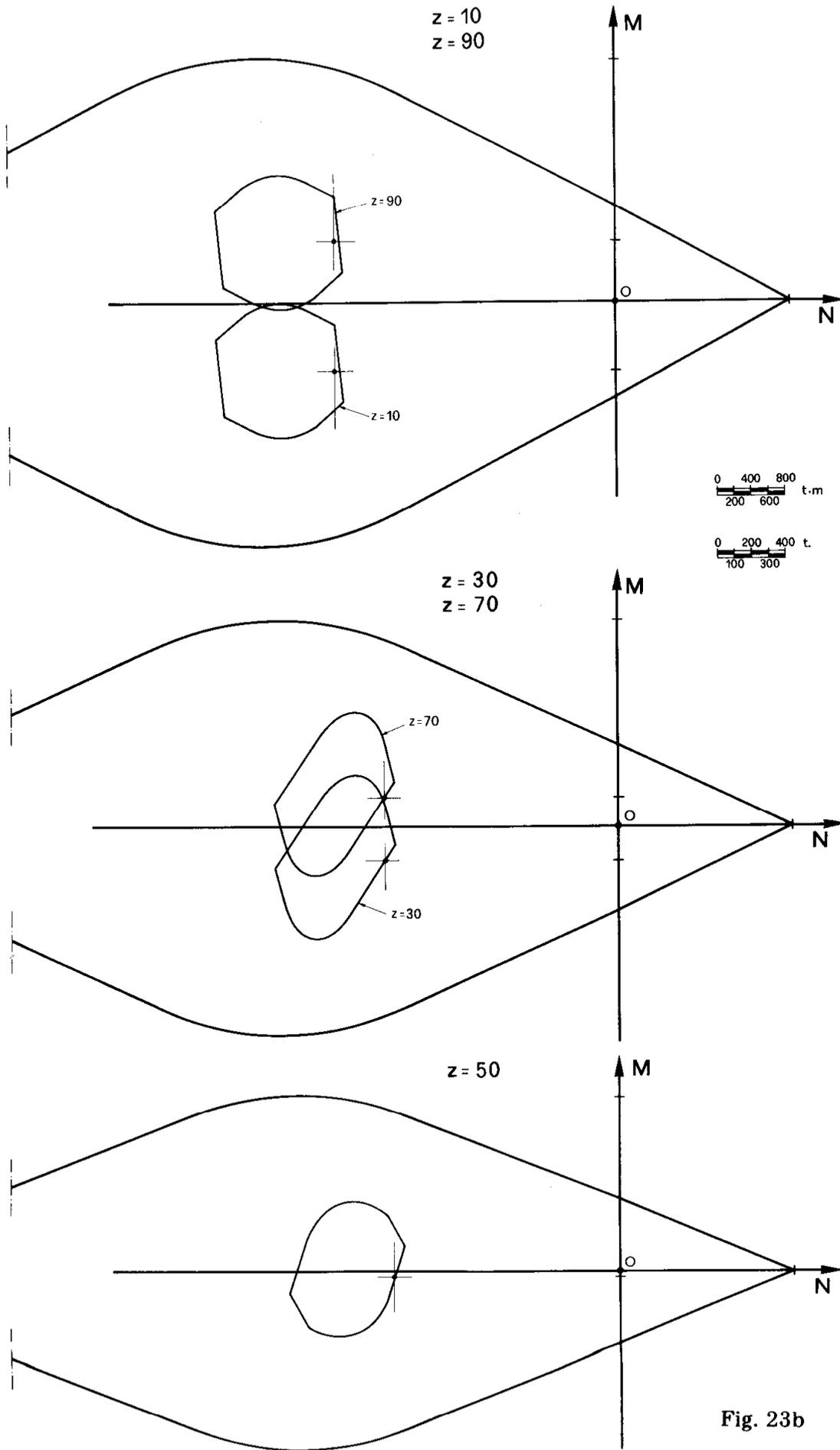


Fig. 23b

ma può anche dirsi che esso coincide con quello calcolabile nella maniera ordinaria. E infatti, se si fa riferimento ai $\tilde{\gamma} D_s$ delle varie sezioni, e si trasformano tutti questi domini con omotetia di centro O e rapporto $\frac{1}{\tilde{\gamma}}$, si ottengono proprio i domini della fig. 23; se k è il rapporto di omotetia che riporta tali domini in stato di compatibilità ovunque meno che in una sezione, $\frac{k}{\tilde{\gamma}}$ è il rapporto di omotetia che riporta nelle stesse condizioni i domini $\tilde{\gamma} D_s$; e cioè

$$\frac{k}{\tilde{\gamma}} = \left(\frac{OQ'}{OQ} \right)_{\min},$$

dove i rapporti $\frac{OQ'}{OQ}$ sono calcolati sui $\tilde{\gamma} D_s$.

E' perciò

$$\tilde{\psi} = \frac{\tilde{\gamma}}{\left(\frac{OQ}{OQ'} \right)_{\max}} = \tilde{\gamma} \left(\frac{OQ'}{OQ} \right)_{\min} = k.$$

Dall'esame della fig. 23 si osserva che k, e quindi $\tilde{\psi}$, è pari a $\frac{OP_1}{OP'_1} = 0,926$.

E' perciò

$$0,926 \leq \tilde{s}_r \leq 1,68. \tag{m}$$

E' ovvio però che il valore (i) fornisce già una limitazione inferiore per \tilde{s}_r , e quindi può porsi

$$1,25 \leq \tilde{s}_r \leq 1,68. \tag{n}$$

c) Nel secondo tentativo si opera ancora sulle sezioni del primo, ma si variano le posizioni dei pendoli irrigidenti in relazione ai risultati

del primo tentativo (fig. 23).

Il verso dello spostamento (fig. 24) è cambiato rispetto a quello del

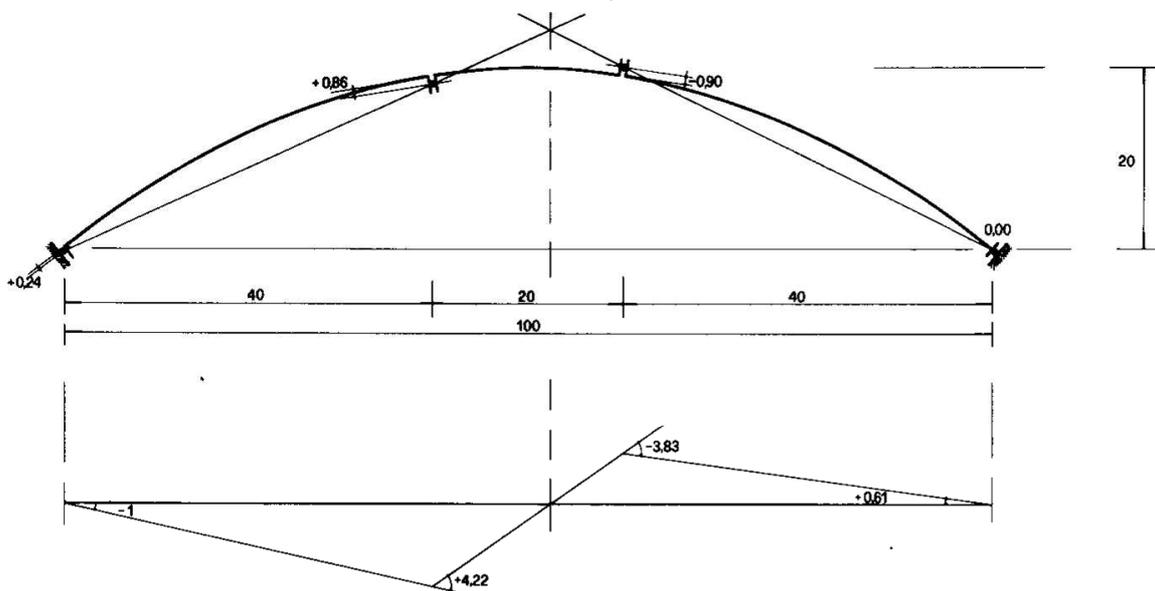


Fig. 24

primo tentativo, poiché nella sezione $z = 0$ si ha fuoriuscita del γ dalla parte inferiore di Λ . Si hanno così i dati della tabella 6, analoga alla tabella 2:

TABELLA 6

z	h	$\Delta\varphi$	N_0	M_0	$N_v + N_g$	M_v
0	0,24	-1,00	-1950	-3180	-2025	-2425
40	0,86	4,22	-3200	1480	-1645	990
60	-0,90	-3,83	-3370	-1350	-1720	-920
100	0	0,61	-2186	3251	-2203	2353

La (7) porge

$$\tilde{\gamma} = 1,71 . \quad (o)$$

Le componenti dei quattro vettori OA'_m sono le seguenti:

TABELLA 7

z	$N_0 - \gamma(N_v + N_g)$	$M_0 - \gamma M_v$
0	1513	967
40	- 387	-213
60	- 429	223
100	1581	-773

Con tali valori si ottengono gli N_p ed M_p della tabella seguente:

TABELLA 8

z	N_p	M_p	N_γ	M_γ	$\frac{M_p}{N_p}$
0	-1513	-360	0	607	0,24
40	385	331	- 2	118	0,86
60	420	-378	- 9	-155	-0,90
100	-1597	0	-16	-773	0

Le componenti del vettore Q_γ in tutte le sezioni sono date dalla tabella 9:

TABELLA 9

z	N_γ	M_γ
0	0	607
10	4	575
20	2	416
30	0	264
40	- 2	118
50	- 4	- 27
60	- 9	-155
70	-11	-274
80	-12	-383
90	-14	-480
100	-16	-773

Nella fig. 25 si è così operato come nella fig. 23, ottenendo $\tilde{\psi} = 1,12$. Per la (o), l'intervallo analogo ad (m) si scrive

$$1,12 \leq \tilde{s}_r \leq 1,71 . \quad (p)$$

Resta più valido ovviamente l'intervallo (n).

Dal confronto tra la (m) e la (p) si osserva che, pur essendo il $\tilde{\gamma}$ del secondo tentativo (o) leggermente più elevato di quello del primo (l), il secondo intervallo (p) è ben più ristretto del primo (m).

d) Nel terzo tentativo i conci endoirrigiditi si prevedono nelle due sezioni di imposta ed in quella di chiave, laddove nel secondo tenta-

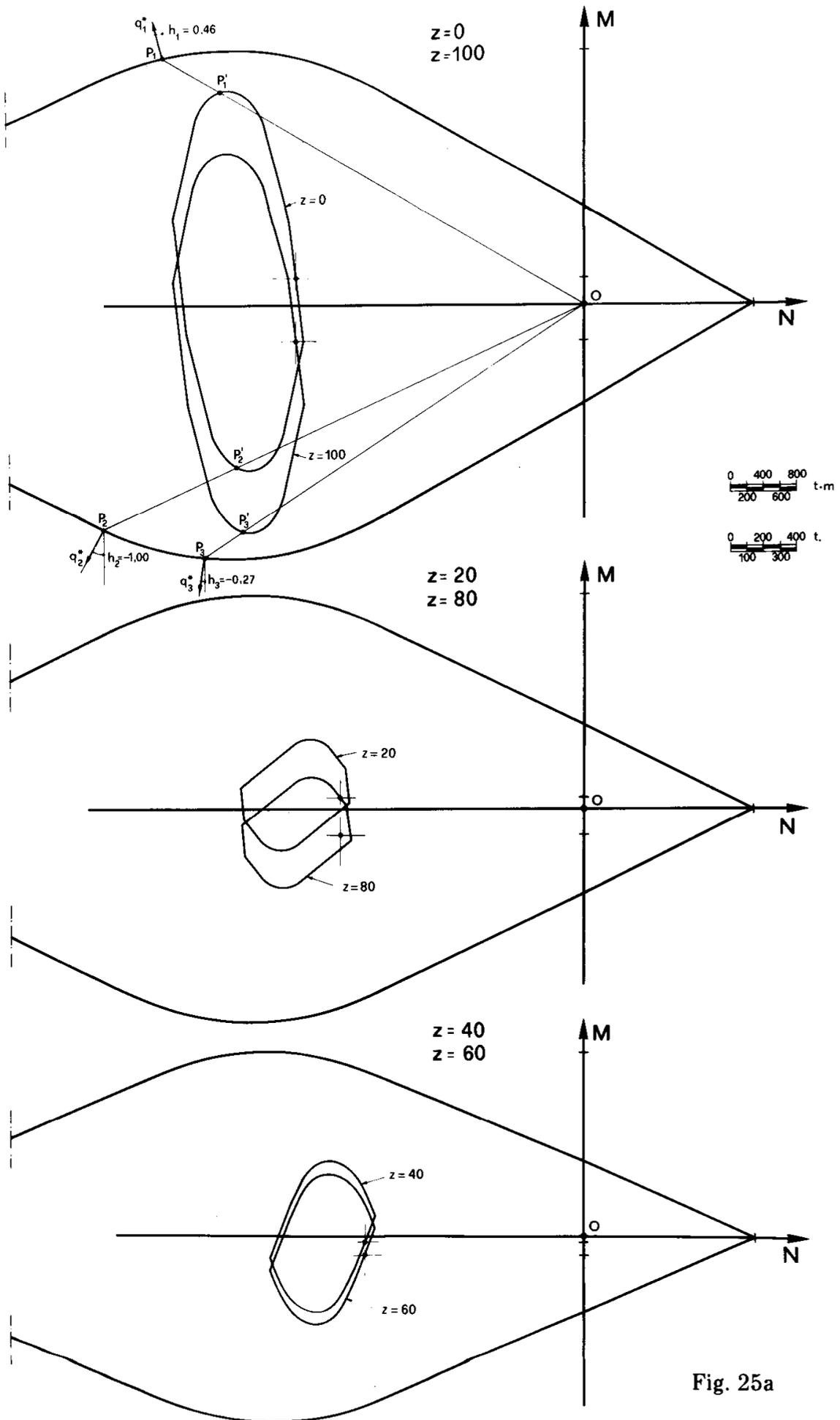


Fig. 25a

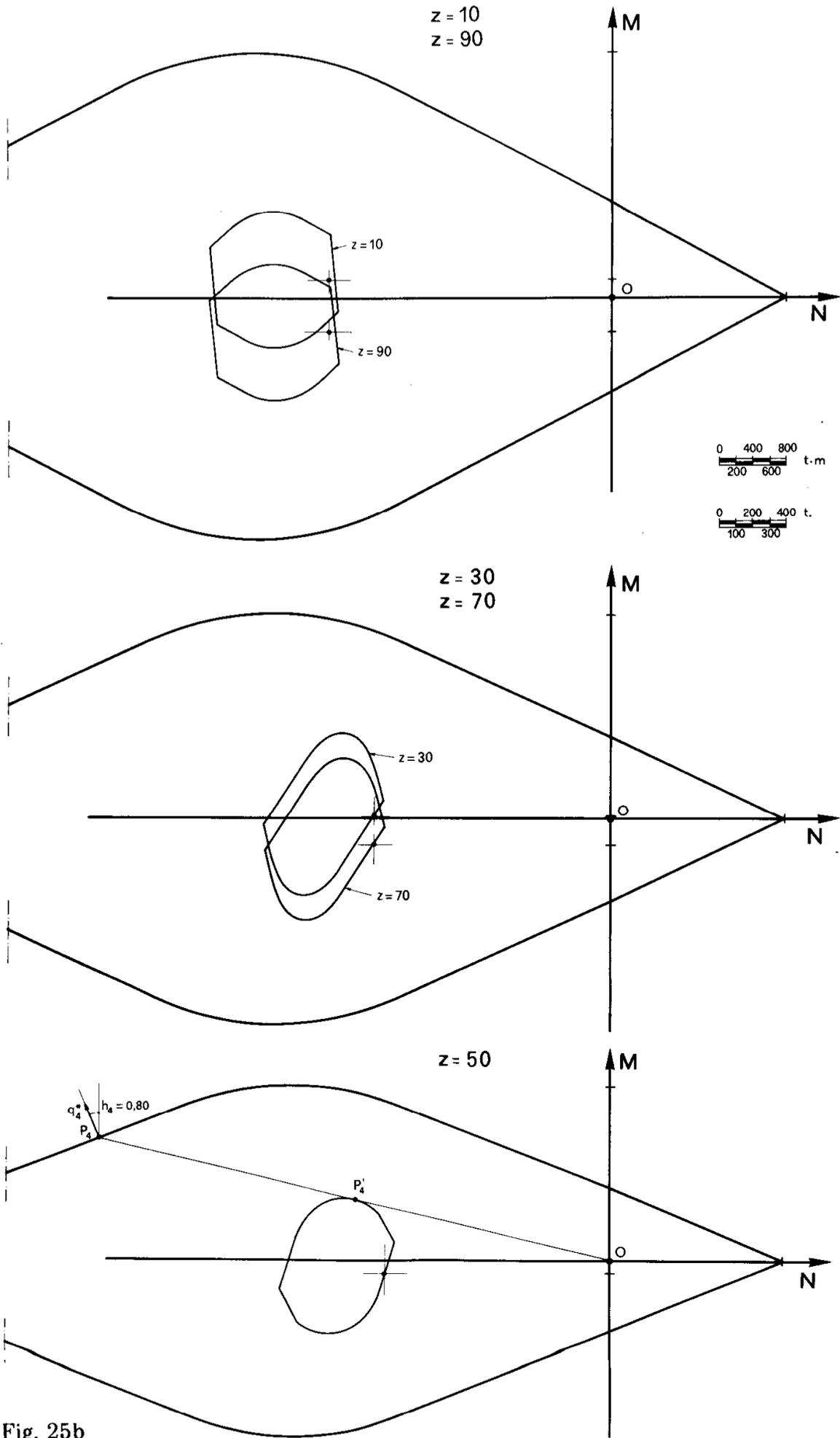


Fig. 25b

tivo (fig. 25) si verificano le più forti fuoruscite del $\tilde{\gamma} D_s$ da Λ . Si osservi che i conci 1 e 2 si trovano adiacenti (fig. 26); ciò non significa però che in $z = 0$ ci sia collasso per fatica plastica, giacché

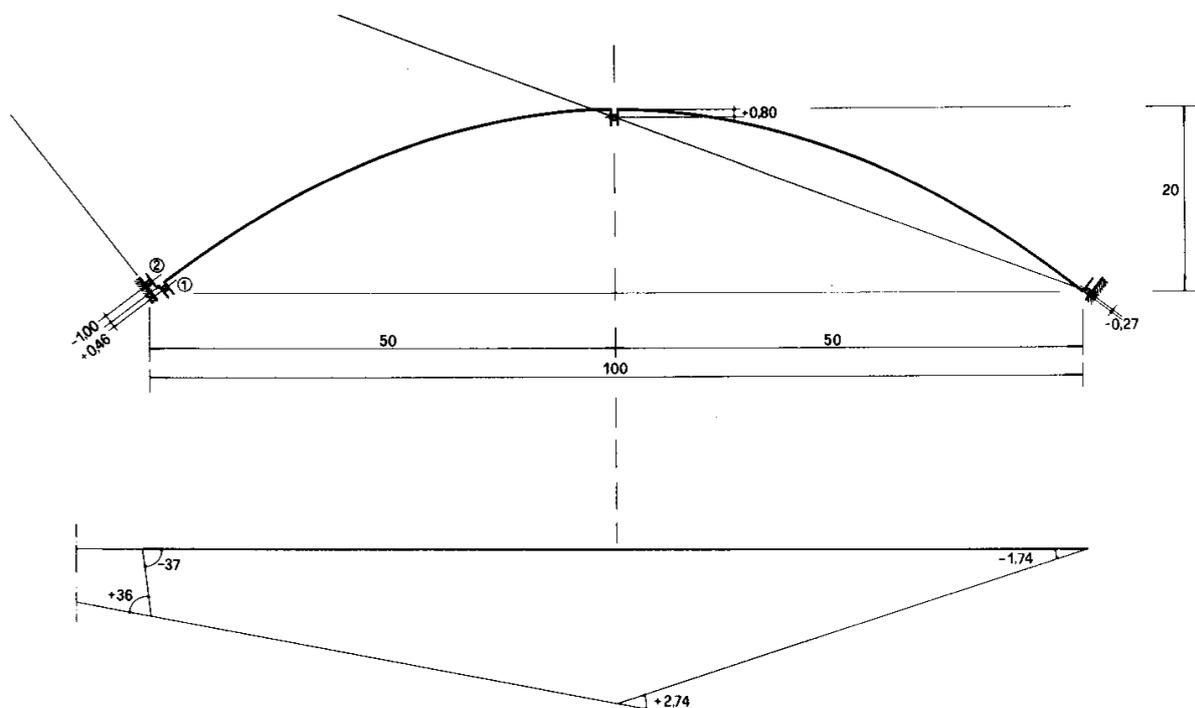


Fig. 26

gli assi neutri dei due conci non coincidono (le tangenti in P_1 e P_2 a Λ non sono parallele). Si ha così

TABELLA 10

z	h	$\Delta\varphi$	N_0	M_0	$N_v + N_g$	M_v
0_1	0,46	36	-2600	3100	-2260	2353
0_2	-1,00	-37	-2960	-2820	-2150	-2400
50	0,80	2,74	-3020	1500	-1540	909
100	-0,27	-1,74	-2340	-3180	-2120	-2440

La (7) porge

$$\tilde{\gamma} = 1,44 . \quad (r)$$

Le componenti dei quattro vettori OA'_m sono

TABELLA 11

z	$N_0 - \gamma(N_v + N_g)$	$M_0 - \gamma M_v$
0_1	654	-288
0_2	136	636
50	-802	191
100	713	334

Con tali valori si ottengono gli N_p ed M_p della tabella seguente:

TABELLA 12

z	N_p	M_p	N_γ	M_γ	$\frac{M_p}{N_p}$
0_1	-1235	-568	-581	608	0,46
0_2	476	-476	612	- 89	-1,00
50	850	677	48	868	0,80
100	-668	179	45	513	-0,27

Le componenti del vettore Q_γ in tutte le sezioni sono date da:

TABELLA 13

z	N_γ	M_γ
0	31	-697
10	34	-230
20	38	159
30	42	472
40	45	709
50	48	868
60	49	950
70	49	956
80	48	885
90	47	738
100	45	513

Si ottiene così (fig. 27) $\tilde{\psi} = 1,28$, e quindi, per la (r) ,

$$1,28 \leq s_r \leq 1,44. \quad (s)$$

Tale intervallo è abbastanza ristretto agli scopi tecnici; si osserva che il limite inferiore è molto vicino al valore (i) ottenuto come limite elastico, e ciò dipende dalla buona progettazione in fase elastica della struttura. Come già fatto osservare, infatti, le riserve plastiche si riducono quando il materiale è ben sfruttato in fase elastica.

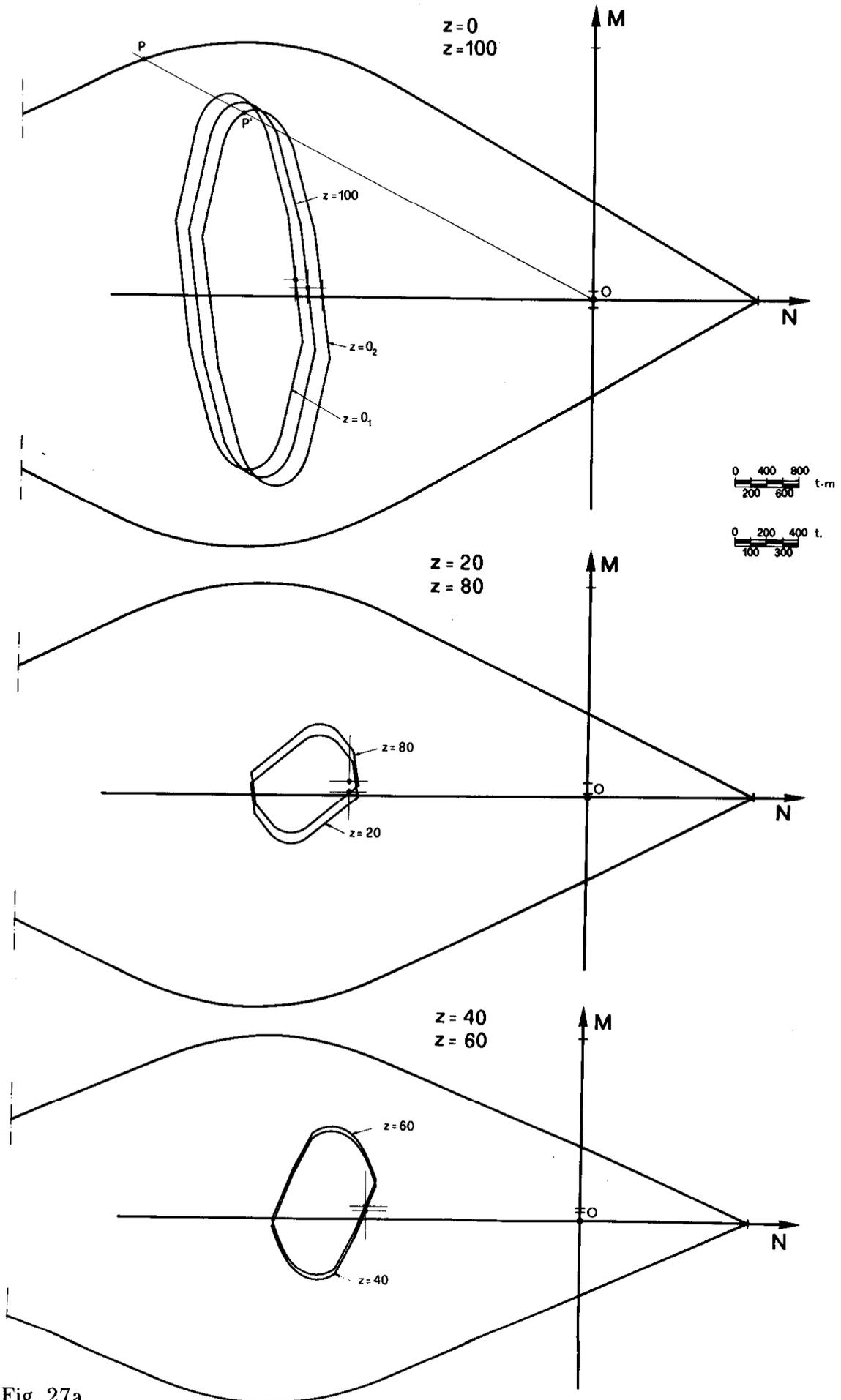


Fig. 27a

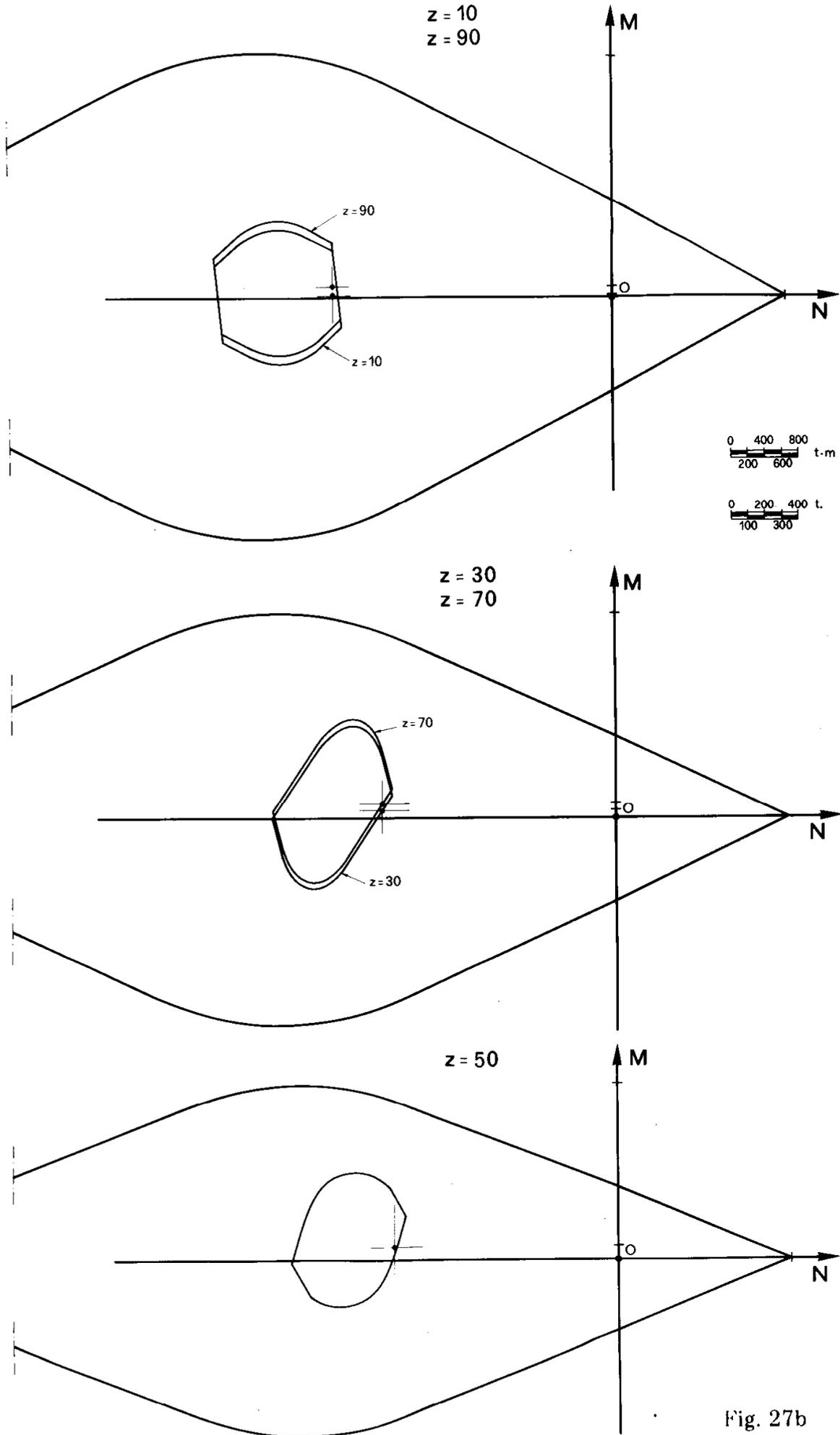


Fig. 27b