

CAPITOLO VI

LA CRISI IN PRESENZA DI MOMENTO FLETTENTE E SFORZO NORMALE NELLE SEZIONI SOLLECITATE SECONDO UN ASSE DI SIMMETRIA

1. La cerniera plastica in presenza di sforzo normale.

Si è studiato nel cap. 5 l'effetto del taglio sul momento limite, e si è osservato come questo effetto sia in pratica trascurabile, fatta eccezione per le travi alte.

Ben più preoccupante è invece l'effetto dello sforzo normale; questo è in genere presente in forma notevole nei telai (particolarmente nei ritti), ed è addirittura determinante negli archi.

Fortunatamente lo studio in fase plastica di un tronco elementare soggetto ad M ed N è molto più facile di quello di un tronco elementare soggetto ad M e T , poiché interviene la sola tensione normale σ . Le ipotesi sono quindi le stesse che sorreggono il calcolo sotto solo momento flettente, e cioè (cap. 2) conservazione delle sezioni piane, e diagramma $\sigma\epsilon$ con tratto plastico parallelo all'asse delle σ (fig. 2 - 2).

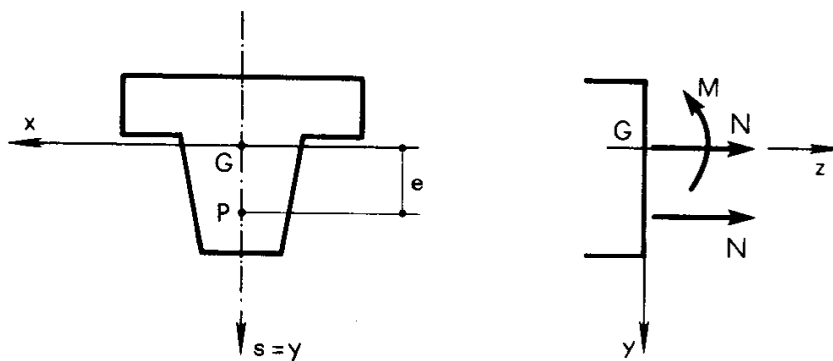


Fig. 1

In questo capitolo ci si limita a studiare (fig. 1) sezioni dotate di un asse $s = y$ di simmetria, sollecitate da un momento flettente M rappresentabile con una coppia agente nel piano di traccia s ortogonale alla sezione, e da uno sforzo normale N .

Il momento flettente è calcolato in genere rispetto al baricentro della sezione (se ne darà avviso in caso contrario), lo sforzo normale quindi è baricentrico. La sollecitazione si può ridurre ad una forza N normale alla sezione, applicata in un punto P di s alla distanza d_{Px} da x (asse baricentrico ortogonale ad y) fornita da

$$d_{Px} = \frac{M}{N}; \quad (1)$$

tale distanza è l'*eccentricità* e , positiva se P è alla sinistra di x . Si fa per ora l'ipotesi di materiale idealmente elastico plastico, e cioè di lunghezza non limitata dei due tratti plastici del diagramma $\sigma\epsilon$; le condizioni di crisi sono così raggiunte quando ovunque nella parte tesa della sezione sia $\sigma = \sigma'_0$, e nella parte compressa $\sigma = \sigma''_0$. Sia σ'_0 che σ''_0 siano indipendenti dalla ascissa x .

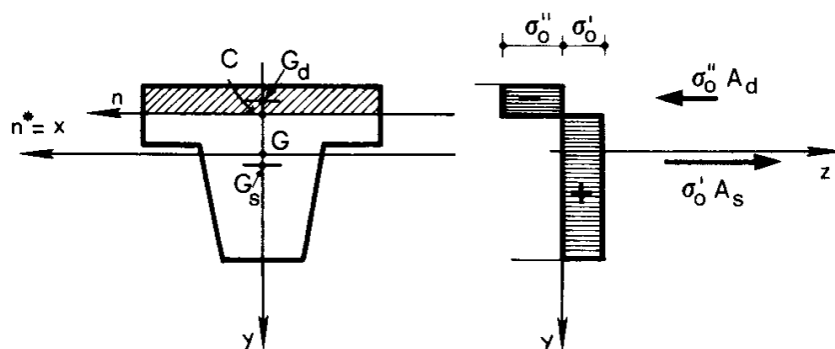


Fig. 2

L'asse neutro n , che definisce la posizione della cerniera plastica C su y , è ortogonale ad s , e cioè parallelo ad x (fig. 1 e 2). Chiamando A_s l'area tesa ed A_d l'area compressa^(*) deve aversi, per σ'_0 e σ''_0 costanti su y ,

$$\sigma'_0 A_s + \sigma''_0 A_d = N; \quad (2)$$

se poi è G_s il baricentro dell'area tesa, e G_d il baricentro dell'area

(*) L'Area tesa è alla sinistra, l'area compressa alla destra dell'asse neutro orientato.

compressa, si deve anche avere, sempre nell'ipotesi di σ'_0 e σ''_0 costanti su y ,

$$\sigma'_0 A_s d_{G_s n^*} + \sigma''_0 A_d d_{G_d n^*} = M, \quad (3)$$

dove n^* è la parallela baricentrica all'asse neutro. Le (2) e (3) sono valide per qualsiasi segno di M ed N ; per una data posizione di n , le (2) e (3) forniscono due coppie (M, N) , secondo che sia tesa l'una o l'altra parte della sezione.

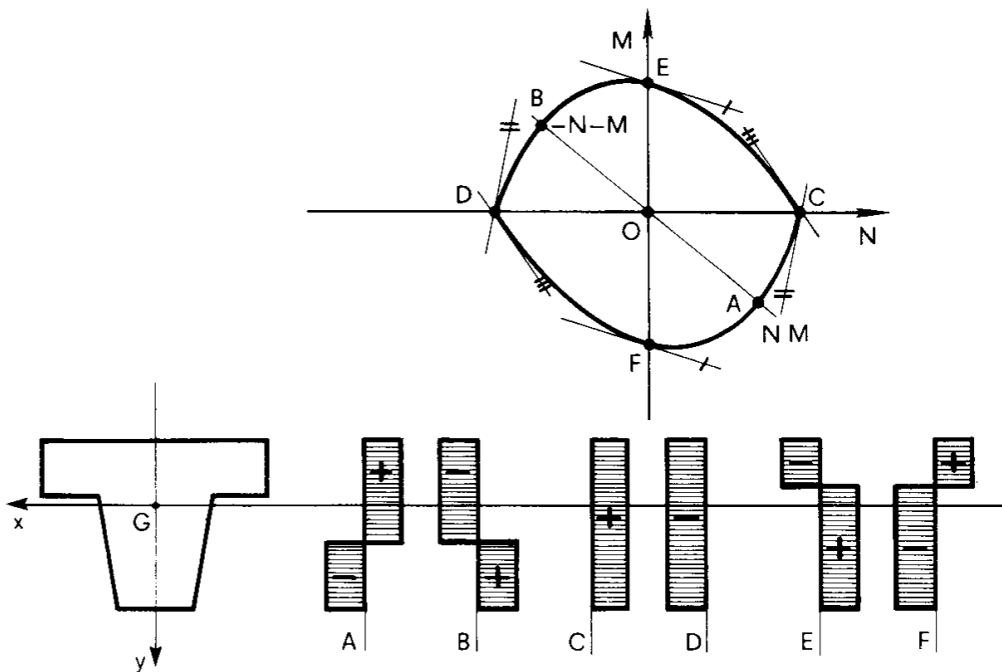


Fig. 3

Ottenute così le coppie (MN) per diverse posizioni di n , si può tracciare la *curva limite* Λ . Se $\sigma'_0 = -\sigma''_0 = \sigma_0$, la curva limite (fig. 3) è caratterizzata da simmetria polare rispetto all'origine; infatti, invertendo il segno della sollecitazione sulle due parti definite da un asse neutro generico n , si riottengono gli stessi valori di N ed M , cambiati di segno. Ciò è valido anche se il momento è valutato rispetto ad un asse non baricentrico. Se inoltre c'è anche simmetria rispetto ad x , la curva limite è simmetrica rispetto ai due assi N ed M (fig. 4).

Se $\sigma'_0 = -\sigma''_0 = \sigma_0$, ma la σ_0 è variabile con y (fig. 5), la curva limite è ancora dotata di simmetria polare rispetto all'origine, e ciò anche se

il momento è valutato rispetto ad un asse non baricentrico; in corrispondenza di $N = N_0 = \sigma_0 A$ ed $N = -N_0 = -\sigma_0 A$ il momento in genere non è nullo (però $\Delta\varphi^*$ può essere nulla, vedi par. 2).

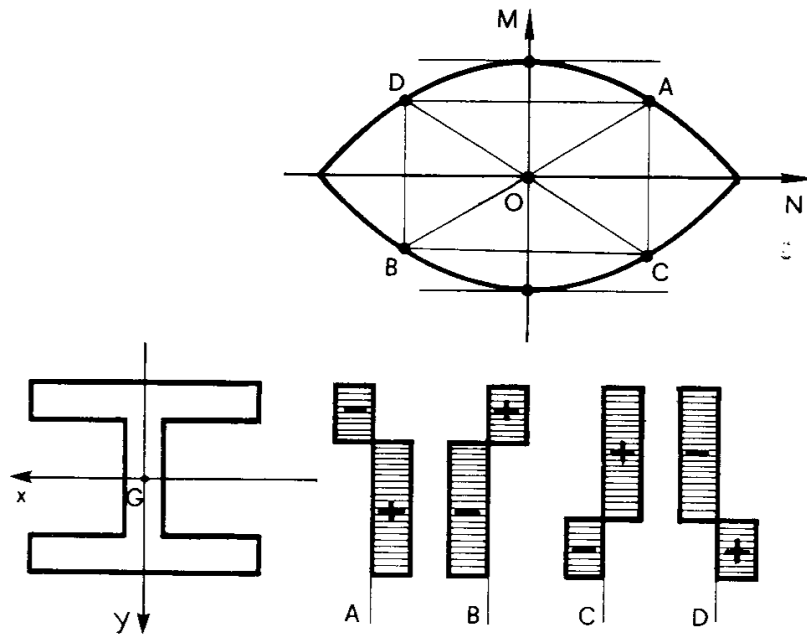


Fig. 4

Se $\sigma'_0 = -\sigma''_0 = \sigma_0$, ma σ_0 è variabile con y , e se inoltre c'è simmetria fisica e geometrica rispetto ad x (fig. 6), la curva limite risulta ancora simmetrica rispetto ai due assi N ed M .

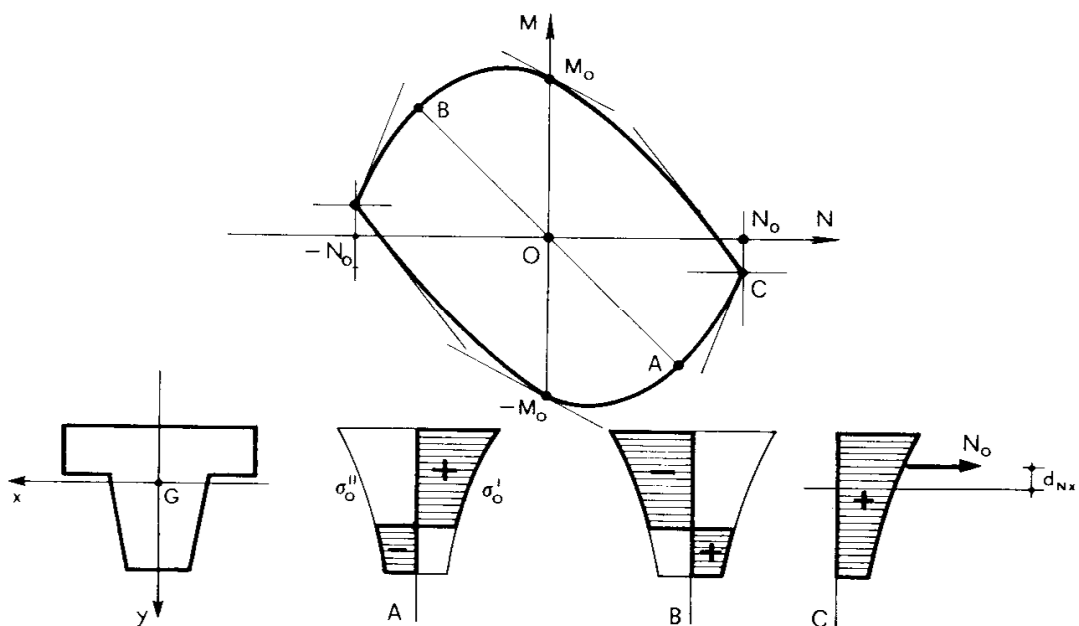


Fig. 5

Se è $\sigma'_0 \neq -\sigma''_0$, ed ambedue variabili con y , ma la sezione è dotata di simmetria geometrica e fisica rispetto all'asse x , la curva limite è simmetrica rispetto all'asse N (fig. 7).

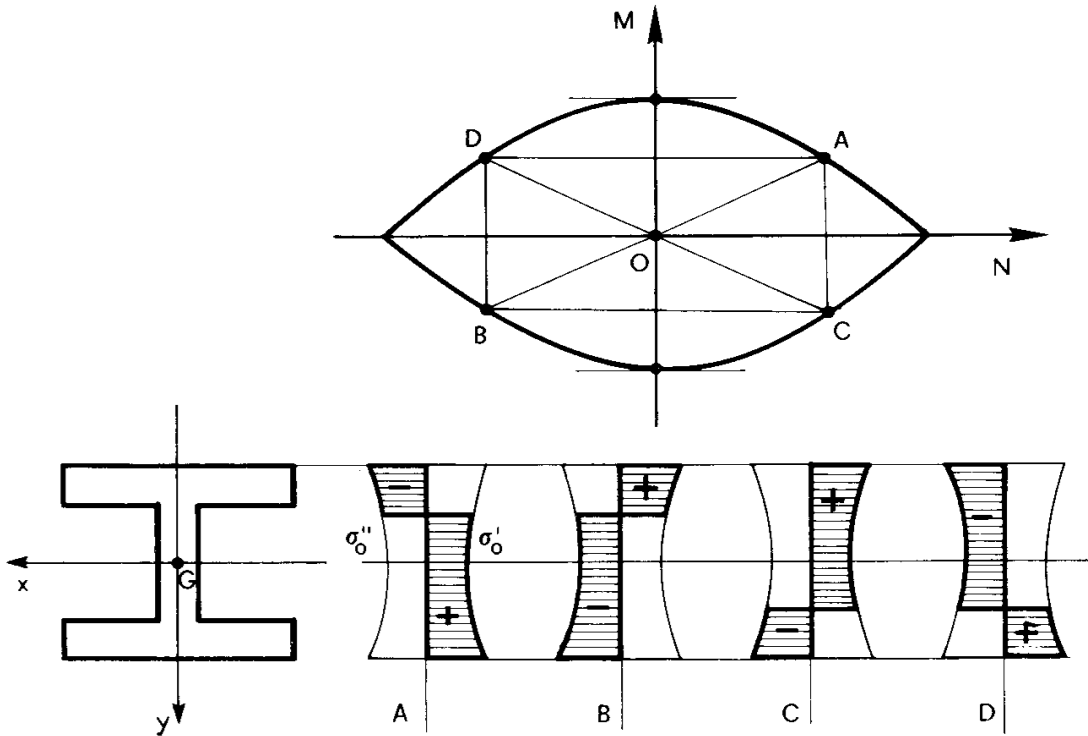


Fig. 6

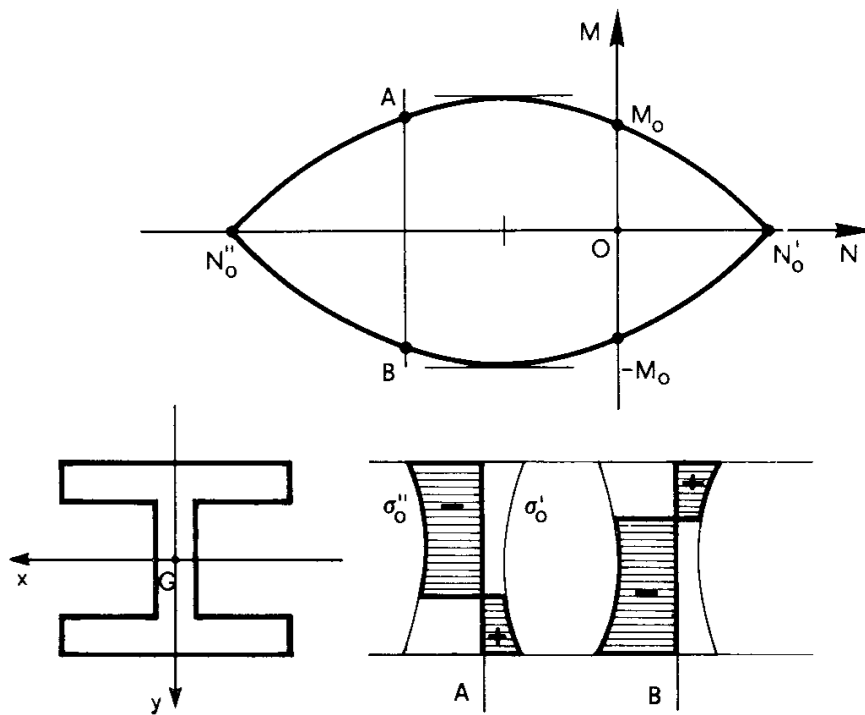


Fig. 7

Si osservi che, nel caso più generale di $\sigma'_0 \neq -\sigma''_0$ ed ambedue variabili con y , con sola simmetria geometrica rispetto ad y , il diagramma

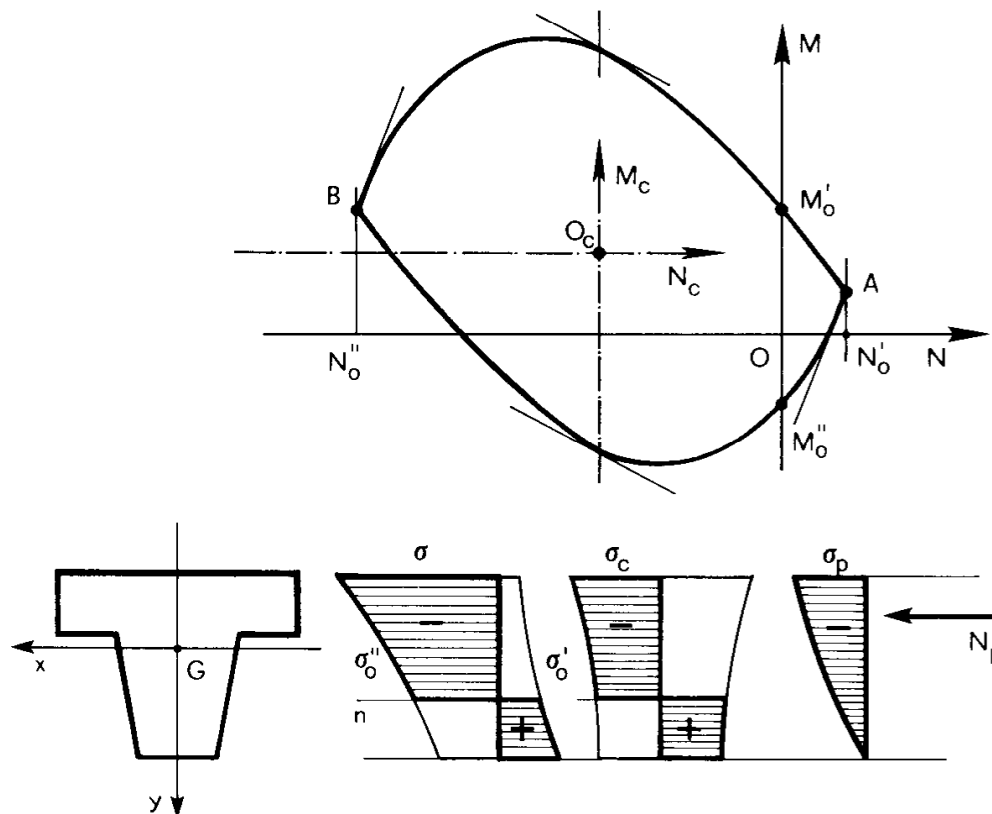


Fig. 8

delle σ limiti per un dato asse neutro n (fig. 8) si scinde in due

$$\sigma_c = \sigma - \frac{\sigma'_0 + \sigma''_0}{2}$$

$$\sigma_p = \frac{\sigma'_0 + \sigma''_0}{2} .$$

Le σ_c forniscono (fig. 5), al variare di n , un punto $(N_c M_c)$ variabile su una curva a simmetria polare rispetto all'origine O_c del riferimento $N_c M_c$. Le σ_p invece forniscono una coppia $(N_p M_p)$ invariabile al variare di n . Poiché è

$$N = N_c + N_p$$

$$M = M_c + M_p$$

si trae che la curva limite è il luogo (N_c, M_c) , riferito però ai due assi N ed M traslati rispetto ad N_c ed M_c delle due quantità $-M_p$ e $-N_p$; la curva limite ha simmetria polare rispetto al punto O_c .

Ciò è vero anche se i momenti sono valutati rispetto ad un punto diverso dal baricentro. Si osservi pure che se $\sigma'_0 \neq -\sigma''_0$, ma indipendenti da y , i punti corrispondenti ad N'_0 ed N''_0 giacciono sull'asse N_c (fig. 3).

Risulta evidente da quanto sopra che basta tracciare la curva \wedge per $\Delta\varphi^* > 0$, poiché il tratto corrispondente a $\Delta\varphi^* < 0$ si ottiene dal primo per simmetria polare rispetto al punto O_c .

Se σ'_0 e σ''_0 variano con y , le (2) e (3) cedono il posto alle

$$\int_{y'_s}^{y'_i} \sigma'_0 b dy + \int_{y''_s}^{y''_i} \sigma''_0 b dy = N \quad (4)$$

$$\int_{y'_s}^{y'_i} \sigma'_0 b y dy + \int_{y''_s}^{y''_i} \sigma''_0 b y dy = M, \quad (5)$$

dove $b(y)$ è la lunghezza della generica corda parallela ad x , y'_s ed y'_i sono le ordinate minima e massima della zona tesa, y''_s ed y''_i le ordinate minima e massima della zona compressa ($y'_s = y''_i$, o, $y'_i = y''_s$). Nella fig. 9 è riportato il procedimento grafico per il calcolo dei valo-

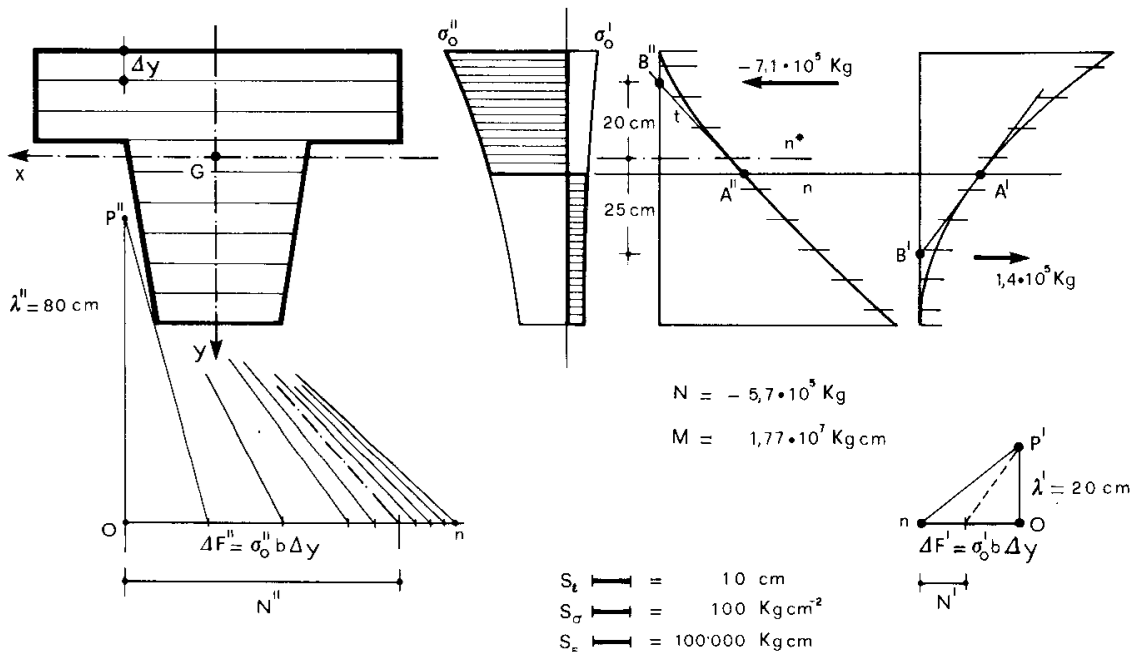
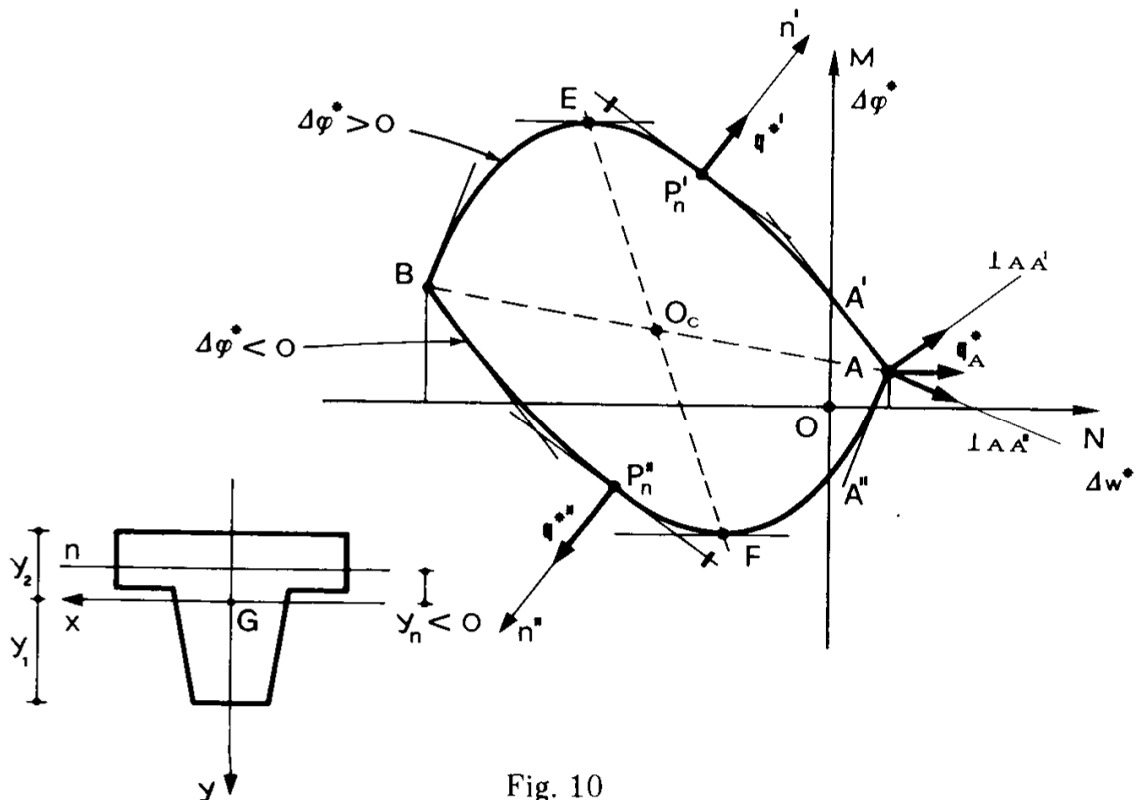


Fig. 9

ri (4) e (5), nel caso in cui $\Delta\varphi^* > 0$, e cioè di fibre superiori compresse; si ottiene in questo caso, dei due tratti di curva limite compresi in $[N_0'' N_0']$, il superiore (fig. 8). Suddivisa la sezione, mediante corde parallele all'asse x , in strisce di spessore Δy , si costruisce il poligono delle $\Delta F'' = \sigma_0'' b \Delta y$, e si applicano tali vettori forza nei baricentri delle strisce, rispettando la direzione ed il verso di x (si ricordi che $\Delta F'' < 0$). Si connettono i vettori $\Delta F''$ con un poligono funicolare di polo P'' e base λ'' . Dato un generico asse neutro n , nel punto A'' dove n interseca il poligono funicolare si traccia la tangente t a quest'ultimo, e la sua intersezione B'' con il primo lato. Mentre così la parallela a t per P'' determina sul poligono delle forze $\Delta F''$ il valore N'' della risultante delle compressioni, la distanza $d_{B''n^*}$ fornisce, moltiplicata per N'' , il contributo ad M della N'' . Analogamente, dal poligono delle $\Delta F' = \sigma_0' b dy$ si traggono N' ed il suo contributo ad M .

2. Verifica della legge dello scorrimento plastico.

Nel caso di contemporanea azione di N ed M , e quali che siano le leggi $\sigma_0'(y)$ e $\sigma_0''(y)$, si può dare una dimostrazione della legge dello scorrimento plastico basata sulla sola ipotesi di diagramma $\sigma \epsilon$ ideale del regime plastico monoassiale. Sia n l'asse neutro (fig. 10), P'_n e



P''_n i due punti di \wedge ad esso corrispondenti secondo che le fibre tese stanno dalla parte delle y positive o negative; sia poi y_n l'ordinata di n . Se y_n varia di dy_n , lo sforzo normale varia di

$$dN = bdy_n (\sigma''_0 - \sigma'_0) \quad \text{se } \Delta\varphi^* > 0 \quad (a)$$

$$dN = bdy_n (\sigma'_0 - \sigma''_0) \quad \text{se } \Delta\varphi^* < 0 ,$$

ed il momento flettente di

$$dM_x = bdy_n (\sigma''_0 - \sigma'_0) y_n \quad \text{se } \Delta\varphi^* > 0 \quad (b)$$

$$dM_x = bdy_n (\sigma'_0 - \sigma''_0) y_n \quad \text{se } \Delta\varphi^* < 0 .$$

La rotazione plastica $\Delta\varphi^*$ si effettua intorno ad n , e perciò è, per il baricentro, ed in qualunque caso,

$$\Delta w_G^* = -y_n \Delta\varphi^* . \quad (c)$$

Dalle (a) e (b) si trae

$$\frac{dM_x}{dN} = y_n , \quad (6)$$

e dalle (c) e (6)

$$\frac{dM_x}{dN} = - \frac{1}{\frac{\Delta\varphi^*}{\Delta w_G^*}} . \quad (d)$$

La (d) assicura dell'ortogonalità tra la tangente a \wedge in P' (o P'') ed il vettore \mathbf{q}^* ($\Delta w_G^* \Delta\varphi^*$) in P'_n (o P''_n). Poiché poi in P'_n è $\Delta\varphi^* > 0$, ed in P''_n è $\Delta\varphi^* < 0$, si ha conferma della legge dello scorrimento plastico.

Si osservi pure che è, per $\Delta\varphi^* > 0$,

$$\frac{d^2 M_x}{dN^2} = \frac{d}{dN} \left(\frac{dM_x}{dN} \right) = \frac{dy_n}{dN} = \frac{1}{b(\sigma_0'' - \sigma_0')} < 0$$

e, per $\Delta\varphi^* < 0$,

$$\frac{d^2 M_x}{dN^2} = \frac{1}{b(\sigma_0' - \sigma_0'')} > 0 ;$$

ciò garantisce della convessità di \wedge .

La (6) pone in relazione biunivoca l'asse neutro (y_n) e la coppia di punti ($P_n' P_n''$) dove la tangente a \wedge ha inclinazione pari ad y_n ; ad un asse neutro corrispondono due \mathbf{q}^* paralleli e di segno opposto, e due Q^* (OP_n' ed OP_n'') in genere qualsiasi. La corrispondenza tra $\mathbf{q}^* \rightarrow Q^*$ è univoca. I due punti E ed F, dove $|M|$ è massimo, corrispondono ad $y_n = 0$. Nel punto angolare A, dove N è massimo, \mathbf{q}^* può essere compreso nell'angolo tra le due normali in A alle tangenti AA' ed AA'' , e la y_n è compresa nell'intervallo definito dalle rette passanti per A e non intersecanti \wedge :

$$y_n \in]-\infty, y_2] \cup [y_1, \infty[; \quad (7)$$

altrettanto avviene in B, dove N è minimo. Le due tangenti AA' ed AA'' in A hanno inclinazione y_2 ed y_1 ; altrettanto in B.

Quanto detto vale anche se i momenti sono presi rispetto ad un asse a non baricentrico (fig. 11); poiché infatti è

$$M_a = M_x - Ny_a ,$$

la curva limite NM_x (fig. 10) fornisce anche la NM_a , purché l'asse N sia ruotato di $\arctg y_a$ (rotazione antioraria, se a è sotto il baricentro). Tutte le derivate $\frac{dM}{dN}$ variano di $-y_a$, come è lecito attendersi dalla (6):

$$\frac{dM_a}{dN} = \frac{dM_x}{dN} - y_a . \quad (8)$$

Può così farsi l'interessante osservazione che se e solo se le due forze risultanti delle $\sigma'_0 dA$ e $\sigma''_0 dA$ hanno la stessa retta d'azione, la retta $AO_c B$ contiene O ; se si calcolano infatti i momenti rispetto alla

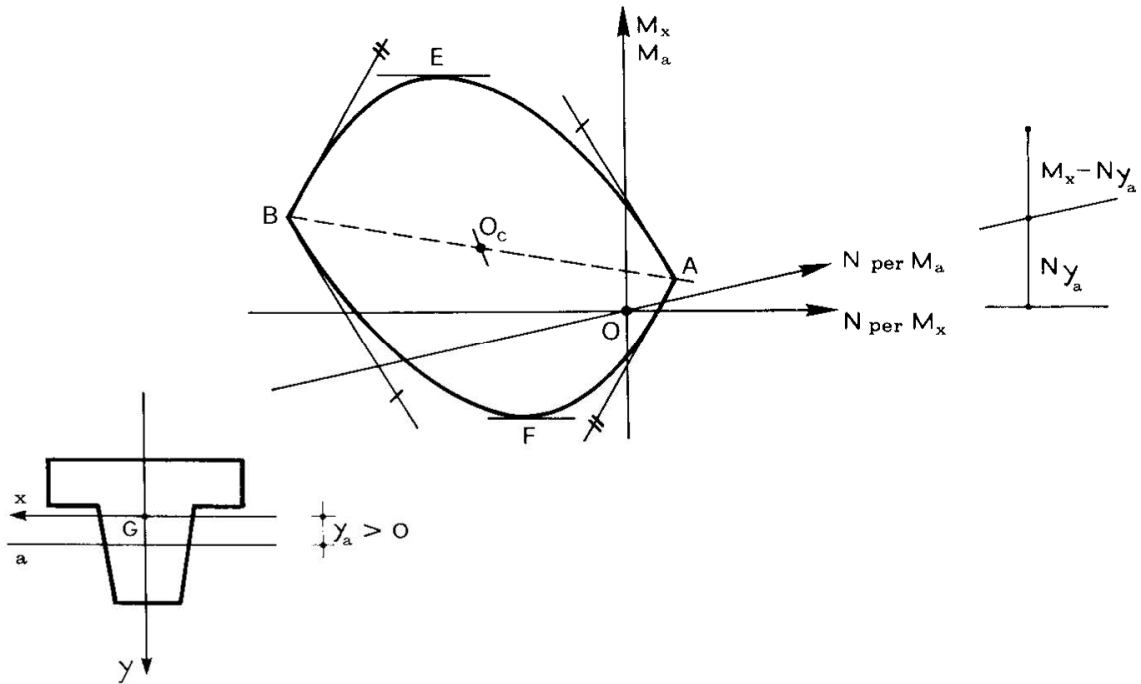


Fig. 11

parallela b ad x che incontra tali risultanti, A e B giacciono sull'asse delle N , e quindi sia N'_0 che N''_0 non sono accompagnati da momenti. Ciò accade, per esempio, se $\sigma''_0 = k\sigma'_0$; se poi σ'_0 e σ''_0 sono costanti, b coincide con la retta x baricentrica.

3. La sezione a due strati.

La sezione della fig. 12 è costituita da due aree rettangolari sottili A_c ed A_f ; si suppone che in A_c sia

$$\sigma'_{c0} = 0 \quad \sigma''_{c0} = \sigma_{c0} ,$$

ed in A_f

$$\sigma'_{f0} = \sigma_{f0} \quad \sigma''_{f0} = 0 .$$

Il momento si calcoli rispetto all'asse a mediano; il disegno è eseguito nell'ipotesi che sia $\sigma_{co} A_c = -4 \sigma_{fo} A_f$.

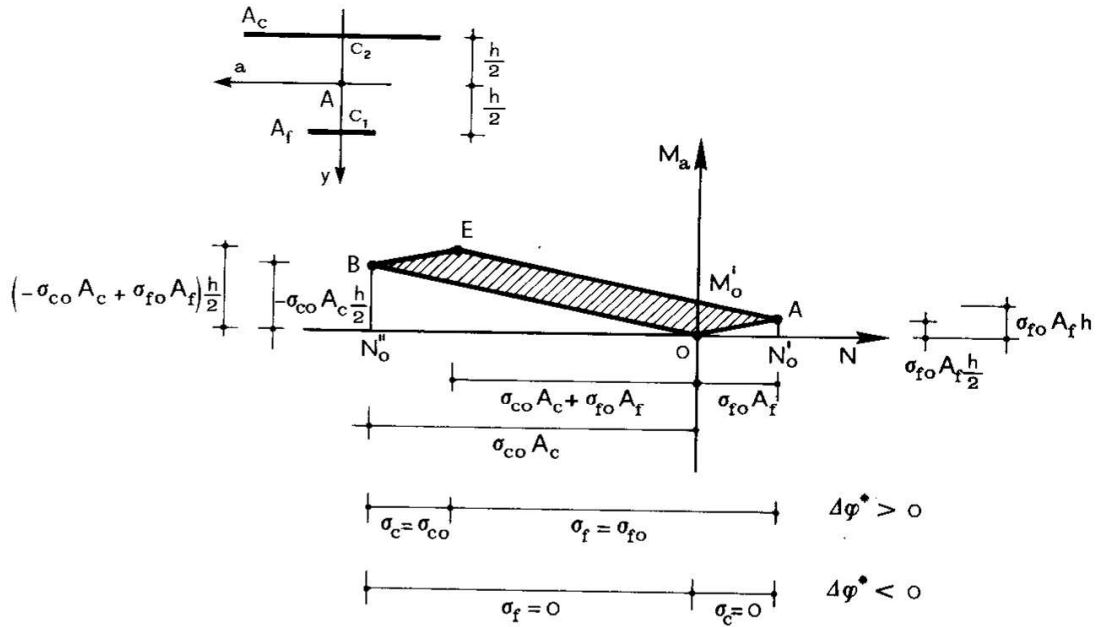


Fig. 12

Le due equazioni di equilibrio sono

$$M_a = (-\sigma_c A_c + \sigma_f A_f) \frac{h}{2}$$

(e)

$$N = \sigma_c A_c + \sigma_f A_f .$$

Si ha $N = N'_0$ (massimo sforzo di trazione) quando $\sigma_f = \sigma_{fo}$, $\sigma_c = 0$; esso vale

$$N'_0 = \sigma_{fo} A_f$$

e si accompagna al momento

$$M_a = \sigma_{fo} A_f \frac{h}{2} .$$

Si ha invece il massimo sforzo di compressione per $\sigma_c = \sigma_{co}$, $\sigma_f = 0$; esso è dato da

$$N_0'' = \sigma_{co} A_c$$

e si accompagna al momento

$$M_a = -\sigma_{co} A_c \frac{h}{2},$$

pur esso positivo.

Gli altri due casi di sollecitazioni estreme in ambedue gli strati sono

$$\sigma_c = \sigma_{co} \qquad \sigma_f = \sigma_{fo}$$

oppure

$$\sigma_c = 0 \qquad \sigma_f = 0 .$$

Nel primo (punto E) si ha, dalla (e),

$$N = \sigma_{co} A_c + \sigma_{fo} A_f$$

$$M = (-\sigma_{co} A_c + \sigma_{fo} A_f) \frac{h}{2} ;$$

nel secondo (punto O) si ha $N = 0$, $M = 0$.

Attesa però la sottigliezza degli strati, può verificarsi una $\Delta\varphi^*$ plastica anche se $\sigma_c \in] \sigma_{co}, 0 [$; $\Delta\varphi^*$ ha centro C_2 in A_c , ed è positiva se $\sigma_f = \sigma_{fo}$, negativa se $\sigma_f = 0$. Così pure, se $\sigma_f \in] 0, \sigma_{fo} [$, $\Delta\varphi^*$ ha centro C_1 in A_f , ed è positiva se $\sigma_c = \sigma_{co}$, negativa se $\sigma_c = 0$. Nel primo caso è

$$\Delta w_A^* = \Delta\varphi^* \frac{h}{2},$$

nel secondo

$$\Delta w_A^* = -\Delta\varphi^* \frac{h}{2}. \quad (f)$$

Se è

$$\sigma_c \in]\sigma_{co}, 0[$$

$$\sigma_f = \sigma_{fo}$$

le (e) porgono

$$M_a = (-\sigma_c A_c + \sigma_{fo} A_f) \frac{h}{2}$$

$$N = \sigma_c A_c + \sigma_{fo} A_f,$$

da cui

$$M_a = (-N + 2\sigma_{fo} A_f) \frac{h}{2},$$

relazione rappresentata dalla retta AE. In un punto qualsiasi di essa si ha $\Delta\varphi^* > 0$, $\Delta w_A^* > 0$, e

$$\frac{dM_a}{dN} = -\frac{h}{2}, \quad \frac{\Delta\varphi^*}{\Delta w_A^*} = \frac{1}{h/2}.$$

Se è

$$\sigma_c \in]\sigma_{co}, 0[$$

$$\sigma_f = 0$$

le (e) porgono

$$M_a = -\sigma_c A_c \frac{h}{2}$$

$$N = \sigma_c A_c ,$$

da cui

$$M_a = -N \frac{h}{2} ,$$

relazione rappresentata dalla retta OB. In un punto qualsiasi di essa si ha $\Delta\varphi^* < 0$, $\Delta w_A^* < 0$, ed ancora

$$\frac{dM_a}{dN} = -\frac{h}{2} , \quad \frac{\Delta\varphi^*}{\Delta w_A^*} = \frac{1}{h/2} .$$

Se è

$$\sigma_f \in]0, \sigma_{fo} [$$

$$\sigma_c = \sigma_{co}$$

le (e) porgono

$$M_a = (-\sigma_{co} A_c + \sigma_f A_f) \frac{h}{2}$$

$$N = \sigma_{co} A_c + \sigma_f A_f ,$$

da cui

$$M_a = (N - 2\sigma_{co} A_c) \frac{h}{2} ,$$

e cioè la retta BE. In essa è $\Delta\varphi^* > 0$, $\Delta w_A^* < 0$, e

$$\frac{dM_a}{dN} = \frac{h}{2}, \quad \frac{\Delta\varphi^*}{\Delta w_A^*} = -\frac{1}{h/2}$$

Se è

$$\sigma_f \in]0, \sigma_{fo} [$$

$$\sigma_c = 0$$

le (e) porgono

$$M_a = \sigma_f A_f \frac{h}{2}$$

$$N = \sigma_f A_f,$$

da cui

$$M_a = N \frac{h}{2},$$

e cioè la retta OA. In essa è $\Delta\varphi^* < 0$, $\Delta w_A^* > 0$, ed ancora

$$\frac{dM_a}{dN} = \frac{h}{2}, \quad \frac{\Delta\varphi^*}{\Delta w_A^*} = -\frac{1}{h/2}.$$

La sezione presa in esame è un caso astratto, e può solo dare una prima indicazione sulla curva limite di una trave sottile a T in conglomerato armato a semplice armatura.

4. Sezione rettangolare di materiale omogeneo.

Si consideri (fig. 13) la sezione rettangolare $b \times h$, con σ'_0 e σ''_0 indipendenti dalla posizione della corda; la forza N agisce nel piano $y z$, ed è normale alla sezione; il momento si calcola rispetto all'asse x baricentrico.

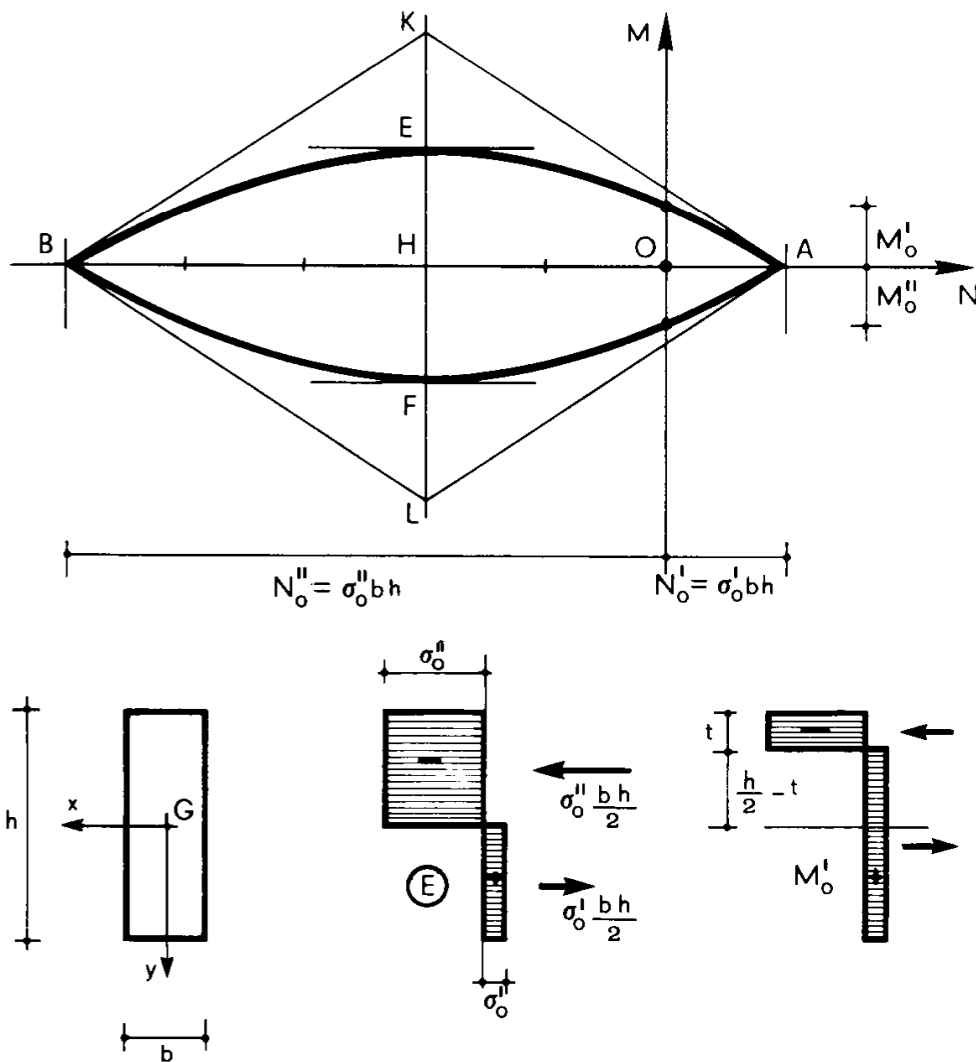


Fig. 13

Passando dall'asse neutro di ordinata y_n a quello di ordinata $y_n + dy_n$ si ha, per $\Delta\varphi^* > 0$,

$$dN = (\sigma''_0 - \sigma'_0) b dy_n$$

e quindi, essendo b costante,

$$\frac{dy_n}{dN} = \frac{1}{b(\sigma_0'' - \sigma_0')} = k_2$$

$$y_n = k_2 N + k_1$$

da cui (6)

$$\frac{dM}{dN} = k_2 N + k_1$$

$$M = \frac{k_2}{2} N^2 + k_1 N + k_0 . \quad (9)$$

Altrettanto vale per $\Delta\varphi^* < 0$.

La relazione (9) è di carattere generale, ed assicura che per una parte di sezione ove la corda è costante, e sotto l'ipotesi che σ_0' e σ_0'' abbiano in tale tratto valori costanti, i due corrispondenti tratti di \wedge (MN) per $\Delta\varphi^* > 0$ e $\Delta\varphi^* < 0$ sono due parabole quadratiche; esse hanno derivate seconde uguali e contrarie: $\frac{d^2 M}{dN^2} = \pm \frac{1}{b(\sigma_0'' - \sigma_0')}$.

Il massimo sforzo N è

$$N'_0 = \sigma'_0 bh ,$$

e ad esso non si accompagna momento. La coppia $(N'_0, 0)$ definisce sull'asse delle ascisse il punto A; le due pendenze in A sono $\pm \frac{h}{2}$.

Il minimo sforzo N è

$$N''_0 = \sigma''_0 bh$$

ed anch'esso non è accompagnato da momento. La coppia $(N''_0, 0)$ definisce sull'asse delle ascisse il punto B; anche in B le due pendenze

sono $\pm \frac{h}{2}$. La curva \wedge è così definita dalle due parabole passanti per A e B, ed aventi in tali punti tangenti note. Queste si ottengono conducendo una parallela all'asse delle M per il punto medio H del segmento AB, e considerando su tale retta i punti K ed L tali che

$$\frac{HK}{BH} = \frac{h}{2}$$

$$\frac{HL}{BH} = -\frac{h}{2};$$

quindi

$$HK = \frac{\sigma'_0 - \sigma''_0}{2} \frac{bh^2}{2}$$

$$HL = -\frac{\sigma'_0 - \sigma''_0}{2} \frac{bh^2}{2}$$

Ottenuti K ed L, la parabola passa per i punti medi E di HK ed F di HL, e le sue tangenti in E ed F sono parallele alla AB.

In H è quindi

$$N = \frac{\sigma'_0 + \sigma''_0}{2} bh \tag{10}$$

$$M = \pm \frac{\sigma'_0 - \sigma''_0}{2} \frac{bh^2}{4}.$$

Si osservi che i valori M della (10) si possono calcolare partendo dalla considerazione che in E ed F la pendenza è nulla, quindi $n = x$; è perciò, per $\Delta\varphi^* > 0$ (fig. 13)

$$M = \sigma'_0 \frac{bh}{2} \frac{h}{4} - \sigma''_0 \frac{bh}{2} \frac{h}{4}.$$

I valori M'_0 ed M''_0 in assenza di sforzo normale si possono ottenere anch'essi direttamente, sfruttando il fatto che per $N = 0$ le due aree di trazione e di compressione stanno nel rapporto delle due σ limiti:

$$\frac{t}{h-t} = -\frac{\sigma'_0}{\sigma''_0}$$

da cui

$$t = h \frac{\sigma'_0}{\sigma'_0 - \sigma''_0}.$$

Risulta quindi, per $\Delta\varphi^* > 0$,

$$\begin{aligned} M'_0 = & -\sigma''_0 b t \cdot \left(\frac{h}{2} - t + \frac{t}{2} \right) + \sigma'_0 b \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} - \\ & - \sigma'_0 b \left(\frac{h}{2} - t \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - t \right) \end{aligned}$$

e, dopo elementari passaggi,

$$M'_0 = \frac{bh^2}{2} \frac{\sigma'_0 \sigma''_0{}^2 - \sigma'_0{}^2 \sigma''_0}{(\sigma'_0 - \sigma''_0)^2}. \quad (11)$$

Per $\sigma'_0 = -\sigma''_0 = \sigma_0$, in H risulta $N = 0$ (10) e cioè, come ovvio, la curva \wedge è simmetrica (fig. 14) rispetto all'asse delle ordinate; si ha

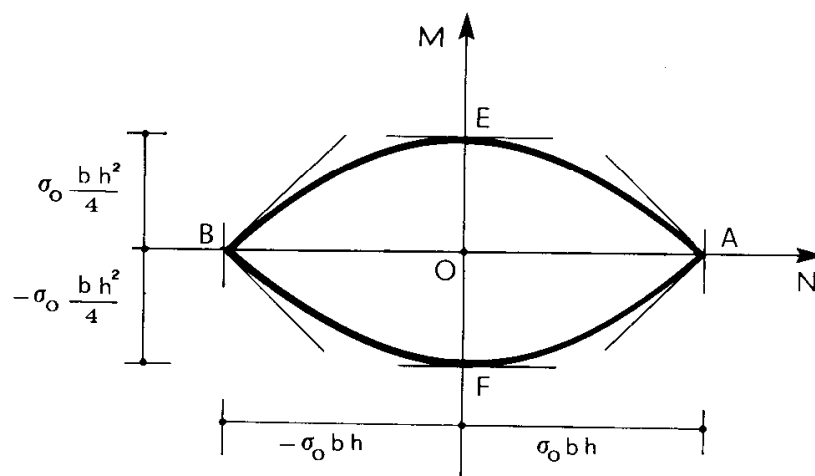


Fig. 14

pure, in tale caso,

$$M_{\max} = M'_0 = \sigma_0 \frac{bh^2}{4}. \quad (12)$$

Analoga espressione vale per M_{\min} .

Se invece è $\sigma'_0 = 0$, come accade nei pilastri formati con materiale

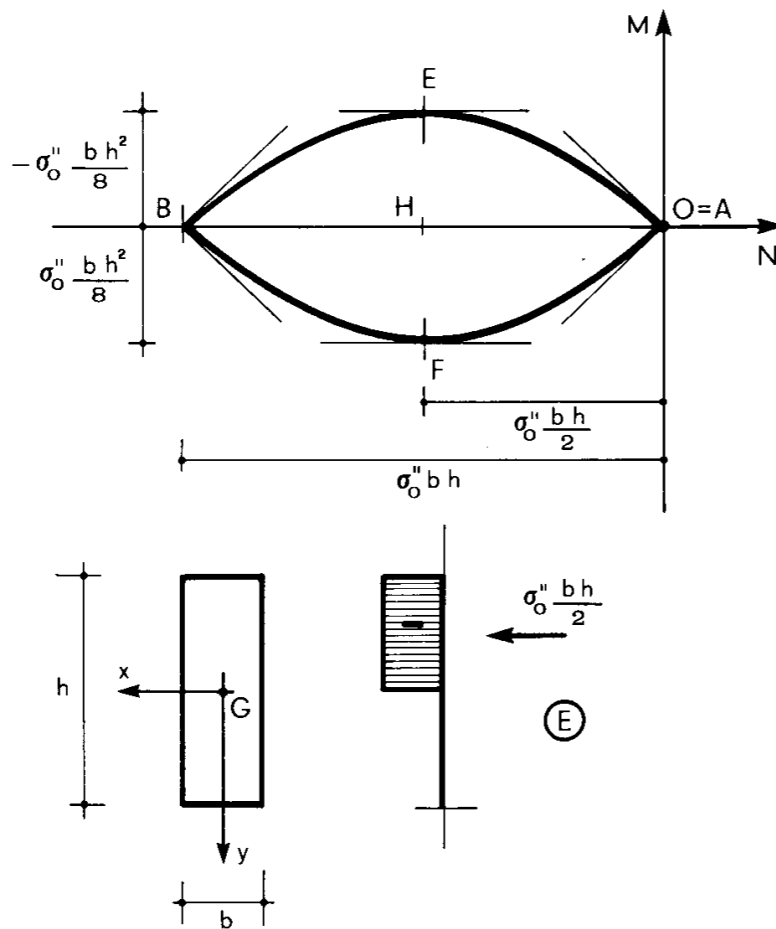


Fig. 15

non reagente a trazione, è $N'_0 = 0$, e cioè (fig. 15) il punto A coincide con l'origine; in H è poi (10)

$$M_{\max} = -\sigma_0'' \frac{bh^2}{8} \quad (13)$$

con

$$N = \sigma_0'' \frac{bh}{2}.$$

5. Sezione a T di materiale omogeneo iso-resistente.

La sezione della fig. 16 è composta di due tratti con corda costante, quindi la curva limite per $\Delta\varphi^* > 0$ è data da due archi di parabola AG e GB; la tangente in G è unica, poiché l'inclinazione (6) è la

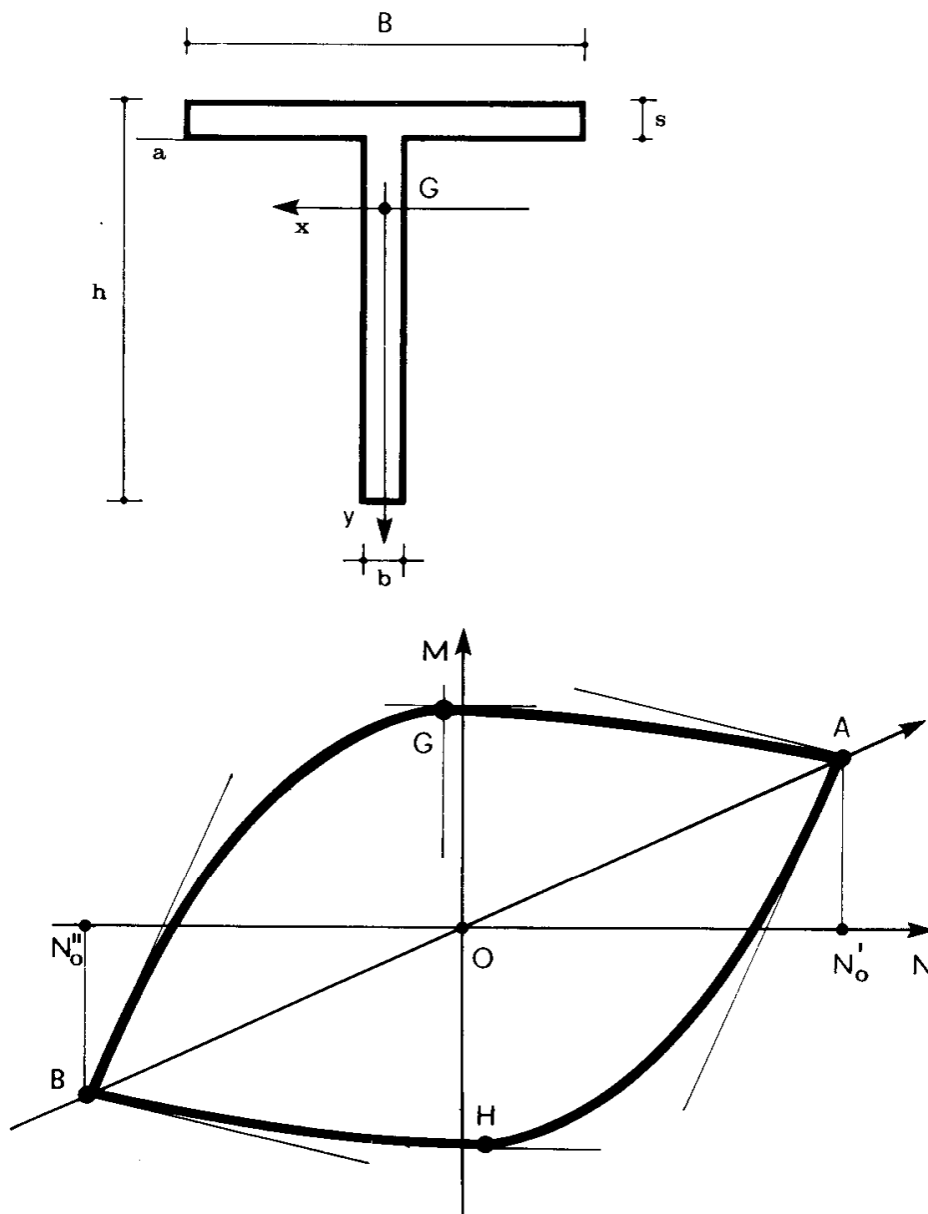


Fig. 16

stessa in corrispondenza dei due assi neutri immediatamente al disopra e al disotto della corda di giunzione dei due rettangoli. Così pure, la curva limite per $\Delta\varphi^* < 0$ è data da due archi di parabola AH ed HB, con tangente comune in H.

Conviene calcolare i momenti rispetto alla retta a parallela all'asse baricentrico x e separante i due rettangoli. Si hanno così le coordinate di A

$$N'_0 = \sigma_0 [Bs + b(h - s)]$$

$$M'_0 = \sigma_0 \left[-\frac{Bs^2}{2} + b\frac{(h - s)^2}{2} \right] ;$$

quelle di B sono le stesse cambiate di segno.

Le coordinate di G sono invece

$$N = \sigma_0 [-Bs + b(h - s)]$$

$$M = \sigma_0 \left[\frac{Bs^2}{2} + b\frac{(h - s)^2}{2} \right] ;$$

quelle di H sono le stesse cambiate di segno.

In G ed H la pendenza è nulla; in A le due tangenti hanno pendenza $h - s$ e $-s$, e così pure in B. I quattro archi di parabola sono così immediatamente disegnabili.

Si nota che la curvatura del tratto BG è molto maggiore di quella del tratto AG; ed infatti, come detto nel paragrafo precedente, la curvatura è inversamente proporzionale all'ampiezza della corda.

Se si vuole il diagramma NM_x , basta adottare come asse delle N la retta inclinata sull'orizzontale di $\arctg -y_a$ (fig. 11); essa risulta ruotata in senso antiorario rispetto all'asse orizzontale se x sta sotto a . Il nuovo asse delle N deve ovviamente essere la retta AB; se infatti tutta la sezione è plasticizzata a trazione, come accade se $N = N'_0$, la forza risultante (σ_0 è costante) passa per il baricentro, e quindi il momento M_x è nullo; altrettanto accade sotto N''_0 .

6. Sezione di conglomerato armato rettangolare a semplice armatura.

Si suppone, per il conglomerato,

$$\sigma'_0 = 0$$

$$\sigma''_0 = \sigma_{co} ,$$

e per l'acciaio

$$\sigma'_0 = -\sigma''_0 = \sigma_{fo} ;$$

si suppone anche che l'armatura sia concentrata lungo una striscia di spessore trascurabile, e che la sezione di conglomerato, $b \times h$, sia quella delimitata dalle staffe.

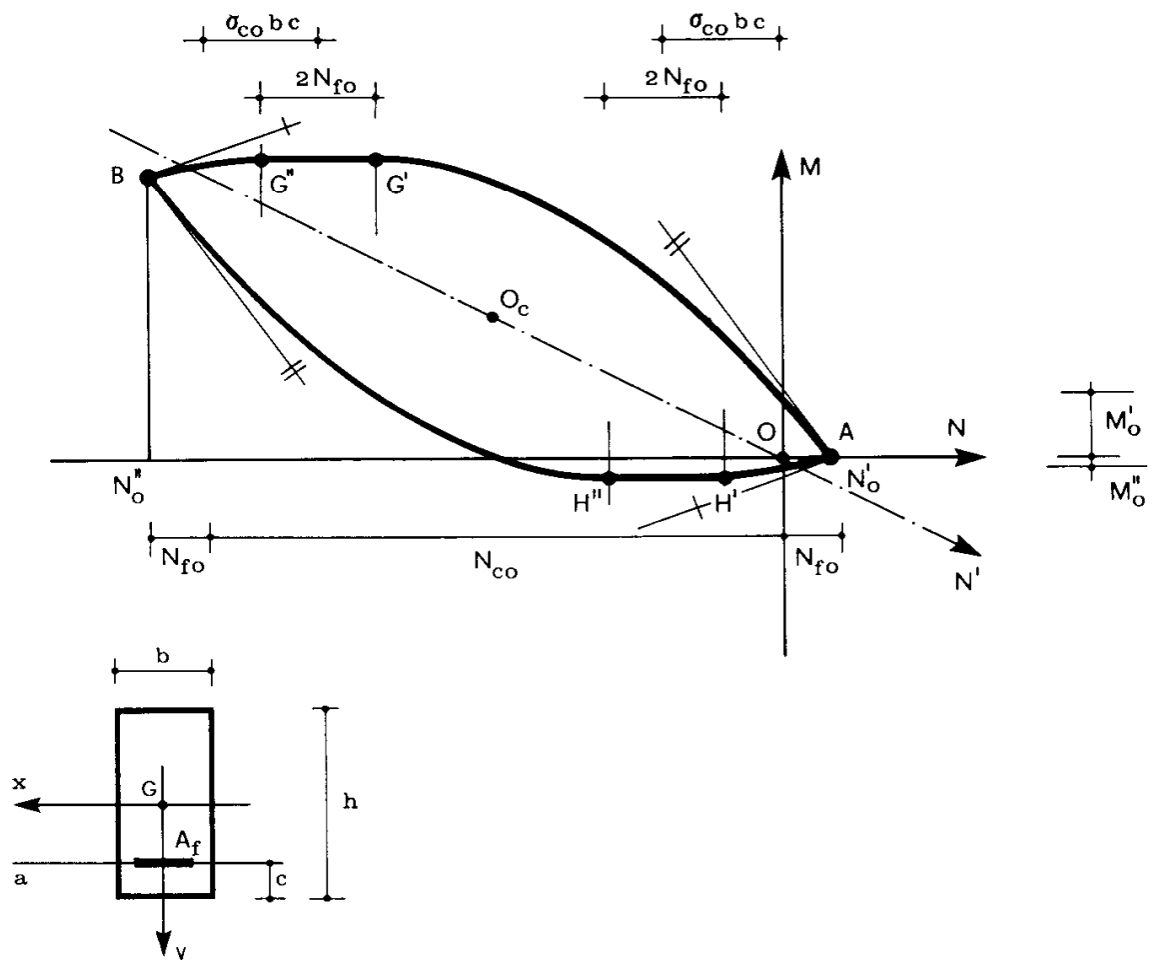


Fig. 17

Conviene (fig. 17) calcolare i momenti rispetto alla retta a sulla quale giace la striscia A_f ; così l'espressione del momento non è influenzata dallo sforzo nelle armature.

Lo sforzo massimo N'_0 si attinge quando l'armatura è plasticizzata a trazione:

$$N'_0 = \sigma_{fo} A_f = N_{fo} .$$

Ad esso si accompagna momento M nullo (punto A). Lo sforzo minimo N''_0 si ha quando sia il conglomerato che l'armatura sono plasticizzati a compressione:

$$N''_0 = \sigma_{co} bh - \sigma_{fo} A_f = N_{co} - N_{fo}$$

dove $N_{fo} > 0$, $N_{co} < 0$. Ad esso si accompagna (punto B) il momento

$$M = -N_{co} \left(\frac{h}{2} - c \right) . \quad (g)$$

Le pendenze in A (e in B) sono pari a c , ed a $-(h - c)$.

Per $\Delta\varphi^* > 0$, la curva \wedge superiore è percorsa da A e B mentre l'asse neutro scende dal bordo superiore all'inferiore. La curva \wedge è composta da due tratti parabolici, AG' e $G''B$, corrispondenti alle due parti di sezione al disopra e al disotto di a . Esiste poi un tratto rettilineo $G'G''$, parallelo all'asse delle N , corrispondente all'asse neutro $n = a$ (e ciò spiega la pendenza nulla), ed al fatto che nel passaggio dell'asse neutro dalla corda immediatamente superiore ad a , a quella immediatamente inferiore, la forza nelle armature passa da N_{fo} a $-N_{fo}$. Il valore del vettore $G'G''$ è pari proprio a $-2 N_{fo}$.

Le coordinate di G' (asse neutro immediatamente superiore ad a , conglomerato superiore compresso) sono

$$N = \sigma_{co} b(h - c) + N_{fo} = N_{co} - \sigma_{co} bc + N_{fo} \quad (h)$$

$$M = -\sigma_{co} b \frac{(h - c)^2}{2} = -N_{co} \frac{(h - c)^2}{2h} ,$$

e quelle di G'' (asse neutro immediatamente inferiore ad a , conglomerato superiore compresso) sono

$$N = \sigma_{co} b(h - c) - N_{fo} = N_{co} - \sigma_{co} bc - N_{fo} \quad (i)$$

$$M = -\sigma_{co} b \frac{(h - c)^2}{2} = -N_{co} \frac{(h - c)^2}{2h}.$$

Per $\Delta\varphi^* < 0$ la curva \wedge è la simmetrica, rispetto al punto medio O_c di AB , della curva già tracciata per $\Delta\varphi^* > 0$. In particolare, le coordinate di H' (asse neutro immediatamente inferiore ad a , conglomerato inferiore compresso) sono

$$N = \sigma_{co} bc + N_{fo} \quad (l)$$

$$M = \sigma_{co} \frac{bc^2}{2} = N_{co} \frac{c^2}{2h}$$

e le coordinate di H'' (asse neutro immediatamente superiore ad a , conglomerato inferiore compresso) sono

$$N = \sigma_{co} bc - N_{fo} \quad (m)$$

$$M = \sigma_{co} \frac{bc^2}{2} = N_{co} \frac{c^2}{2h}$$

Per $N = 0$ e $\Delta\varphi^* > 0$ risulta (si ricordi che $\frac{N_{fo}}{N_{co}} < 0$)

$$M'_0 = N_{fo} \left(h - c + \frac{N_{fo}}{2N_{co}} h \right). \quad (n)$$

Per $N = 0$ e $\Delta\varphi^* < 0$ bisogna distinguere due casi. Se è, come nella fig. 17,

$$N_{fo} < -\sigma_{co} bc$$

l'asse neutro è al disotto di a , la pendenza è positiva, ed

$$M_0'' = -N_{fo} \left(c + \frac{N_{fo}}{2N_{co}} h \right). \quad (o)$$

Se invece è

$$-\sigma_{co} bc < N_{fo}$$

nel passaggio dell'asse neutro dal disotto al disopra di a la N_f passa da N_{fo} a $-N_{fo}$; quindi in una fase di tale passaggio $N = N_f + \sigma_{co} bc$ si annulla, ed il momento M_0'' è dato dalla (l), o dalla (m); il punto (O, M_0'') giace sul segmento di retta $H'H''$.

La fig. 17 è stata eseguita con i segmenti dati:

$$N_{co} = -10 N_{fo}$$

$$\sigma_{co} bc = \frac{N_{co}}{5}.$$

Per ottenere la $\wedge (NM_x)$ con i momenti calcolati rispetto all'asse mediano x , basta far ruotare l'asse delle N intorno ad O di $\arctg -\left(\frac{h}{2} - c\right)$, quindi in senso orario; nel riferimento MN' (fig. 17)

la curva limite già calcolata fornisce la $\wedge (NM_x)$.

E' facile verificare che in A si ottiene

$$M_x = N_{fo} \left(\frac{h}{2} - c \right)$$

ed in B (g)

$$M_x = (N_{co} - N_{fo}) \left(\frac{h}{2} - c \right) - N_{co} \left(\frac{h}{2} - c \right) = -N_{fo} \left(\frac{h}{2} - c \right).$$

7 Sezione di conglomerato armato rettangolare a doppia armatura simmetrica.

I momenti sono calcolati (fig. 18) rispetto all'asse x baricentrico. Lo sforzo normale massimo è

$$N'_0 = 2 \sigma_{fo} A_f = 2 N_{fo}$$

e ad esso non si accompagna momento (punto A); lo sforzo normale minimo è

$$N''_0 = \sigma_{co} bh - 2 N_{fo} = N_{co} - 2 N_{fo},$$

ed anch'esso non è accompagnato da momento (punto B).

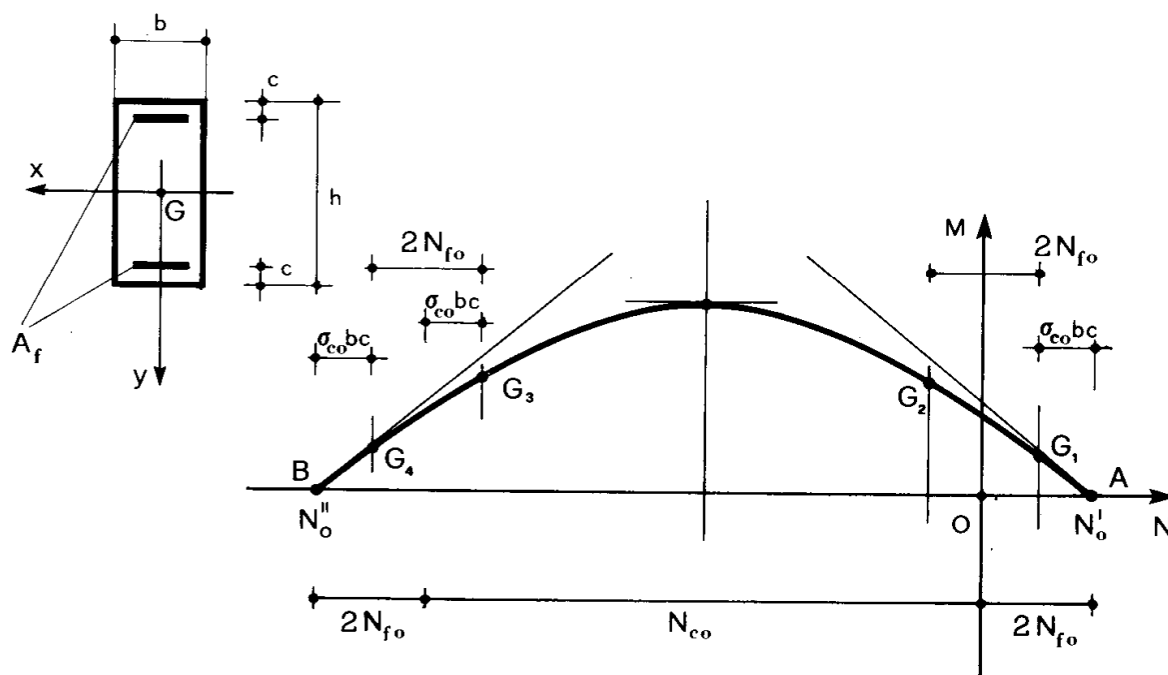


Fig. 18

Le pendenze in A (e in B) sono pari a $\pm \frac{h}{2}$.

Per $\Delta\varphi^* > 0$, la curva \wedge superiore è percorsa da A a B mentre l'asse neutro scende da $y = -\frac{h}{2}$ ad $y = \frac{h}{2}$. La curva \wedge è composta da tre tratti di parabola AG_1 (asse neutro al disopra dell'armatura superiore), G_2G_3 (asse neutro compreso tra le due armature), e G_4B (asse

neutro al disotto dell'armatura inferiore). Esistono poi i due tratti rettilinei $G_1 G_2$ e $G_3 G_4$, corrispondenti al passaggio dell'asse neutro rispettivamente attraverso l'armatura superiore e quella inferiore. Tali tratti sono rettilinei perché, mentre la N passa da N_{fo} a $-N_{fo}$, le zone plasticizzate del conglomerato (al disopra dell'armatura superiore per il tratto $G_1 G_2$, al disopra dell'armatura inferiore per il tratto $G_3 G_4$) restano inalterate, e quindi il momento varia linearmente con N . A conferma di ciò è poi il fatto che il tratto $G_1 G_2$ deve essere a pendenza costante e pari a $-\left(\frac{h}{2} - c\right)$, giacché in tutto questo tratto l'asse neutro taglia l'armatura superiore; e che il tratto $G_3 G_4$ deve pure esso avere pendenza costante e pari ad $\frac{h}{2} - c$, per le stesse ragioni.

Le coordinate di G_1 sono

$$N = 2 N_{fo} + \sigma_{co} bc$$

$$M = -\frac{\sigma_{co} bc}{2} (h - c) ;$$

le coordinate di G_2 sono

$$N = \sigma_{co} bc$$

$$M = -\frac{\sigma_{co} bc}{2} (h - c) + N_{fo} (h - 2c) ;$$

le coordinate di G_3 sono

$$N = N_{co} - \sigma_{co} bc$$

$$M = M(G_2) ;$$

le coordinate di G_4 sono

$$N = N_{co} - \sigma_{co} bc - 2N_{fo}$$

$$M = M(G_1).$$

Il momento è massimo per $n = x$ (pendenza di \wedge nulla) ed è pari a

$$-\sigma_{co} \frac{bh}{2} \frac{h}{4} + N_{fo} (h - 2c)$$

e cioè

$$N = \sigma_{co} \frac{bh}{2} \tag{14}$$

$$M = -N_{co} \frac{h}{8} + N_{fo} (h - 2c).$$

Per $\Delta\varphi^* < 0$ la curva \wedge inferiore è percorsa da A a B mentre l'asse neutro sale dal bordo inferiore a quello superiore; essa è la simmetrica, rispetto all'asse delle ascisse, di quella già tracciata per $\Delta\varphi^* > 0$.

8. Il procedimento di verifica al collasso incipiente

Un numero ψ reale positivo si definisce *moltiplicatore staticamente ammissibile* delle forze applicate F_i se alle forze ψF_i può associarsi almeno un insieme di iperstatiche che, con le ψF_i , dia luogo ad un insieme di caratteristiche di sollecitazione interna N_ψ, T_ψ, M_ψ *compatibile*; che cioè soddisfi in ogni sezione la condizione

$$Q_\psi (N_\psi, M_\psi) \in D_e, \tag{15}$$

avendo applicato il vettore Q_ψ in 0.

Si usa anche dire che un ψ reale positivo è un moltiplicatore staticamente ammissibile se esiste un insieme di caratteristiche N_ψ, T_ψ, M_ψ *equilibrato* con le ψF_i e *compatibile*.

Alla definizione di moltiplicatore cinematicamente sufficiente deve essere premessa quella di *concio endoirrigidito*. Sia Λ_m (fig. 19) la curva limite relativa alla sezione S_m della struttura.

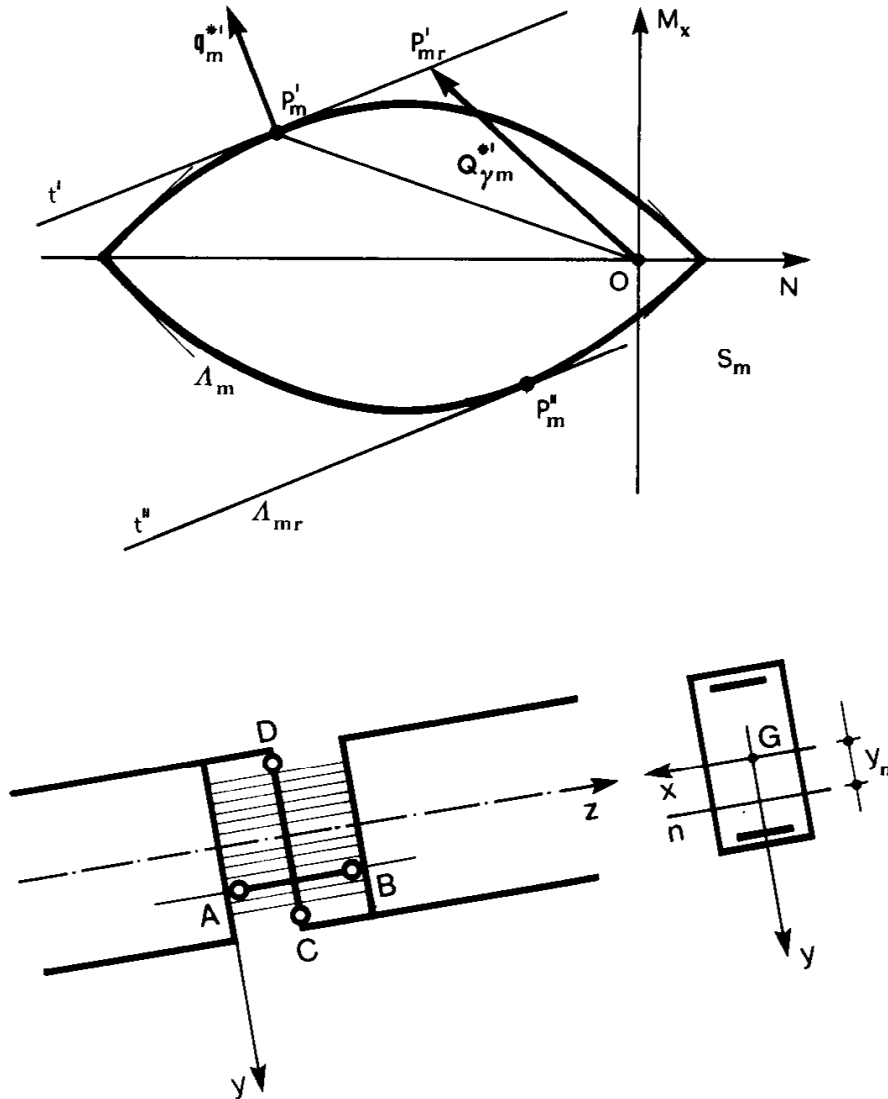


Fig. 19

Il concio in corrispondenza di S_m si suppone realizzato con una serie di pendoli paralleli all'asse, ottenuti tagliando il concio stesso con piani paralleli al piano $xz^{(*)}$; ciò non altera il comportamento elasto plastico del concio, quale è stato studiato a seguito delle ipote-

(*) L'asse z può anche non essere baricentrico.

si precisate nel par. 1 di questo capitolo. Si aggiunge al concio un pendolo AB infinitamente rigido e resistente ($E = \infty$, $\sigma'_0 = -\sigma''_0 = \infty$) nel piano $y z$, con asse parallelo a z , ed alla quota y_n ; per assorbire il taglio si aggiunge anche lungo l'asse y un pendolo CD, peraltro ininfluyente nel seguito della trattazione. La rotazione relativa tra le due facce del concio è così obbligata intorno all'asse n parallelo ad x alla quota y_n . Se il concio è completamente plasticizzato, le tensioni σ'_0 e σ''_0 nei pendoli (escluso AB) forniscono un momento ed uno sforzo normale definiti dal vettore OP'_m o dal vettore OP''_m , a seconda del segno di $\Delta\varphi^*$; P'_m e P''_m sono i punti di contatto di Λ_m con le tangenti t' e t'' inclinate sull'asse N di $\arctg y_n$ (6). Nel caso della fig. 19 P'_m corrisponde a $\Delta\varphi^* > 0$, P''_m a $\Delta\varphi^* < 0$.

Esiste però anche lo sforzo nel pendolo AB, cui si associa uno sforzo normale N_p ed un momento M_{xp} retti dalla relazione

$$\frac{M_{xp}}{N_p} = y_n \cdot \quad (16)$$

La (16) garantisce che comunque il vettore $Q_p(N_p, M_{xp})$ ha la stessa direzione di t' e t'' ; e quindi il vettore

$$Q_{\gamma m}^{*'} = OP'_m + Q_p$$

ha il suo estremo su t' , e l'altro

$$Q_{\gamma m}^{*''} = OP''_m + Q_p$$

ha il suo estremo su t'' . Poiché Q_p può avere qualsiasi valore, la curva limite Λ_{mr} del concio endoirrigidito è costituita dalla striscia di piano compresa tra le due rette t' e t'' . È evidente che q^* è definito in direzione, e può avere ambedue i versi; ad ogni $Q_{\gamma m}^*$ corrisponde un unico q^* , e non viceversa. Ciò premesso, un numero reale γ si definisce *moltiplicatore cinematicamente sufficiente* delle forze applicate F_i se si ottiene come coefficiente di sicurezza s_r delle F_i relativamente alla struttura ottenuta da quella data interponendo concii endoirrigiditi in s sezioni S_m tali, per numero e posizione, da rendere labile tutta la struttura o una sua parte, e dilatando oltre ogni limite le curve Λ delle altre sezioni in modo da garantire la rottura nelle s

sezioni S_m (per la sua stessa definizione, γ è perciò positivo). Una tale struttura è *rinforzata ed a conci endoirrigiditi*, e si indica con Σ_γ . Si usa anche dire che un numero γ reale positivo è un moltiplicatore cinematicamente sufficiente se esiste un insieme di caratteristiche $N_\gamma T_\gamma M_\gamma$ *equilibrato* con le γF_i e *labilizzante*, tale cioè che, in relazione a quello degli spostamenti dei due segni connessi con una Σ_γ per cui $L_F > 0$, risulta nella generica S_m

$$Q_\gamma \cdot \mathbf{q}^* = OP_m \cdot \mathbf{q}^* .$$

Ad ogni Σ_γ corrisponde quindi un ben definito γ . Esso si ottiene attraverso il già noto procedimento di Lagrange, scrivendo la condizione necessaria di equilibrio della struttura $\Sigma_{\gamma\ell}$ (si indica così la Σ_γ resa una volta labile con la soppressione in ogni concio S_m di tutti i pendoli fuorché AB e CD) sottoposta alle forze γF_i ed alle azioni trasmesse alla struttura stessa dai pendoli soppressi nei concetti $S_m^{(*)}$. Per la scrittura dell'equazione si adotta come variazione della configurazione lo spostamento iniziale del meccanismo; le F_i compiono per esso un lavoro L_F positivo. Dal conseguente segno del $\Delta\varphi_m^*$ in ogni S_m si definisce tra P'_m e P''_m l'effettivo punto P_m , e quindi il vettore OP_m . Tale vettore fornisce, con le sue componenti, N_m ed M_{mx} , e cioè la risultante ed il momento rispetto ad x delle forze trasmesse dalla struttura ai pendoli soppressi; il loro segno è quello ordinario delle caratteristiche della sollecitazione interna. Quindi sulla faccia di sinistra agisce una forza assiale N_m secondo z , ed una coppia M_{mx} , e sulla faccia di destra una $-N_m$ ed una $-M_{mx}$.

Il lavoro compiuto da tali forze e tali coppie è $L^* = -OP_m \cdot \mathbf{q}_m^*$; quindi la relazione di Lagrange è

$$\gamma L_F - \sum_m OP_m \cdot \mathbf{q}_m^* = 0 \tag{17}$$

da cui

$$\gamma = \frac{\sum_m OP_m \cdot \mathbf{q}_m^*}{L_F} . \tag{18}$$

(*) Per l'ipotesi di piccoli spostamenti, la condizione di Lagrange si scrive con riferimento alla configurazione iniziale.

Poiché $L_F > 0$, ed $OP_m \cdot q_m^* > 0$, si verifica $\gamma > 0$. E' appena necessario avvertire che OP_m non rappresenta tutta l'interazione attraverso il concio in S_m , ma solo la parte dovuta ai pendoli plasticizzati; ad essa occorre aggiungere lo sforzo in AB, che sposta l'estremo di OP_m lungo la tangente t a \wedge in P_m .

Il *teorema fondamentale* assicura che dati un ψ ed un γ qualsiasi, deve essere

$$\psi \leq \gamma. \quad (19)$$

Sia infatti per assurdo $\psi > \gamma$. In relazione alla Σ_{γ} ed agli spostamenti con cui si calcola γ , ed ai Q_{ψ} compatibili in equilibrio con le ψF_i , deve essere

$$\psi L_F - \Sigma_m Q_{\psi} \cdot q_m^* = 0. \quad (p)$$

Sottraendo la (17) dalla (p) si ottiene

$$(\psi - \gamma) L_F + \Sigma_m (OP_m - Q_{\psi}) \cdot q_m^* = 0. \quad (q)$$

Il generico addendo della Σ_m è positivo o nullo; per la convessità di \wedge_m infatti è

$$OP_m \cdot q_m^* \geq Q_{\psi} \cdot q_m^* .$$

Il primo termine della (q) è positivo, per l'ipotesi $\psi > \gamma$, il secondo è non negativo, quindi la (q) è un assurdo. La (19) è perciò dimostrata.

Poiché s_r è un ψ e un γ , si possono scrivere le relazioni, identiche alle (27) e (28) del cap. 3:

$$s_r = \{ \psi \} \cap \{ \gamma \} \quad (20)$$

$$s_r = \text{Max } \{ \psi \} = \text{Min } \{ \gamma \} ,$$

esprimenti anche l'unicità di s_r .

Ottenuto un γ , può da questo trarsi un ψ nel modo che segue. Si calcola in ogni S_m la reazione del pendolo AB, e cioè il vettore $P_m P_{mr}$ parallelo a t che applicato in P_m fornisce il punto P_{mr} di crisi sulla \wedge_{mr} . Si calcolano poi in tutte le altre sezioni il vettore Q (NM), ed il rapporto

$$s = \frac{|OQ|}{|OQ'|} \quad (r)$$

dove OQ è il vettore Q applicato in O , e Q' il punto dove la semiretta OQ taglia \wedge . Se ρ_{max} è il più grande dei rapporti (r), ivi inclusi quelli calcolati nelle S_m , si ha

$$\psi = \frac{\gamma}{\rho_{max}} \quad (21)$$

e quindi

$$\frac{\gamma}{\rho_{max}} \leq s_r \leq \gamma \quad (22)$$

Da ogni Σ_γ quindi può trarsi un intervallo (22) in cui s_r è sicuramente compreso; il calcolo si ripete, scegliendo nel secondo tentativo come sezioni S_m e punti P_m quelli dove nel primo tentativo si ottenevano i più alti valori del rapporto (r).

Le (20) consentono il calcolo numerico di s_r utilizzando i procedimenti di programmazione lineare.

Infatti, con riferimento ad un generico Σ_γ (per esempio un Σ_γ con le $y_n = 0$) ottenuto con $n + 1$ snodi, ove n è il grado di iperstaticità, si determina il moltiplicatore ϵ delle F_i che pone queste ultime in equilibrio con le reazioni interne X_j ($j = 1, 2, \dots, n + 1$) annullate dagli snodi; risulta così ϵ funzione lineare omogenea delle X_j . Si sceglie poi un numero sufficientemente elevato k di sezioni, e si esprime il vettore Q in ognuna di tali sezioni come funzione lineare delle ϵF_i e delle $n + 1$ reazioni X_j , e cioè delle sole X_j :

$$Q = Q(X_j) \quad (s)$$

In ciascuna delle sezioni si linearizza Δ , e cioè Δ si assimila alla parte del piano compresa tra h coppie di rette parallele (come le t' e t'' della fig. 19). La condizione (15) si traduce quindi, in ogni sezione,

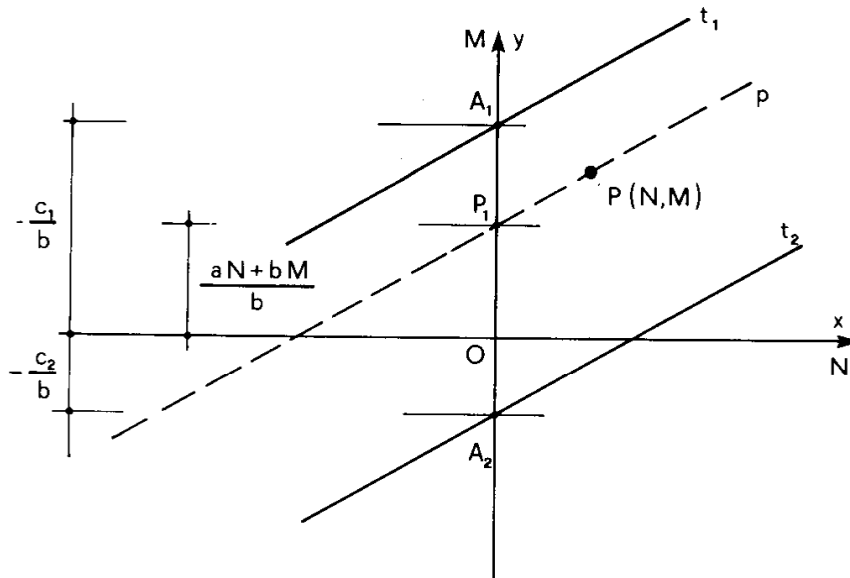


Fig. 20

in $2h$ disequazioni lineari nelle N ed M . Se, per esempio, le equazioni di due rette t_1 e t_2 parallele sono (fig. 20)

$$ax + by + c_1 = 0$$

$$ax + by + c_2 = 0 ,$$

la condizione che $P(NM)$ sia compreso nella striscia è

$$P_1 \in A_1 A_2 , \tag{t}$$

dove P_1 è l'intersezione con l'asse y della retta p , parallela per P alle t_1 e t_2 , ed A_1 e A_2 sono le intersezioni di t_1 e t_2 con l'asse y . L'equazione di p è

$$a(x - N) + b(y - M) = 0 ,$$

da cui

$$A_1 = 0, -\frac{c_1}{b}$$

$$A_2 = 0, -\frac{c_2}{b}$$

$$P_1 = 0, \frac{aN + bM}{b} ;$$

la (t) si traduce quindi nelle due disequazioni

$$-c_2 \leq aN + bM \leq -c_1 . \quad (u)$$

Si tratta perciò di calcolare le $n + 1$ incognite X_j che massimizzano ϵ sotto le $2hk$ condizioni (u), e questo è un classico problema di programmazione lineare. Va detto, come nel par. 3 - 7, che in tal modo si calcola, in realtà, non s_r ma un γ , poiché può darsi che nelle sezioni non comprese nelle k di calcolo la (u) non sia rispettata. Va anche detto che il meccanismo sul quale si calcola ϵ come funzione X_j non è il vero meccanismo di rottura, ma serve soltanto per scrivere una condizione di equilibrio.

9. Un esempio numerico.

Si prende in esame, per un esempio numerico, l'arco incastrato della fig. 21, ad asse parabolico, di luce ℓ e freccia f , con sezione rettangolare costante lungo l'asse, di dimensioni b in orizzontale ed

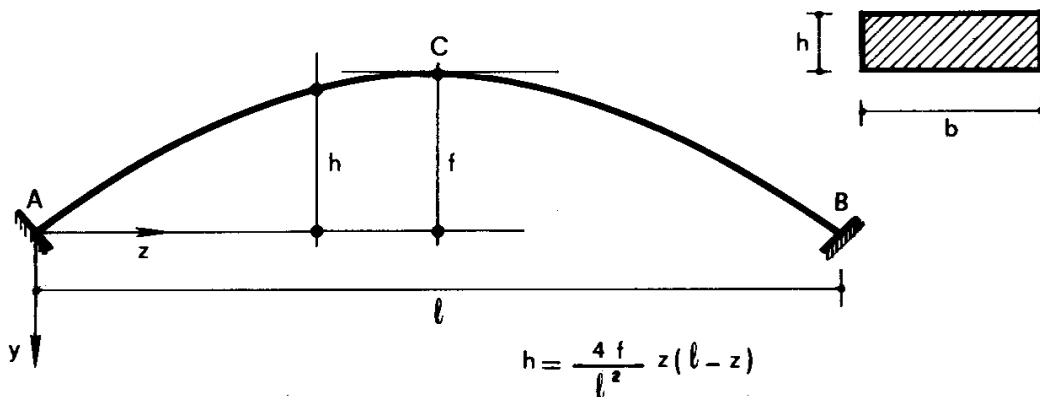


Fig. 21

h in verticale. Il materiale è tale da dover trascurare σ'_0 (conglomerato non armato, o muratura di laterizi e malta); sia $\sigma''_0 = \sigma_c$ ($\sigma_c < 0$). La curva limite è quindi quella della fig. 15, riportata nella fig. 24.

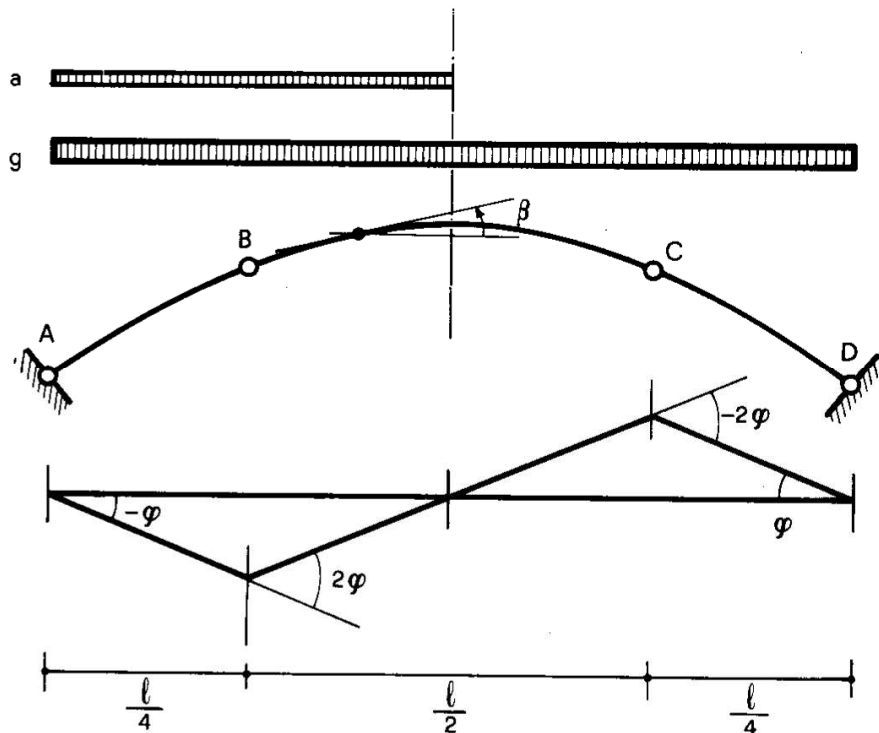


Fig. 22

Nella fig. 22 sono disegnati i carichi agenti: un carico uniforme g esteso a tutta la luce, ed un carico uniforme a esteso alla semiluce di sinistra. Si inizia il calcolo operando sulla Σ_γ della stessa fig. 22; i conci endoirrigiditi presentano il pendolo rigido in corrispondenza del baricentro della sezione e quindi, poiché la deformata cui corrisponde $L_F > 0$ è quella della figura, i punti di crisi sono (fig. 24) E nei conci B e D, F nei conci A e C. Risulta

$$\Delta\varphi_A^* = -\varphi$$

$$\Delta\varphi_B^* = 2\varphi$$

$$\Delta\varphi_C^* = -2\varphi$$

$$\Delta\varphi_D^* = \varphi$$

con $\varphi > 0$. E' perciò (18)

$$L_g = 0$$

$$L_a = a \frac{1}{2} \frac{\ell}{2} \varphi \frac{\ell}{4} = a \frac{\ell^2}{16} \varphi$$

$$\Sigma_m OP_m \cdot \mathbf{q}_m^* = -\sigma_c \frac{bh^2}{8} 6\varphi = -\frac{3}{4} \sigma_c bh^2 \varphi$$

da cui

$$\gamma = -12 \sigma_c \frac{bh^2}{a\ell^2} \quad (v).$$

La condizione di equilibrio alla rotazione di tutto l'arco intorno alla cerniera D si scrive

$$V_A \ell + \gamma g \ell \frac{\ell}{2} + \gamma a \frac{\ell}{2} \frac{3}{4} \ell + m_A + m_D = 0; \quad (z)$$

ponendo

$$a = \alpha g \quad (a')$$

la (z) porge $\left(m_A = m_D = -\sigma_c \frac{bh^2}{8} \right)$

$$V_A = -\gamma g \frac{\ell}{2} \left(1 + \frac{3}{4} \alpha \right) + \sigma_c \frac{bh^2}{4\ell},$$

ed ancora, per la (v),

$$V_A = \sigma_c \frac{bh^2}{\ell} \frac{24 + 19\alpha}{4\alpha}. \quad (b')$$

La condizione di equilibrio della parte AB (fig. 23) alla rotazione intorno a B si scrive

$$H_A \frac{3}{4} f + V_A \frac{\ell}{4} + \mathfrak{m}_A + \mathfrak{m}_B + \gamma g (1 + \alpha) \frac{\ell}{4} \frac{\ell}{8} = 0$$

da cui $\left(\mathfrak{m}_A = \mathfrak{m}_B = -\sigma_c \frac{bh^2}{8} \right)$

$$H_A = -\sigma_c \frac{bh^2}{f} \frac{6 + 3\alpha}{4\alpha} . \quad (c')$$

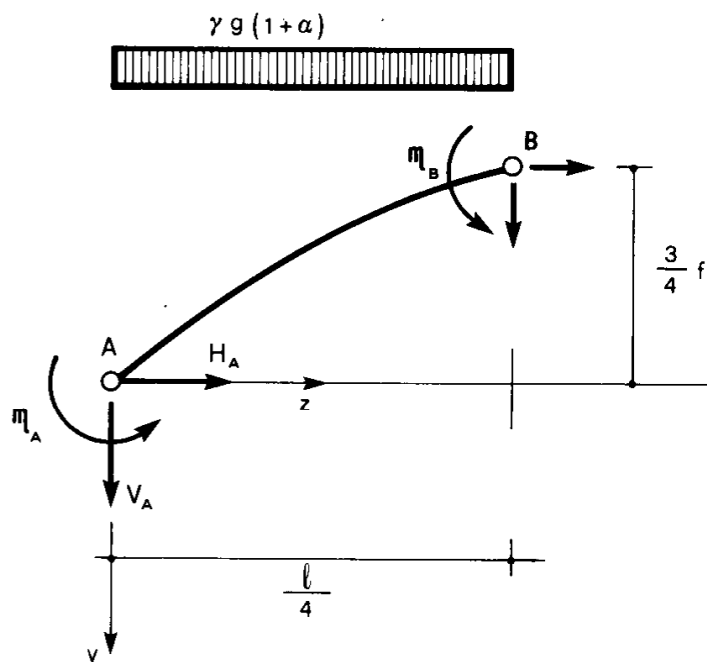


Fig. 23

La generica quota d'asse h rispetto alla congiungente le imposte è

$$h = \frac{4f}{\ell^2} z (\ell - z)$$

e, ponendo

$$\frac{z}{\ell} = \zeta , \quad (d')$$

si ha

$$h = 4f\zeta(1 - \zeta). \quad (e')$$

L'inclinazione dell'asse è poi

$$\frac{dh}{dz} = \frac{4f}{\ell^2}(\ell - 2z)$$

e cioè

$$\frac{dh}{dz} = \frac{4f}{\ell}(1 - 2\zeta). \quad (f')$$

Per

$$\zeta \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad (g')$$

è

$$M(\zeta) = -V_A \zeta \ell - H_A 4f\zeta(1 - \zeta) - m_A - \\ - \gamma g(1 + \alpha) \frac{\zeta^2 \ell^2}{2},$$

e cioè

$$M(\zeta) = \sigma_c b h^2 \frac{24\zeta^2 - 14\zeta + 1}{8}. \quad (h')$$

Si nota come $M(\zeta)$ sia indipendente da $\frac{f}{\ell}$ e da α ; si nota pure, come

verifica, che per $\zeta = 0$ è $M = \sigma_c \frac{bh^2}{8}$, e per $\zeta = 0,25$ è $M = -\sigma_c \frac{bh^2}{8}$.

Per $\zeta = 0,5$ è poi $M = 0$.

Sempre nell'intervallo (g') è poi (N positivo se di trazione, $\beta > 0$)

$$N(\zeta) = V_A \operatorname{sen} \beta - H_A \cos \beta + \gamma g(1 + \alpha)\zeta \ell \operatorname{sen} \beta.$$

Per la (f') è

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{4f}{\ell} \frac{1 - 2\zeta}{\sqrt{1 + 16 \frac{f^2}{\ell^2} (1 - 2\zeta)^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + 16 \frac{f^2}{\ell^2} (1 - 2\zeta)^2}},$$

e quindi

$$N(\zeta) = \sigma_c bh^2 \frac{f}{\ell} \frac{4(1 - 2\zeta)}{\sqrt{\ell^2 + 16f^2(1 - 2\zeta)^2}} \left(\frac{24 + 19\alpha}{4\alpha} - 12\zeta \frac{1 + \alpha}{\alpha} \right) +$$

$$+ \sigma_c bh^2 \frac{\ell}{f} \frac{1}{\sqrt{\ell^2 + 16f^2(1 - 2\zeta)^2}} \frac{6 + 3\alpha}{4\alpha}. \quad (i')$$

Si consideri ora l'intervallo

$$\zeta \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]. \quad (\ell')$$

L'equilibrio di tutto l'arco della traslazione verticale porge

$$V_A + V_D + \gamma g \ell \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) = 0$$

da cui

$$V_D = \sigma_c \frac{bh^2}{\ell} \frac{24 + 5\alpha}{4\alpha} . \quad (m')$$

E' poi

$$H_D = -H_A = \sigma_c \frac{bh^2}{f} \frac{6 + 3\alpha}{4\alpha} .$$

Si ha perciò

$$M(\zeta) = -V_D (1 - \zeta) \ell + H_D 4f\zeta (1 - \zeta) + m_D - \\ - \gamma g \frac{(1 - \zeta)^2 \ell^2}{2}$$

e cioè

$$M(\zeta) = \sigma_c bh^2 \frac{-24\zeta^2 + 34\zeta - 11}{8} . \quad (n')$$

Si verifica che per $\zeta = 0,75$ è $M = \sigma_c \frac{bh^2}{8}$, e per $\zeta = 1$ è $M =$

$= -\sigma_c \frac{bh^2}{8}$; per $\zeta = 0,5$ si ottiene $M = 0$, e cioè lo stesso valore ricavabile dalla (h')

Si ha poi ($\beta < 0$)

$$N(\zeta) = -V_D \text{sen } \beta + H_D \text{cos } \beta - \gamma g (1 - \zeta) \ell \text{sen } \beta$$

da cui

$$N(\zeta) = -\sigma_c bh^2 \frac{f}{\ell} \frac{4(1 - 2\zeta)}{\sqrt{\ell^2 + 16f^2(1 - 2\zeta)^2}} \left(\frac{24 + 5\alpha}{4\alpha} - 12 \frac{1 - \zeta}{\alpha} \right) + \\ + \sigma_c bh^2 \frac{\ell}{f} \frac{1}{\sqrt{\ell^2 + 16f^2(1 - 2\zeta)^2}} \frac{6 + 3\alpha}{4\alpha} . \quad (o')$$

Ponendo

$$\lambda = \frac{\ell}{h} \quad (p')$$

ed

$$m = \frac{f}{\ell} \quad (\mathfrak{q}')$$

la (i') si scrive

$$\begin{aligned} \frac{N(\xi)}{\sigma_c bh} &= \frac{m}{\lambda} \frac{4(1-2\xi)}{\sqrt{1+16m^2(1-2\xi)^2}} \left(\frac{24+19\alpha}{4\alpha} - 12\xi \frac{1+\alpha}{\alpha} \right) + \\ &+ \frac{1}{m\lambda} \frac{1}{\sqrt{1+16m^2(1-2\xi)^2}} \frac{6+3\alpha}{4\alpha} \end{aligned} \quad (\mathfrak{r}')$$

e la (o')

$$\begin{aligned} \frac{N(\xi)}{\sigma_c bh} &= -\frac{m}{\lambda} \frac{4(1-2\xi)}{\sqrt{1+16m^2(1-2\xi)^2}} \left(\frac{24+5\alpha}{4\alpha} - 12 \frac{1-\xi}{\alpha} \right) + \\ &+ \frac{1}{m\lambda} \frac{1}{\sqrt{1+16m^2(1-2\xi)^2}} \frac{6+3\alpha}{4\alpha} . \end{aligned} \quad (\mathfrak{s}')$$

Per

$$\alpha = \frac{a}{g} = \frac{1}{3}$$

$$\lambda = \frac{\ell}{h} = 40$$

$$m = \frac{f}{\ell} = \frac{1}{5}$$

si hanno alle varie ascisse i seguenti valori di M ed N:

TABELLA 1

ξ	$-M/\sigma_c bh^2$	$N/\sigma_c bh$	ρ
0	- 0,1250	0,8677	1,23
0,05	- 0,0450	0,8298	
0,10	0,0200	0,7946	
0,15	0,0700	0,7625	
0,20	0,1050	0,7339	1,02
0,25	0,1250	0,7091	1,10
0,30	0,1300	0,6887	1,10
0,35	0,1200	0,6728	1,04
0,40	0,0950	0,6620	
0,45	0,0550	0,6565	
0,50	0	0,6562	
0,55	- 0,0550	0,6602	
0,60	- 0,0950	0,6672	
0,65	- 0,1200	0,6769	1,06
0,70	- 0,1300	0,6894	1,17
0,75	- 0,1250	0,6898	1,11
0,80	- 0,1050	0,7220	1,03
0,85	- 0,0700	0,7418	
0,90	- 0,0200	0,7636	
0,95	0,0450	0,7875	
1,00	0,1250	0,8131	1,16

Poiché la sezione è costante, nell'unica fig. 24 sono riportati i punti (NM) corrispondenti alle varie ascisse ζ ; alle ascisse $\zeta = 0$ e $\zeta = 0,75$

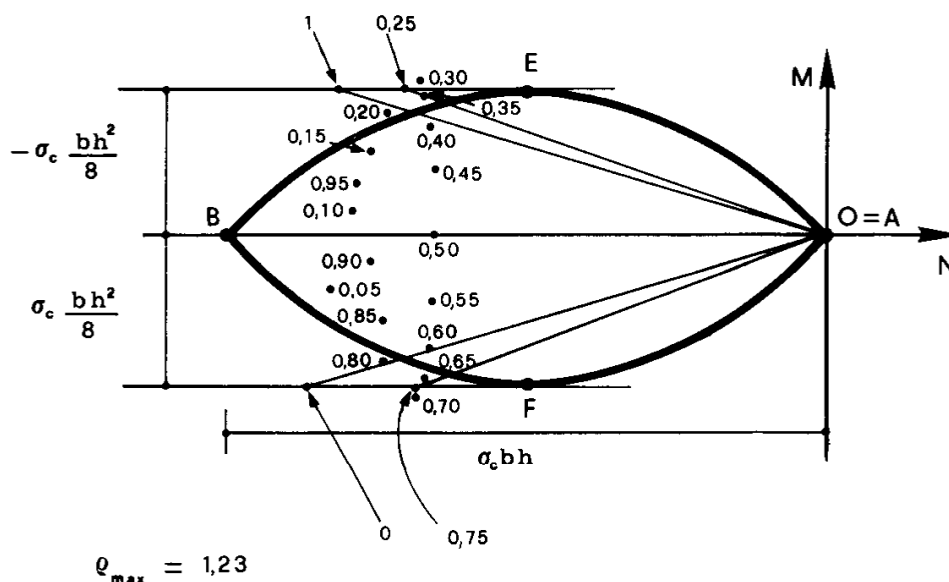


Fig. 24

tali punti sono ubicati sulla parallela all'asse delle N per F, ed alle ascisse $\zeta = 0,25$ e $\zeta = 1$ sulla parallela all'asse delle N per E. Nella tabella 1 sono riportati i valori di ρ nelle sole sezioni ove $\rho > 1$. Il massimo valore di ρ si verifica per $\zeta = 0$, ed è pari ad 1,23; quindi dalla (v) si trae

$$-0,0183 \frac{\sigma_c b}{g} \leq s_r \leq -0,0225 \frac{\sigma_c b}{g}. \quad (t')$$

Il secondo tentativo si effettua (fig. 25) spostando la terza cerniera plastica C dall'ascissa $\zeta = 0,75$ all'ascissa $\zeta = 0,70$, e lasciando le altre alla stessa ascissa. Inoltre (fig. 26) i punti di collasso sulla curva limite delle quattro sezioni sono assunti dove, nella diminuzione proporzionale del carico, la retta congiungente (NM) con O taglia la curva stessa. Sono così definiti gli assi neutri (fig. 26) e quindi la Σ_γ e la deformata (fig. 25). Si ha da questi

$$L_g = g(0,0660 - 0,0505) \varphi \ell^2 = g \cdot 0,0155 \varphi \ell^2$$

$$L_a = a \cdot 0,0660 \varphi \ell^2 = g \cdot 0,0220 \varphi \ell^2$$

e quindi

$$L_F = g \cdot 0,0375 \varphi \ell^2 .$$

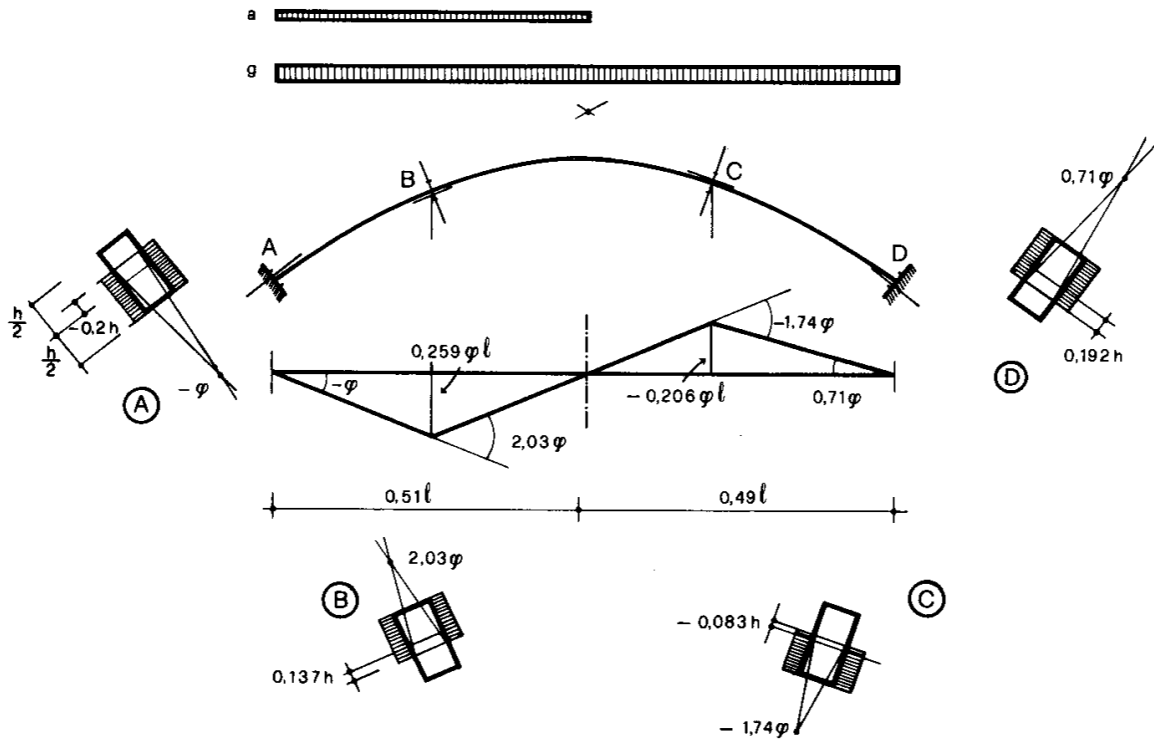
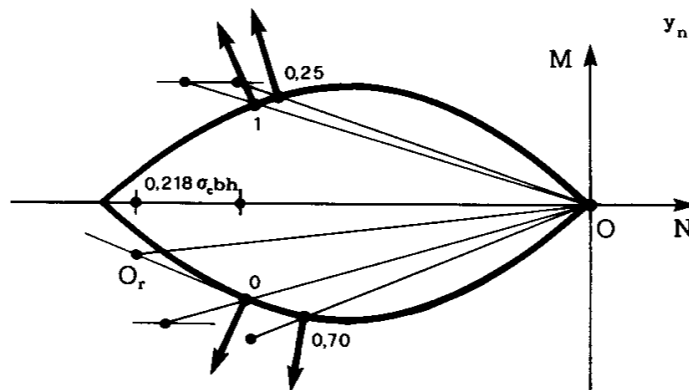


Fig. 25

$$\begin{aligned}
 y_n(0) &= -0.200 h \\
 y_n(0.25) &= 0.137 h \\
 y_n(0.70) &= -0.083 h \\
 y_n(1) &= 0.192 h
 \end{aligned}$$



$$y_n(0) = \frac{4.8u}{12u} \frac{S_M}{S_N} = \frac{4.8}{12 \cdot 2}$$

$$S_N u = \frac{\sigma_c b h}{12} K_g$$

$$S_M u = \frac{\sigma_c b h^2}{24} K_g \text{ cm}$$

Fig. 26

E' poi

$$\begin{aligned} L_A^* &= -0,708 \sigma_c b h \cdot 0,20 \varphi h - 0,104 \sigma_c b h^2 \cdot \varphi = \\ &= -0,246 \sigma_c b h^2 \varphi ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_B^* &= -0,650 \sigma_c b h \cdot 0,137 \cdot 2,03 \varphi h - \\ &\quad -0,112 \sigma_c b h^2 \cdot 2,03 \varphi = \\ &= -0,408 \sigma_c b h^2 \varphi ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_C^* &= -0,583 \sigma_c b h \cdot 0,083 \cdot 1,74 \varphi h - \\ &\quad -0,120 \sigma_c b h^2 \cdot 1,74 \varphi = \\ &= -0,293 \sigma_c b h^2 \varphi ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_D^* &= -0,692 \sigma_c b h \cdot 0,192 \cdot 0,71 \varphi h - \\ &\quad -0,107 \sigma_c b h^2 \cdot 0,71 \varphi = \\ &= -0,170 \sigma_c b h^2 \varphi \end{aligned}$$

e quindi

$$L^* = -1,117 \sigma_c b h^2 \varphi$$

Dalla (18) si ha perciò

$$\gamma = -\frac{L^*}{L_F} = -29,8 \frac{\sigma_c b h^2}{g \varrho^2} . \quad (u')$$

La (u') è un accordo con la (t'). Si devono ora ricercare i valori ρ del

secondo tentativo, per ottenere un secondo ψ . Occorre, a ciò fare, innanzitutto conoscere i valori delle reazioni trasmesse dai pendoli irrigidenti in A, B, C e D. Esse possono ottenersi, assieme ai valori dei tagli nelle stesse sezioni, da otto equazioni di equilibrio; oppure una

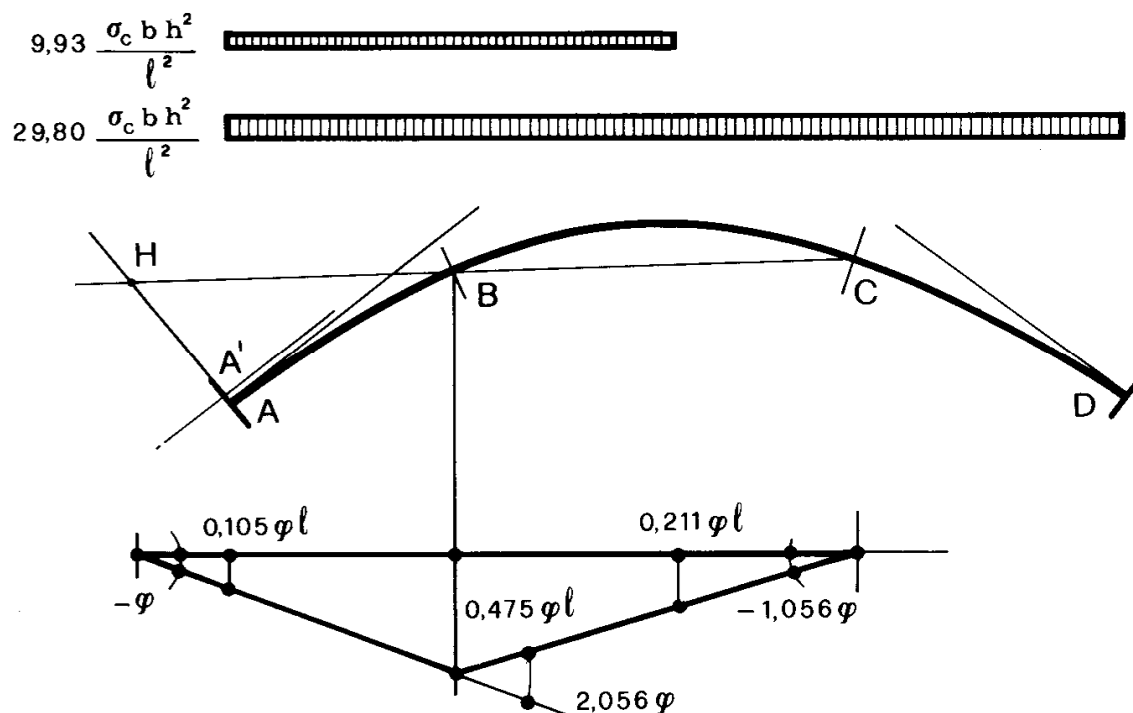


Fig. 27

alla volta attraverso il procedimento di Lagrange. Ad esempio, il calcolo della reazione X_A del pendolo in A per quest'ultima via si esegue utilizzando il meccanismo della fig. 27. Si ha così

$$A_a = 0,1579 \varphi \ell^2$$

$$A_g = 0,1790 \varphi \ell^2 ,$$

e quindi

$$L_a = -9,93 \frac{\sigma_c b h^2}{\ell^2} \cdot 0,1579 \varphi \ell^2 = -1,568 \sigma_c b h^2 \varphi$$

$$L_g = -29,8 \frac{\sigma_c b h^2}{\ell^2} \cdot 0,1790 \varphi \ell^2 = -5,334 \sigma_c b h^2 \varphi .$$

E' poi

$$|AH| = 0,169 \ell = 6,75 h ,$$

da cui

$$\begin{aligned} L_A &= 0,104 \sigma_c b h^2 \varphi + \\ &+ 0,708 \sigma_c b h \cdot 6,75 \varphi h = \\ &= 4,883 \sigma_c b h^2 \varphi . \end{aligned}$$

Così pure si ha

$$\begin{aligned} L_B &= 0,112 \sigma_c b h^2 \cdot 2,056 \varphi + \\ &+ 0,708 \sigma_c b h \cdot 2,056 \cdot 0,137 \varphi h = \\ &= 0,413 \sigma_c b h^2 \varphi , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_C &= 0,120 \sigma_c b h^2 \cdot 1,056 \varphi + \\ &+ 0,583 \sigma_c b h \cdot 1,056 \cdot 0,083 \varphi h = \\ &= 0,178 \sigma_c b h^2 \varphi . \end{aligned}$$

Dalla

$$HA' = 0,164 \ell = 6,56 h$$

si ha infine ($X_A > 0$ se di trazione)

$$L_X = X_A \cdot 6,56 h \varphi .$$

L'equazione di Lagrange si scrive perciò

$$X_A \cdot 6,56 h \varphi - 6,902 \sigma_c b h^2 \varphi + 5,474 \sigma_c b h^2 \varphi = 0$$

da cui

$$X_A = 0,218 \sigma_c b h. \quad (v')$$

E' così individuato il punto O_r sulla tangente in O alla curva limite (fig. 26), e quindi

$$\rho_A = 1,05 .$$

Così procedendo, si verifica che il massimo ρ è ancora in A, e quindi $\rho_A = \rho_{\max}$, e

$$-0,0177 \frac{\sigma_c b}{g} \leq s_r \leq -0,0186 \frac{\sigma_c b}{g} . \quad (z')$$

Confrontando la (z') con la (t'), si osserva che nel secondo tentativo si è ristretto l'intervallo, anche se si ottiene un ψ minore di quello del primo tentativo. Può porsi, in definitiva,

$$-0,0183 \frac{\sigma_c b}{g} \leq s_r \leq -0,0186 \frac{\sigma_c b}{g} ,$$

intervallo abbastanza ristretto per considerare chiuso l'esempio.