

CAPITOLO V

LA CRISI IN PRESENZA DI MOMENTO FLETTENTE E TAGLIO

1. Studio di un tronco di trave di sezione rettangolare.

Nel secondo capitolo si è pervenuti al concetto di cerniera plastica e di momento limite prendendo in esame un tronco di trave soggetto a solo momento flettente (e quindi a momento flettente costante); successivamente però (cap. 3) si è utilizzato tale concetto per la determinazione del moltiplicatore di rottura in una struttura monodimensionale, trascurando il fatto che in genere il momento flettente è accompagnato da taglio. Il taglio è sempre presente nelle usuali strutture a telaio, e quindi, poiché esso decurta il valore assoluto del momento limite, tale modo di procedere conduce a valori in eccesso del moltiplicatore di rottura. Si cominci ad esaminare il caso della sezione con doppia simmetria ortogonale, per esempio (fig. 1)

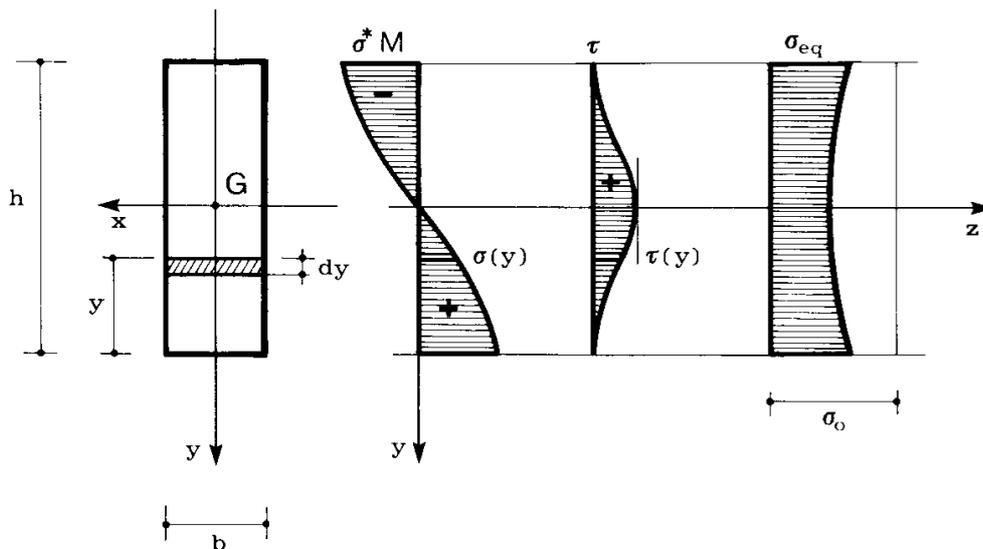


Fig. 1

un rettangolo sollecitato secondo una mediana; il materiale sia isore-sistente. Come criterio di crisi si adotti quello di Hencky, e quindi

la relazione limite tra σ e τ è

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_0^2. \quad (1)$$

Si fissi poi un determinato rapporto $k \neq 0$ tra M e T :

$$\frac{M}{T} = k, \quad (2)$$

e si ponga

$$\sigma = \sigma^* M, \quad (3)$$

dove $\sigma^*(y)$ è una legge assegnata a meno di un parametro, con la sola condizione che sia antisimmetrica rispetto all'asse z . Dalla condizione

$$M = 2b \int_{-\frac{h}{2}}^0 \sigma y dy = 2bM \int_{-\frac{h}{2}}^0 \sigma^* y dy$$

si ottiene

$$\int_{-\frac{h}{2}}^0 \sigma^* y dy = \frac{1}{2b}$$

da cui si trae il valore del parametro.

Dato M , dal diagramma delle $\sigma(y)$ si ricava, supponendo τ costante con x e nel rispetto dell'equilibrio,

$$\tau(y) = -\frac{1}{b} \int_{A'} \frac{\partial \sigma}{\partial z} dA' = -\int_{-\frac{h}{2}}^y \frac{\partial \sigma}{\partial z} dy',$$

dove A' è l'area al disopra della corda di ordinata y . Poiché è

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = \sigma^* \frac{dM}{dz} = \sigma^* T = \sigma^* \frac{M}{k},$$

si ha

$$\tau(y) = -\frac{M}{k} \int_{-\frac{h}{2}}^y \sigma^*(y') dy' . \quad (4)$$

Ottenuto così $\tau(y)$, si calcola per ogni valore di y la quantità

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} ; \quad (5)$$

sia

$$\psi = \frac{\sigma_0}{\sigma_{eq \max}}$$

$$\gamma = \frac{\sigma_0}{\sigma_{eq \min}} .$$

In aderenza al teorema fondamentale (cap. 3) può scriversi, chiaman-

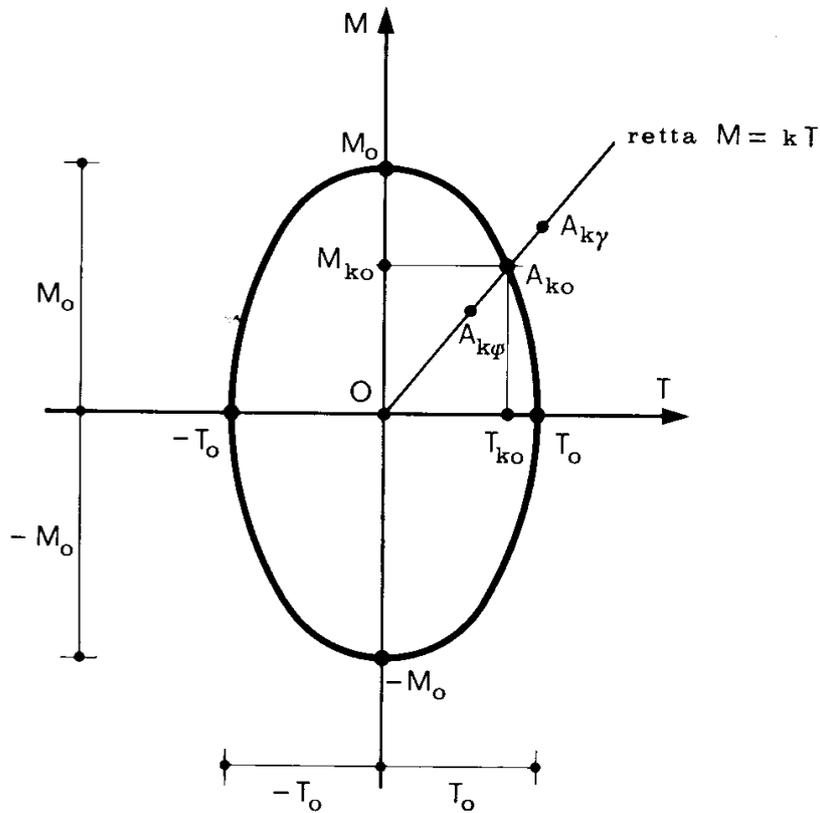


Fig. 2

do M_{k_0} e T_{k_0} i valori limiti di M e T nel rapporto k (fig. 2),

$$\psi M \leq M_{k_0} \leq \gamma M \quad (6)$$

$$\psi T \leq T_{k_0} \leq \gamma T.$$

La possibilità di utilizzare così il teorema fondamentale, per ottenere un intervallo $A_{k\psi}$ (ψM , ψT) $A_{k\gamma}$ (γM , γT) della retta $M = kT$ in cui è sicuramente compreso il punto A_{k_0} di coordinate M_{k_0} T_{k_0} , si evince da uno schema elementare cui può ridursi il collegamento tra le

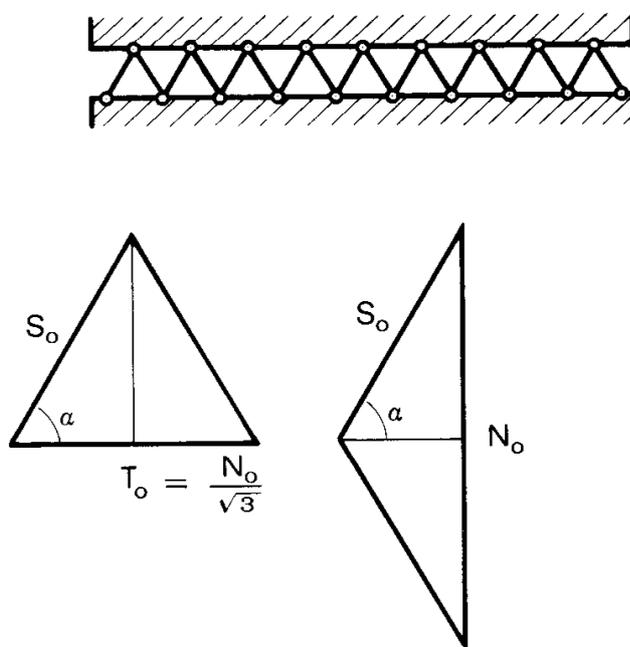


Fig. 3

due parti della trave separate da un taglio ideale secondo una generica sezione retta. Tale schema (fig. 3) è costituito da un insieme di elementi pendolari disposti secondo una maglia di triangoli.

Questi ultimi devono essere equilateri se si vuole che sia rispettata la condizione (1) di Hencky; infatti in tal caso una forza N_0 assiale, o una forza tagliante $\frac{N_0}{\sqrt{3}}$, portano ambedue alla crisi, e quindi devono fornire gli stessi sforzi assiali nei pendoli; se ne trae

$$\frac{N_0}{2 \operatorname{sen} \alpha} = \frac{N_0}{2\sqrt{3} \cos \alpha}$$

da cui

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$$

$$\alpha = 60^\circ .$$

Naturalmente l'intervallo $A_{k\psi} - A_{k\gamma}$ è tanto più ristretto quanto più $\sigma_{eq\max}$ è vicino a $\sigma_{eq\min}$, e cioè quanto più è *piatto* il diagramma delle σ_{eq} . Perciò nel secondo tentativo converrà variare il diagramma delle σ in modo da appiattire il diagramma delle σ_{eq} ; per esempio, nel caso della fig. 1, si adotterà per le σ un diagramma che impegni maggiormente le zone più vicine all'asse neutro, e cioè un diagramma che si discosti maggiormente dalla legge bitriangolare, per avvicinarsi di più alla birettangola.

2. Un procedimento numerico per lo studio della generica sezione simmetrica.

E' possibile seguire un procedimento numerico per il calcolo diretto del punto $A_{k\sigma}$. Si inizia considerando ancora una sezione rettangolare $b \times h$. Si suddivide (fig. 4) il segmento $\left[-\frac{h}{2}, 0\right]$ in n intervalli

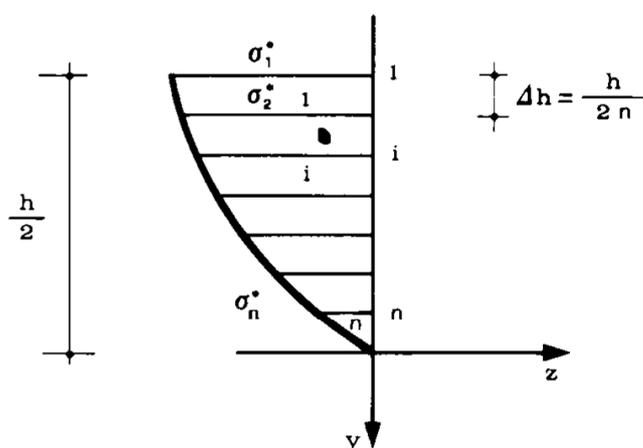


Fig. 4

di lunghezza $\Delta h = \frac{h}{2n}$, e siano $\sigma_1^* \sigma_2^* \dots \sigma_n^*$ i valori di σ^* in corrispondenza degli estremi di tali intervalli. Nell'estremo superiore del-

l'intervallo i -esimo è $\sigma^* = \sigma_i^*$, e quindi (4), per $i = 1, 2 \dots n$,

$$\sigma_i = M \sigma_i^* \quad (\text{a})$$

$$\tau_i = -\frac{M}{k} \frac{\Delta h}{2} \sum_{j=2}^i (\sigma_{j-1}^* + \sigma_j^*) \quad (\text{b})$$

$$\sigma_{ieq}^2 = M^2 \left\{ \sigma_i^{*2} + \frac{3}{4} \left(\frac{\Delta h}{k} \right)^2 \left[\sum_{j=2}^i (\sigma_{j-1}^* + \sigma_j^*) \right]^2 \right\}. \quad (\text{c})$$

La soluzione del problema si ha ponendo ciascuna delle σ_{ieq} pari a σ_0 . La prima delle (c) quindi porge ($i = 1$)

$$M^2 \sigma_1^{*2} = \sigma_0^2$$

da cui

$$\sigma_1^* = -\frac{\sigma_0}{M}. \quad (\text{d})$$

La seconda ($i = 2$), ponendo

$$\alpha = \frac{3}{4} \left(\frac{\Delta h}{k} \right)^2 = \frac{3}{16} \frac{h^2}{n^2 k^2} \quad (\text{e})$$

porge a sua volta

$$\sigma_2^{*2} + \alpha (\sigma_1^* + \sigma_2^*)^2 = \frac{\sigma_0^2}{M^2}$$

e cioè

$$\sigma_2^{*2} + \alpha (\sigma_1^{*2} + \sigma_2^{*2} + 2\sigma_1^* \sigma_2^*) = \frac{\sigma_0^2}{M^2}$$

$$\sigma_2^{*2} + \alpha \left(\frac{\sigma_0^2}{M^2} + \sigma_2^{*2} - 2 \frac{\sigma_0}{M} \sigma_2^* \right) = \frac{\sigma_0^2}{M^2}$$

$$\sigma_2^{*2} (1 + \alpha) - 2\alpha \frac{\sigma_0}{M} \sigma_2^* + (\alpha - 1) \frac{\sigma_0^2}{M^2} = 0$$

$$\left(M \frac{\sigma_2^*}{\sigma_0} \right)^2 (1 + \alpha) - \left(M \frac{\sigma_2^*}{\sigma_0} \right) 2\alpha + (\alpha - 1) = 0$$

da cui

$$M \frac{\sigma_2^*}{\sigma_0} = \frac{2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4(\alpha^2 - 1)}}{2(1 + \alpha)} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

e quindi

$$\sigma_2^* = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \frac{\sigma_0}{M} . \quad (f)$$

La condizione $\sigma_2^* < 0$ si identifica con $\alpha < 1$, e cioè (e)

$$n^2 > \frac{3}{16} \frac{h^2}{k^2} ;$$

se k è piccolo, quest'ultima non si verifica se il numero di intervalli non è sufficientemente elevato.

In generale, per $i \geq 3$, e ponendo

$$\frac{M}{\sigma_0} \left[\sum_{j=2}^{i-1} (\sigma_{j-1}^* + \sigma_j^*) + \sigma_{i-1}^* \right] = A_i , \quad (g)$$

la (c) si scrive, per $\sigma_{ieq}^2 = \sigma_0^2$,

$$\left(\frac{M}{\sigma_0} \sigma_i^* \right)^2 + \alpha \left(A_i + \frac{M}{\sigma_0} \sigma_i^* \right)^2 - 1 = 0 , \quad (h)$$

la cui soluzione è

$$\sigma_i^* = \frac{-\alpha A_i - \sqrt{1 + \alpha(1 - A_i^2)}}{1 + \alpha} \frac{\sigma_0}{M} . \quad (i)$$

Per $k = \infty$ ($M = M_0, T = 0$) è $\alpha = 0$, e la (i) porge ovunque

$$\sigma_i = \frac{\sigma_0}{M} .$$

Per $k = 0$ ($M = 0, T = T_0$) è $\alpha = \infty$, e la (i) porgerebbe $\sigma_i^* = -A_i \frac{\sigma_0}{M}$; in questo caso però è dovunque $\sigma^* = 0$, e quindi il procedimento cade in difetto.

La (i) si può scrivere

$$\sigma_i^* = s_i \frac{\sigma_0}{M} \quad (l)$$

ove

$$s_i = \frac{-\alpha A_i - \sqrt{1 + \alpha(1 - A_i^2)}}{1 + \alpha}; \quad (m)$$

è quindi

$$s_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_0} . \quad (n)$$

Si ha infine (fig. 4)

$$M = 2b \int_{-\frac{h}{2}}^0 \sigma y dy = 2b\sigma_0 \int_{-\frac{h}{2}}^0 s y dy ,$$

e cioè

$$M = -2b\sigma_0 \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{s_i + s_{i+1}}{2} \Delta h \left[(n-i) \Delta h + \frac{\Delta h}{2} \right] + s_n \frac{(\Delta h)^2}{3} \right\}$$

da cui ancora

$$M_{ko} = \mu M_o, \quad (o)$$

dove

$$\mu = -\frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=1}^{n-1} (s_i + s_{i+1}) \left(n - 1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{3} s_n \right]. \quad (p)$$

Se si pone

$$t = \frac{\tau}{\sigma_0} \quad (q)$$

dalla (4) si ha

$$\begin{aligned} t(y) &= -\frac{M}{k} \int_{-\frac{h}{2}}^y \frac{\sigma^*(y')}{\sigma_0} dy' = -\frac{1}{k} \int_{-\frac{h}{2}}^y \frac{\sigma(y')}{\sigma_0} dy' = \\ &= -\frac{1}{k} \int_{-\frac{h}{2}}^y s(y') dy' \end{aligned}$$

e, come sommatoria,

$$t_i = -\frac{1}{k} \sum_{h=1}^{i-1} \frac{s_h + s_{h+1}}{2} \Delta h = -\frac{h}{4kn} \sum_{h=1}^{i-1} (s_h + s_{h+1}) \quad (r)$$

(i = 2, 3, \dots, n + 1).

Dato quindi il rapporto $\frac{M}{T} = k$, la (o) fornisce M_{ko} , da cui $T_{ko} =$

$= \frac{M_{ko}}{k}$; le (m) e (r) porgono poi, a meno di σ_0 , i diagrammi σ e τ .

Il valore di T è dato da

$$T = 2b \int_{-\frac{h}{2}}^0 \tau dy = 2b\sigma_0 \int_{-\frac{h}{2}}^0 t dy ,$$

e cioè

$$T = 2b\sigma_0 \left(\frac{t_2}{2} \Delta h + \sum_{i=2}^n \frac{t_i + t_{i+1}}{2} \Delta h \right) ,$$

da cui ancora

$$T_{ko} = \vartheta T_0 , \quad (s)$$

dove

$$\vartheta = \frac{\sqrt{3}}{2n} \left[t_2 + \sum_{i=2}^n (t_i + t_{i+1}) \right] . \quad (t)$$

Per verifica, deve risultare $\frac{M_{ko}}{T_{ko}} = k$.

Il calcolo numerico si è eseguito con l'aiuto di un minielaboratore (HP 97) dotato di stampante, secondo lo schema della fig. 5 ed il diagramma della fig. 6. Si è posto

$$k = \beta h \quad (u)$$

da cui (l)

$$\alpha = \frac{3}{16n^2 \beta^2} . \quad (v)$$

E' così pure

$$\beta = \frac{1}{h} \frac{M}{T} = \frac{1}{h} \frac{\mu}{\vartheta} \frac{M_0}{T_0} = \frac{\mu}{\vartheta} \frac{M_0}{T_0 h} = \frac{\mu}{\vartheta} \frac{1}{h} \frac{\sigma_0 b h^2}{4} \frac{1}{\tau_0 b h} = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\mu}{\vartheta} \quad (z)$$

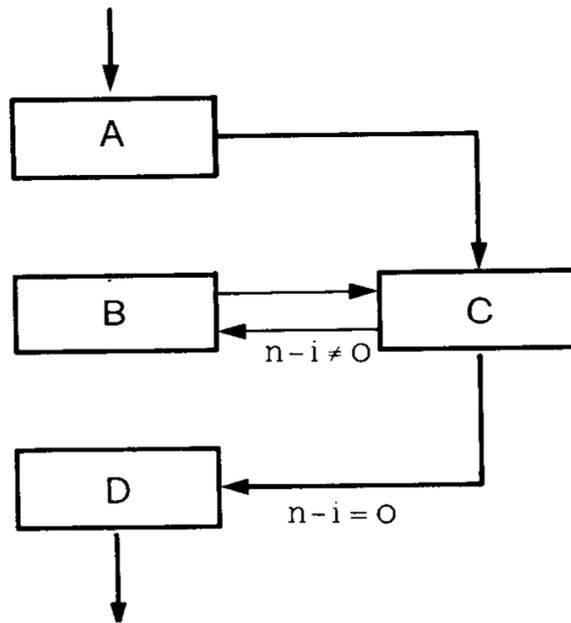


Fig. 5

Si entra introducendo i valori di β e di n nelle memorie 0 ed 1:

$$\beta \rightarrow [0]$$

$$n \rightarrow [1] .$$

Il programma A si articola come segue:

a) introduce il valore $s_1 = -1$ nelle memorie [3] delle A_i e [4] delle s_i :

$$A_2 = -1 \rightarrow [3]$$

$$s_1 = -1 \rightarrow [4] ;$$

b) richiama n da [1] ;

c) decrementa n di una unità;

d) introduce $n - 1$ nella memoria [1], che è anche contatore del looping:

$$n - 1 \rightarrow [1] ;$$

e) calcola α e lo inserisce nella memoria [2] :

$$\alpha \rightarrow [2] ;$$

f) calcola s_2 con la formula (f):

$$s_2 = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

Alla fine il programma A rimanda al programma C. Questo si articola come segue:

a) stampa s_2 ;

b) richiama s_1 da [4], somma ad s_2 e introduce nella memoria [6] :

$$s_1 + s_2 \rightarrow [6] ;$$

c) sostituisce s_2 ad s_1 nella memoria [4] :

$$s_2 \rightarrow [4] ;$$

d) calcola^(*)

$$-\frac{1}{4\beta n} (s_1 + s_2) ;$$

e) richiama t_1 ($= 0$) dalla memoria [5] delle t_i , somma, ed ottiene

$$t_2 = t_1 - \frac{1}{4\beta n} (s_1 + s_2) ;$$

(*) Dalla (r) si ha

$$t_i = -\frac{1}{4\beta n} \sum_{h=1}^{i-1} (s_h + s_{h+1}) = -\frac{1}{4\beta n} \left[\sum_{h=1}^{i-2} (s_h + s_{h+1}) + (s_{i-1} + s_i) \right],$$

da cui

$$t_i = t_{i-1} - \frac{1}{4\beta n} (s_{i-1} + s_i). \quad (a')$$

f) sostituisce t_2 a t_1 nella memoria [5] :

$$t_2 \rightarrow [5] ;$$

g) stampa t_2 ;

h) aggiunge t_1 a t_2 , ed introduce tale somma nella memoria [9] incrementando il precedente valore della memoria stessa:

$$t_1 + t_2 \rightarrow [9] ;$$

i) richiama dalla memoria [1] il valore $n - 1$, calcola il valore

$$n - 1 + \frac{1}{2} ,$$

richiama dalla memoria [6] il valore di $s_1 + s_2$, calcola

$$\left(n - 1 + \frac{1}{2} \right) (s_1 + s_2) ,$$

ed introduce quest'ultimo nella memoria [8], incrementando il precedente valore:

$$\left(n - 1 + \frac{1}{2} \right) (s_1 + s_2) \rightarrow + [8] ;$$

l) abbassa di una unità il contenuto di [1], che diviene $n - 2$;

$$n - 2 \rightarrow [1] .$$

E' facile osservare che il contributo a T del tratto compreso tra σ_1^* e σ_2^* (fig. 4) è

$$\Delta_1 \vartheta \cdot T_0 = \sigma_0 (t_1 + t_2) \frac{bh}{2n} \quad (b')$$

ed il contributo ad M è

$$\Delta_1 \mu \cdot M_0 = -\sigma_0 (s_1 + s_2) \frac{bh}{2n} \left(n - 1 + \frac{1}{2} \right) \frac{h}{2n}$$

e cioè

$$\Delta_1 \mu \cdot M_0 = -\sigma_0 \frac{bh^2}{4n^2} (s_1 + s_2) \left(n - 1 + \frac{1}{2} \right) \quad (c')$$

Dalle (b') e (c') si trae che i contributi a ϑ e μ del suddetto tratto sono rispettivamente

$$\Delta_1 \vartheta = \frac{\sqrt{3}}{2n} (t_1 + t_2) \quad (d')$$

$$\Delta_1 \mu = -\frac{1}{n^2} (s_1 + s_2) \left(n - 1 + \frac{1}{2} \right), \quad (e')$$

in accordo con le (t) e (p).

Alla fine il programma C rimanda a quello B.

In questo si eseguono le seguenti operazioni:

- a) richiama dalla memoria [3] il valore di A_2 , posto inizialmente pari a -1 ;
- b) calcola^(*)

$$A_3 = A_2 + 2s_2 ;$$

c) sostituisce il valore A_3 a quello $A_2 = -1$ precedentemente contenuto nella memoria [3]:

$$A_3 \rightarrow [3] ;$$

d) calcola (m)

$$s_3 = \frac{-\alpha A_3 - \sqrt{1 + \alpha(1 - A_3^2)}}{1 + \alpha} ;$$

(*) Dalla (g) si ha

$$A_i = \sum_{j=2}^{i-1} (s_{j-1} + s_j) + s_{i-1} = \sum_{j=2}^{i-2} (s_{j-1} + s_j) + s_{i-2} + 2s_{i-1}$$

e cioè

$$A_i = A_{i-1} + 2s_{i-1} \quad (f')$$

che vale per $i \geq 3$, ponendo $A_2 = -1$ (g).

e) rimanda al programma C.

L'esecuzione sequenziale CB si itera, ed in ognuna di queste il contenuto di $[I]$ si abbassa di una unità. Essa avviene perciò in totale $n - 1$ volte; la prima è quella

001	*LBLH	034	RCL4	067	XZY	100	RCL8
002	1	035	2	068	ST04	101	RCL4
003	CHS	036	x	069	XZY	102	2
004	ST03	037	+	070	RCL0	103	x
005	ST04	038	ST03	071	÷	104	3
006	RCL1	039	ENT1	072	RCL1	105	÷
007	1	040	x	073	÷	106	+
008	-	041	CHS	074	4	107	RCL1
009	ST01	042	1	075	÷	108	ENT↑
010	3	043	+	076	CHS	109	x
011	ENT↑	044	RCL2	077	RCL5	110	÷
012	1	045	x	078	ENT↑	111	CHS
013	6	046	1	079	ENT↑	112	PRTX
014	÷	047	+	080	R↑	113	3
015	RCL0	048	√X	081	+	114	√X
016	ENT↑	049	RCL2	082	PRTX	115	1/X
017	x	050	RCL3	083	ST05	116	RCL5
018	÷	051	x	084	+	117	+
019	RCL1	052	+	085	ST+9	118	RCL9
020	ENT↑	053	CHS	086	RCL1	119	+
021	x	054	RCL2	087	1	120	RCL1
022	÷	055	1	088	ENT↑	121	÷
023	ST02	056	+	089	2	122	2
024	1	057	÷	090	÷	123	÷
025	-	058	GT00	091	+	124	3
026	RCL2	059	RTN	092	RCL6	125	√X
027	1	060	*LBL0	093	x	126	x
028	+	061	ENT↑	094	ST+8	127	PRTX
029	÷	062	ENT↑	095	DSZI	128	RTN
030	GT00	063	PRTX	096	GT00	129	R/S
031	RTN	064	RCL4	097	GT00		
032	*LBLB	065	+	098	RTN		
033	RCL3	066	ST06	099	*LBLD		

Fig. 6

già descritta (in $[I]$ esiste $n - 1$); nell'ultima [in $[I]$ esiste $n - (n - 1) = 1$] si calcolano s_n e t_n , ed i contributi $\Delta_n \vartheta$ e $\Delta_n \mu$ del penultimo tratto (fig. 4). Si tro-

vano così stampati i valori

 s_2
 t_2
 s_3
 t_3
 \vdots
 \vdots
 s_n
 t_n

Si passa infine al programma D. Esso

a) richiama la

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(n - 1 + \frac{1}{2} \right) (s_i + s_{i+1})$$

dalla memoria [8];

b) richiama s_n dalla memoria [4], la moltiplica per $\frac{2}{3}$ e la somma alla sommatoria precedente;

c) divide per n^2 , cambia di segno (p) e stampa μ ;

d) richiama la

$$\sum_{i=1}^{n-1} (t_i + t_{i+1})$$

dalla memoria [9];

e) richiama t_n dalla memoria [5] e calcola la somma

$$t_n + t_{n+1} = t_n + \frac{1}{\sqrt{3}};$$

f) addiziona alla precedente sommatoria ottenendo la

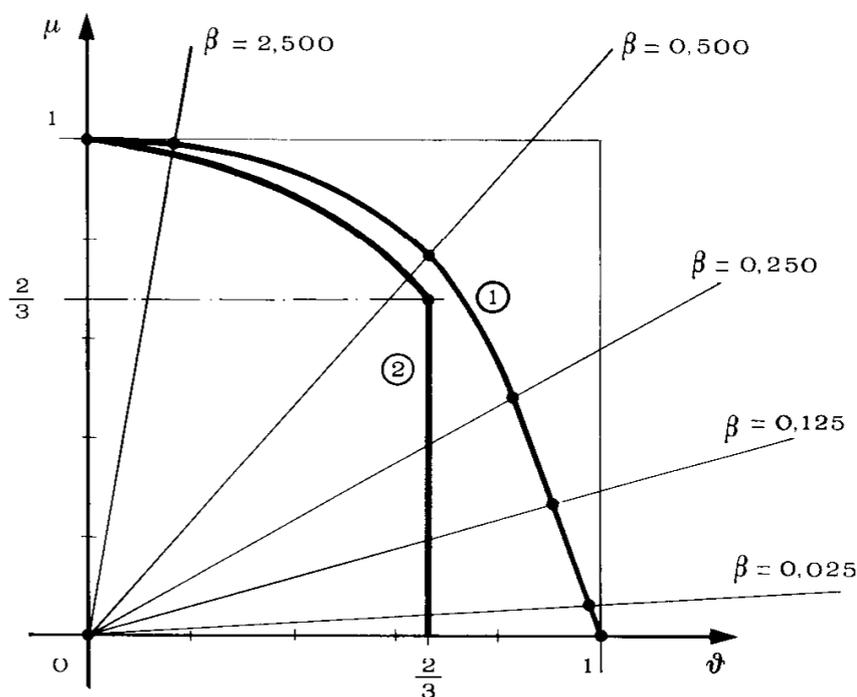
$$\sum_{i=1}^n (t_i + t_{i+1});$$

g) moltiplica per $\frac{\sqrt{3}}{2n}$ (t) e stampa ϑ .

TABELLA 1

β	0,025		0,125		0,250		0,500		2,500	
$\frac{\mu}{\vartheta}$	0,05774		0,28868		0,57735		1,15470		5,77350	
n	100	1000	10	100	10	100	10	100	10	100
μ	0,05617	0,05678	0,25481	0,26481	0,47534	0,48217	0,77167	0,77414	0,98673	0,99001
ϑ	0,97319	0,98345	0,88951	0,91733	0,82549	0,83514	0,66821	0,67042	0,20447	0,17478

Nella tabella 1 sono riportati i valori di μ e ϑ per cinque valori di β , calcolati per $n = 10$ e per $n = 100$. Nella seconda riga sono riportati i valori di $\frac{\mu}{\vartheta}$ calcolati da β attraverso la (z); i due valori di μ e ϑ forniti dall'elaboratore rispettano sufficientemente tali rapporti. Nella fig. 7 è disegnato, con tali dati, il diagramma $M_{ko} T_{ko}$, a meno di $\frac{\sigma_0 bh^2}{4}$ e di $\tau_0 bh$; e cioè il diagramma $\mu\vartheta$. La curva chiusa così ot-



- ① diagramma $\mu(\vartheta)$ reale
- ② diagramma $\mu(\vartheta)$ approssimato

$$\beta = \frac{M}{T h} \qquad \mu = \frac{M_{ko}}{M_0} \qquad \vartheta = \frac{T_{ko}}{T_0}$$

Fig. 7

tenuta è chiamata *curva limite* Λ della sezione; per come è stata ottenuta, ogni semiretta passante per l'origine interseca Λ in un solo punto. E' immediata quindi la definizione di punto *interno* ed *esterno* al dominio limite; l'unione dei primi e di Λ è il *dominio elastico* D_e della sezione, l'unione dei secondi e di Λ è il *dominio plastico* D_p . Può quindi scriversi

$$D_e \cap D_p = \Lambda. \quad (7)$$

La curva limite è *frontiera* comune dei due domini elastico e plastico. La curva limite è il diagramma della funzione $M_0 = M_0(T)$; essa nella fig. 7 è disegnata limitatamente al quadrante $M > 0, T > 0$, può completarsi però sfruttando le condizioni di simmetria. Come è naturale, M appare funzione decrescente di T da M_0 a 0 per T variabile da 0 a T_0 ; inoltre, e di ciò si parlerà in seguito, la curva Λ ha aspetto convesso.

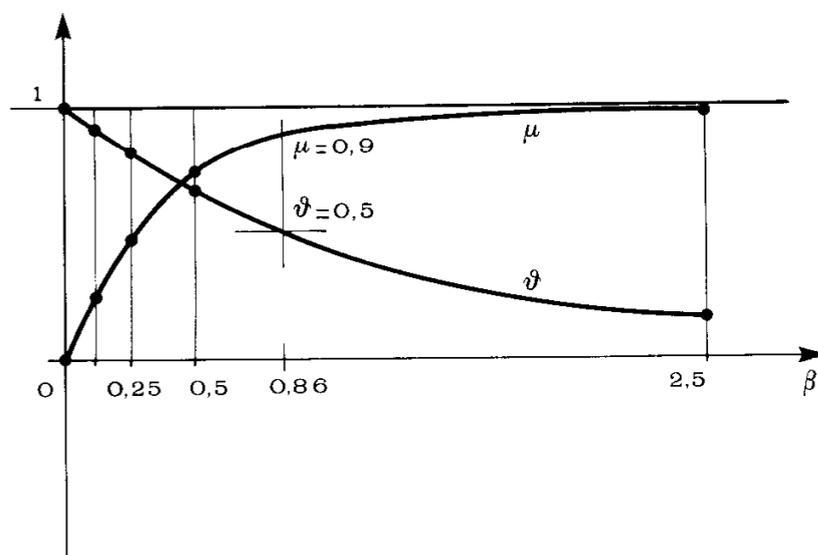


Fig. 8

Nella fig. 8 sono disegnati i diagrammi $\mu(\beta)$ e $\vartheta(\beta)$; il primo parte da 0 per $\beta = 0$, e tende ad 1 per $\beta \rightarrow \infty$; il secondo parte da 1 per $\beta = 0$, e tende a 0 per $\beta \rightarrow \infty$. E' interessante osservare che per $\beta > 0,86$ è $\mu > 0,9$, e cioè il momento limite è decurtato di meno del 10%. Però un rapporto $\frac{M}{Th} = 0,86$ si può verificare solo per travi abbastanza alte; in una trave doppiamente incastrata caricata uniformemente, in

condizioni di completa plasticizzazione sotto $M_0 = \pm \sigma_0 \frac{bh^2}{4}$ alle estremità ed all'incastro, alle due estremità si ha

$$M = \frac{q \ell^2}{16}$$

$$T = \frac{q \ell}{2}$$

$$\frac{M}{T} = \frac{\ell}{8}$$

e quindi

$$\beta = \frac{M}{Th} = \frac{\ell}{8h};$$

si verifica $\beta < 0,86$ se $h > \frac{\ell}{6,88}$; e ciò è abbastanza raro.

Nelle fig. 9 e 10 sono stati disegnati a meno di σ_0 , i diagrammi $\sigma(y)$

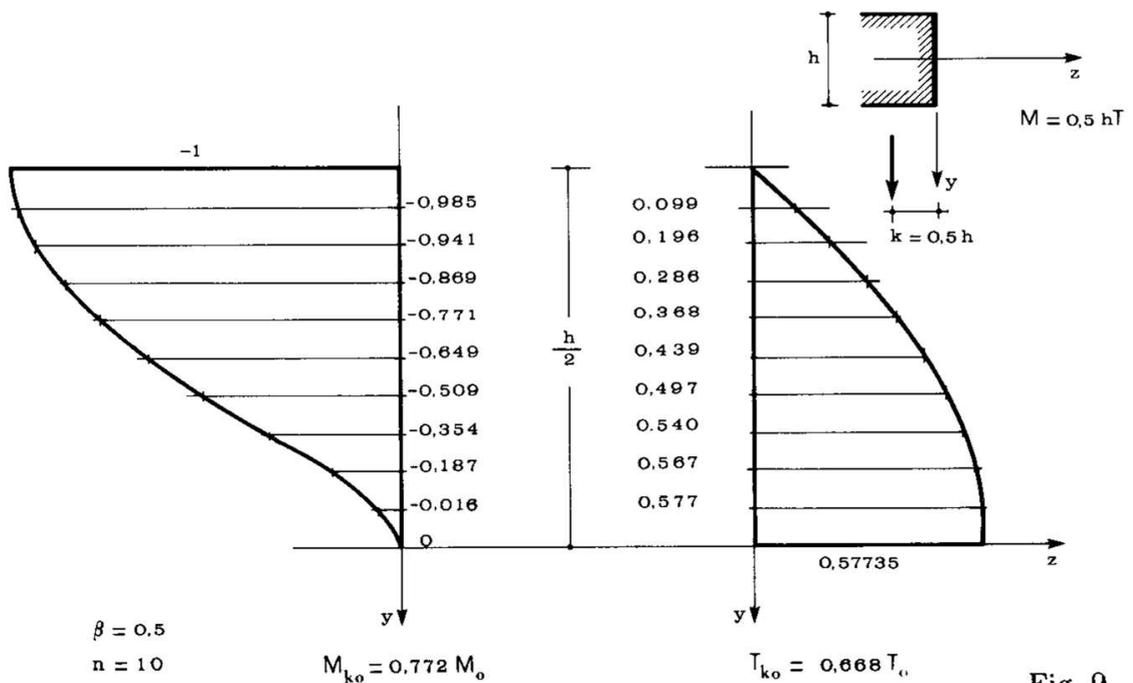


Fig. 9

3. La trattazione approssimata della sezione rettangolare.

La trattazione usuale della sezione rettangolare soggetta a momento flettente e taglio si basa sulla seguente legge delle σ , per $M > 0$ (fig. 11):

$$\begin{aligned}
 y \in \left[-\frac{h}{2}, -\frac{a}{2} \right] &\rightarrow \sigma = -\sigma_0 \\
 y \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right] &\rightarrow \sigma = \sigma_0 \frac{2y}{a} \quad (g'') \\
 y \in \left[\frac{a}{2}, \frac{h}{2} \right] &\rightarrow \sigma = \sigma_0.
 \end{aligned}$$

Dalle (g'') si osserva che si ipotizza una completa plasticizzazione da sola sollecitazione normale nel primo e nel terzo intervallo, mentre in quello centrale si segue la legge di Navier. In tale ipotesi la zona cen-

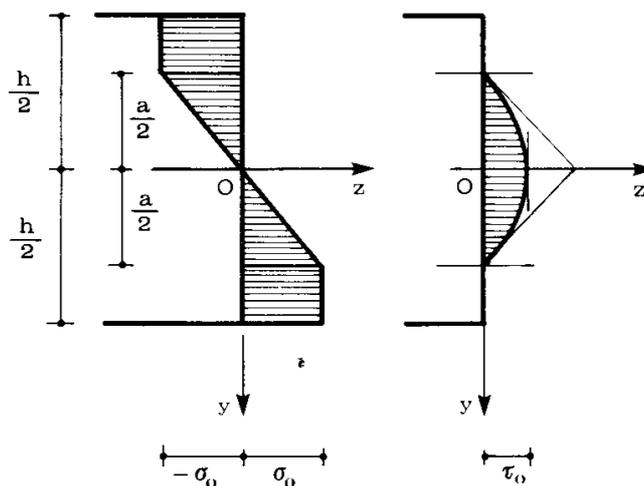


Fig. 11

trale può ancora assorbire sollecitazioni taglianti; la τ , per ragioni di equilibrio, è quella della fase elastica ordinaria, e cioè è parabolica:

$$\tau = \tau_m \left(1 - 4 \frac{y^2}{a^2} \right).$$

Ponendo $\tau_m = \tau_0$ si ha

$$T = \frac{2}{3} ab\tau_0 ; \quad (h'')$$

d'altro canto è pure

$$M = 2\sigma_0 b \left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + \frac{a}{2} \right) + \sigma_0 \frac{ba^2}{6}$$

e cioè

$$M = \frac{\sigma_0 b}{12} (3h^2 - a^2) . \quad (i'')$$

Eliminando a tra le (h'') ed (i'') si ha

$$a^2 = \frac{9}{4} \frac{T^2}{b^2 \tau_0^2}$$

$$M = \frac{\sigma_0 b}{12} \left(3h^2 - \frac{9}{4} \frac{T^2}{b^2 \tau_0^2} \right) = \frac{\sigma_0 bh^2}{3 \cdot 4} \left(3 - \frac{9}{4} \frac{T^2}{T_0^2} \right)$$

e cioè

$$M = M_0 \left(1 - \frac{3}{4} \frac{T^2}{T_0^2} \right) .$$

La legge che lega M e T è perciò

$$\frac{M}{M_0} + \frac{3}{4} \frac{T^2}{T_0^2} = 1 ; \quad (8)$$

questa è (fig. 12) una parabola. Per $M < 0$ la (8) è sostituita dalla parabola simmetrica. Il dominio elastico D_e è perciò l'intersezione delle due aree paraboliche, e la curva limite Δ è la frontiera di D_e .

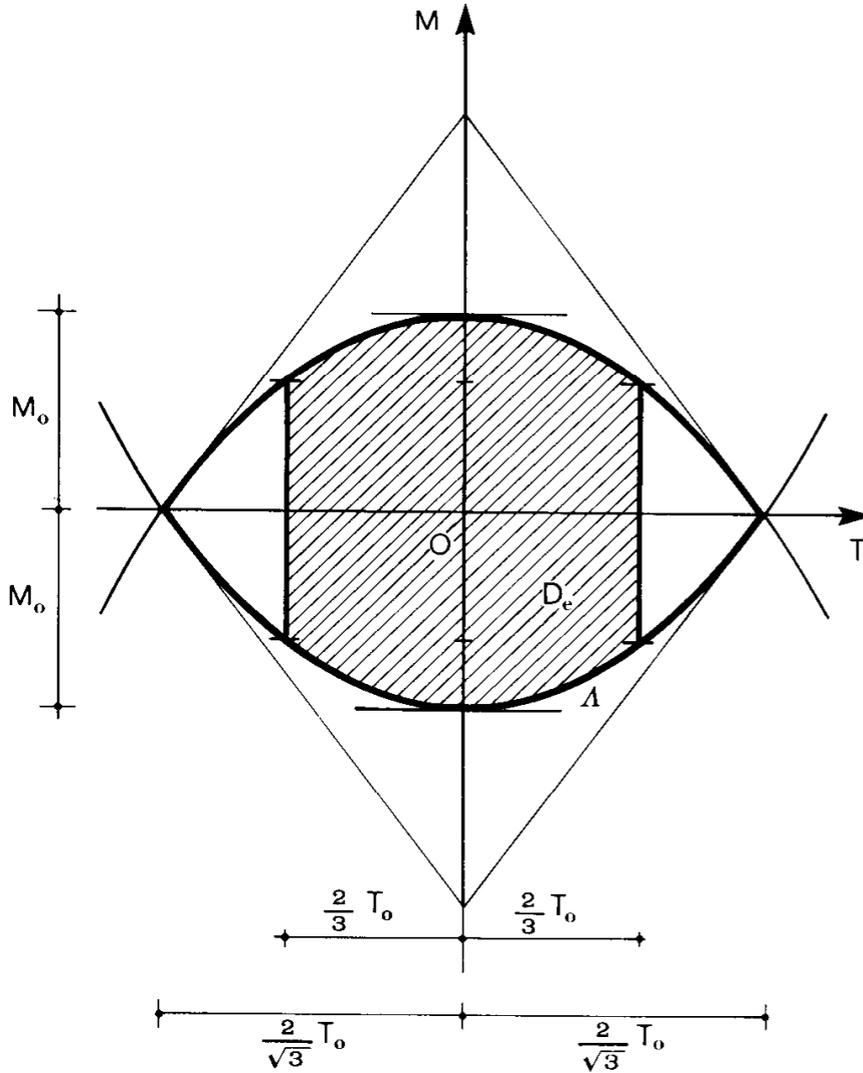


Fig. 12

All'ordinata generica $y \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$ si ha

$$\sigma = \sigma_0 \frac{2y}{a} \quad \tau = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left(1 - 4 \frac{y^2}{a^2}\right)$$

e quindi

$$\sigma_{eq}^2 = \sigma_0^2 \left(1 - 4 \frac{y^2}{a^2} + 16 \frac{y^4}{a^4}\right).$$

tenendo $\alpha = \frac{y}{a} = x$, nell'intervallo suddetto, considerato aperto, e $x < 1$; quindi si può scrivere

$$y \in \left] -\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right[\rightarrow \sigma_{eq} < \sigma_0 . \quad (\ell'')$$

Ciò significa che il valore $M(T)$ è tratto nel rispetto dell'equilibrio, ma le corrispondenti tensioni principali definiscono, nel tratto (ℓ'') , un punto interno all'ellisse di Hencky; la sezione non è quindi tutta plasticizzata, ed il valore di $M(T)$ è calcolato in difetto.

un punto interno all'ellisse di Henchy; la sezione non è quindi tutta plasticizzata, ed il valore di $M(T)$ è calcolato in difetto

Per $T = \frac{2}{3} T_0$, risulta dalla (8) $M = \frac{2}{3} M_0$. Si osservi che la trattazione è basata sull'assunto che le τ devono essere equilibrate nel tratto (ℓ'') in cui le σ variano; quindi per $M < M_s$ (e cioè $M < \frac{2}{3} M_0$) la T è comunque pari a $\frac{2}{3} T_0$, poiché la $\tau(y)$ è comunque fornita da

$$\tau = \tau_0 \left(1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right) .$$

Se ne trae che il dominio limite è l'intersezione di quello già ottenuto (fig. 12) con la striscia di piano definita dalle due disequazioni

$$-\frac{2}{3} T_0 \leq T \leq \frac{2}{3} T_0 .$$

Nella fig. 7 è riportato, assieme alla curva $\mu(\vartheta)$ reale, quella ottenuta seguendo il procedimento approssimato.

4. Il caso del conglomerato armato.

L'usuale verifica a taglio delle travi in conglomerato armato è un efficace esempio di come, più spesso di quanto si creda, si calcoli a

rottura senza esplicitamente dichiararlo, o addirittura senza averne coscienza. Affidare infatti il taglio ai ferri piegati ed alle staffe, e la flessione ai ferri longitudinali, corrisponde a soddisfarsi di una soluzione equilibrata e compatibile, anche se manifestamente incongruente nell'ambito elastico.

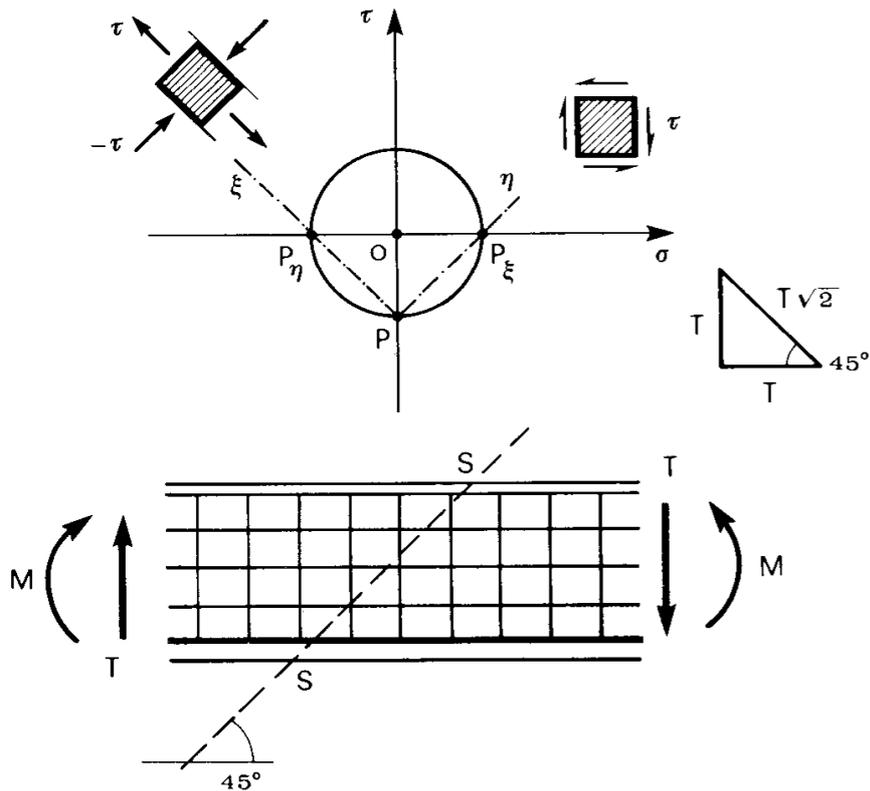


Fig. 13

Si consideri (fig. 13) una trave in cui il taglio sia affidato ad una maglia di ferri orizzontali e verticali; si prenda in esame un tronco di lunghezza pari all'altezza, e cioè il tronco interessato da una sezione SS a 45° . Siano A_{fo} ed A_{fv} le aree complessive dei ferri orizzontali e verticali impegnati da tale sezione. E' noto che sulla sezione retta la τ è pressoché uniformemente distribuita, e pari quindi a $\frac{T}{A_r}$, dove A_r è l'area della sezione retta. Su ciascun punto della sezione SS le due tensioni principali sono inclinate a 45° sull'orizzontale; quindi, se la sezione è effettuata come nella figura, la sua normale è direzione principale di trazione, la tensione principale corrispondente è pari a $|\tau|$, e la forza di trazione totale su SS è pari a $\frac{T}{A_r} A_{45} = T\sqrt{2}$. Tale

forza ha componenti orizzontale e verticale pari a T ; quindi T_0 è fornita, se $A_{fo} = A_{fv}$, da

$$T_0 = \sigma_{fo} A_{fo} . \quad (9)$$

Effettuata quindi la verifica a flessione, occorre assicurarsi che ovunque sia $T \leq T_0$

5. *La deformazione plastica del tronco elementare*

Siano Q_j ($j = 1, 2 \dots 6$) le caratteristiche della sollecitazione interna, e q_j le caratteristiche corrispondenti dello spostamento relativo tra le facce estreme del tronco elementare, che si suppone restino piane nel corso della deformazione; esse si chiamano a volte *tensioni generalizzate* e *deformazioni generalizzate*.

Nello S_6 delle Q_j un punto Q rappresenta le Q_j come componenti del vettore $Q = OQ = \sum_1^6 Q_j Q_{ej}$. Nello stesso spazio un punto q rappresenta le q_j come componenti del vettore $q = Oq$; ed infatti le componenti sono numeri puri, mentre le dimensioni sono fornite dai vettori della base.

Assumendo come prodotto scalare di due vettori (di cui uno del tipo Q e l'altro del tipo q) il lavoro L_i dei due vettori, lo spazio E_6 è strutturato come euclideo, se poi la base è ortonormale, come normalmente accade^(*), il prodotto scalare, e cioè il lavoro L_i , è

$$L_i = Q \cdot q = \sum_1^6 Q_j q_j . \quad (10)$$

Si può ripetere, con riferimento alle Q_j , quanto già detto nel par. 1-1 con riferimento alle $\sigma_i \tau_{jk}$; e cioè, dato il tronco, esiste nell' S_6 una Λ , *superficie limite*, frontiera comune del *dominio elastico* D_e e del *dominio plastico* D_p ; D_e contiene l'origine O .

(*) Ciò significa che la generica Q_{ej} compie lavoro solo per la corrispondente q_{ej} , e che $Q_{ej} \cdot q_{ej} = 1$.

La convessità di Λ , postulata nel par. 1-1, può invece trarsi dal postulato del *Drucker*. Secondo *Drucker*, il tronco è *stabile* (non si confonda tale aggettivo con l'identico usato nella teoria dell'elasticità) se, applicando lentamente, con qualsiasi legge, una qualsiasi trasfor-

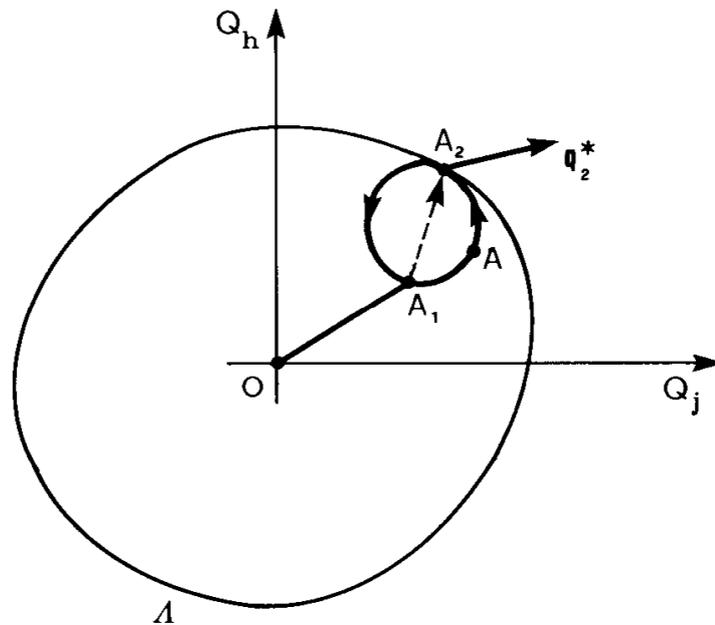


Fig. 14

mazione chiusa $Q_2(t)$ al tronco già sollecitato da un qualsiasi stato tensionale Q_1 , il lavoro compiuto dalle forze $Q_2(t)$ è non negativo. Si consideri quindi (fig. 14) la trasformazione $Q_2(t)$ dove il vettore $Q_2 = A_1 A$ parte da zero, tocca con il suo estremo in A_2 la superficie limite, e torna a zero. In A_2 si verifica necessariamente una piccola escursione della deformazione in campo plastico, rappresentata dal vettore q_2^* . Si fa l'ipotesi che

- 1) q_2^* dipenda soltanto dal punto A_2 , e cioè dalle Q_j in A_2 , e non dalla curva $A_1 A_2$;
- 2) il verificarsi di q_2^* non alteri la Λ (materiale privo di incrudimento);
- 3) il vettore q_2^* sia definito a meno di una costante.

Il lavoro totale compiuto dalle $Q_2(t)$ è fornito dalla quantità $A_1 A_2 \cdot q_2^*$, poiché il lavoro delle altre $Q_2(t)$ è compiuto in fase elastica, e quindi nullo, essendo la trasformazione chiusa. Quindi, per il postula-

to del Drucker,

$$A_1 A_2 \cdot \mathbf{q}_2^* \geq 0, \quad \forall A_1 \in D_e, \quad \forall A_2 \in \Lambda. \quad (11)$$

Per la validità della (11) non importa che il vettore $A_1 A_2$ non sia tutto contenuto in D_e ; occorre solo infatti, a termini di dimostrazione, che la curva $A_1 A_2$ sia contenuta tutta in D_e .

Se si opera in S_3 , i vettori Q e \mathbf{q} possono essere rappresentati da comuni vettori dello spazio reale; se il riferimento è monometrico ortogonale (x y z sono ortogonali, ed il segmento rappresentante l'unità delle componenti di Q o \mathbf{q} su x y z è lo stesso sui tre assi) si può porre

$$L_i = Q_x q_x + Q_y q_y + Q_z q_z = Qq \cos \widehat{Qq},$$

ed il lavoro L è nullo se e solo se Q e \mathbf{q} formano un angolo di 90° . Ciò posto, può dirsi che Λ è *convessa*. Se infatti non lo fosse, si consideri (fig. 15) un vettore $A'_1 A_2$ tale che, applicato in A_2 , avrebbe in-

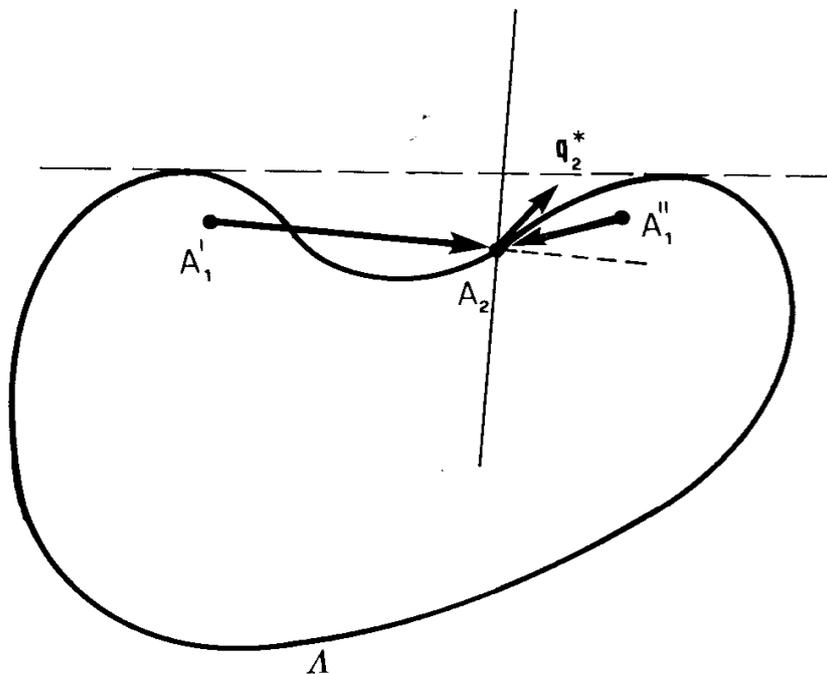


Fig. 15

tersezione non nulla con D_e ; per il rispetto della (11) il relativo \mathbf{q}_2^* applicato in A_2 deve essere compreso in quello dei due semispazi,

definiti dal piano ortogonale ad $A_1' A_2$ e passante per A_2 , che non contiene A_1' .

Comunque si prenda un q_2^* rispettante tale proprietà, esiste sempre un $A_1'' \in D_e$ tale che $A_1'' A_2 \cdot q_2^* < 0$; e ciò è assurdo.

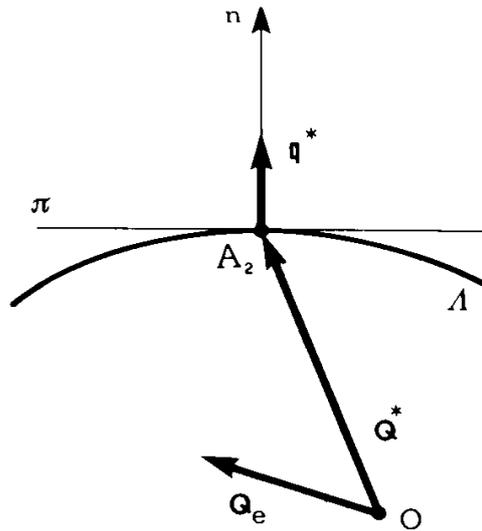


Fig. 16

In un punto A_2 (fig. 16) di *regolarità* di Λ (esiste un definito piano π tangente a Λ in A_2 , e quindi una definita normale n a Λ in A_2 , ed inoltre π contiene il solo punto A_2 dell'intorno elementare di A_2 su Λ) il vettore q^* deve, per la (11), essere diretto secondo la normale n , e, se applicato in A_2 , deve essere contenuto in D_p . Infatti A_1 può essere preso su Λ , nell'intorno elementare di A_2 , e ciò importa che q^* sia ortogonale a π ; ma può anche essere preso comunque in D_e , e ciò importa che, orientando n verso l'esterno di Λ (e cioè da D_e a D_p), q^* abbia anche il verso di n . Nel caso della fig. 16 q^* è, sempre a meno di una costante, definito da A_2 , e cioè da OA_2 , e cioè ancora dal vettore Q^* che tocca Λ .

Se Λ è regolare in ogni suo punto (Λ *regolare*), la corrispondenza $Q^* \longleftrightarrow q^*$ è biunivoca.

Un punto A_2 si dice *singolare di prima specie* se (fig. 17) esistono in esso infiniti piani tangenti; ad esempio, il lato di un cubo, o il vertice di una piramide, o di un cono. In tale punto q^* non è definito; la (11) detta soltanto la parte di D_p in cui q^* , se applicato in A_2 , deve essere contenuto. Quindi a $Q^* = OA_2$ corrispondono infiniti q^* . Però, per una Λ dotata di punti singolari di prima specie resta il legame univoco $q^* \rightarrow Q^*$.

Un punto A_2 si dice *singolare di seconda specie* (fig. 18) se in A_2 il piano tangente è unico, ma contiene altri punti dell'intorno elementare di A_2 su Λ . In tale punto \mathbf{q}^* è definito; in una Λ dotata di tali punti, ad un \mathbf{q}^* possono corrispondere infiniti Q^* , mentre resta il legame univoco $Q^* \rightarrow \mathbf{q}^*$.

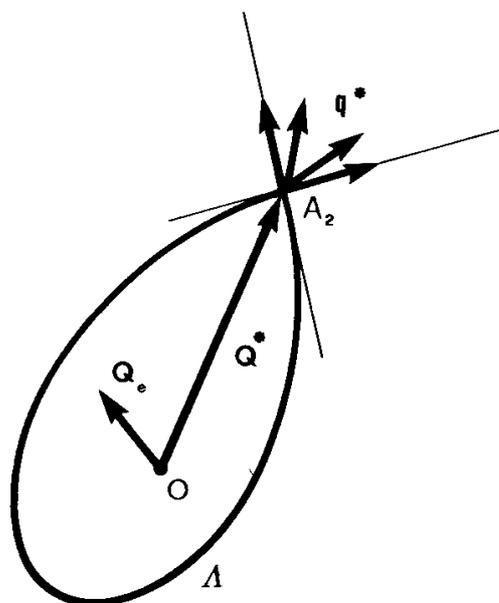


Fig. 17

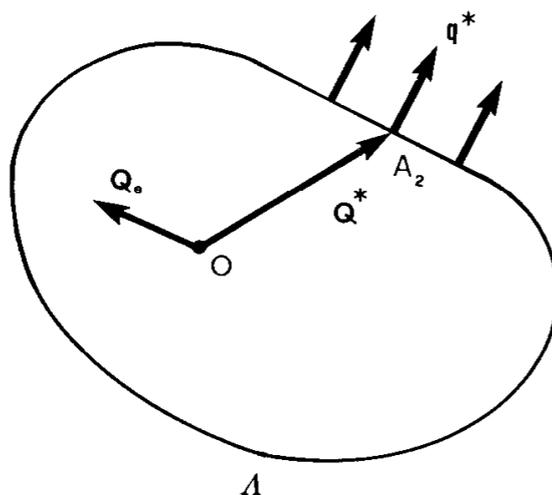


Fig. 18

Tutto quanto sopra detto circa la direzione ed il verso di \mathbf{q}^* va sotto il nome di *legge dello scorrimento plastico*.

E' facile osservare che comunque il *lavoro perduto o dissipato*

$$L^* = Q^* \cdot \mathbf{q}^* > 0 \quad (12)$$

è definito da \mathbf{q}^* .

E' pure facile osservare che dato un qualsiasi Q_e *compatibile* (Q_e contenuto in D_e se applicato in O) risulta

$$Q_e \cdot \mathbf{q}^* \leq Q^* \cdot \mathbf{q}^* . \quad (13)$$

E' questo il *principio del massimo lavoro perduto*: dato \mathbf{q}^* , l'effettivo lavoro perduto è il massimo tra tutti i lavori calcolabili con un qualsiasi Q_e compatibile.

6. Lo snodo plastico nel caso della contemporanea azione di M e T

Quanto detto nel par. 5 si particularizza, per il caso in esame, nel considerare una *curva limite* nel piano TM ; uno stesso segmento rappresenta l'unità di T e di Δv , di M e di $\Delta \varphi$ (fig. 19). Il vettore $OP = Q^*$ ($P \in \Lambda$) definisce nella normale esterna in P il vettore q^* (Δv , $\Delta \varphi$); si vede subito che lo snodo plastico equivale ad una cerniera C

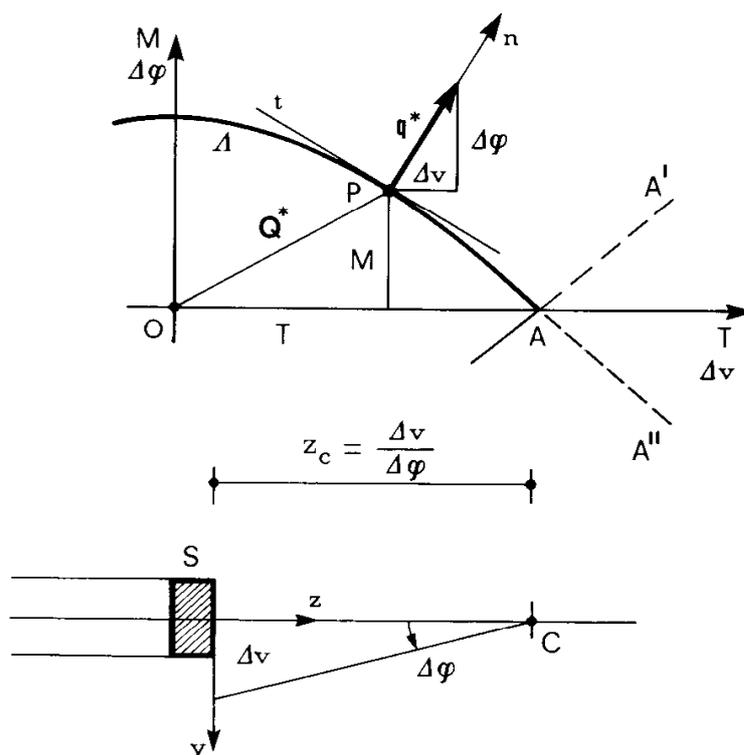


Fig. 19

unidirezionale ubicata sull'asse della trave, e la sua distanza z_c dall'asse y della sezione è fornita da

$$z_c = \frac{\Delta v}{\Delta \varphi}. \quad (14)$$

Per $T = T_0$ (punto A) il vettore q^* non è definito; si sa solo che esso è compreso nell'angolo $A'AA''$, e quindi

$$z_c \in]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[, \quad (15)$$

dove a è definita dall'angolo che $A'A$ forma con l'asse delle ascisse.