

CAPITOLO IV

LA CRISI SOTTO AZIONI VARIABILI

1. Il collasso incrementale.

Il tipo di collasso esaminato nel precedente capitolo, dovuto ad una singola condizione di carico, si chiama *collasso statico*.

Si prenda ora in esame una struttura semplicemente inflessa, soggetta a più condizioni di carico $\{F_j\}$, presenti una alla volta, in un ordine qualsiasi, e quindi comunque alternantisi nel tempo. Sia s_{rj} il moltiplicatore di rottura per collasso statico relativo a ciascun insieme $\{F_j\}$.

Evidentemente dovrà essere preso in considerazione $s_{rj\min}$. Ciò perché il coefficiente generico s_{rj} non è alterato dal fatto che le forze agiscono sulla struttura già plasticizzata dall'azione delle condizioni di carico precedenti; infatti nell'ipotesi di diagramma $\sigma\epsilon$ indefinito (materiale perfettamente plastico) la presenza di distorsioni non varia il moltiplicatore di rottura delle forze.

Può esistere però un numero \tilde{s}_r , rispettante la condizione

$$s_{ej\min} < \tilde{s}_r < s_{rj\min} , \quad (1)$$

tale che in presenza delle condizioni di carico $\tilde{s}_r \{F_j\}$ comunque alternantisi indefinitamente si può verificare il cosiddetto *collasso incrementale*, e cioè un insieme di successive rotazioni plastiche, dovute al fatto che $\tilde{s}_r > s_{ej\min}$, può generare dopo un certo numero di alternanze un diagramma di momenti M_r (*momenti residui*, in equilibrio con forze nulle) tale che in un certo numero di sezioni S_m cui si associa un meccanismo totale o parziale è

$$M_{rm} + \tilde{s}_r M_{\max m} = M'_{om} \quad (2')$$

oppure

$$M_{rm} + \tilde{s}_r M_{\min m} = M''_{om} , \quad (2'')$$

secondo che il verso del meccanismo importi in S_m un momento limite positivo o negativo, mentre in tutte le altre sezioni è

$$M_r + \tilde{s}_r M_{\max} \leq M'_o \quad (3)$$

$$M_r + \tilde{s}_r M_{\min} \geq M''_o ;$$

$M_{\max m}$ ed $M_{\min m}$ sono i valori estremi di esercizio che M_m può raggiungere in fase elastica, e cioè in assenza di distorsioni. Se le (2) e (3) sono verificate, è immediato constatare che, a partire dal momento in cui il diagramma M_r si è formato, l'azione alternata delle condizioni di carico $\tilde{s}_r \{F_j\}$ genera nelle sezioni S_m rotazioni plastiche $\Delta\varphi_m^*$ di segno concorde a quello del meccanismo; non appena il valore delle $\Delta\varphi_m^*$ risulta tale che una loro parte corrisponde ad uno spostamento rigido, questo spostamento si verifica. I valori delle $\Delta\varphi_m^*$ sono piccoli, atteso il fatto che la soglia plastica è attinta ma non superata; però il fenomeno si ripete nel tempo, e quindi lo spostamento rigido, che corrisponde sempre allo stesso meccanismo, e con lo stesso verso, si esalta fino a divenire intollerabile.

A tale proposito, il teorema di *Bleich-Mélan*, dimostrato in modo organico dal *Koiter* (1956), stabilisce: dato un numero ϑ tale che ad esso possa associarsi un qualsiasi diagramma di momenti M_ϑ in equilibrio con forze nulle, rispettante ovunque le limitazioni

$$M_\vartheta + \vartheta M_{\max} < M'_o \quad (4)$$

$$M_\vartheta + \vartheta M_{\min} > M''_o ,$$

non può sussistere collasso incrementale sotto le condizioni di carico $\vartheta \{F_j\}$. Siano infatti al tempo t generico c , c_e e c_p la curvatura totale, elastica e plastica, M il momento (si dimostra il teorema limitatamente alla flessione, ma esso è di portata generale). Siano poi c_f ed M_f curvatures e momenti calcolati in fase elastica, e quindi funzioni note della condizione di carico al tempo t ; il momento M_p dovuto alle deformazioni plastiche è quindi

$$M_p = M - M_f . \quad (a)$$

Un diagramma M_ϑ rispettante le (4) verifica a sua volta le disuguaglianze

$$M_o'' < M_\vartheta + M_f < M_o'; \quad (b)$$

M_ϑ è indipendente dal tempo.

Si consideri la quantità

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int_s \frac{(M_p - M_\vartheta)^2}{EI} ds; \quad (c)$$

è pure (indicando con punto la derivata temporale)

$$\dot{\mathcal{L}} = \int_s \frac{\dot{M}_p (M_p - M_\vartheta)}{EI} ds. \quad (d)$$

Poiché è (a)

$$\frac{\dot{M}_p}{EI} = \frac{\dot{M}}{EI} - \frac{\dot{M}_f}{EI} = \dot{c}_e - \dot{c}_f = \dot{c} - \dot{c}_p - \dot{c}_f$$

$$M_p - M_\vartheta = M - (M_\vartheta + M_f)$$

la (d) si scrive

$$\dot{\mathcal{L}} = \int_s (\dot{c} - \dot{c}_f) [M - (M_\vartheta + M_f)] ds - \int_s \dot{c}_p [M - (M_\vartheta + M_f)] ds.$$

Il primo integrale è nullo, poiché \dot{c} e \dot{c}_f sono congruenti, ed il momento in parentesi quadra è in equilibrio con forze nulle. Quindi è

$$\dot{\mathcal{L}} = - \int_s \dot{c}_p [M - (M_\vartheta + M_f)] ds.$$

Se è $\dot{c}_p > 0$, nella stessa sezione è $M = M_o'$, e quindi dalla (b) risulta

$$\dot{c}_p [M - (M_\vartheta + M_f)] ds > 0;$$

se è $\dot{c}_p < 0$, nella stessa sezione è $M = M_o''$, e quindi dalla (b) risulta ancora

$$\dot{c}_p [M - (M_\vartheta + M_f)] ds > 0;$$

se è $\dot{c}_p = 0$, è

$$\dot{c}_p [M - (M_\vartheta + M_f)] ds = 0 .$$

Quindi $\dot{\mathcal{L}} = 0$ se e solo se è ovunque $\dot{c}_p = 0$, se cioè nell'intervallo di tempo dt non si formano deformazioni plastiche; in caso contrario è $\dot{\mathcal{L}} < 0$, e cioè ogni deformazione plastica si associa ad una diminuzione di \mathcal{L} . Poiché \mathcal{L} è quadratica omogenea, essa non può assumere valori negativi, e quindi \mathcal{L} non può diminuire indefinitamente. Ciò significa che le deformazioni c_p devono tendere a zero nel tempo, e cioè la struttura tende a stabilizzarsi, q.e.d.

Sotto le sollecitazioni $\vartheta \{ F_j \}$ si verifica perciò, dopo un certo tempo, la formazione di un insieme di momenti M_r (*momenti residui di stabilizzazione*, anche diversi dagli M_ϑ che intervengono nelle (4)) intorno ai quali i momenti oscillano tra M_{\max} ed M_{\min} senza mai attingere la soglia plastica. E' questa la situazione chiamata, con un termine anglosassone non efficacemente traducibile, di *shake down*.

E' immediato riconoscere che, dato un qualsiasi ϑ , è sempre

$$\vartheta < \tilde{s}_r . \quad (5)$$

Poiché infatti ϑ rispetta le (4), ogni $r < \vartheta$ le rispetterà ancora, con gli stessi M_ϑ ; quindi sotto le sollecitazioni $r \{ F_j \}$ si ha ancora stabilizzazione. Ne discende che non può essere $\tilde{s}_r < \vartheta$; e poiché sotto \tilde{s}_r si può avere collasso incrementale, non può essere neppure $\tilde{s}_r = \vartheta$. Così pure si osserva che ogni numero minore di \tilde{s}_r è un ϑ ; ed infatti, poiché per \tilde{s}_r valgono le (3), per ogni numero minore di \tilde{s}_r valgono le (4). Se ne trae che \tilde{s}_r è unico; esso è il *moltiplicatore di rottura per collasso incrementale*.

Un numero $\tilde{\psi}$ reale positivo si definisce *moltiplicatore staticamente ammissibile* se esiste un diagramma di momenti M_ψ in equilibrio con forze nulle, tale che ovunque siano rispettate le limitazioni, analoghe alle (3),

$$M_\psi + \tilde{\psi} M_{\max} \leq M'_o \quad (6)$$

$$M_\psi + \tilde{\psi} M_{\min} \geq M''_o .$$

Un numero $\tilde{\gamma}$ reale positivo si definisce *moltiplicatore cinematicamente sufficiente* se esiste un diagramma di momenti M_γ in equilibrio con forze nulle, tale che nelle S_m sezioni di un meccanismo,

di cui sia assegnato il verso del movimento, (e tale che a $\Delta\varphi_m > 0$ corrisponda $M_{\max} > 0$, e a $\Delta\varphi_m < 0$ corrisponda $M_{\min} < 0$) si abbia

$$M_{\gamma m} + \tilde{\gamma} M_{\max m} = M'_{om} \quad (7')$$

dove $\Delta\varphi_m > 0$, e

$$M_{\gamma m} + \tilde{\gamma} M_{\min m} = M''_{om} \quad (7'')$$

dove $\Delta\varphi_m < 0$.

Si può dimostrare che dati comunque un $\tilde{\psi}$ ed un $\tilde{\gamma}$, è $\tilde{\psi} \leq \tilde{\gamma}$. Si premette, a ciò fare, l'osservazione che qualsiasi moltiplicatore $\tilde{\gamma}$ può ottenersi come segue: date le sezioni S_m del meccanismo totale o parziale connesso per definizione, assieme al verso del suo spostamento, con $\tilde{\gamma}$, si introducono in tali sezioni delle cerniere baricentriche; si applicano sulle facce unite da ogni cerniera due coppie uguali e contrarie, pari a

$$m_{ms} = M'_{om} \quad (8')$$

$$m_{md} = -M'_{om}$$

oppure a

$$m_{ms} = M''_{om} \quad (8'')$$

$$m_{md} = -M''_{om} ,$$

secondo che all'assegnato verso del meccanismo corrisponda $\Delta\varphi_m \geq \geq 0$; si scrivono le (7) come segue

$$M_{\gamma m} + \tilde{\gamma} M_{\max m} = m_{ms} \quad (9')$$

oppure

$$M_{\gamma m} + \tilde{\gamma} M_{\min m} = m_{ms} ; \quad (9'')$$

dalla relazione di *Lagrange*

$$\sum_m M_{\gamma m} \Delta\varphi_m = 0 \quad (e)$$

si trae

$$\tilde{\gamma} = \frac{\sum_m m_{ms} \Delta\varphi_m}{\sum_m M_{\max m} \Delta\varphi_m + \sum_{m''} M_{\min m} \Delta\varphi_m} . \quad (10)$$

Ad ogni meccanismo corrisponde quindi un $\tilde{\gamma}$, definito dalla (10).

Dalle (9), ottenuto $\tilde{\gamma}$, si trae univocamente il diagramma M_γ se il numero di cerniere del meccanismo è pari ad $i + 1$ (i grado di iperstaticità della struttura). In caso contrario M_γ è definito solo in una parte della struttura, che comprende la parte labilizzata, mentre nel resto può essere qualsiasi, purché rispettoso dell'equilibrio.

Ciò premesso, in relazione al meccanismo ed agli spostamenti con cui è stato calcolato $\tilde{\gamma}$, ed in relazione ancora ai momenti M_ψ connessi con $\tilde{\psi}$, si scriva l'equazione di *Lagrange*

$$\sum_m M_{\psi m} \Delta\varphi_m = 0 . \quad (f)$$

Dalle (e) ed (f) si trae

$$\sum_m (M_{\gamma m} - M_{\psi m}) \Delta\varphi_m = 0 . \quad (g)$$

Si suddivida la sommatoria della (g) nelle due parti \sum_m , sommatoria relativa alle $\Delta\varphi_m > 0$, e $\sum_{m''}$, sommatoria relativa alle $\Delta\varphi_m < 0$. Si ha così (9).

$$\begin{aligned} & \sum_m (m_{ms} - \tilde{\gamma} M_{\max m} - M_{\psi m}) \Delta\varphi_m + \\ & + \sum_{m''} (m_{ms} - \tilde{\gamma} M_{\min m} - M_{\psi m}) \Delta\varphi_m = 0 . \end{aligned}$$

Per definizione di $\tilde{\psi}$ si ha d'altro canto (6)

$$M_{\psi m} + \tilde{\psi} M_{\max m} \leq M'_{om}$$

$$M_{\psi m} + \tilde{\psi} M_{\min m} \geq M''_{om}$$

Quindi, con riferimento al generico termine della Σ_m , si ha

$$m_{ms} = M'_{om}$$

$$\Delta\varphi_m > 0$$

$$M_{\psi m} \leq M'_{om} - \tilde{\psi} M_{\max m}$$

da cui

$$\Sigma_m \cdot (m_{ms} - \tilde{\gamma} M_{\max m} - M_{\psi m}) \Delta\varphi_m \geq (\tilde{\psi} - \tilde{\gamma}) \Sigma_m \cdot M_{\max m} \Delta\varphi_m \tag{h}$$

Così pure, con riferimento al generico termine della Σ_m'' , si ha

$$m_{ms} = M''_{om}$$

$$\Delta\varphi_m < 0$$

$$M_{\psi m} \geq M''_{om} - \tilde{\psi} M_{\min m}$$

da cui

$$\Sigma_m'' \cdot (m_{ms} - \tilde{\gamma} M_{\min m} - M_{\psi m}) \Delta\varphi_m \geq (\tilde{\psi} - \tilde{\gamma}) \Sigma_m'' \cdot M_{\min m} \Delta\varphi_m \tag{i}$$

Dalle (h) ed (i) si ha quindi

$$(\tilde{\psi} - \tilde{\gamma}) (\Sigma_m \cdot M_{\max m} \Delta\varphi_m + \Sigma_m'' \cdot M_{\min m} \Delta\varphi_m) \leq 0.$$

La seconda parentesi è positiva, quindi si ha

$$\tilde{\psi} - \tilde{\gamma} \leq 0$$

da cui

$$\tilde{\psi} \leq \tilde{\gamma} \quad (11)$$

q.e.d.

Per le definizioni, il moltiplicatore \tilde{s}_r è nello stesso tempo un $\tilde{\psi}$ ed un $\tilde{\gamma}$. Se quindi si conoscono un $\tilde{\psi}$ ed un $\tilde{\gamma}$, può porsi, per la (11),

$$\tilde{\psi} \leq \tilde{s}_r \leq \tilde{\gamma} \quad (12)$$

Dalla (11) si ha pure conferma della unicità di \tilde{s}_r .

Un coefficiente $\tilde{\gamma}$ è immediatamente ottenibile dalla (10); da esso può ottenersi un $\tilde{\psi}$ come segue.

Si calcolino in tutte le sezioni (in pratica, solo in un certo numero opportunamente scelto) i rapporti ρ

$$\frac{M_\gamma + \tilde{\gamma} M_{\max}}{M'_o} \quad (13)$$

$$\frac{M_\gamma + \tilde{\gamma} M_{\min}}{M''_o} ;$$

sia ρ_{\max} il più elevato di tali rapporti; risulta

$$\frac{\tilde{\gamma}}{\rho_{\max}} = \tilde{\psi} \quad (14)$$

Ed infatti gli $\frac{M_\gamma}{\rho_{\max}}$ sono ancora in equilibrio con forze nulle, e

dunque possono assumersi come M_ψ ; i momenti $\frac{\tilde{\gamma}}{\rho_{\max}} M_{\max}$ e

$\frac{\tilde{\gamma}}{\rho_{\max}} M_{\min}$, oscillanti sugli M_ψ , rispettano le (6), per il modo stes-

so in cui è stato calcolato ρ_{\max} . La (12) quindi può scriversi

$$\frac{\tilde{\gamma}}{\rho_{\max}} \leq \tilde{s}_r \leq \tilde{\gamma} ; \quad (15)$$

e cioè il calcolo di un $\tilde{\gamma}$ porta al calcolo di un $\tilde{\psi}$, e quindi di un intervallo (15) in cui \tilde{s}_r è necessariamente compreso.

Naturalmente il calcolo così condotto esige in genere più tentativi, affinché l'intervallo (15) sia sufficientemente ristretto. E' buona norma, nell'eseguire il secondo tentativo, ipotizzare le cerniere del secondo tentativo (alcune o tutte) laddove nel primo tentativo ρ attingeva i massimi relativi.

Il coefficiente \tilde{s}_r è in genere più basso del minore dei coefficienti s_{rj} relativi al collasso statico sotto ciascuna delle j condizioni di carico alternantisi; al massimo, è ad esso uguale. Sembrerebbe perciò, in presenza di azioni variabili, addirittura superfluo il calcolo degli s_{rj} . Si badi però che il valore caratteristico di una sollecitazione, per esempio del vento, si valuta come frattile di un certo ordine k , vale a dire imponendo che sia k la probabilità che il vento superi tale valore; e la curva delle densità di probabilità è tracciata in base ad osservazioni fatte durante un periodo di tempo pari alla prefissata vita media della struttura. Il vento può poi spirare da più punti della rosa (ed a volte il suo valore caratteristico è funzione di tale punto). Se perciò ci si vuole garantire nei riguardi del collasso statico sotto una di tali condizioni, è giusto adottare il suddetto valore caratteristico, poiché l'evento $F_v > F_k$ è da considerarsi una sola volta. Se invece ci si vuole garantire nei riguardi del collasso per azioni variabili, tale collasso avviene dopo che l'evento $F_v > F_k$ si è verificato per ciascuna delle condizioni di carico connesse con il meccanismo, ed il numero di volte necessario per rendere gli spostamenti intollerabili; quindi il valore caratteristico può essere più basso.

2. Il collasso da fatica plastica.

Sempre in presenza di più condizioni di carico $\{F_j\}$, può esistere un numero \tilde{s}_r , rispettante la (1), tale che sotto le condizioni di carico $\tilde{s}_r \{F_j\}$ alternantisi indefinitamente si può generare dopo un certo numero di cicli un diagramma di momenti residui M_r rispettoso delle

(3), e verificante in una sezione S_a la condizione

$$M_{ra} + \tilde{s}_r M_{\max a} = M'_{oa} \quad (16)$$

$$M_{ra} + \tilde{s}_r M_{\min a} = M''_{oa}.$$

Se ciò è vero, e a partire dal momento in cui il diagramma M_r si è formato, l'azione delle $\tilde{s}_r \{F_j\}$ alternantisi genera in S_a rotazioni plastiche di segno opposto. Anche se queste sono di piccola entità, il loro ripetersi porta alla rottura nella sezione S_a , e quindi alla crisi dell'intera struttura. Questo fenomeno è molto simile alla rottura per fatica dinamica, ben nota da gran tempo. La somiglianza è limitata però al fatto che in ambedue i fenomeni la crisi si innesca per ripetizione di carichi, ma per il resto la loro natura è diversa; basti pensare che la rottura ora presa in esame avviene per un numero di alternanze della plasticizzazione dell'ordine delle sole centinaia. Il fenomeno descritto è il *collasso per plasticizzazione alternata*, detto anche per *fatica plastica*.

Data una sezione S_a , si chiami $\tilde{\gamma}$ un numero (detto ancora impropriamente *moltiplicatore cinematicamente sufficiente*) tale che esista un diagramma M_γ in equilibrio con forze nulle per cui si abbia

$$M_{\gamma a} + \tilde{\gamma} M_{\max a} = M'_{oa} \quad (17)$$

$$M_{\gamma a} + \tilde{\gamma} M_{\min a} = M''_{oa}.$$

Anche in questo caso si può dimostrare che dati un $\tilde{\psi}$ (definito al par. 1) ed un $\tilde{\gamma}$, è valida la (11).

Infatti dalle (17) si ha

$$\tilde{\gamma} M_{\max a} = M'_{oa} - M_{\gamma a}$$

$$\tilde{\gamma} M_{\min a} = M''_{oa} - M_{\gamma a}$$

e sottraendo

$$\tilde{\gamma} (M_{\max a} - M_{\min a}) = M'_{oa} - M''_{oa}; \quad (\ell)$$

dalle (6)

$$M_{\psi a} + \tilde{\psi} M_{\max a} \leq M'_{o}$$

$$M_{\psi a} + \tilde{\psi} M_{\min a} \geq M''_{o}$$

si ha poi

$$\tilde{\psi} (M_{\max a} - M_{\min a}) \leq M'_{oa} - M''_{oa} ; \quad (m)$$

quindi, dalle (l) ed (m) si trae

$$(\tilde{\gamma} - \tilde{\psi}) (M_{\max a} - M_{\min a}) \geq 0$$

da cui

$$\tilde{\gamma} \geq \tilde{\psi} .$$

La (11) è quindi di carattere generale, poiché il $\tilde{\gamma}$ in essa contenuto può indifferentemente derivare dall'ipotesi di collasso incrementale come da quella di collasso da fatica plastica.

Si osservi che, dopo aver fissato la sezione S_a di crisi per fatica plastica, un valore di $\tilde{\gamma}$ si ottiene dalle (17)

$$\tilde{\gamma} = \frac{M'_{oa} - M''_{oa}}{M_{\max a} - M_{\min a}} ; \quad (18)$$

dalle stesse (17) si trae

$$\begin{aligned} M_{\gamma a} &= M'_{oa} - \tilde{\gamma} M_{\max a} = \\ &= M''_{oa} - \tilde{\gamma} M_{\min a} . \end{aligned} \quad (19)$$

Ottenuto $M_{\gamma a}$, il diagramma M_{γ} è definito se e solo se la struttura è una volta iperstatica; in caso contrario, M_{γ} si può tracciare in qualsiasi modo, purché in equilibrio con forze nulle e rispettante la (19).

Dal valore (18) si può quindi trarre un $\tilde{\psi}$, così come detto al par. 1, attraverso la (14). Naturalmente il procedimento è più lungo, atteso il fatto di dover tracciare il diagramma M_γ su una struttura iperstatica, anche se nel rispetto del solo equilibrio; in tale operazione infatti occorre far sì che il ρ della (14) sia il più basso possibile, allo scopo di restringere quanto più possibile l'intervallo (15).

Nel collasso da fatica plastica le considerazioni fatte alla fine del par. 1 possono avere minore peso. Ciò si verifica quando il collasso avvenga sotto la stessa condizione di carico che si inverte numerose volte, nel corso di un unico evento; classico esempio quello del sisma. Nei due tipi di collasso descritti nei paragrafi 1 e 2, il $\tilde{\psi}$ ha una definizione unica, mentre il $\tilde{\gamma}$ è definito nell'ipotesi di collasso incrementale (a partire da un meccanismo, assegnato con un verso) o nell'ipotesi di fatica plastica (a partire da una sezione). Si osservi pure che il teorema di *Bleich*, dimostrato operando sui moltiplicatori ϑ , vale per ambedue i tipi di collasso.

Il moltiplicatore di rottura è unico, che provenga da collasso incrementale o da fatica plastica. Se infatti ce ne fossero due, $\tilde{s}_{1r} < \tilde{s}_{2r}$, \tilde{s}_{2r} sarebbe un $\tilde{\psi}$, \tilde{s}_{1r} un $\tilde{\gamma}$, e si avrebbe $\tilde{\gamma} < \tilde{\psi}$, in contraddizione con la (11) che vale, come già detto, sia per un $\tilde{\gamma}$ da collasso incrementale che per un $\tilde{\gamma}$ da fatica plastica. Deve perciò parlarsi in genere di un *moltiplicatore di rottura per azioni variabili*.

3. *Carattere comune ai vari tipi di collasso: vitalità del calcolo elastico.*

Si sono esaminate le possibilità di collasso statico, incrementale e da fatica plastica; tali collassi sono di tipo diverso, ma c'è tra essi un denominatore comune. Infatti, nell'ipotesi sempre di plasticità perfetta (diagramma $\sigma\epsilon$ indefinito), in tutte e tre i casi si ha produzione indefinita del lavoro interno L^* connesso con le deformazioni plastiche, e cioè del cosiddetto *lavoro plastico*. Viceversa, uno dei tre casi esaminati deve necessariamente verificarsi se si ha produzione indefinita di lavoro plastico; poiché infatti l'energia elastica non può crescere oltre ogni limite, occorre che le deformazioni plastiche siano tali da poter liberare, in un certo intervallo di tempo $[t, t + \Delta t]$, l'energia vincolata accumulata per esse a partire dal tempo t nella struttura; e cioè le deformazioni plastiche relative a tale intervallo devono essere *atensionali*. Ciò si ottiene solo se esse possono connettersi con un meccanismo, oppure possono ridursi ad una ripetizione

di valori uguali e contrari nella stessa sezione.

Se la crisi è limitata ai tre casi suddetti, può dunque scriversi

$$\exists \text{ crisi} \Leftrightarrow \exists L^* = \infty ; \quad (20)$$

per l'altra, ad essa equivalente,

$$\nexists \text{ crisi} \Leftrightarrow \nexists L^* = \infty \quad (21)$$

può dirsi che non si ha collasso se e solo se non c'è alcuna possibilità di produzione illimitata di lavoro plastico.

Alcune tra le maggiori perplessità che accompagnarono, al suo sorgere, il calcolo a rottura, furono quelle relative al fatto che tale tipo di calcolo non può tenere conto delle distorsioni^(*). Tale difficoltà è superata se le distorsioni sono variabili, come ad esempio accade per le variazioni termiche, fra tutte le più temibili; infatti il coefficiente \tilde{s}_r tiene conto, attraverso i valori di M_{\max} ed M_{\min} , anche delle distorsioni variabili.

Altre perplessità ruotavano sulla questione dei carichi accidentali, ed erano avanzate specialmente dai costruttori di ponti; cadendo infatti i presupposti della teoria delle linee d'influenza, non era più possibile sapere quali fossero le condizioni di carico più pericolose. Anche tali difficoltà sono superate, poiché il calcolo di M_{\max} ed M_{\min} va eseguito in fase elastica, e cioè secondo le teorie elastiche lineari. Al lume di questa considerazione si nota subito come il calcolo a rottura, ben lungi dal mettere da parte il calcolo elastico, si fondi tutto su di esso; quindi non deve essere considerato come alternativa al calcolo elastico, ma piuttosto come un suo complemento.

4. Alcuni esempi elementari di crisi per azioni variabili.

a) Si prenda in esame una trave incastrata alle due estremità A e B, di sezione costante con $M'_0 = -M''_0 = M_0$. Una forza F (fig. 1) provoca

(*) Ciò è valido nell'ipotesi di materiale perfettamente plastico; se invece deve adottarsi un tratto orizzontale finito nel diagramma $\sigma \epsilon$, le distorsioni influiscono fortemente sul moltiplicatore di rottura.

notoriamente in fase elastica i momenti

$$M_A = -F \frac{ab^2}{l^2}$$

$$M_B = -F \frac{a^2b}{l^2}$$

(22)

$$M_C = F \frac{ab}{l^3} (l^2 - b^2 - a^2).$$

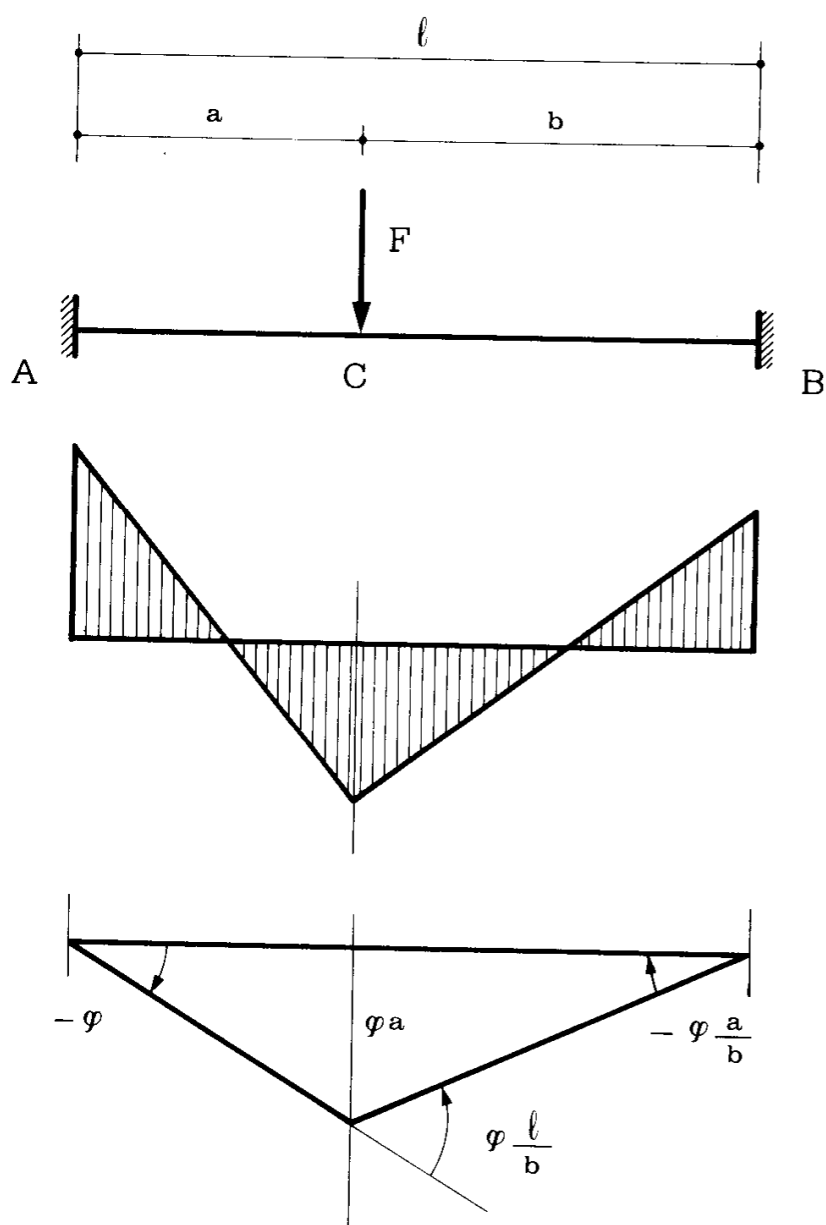


Fig. 1

Se $b > a$, è (nell'ipotesi $M'_e = -M''_e = M_e$)

$$M_e = F_e \frac{ab^2}{\ell^2}$$

da cui

$$F_e = M_e \frac{\ell^2}{ab^2} = M_o \frac{\ell^2}{ab^2} \quad (23)$$

(si osservi infatti che nell'ipotesi di diagramma $M \Delta \varphi$ bilatero è $M_e = M_o$). Il valore F_o di rottura è invece fornito dall'equazione di Lagrange

$$M_o \varphi \left(1 + \frac{a}{b} + \frac{\ell}{b} \right) = F a \varphi$$

da cui

$$F_o = 2M_o \frac{\ell}{ab}; \quad (24)$$

è perciò

$$\frac{F_o}{F_e} = 2 \frac{b}{\ell}. \quad (25).$$

Per $b = \frac{\ell}{2}$, è $\frac{F_o}{F_e} = 1$; per $b \rightarrow \ell$ si ha

$$\frac{F_o}{F_e} \rightarrow 2.$$

Per $a = \frac{\ell}{3}$, $b = \frac{2}{3} \ell$, si ha

$$M_A = -\frac{4}{27} F \ell = -0,1481 F \ell \quad (26)$$

$$M_B = -\frac{2}{27} F \ell = -0,0741 F \ell$$

$$M_C = \frac{8}{81} F \ell = -0,0988 F \ell$$

$$\frac{F_o}{F_e} = \frac{4}{3}$$

Siano possibili sulla suddetta trave la forza F agente in $z = \frac{\ell}{3}$ e la

forza F dello stesso valore agente in $z = \frac{2}{3} \ell$.

Il diagramma dei momenti massimi e minimi è quello della fig. 2. Si ha crisi per collasso incrementale secondo il meccanismo della fig. 2 se è presente un diagramma M_r costante (M_r deve essere comunque trapezio, e i due valori di M_{\min} in A e B, $M_{\min A}$, sono uguali) e se i diagrammi $M_{\max} + M_r$ ed $M_{\min} + M_r$ toccano in A, B e C la frontiera della fascia di compatibilità $M = M_o$, $M = -M_o$; infatti in tal caso le (3) sono rispettate. Il moltiplicatore \tilde{s}_r di rottura sotto azioni variabili è perciò fornito dalle due condizioni

$$M_{\min A} + M_r = -M_o$$

$$M_{\max C} + M_r = M_o$$

e cioè da

$$M_{\max C} - M_{\min A} = 2 M_o$$

da cui

$$\tilde{s}_r F \ell \left(\frac{8}{81} + \frac{4}{27} \right) = 2 M_o$$

$$\tilde{s}_r = \frac{81}{10} \frac{M_o}{F\ell} \quad (27)$$

Dalla (24) si trae invece, per ciascuna condizione di carico,

$$s_r = 9 \frac{M_o}{F\ell} \quad (28).$$

Dalla (23) poi si ottiene

$$s_e = 6,75 \frac{M_o}{F\ell} ; \quad (29)$$

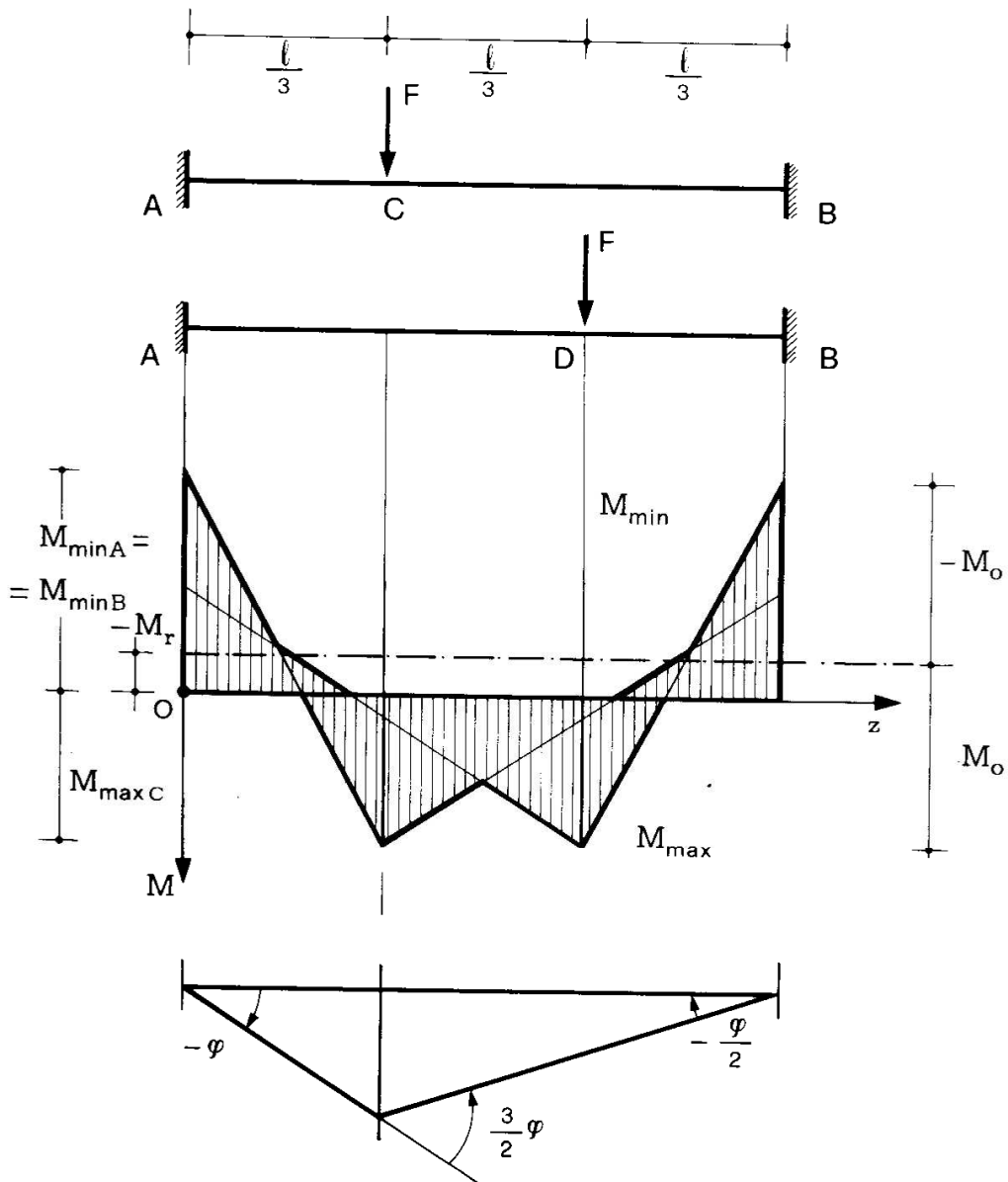


Fig. 2

quindi si verifica

$$s_e < \tilde{s}_r < s_r \quad . \quad (30)$$

Con il meccanismo della fig. 2 la (9) fornisce

$$\tilde{\gamma} = \frac{M_o \left(\varphi + \frac{3}{2} \varphi + \frac{\varphi}{2} \right)}{\frac{4}{27} F \ell \varphi + \frac{8}{81} F \ell \frac{3}{2} \varphi + \frac{4}{27} F \ell \frac{\varphi}{2}}$$

e cioè

$$\tilde{\gamma} = 8,1 \frac{M_o}{F \ell} ;$$

si verifica facilmente che le (3) sono rispettate, e quindi $\tilde{\gamma}$ è \tilde{s}_r , in conformità alla (27).

Il valore di M_r è fornito da

$$\begin{aligned} M_r &= -M_o - M_{\min A} = -M_o + \frac{4}{27} \tilde{s}_r F \ell \\ &= -M_o + \frac{4}{27} \frac{81}{10} M_o = -M_o + \frac{12}{10} M_o = \frac{M_o}{5} . \end{aligned}$$

Così pure, sotto $\tilde{s}_r F$, si ha

$$\begin{aligned} M_{\min A} &= -\frac{6}{5} M_o \\ M_{\max C} &= \frac{4}{5} M_o . \end{aligned}$$

b) Se le condizioni di carico sono quelle della fig. 3, si ha crisi per

fatica plastica in A se è presente un diagramma M_r antisimmetrico, e tale che i diagrammi M_{\max} ed M_{\min} , disegnati a partire da M_r , toccano ambedue in A la frontiera della fascia di compatibilità; infatti

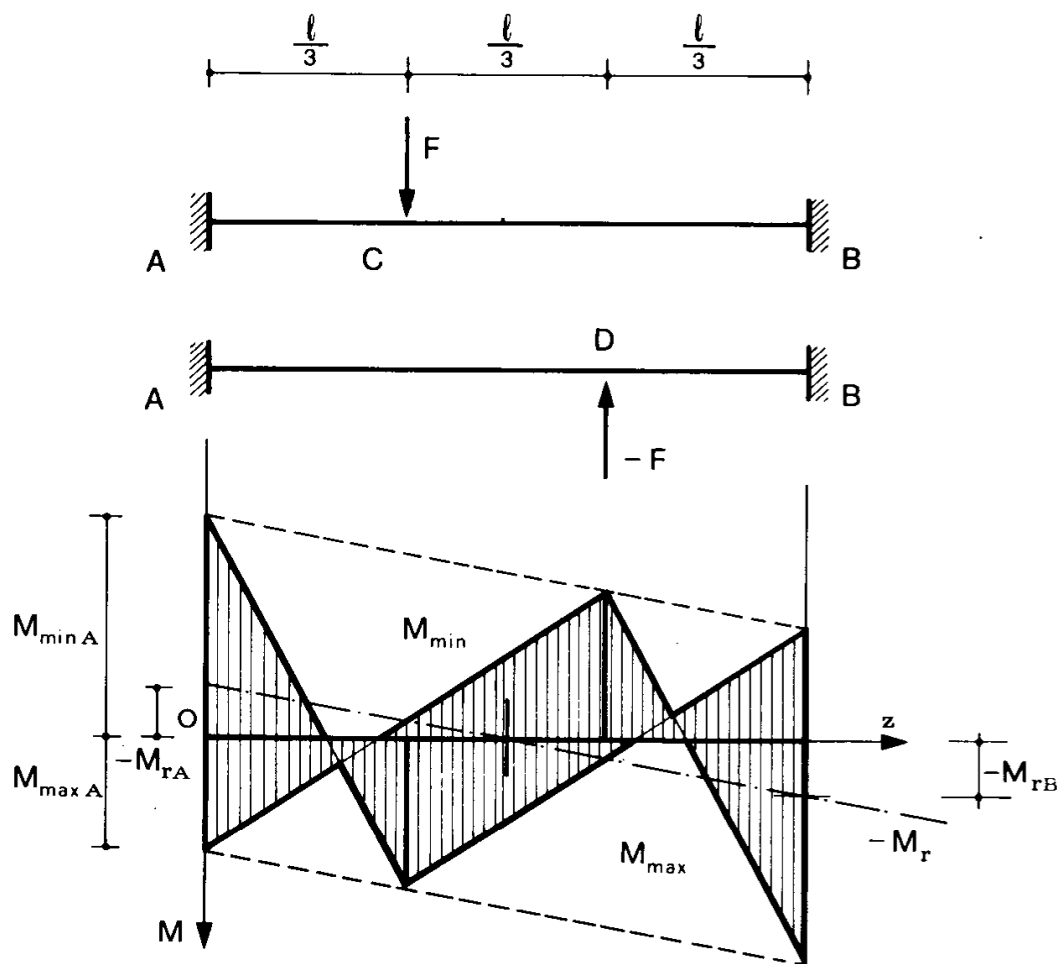


Fig. 3

in tal caso le (3) sono rispettate. Il valore del moltiplicatore \tilde{s}_r di collasso sotto azioni variabili è perciò fornito da

$$M_{\min A} + M_{rA} = -M_o$$

$$M_{\max A} + M_{rA} = M_o$$

e cioè

$$M_{\max A} - M_{\min A} = 2M_o \quad (31)$$

da cui

$$\begin{aligned}\tilde{s}_r F \ell \left(\frac{2}{27} + \frac{4}{27} \right) &= 2M_o \\ \tilde{s}_r &= 9 \frac{M_o}{F \ell} .\end{aligned}\quad (32)$$

Si osserva subito però che la (32) coincide con la (28) e quindi, prima del collasso per azioni variabili (che nel caso in esame sarebbe da fatica plastica) si ha collasso statico sotto una sola delle condizioni di carico.

Il valore di M_{rA} è fornito da

$$\begin{aligned}M_{rA} &= -M_o - M_{\min A} = -M_o + \frac{4}{27} \tilde{s}_r F \ell = \\ &= -M_o + \frac{4}{27} 9 M_o = \frac{9}{27} M_o = \frac{M_o}{3} .\end{aligned}$$

c) Si prendano in esame le due condizioni di carico della fig. 4a. Nell'ipotesi di crisi in A per fatica plastica il valore $\tilde{\gamma}$ si ottiene ancora dalla (31), che porge

$$\tilde{\gamma} F \ell \left(\frac{1}{27} + \frac{4}{27} \right) = 2M_o$$

da cui

$$\tilde{\gamma} = \frac{54}{5} \frac{M_o}{F \ell} = 10,8 \frac{M_o}{F \ell} ;$$

si ha pure

$$M_{\gamma A} = -M_o - M_{\min A} = -M_o + \frac{4}{27} \tilde{\gamma} F \ell =$$

$$= -M_o + \frac{4}{27} \frac{54}{5} M_o = \frac{3}{5} M_o ;$$

sotto $\tilde{\gamma} F$ è poi

$$M_{\min A} = -\frac{8}{5} M_o$$

$$M_{\max A} = \frac{2}{5} M_o .$$

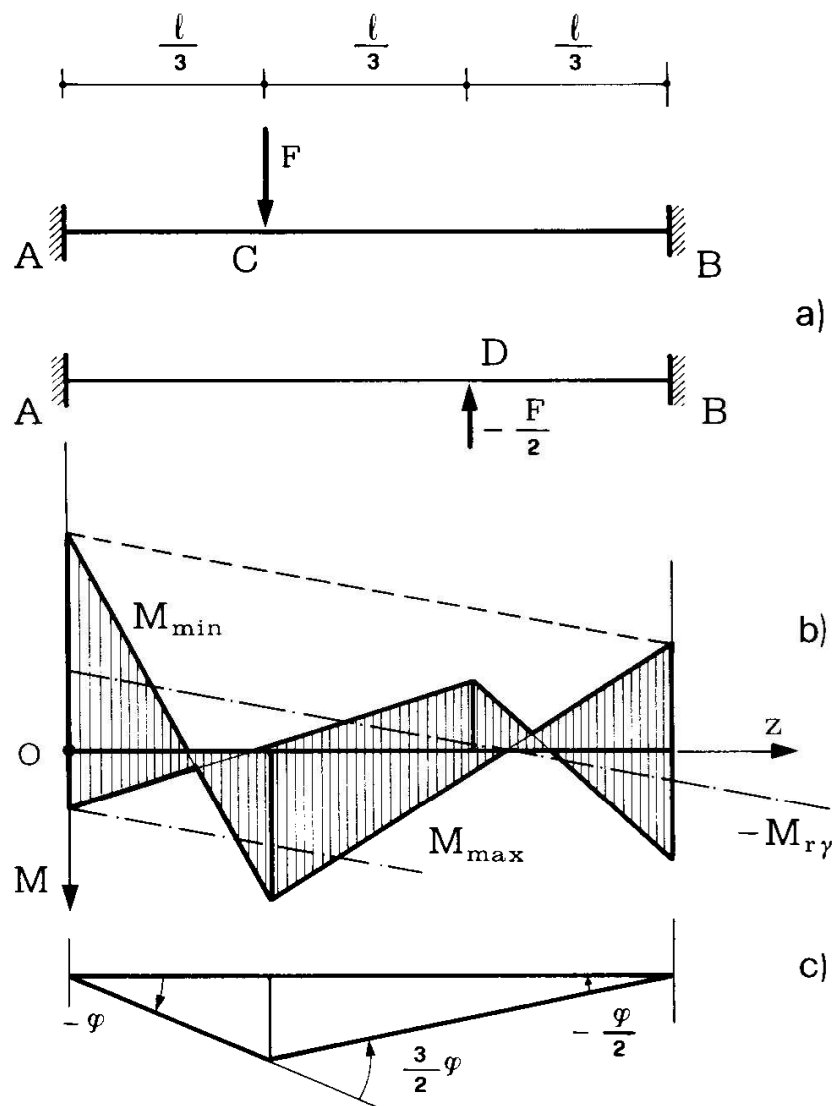


Fig. 4

Poiché in B è

$$M_{\min B} = -\frac{2}{27} \tilde{\gamma} F \ell = -\frac{4}{5} M_o$$

$$M_{\max B} = \frac{2}{27} \tilde{\gamma} F \ell = \frac{4}{5} M_o$$

si può porre, nel rispetto della compatibilità,

$$M_{\gamma B} = -\frac{M_o}{5}.$$

Tracciato così il diagramma M_γ , si riconosce (fig. 4b) che il massimo scarto della fascia di compatibilità si ha in C; in questa sezione è

$$\begin{aligned} M_C &= \frac{8}{81} \tilde{\gamma} F \ell + \frac{3}{5} M_o \frac{2}{3} - \frac{1}{5} M_o \frac{1}{3} = \\ &= M_o \left(\frac{8}{81} \frac{54}{5} + \frac{2}{5} - \frac{1}{15} \right) = \frac{21}{15} M_o = 1,4 M_o, \end{aligned}$$

quindi

$$\rho = 1,4$$

e ancora

$$7,7143 \frac{M_o}{F \ell} \leq \tilde{s}_r \leq 10,8 \frac{M_o}{F \ell}. \quad (33)$$

Nell'ipotesi di crisi per collasso incrementale, con il meccanismo della

fig. 4c, si ha (9)

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &= \frac{M_o \left(\varphi + \frac{3}{2} \varphi + \frac{\varphi}{2} \right)}{\frac{4}{27} F \ell \varphi + \frac{8}{81} F \ell \frac{3}{2} \varphi + \frac{2}{27} F \ell \frac{\varphi}{2}} = \\ &= \frac{M_o}{F \ell} \frac{3}{\frac{12 + 12 + 3}{81}} = 9 \frac{M_o}{F \ell} . \end{aligned}$$

Si ha, sotto $\tilde{\gamma} F$,

$$M_{\gamma A} = -M_o - M_{\min A} = -M_o + \frac{4}{27} \tilde{\gamma} F \ell = -M_o + \frac{4}{27} 9M_o = \frac{M_o}{3}$$

$$M_{\gamma B} = -M_o - M_{\min B} = -M_o + \frac{2}{27} 9M_o = -\frac{M_o}{3} .$$

Poiché è ovunque rispettata la (3), è $\rho = 1$, $\tilde{\gamma} = \tilde{s}_r$. E' quindi

$$\tilde{s}_r = 9 \frac{M_o}{F \ell} .$$

Questo valore però coincide con il (28); ciò avverte che, come nel caso (b), si ha collasso statico, e non incrementale.

d) Siano possibili le due condizioni di carico della fig. 5. La F agente in $z = \frac{\ell}{3}$ produce i momenti (26); la -F agente in $z = \frac{\ell}{6}$ si associa invece ai momenti

$$M_A = \frac{25}{216} F \ell = 0,1157 F \ell$$

$$M_B = \frac{5}{216} F \ell = 0,0231 F \ell$$

$$M_C = -\frac{50}{1296} F \ell = -0,0386 F \ell .$$

Nell'ipotesi di crisi in A per fatica plastica il valore $\tilde{\gamma}$ si ottiene (31) dalla condizione

$$M_{\max A} - M_{\min A} = 2M_o$$

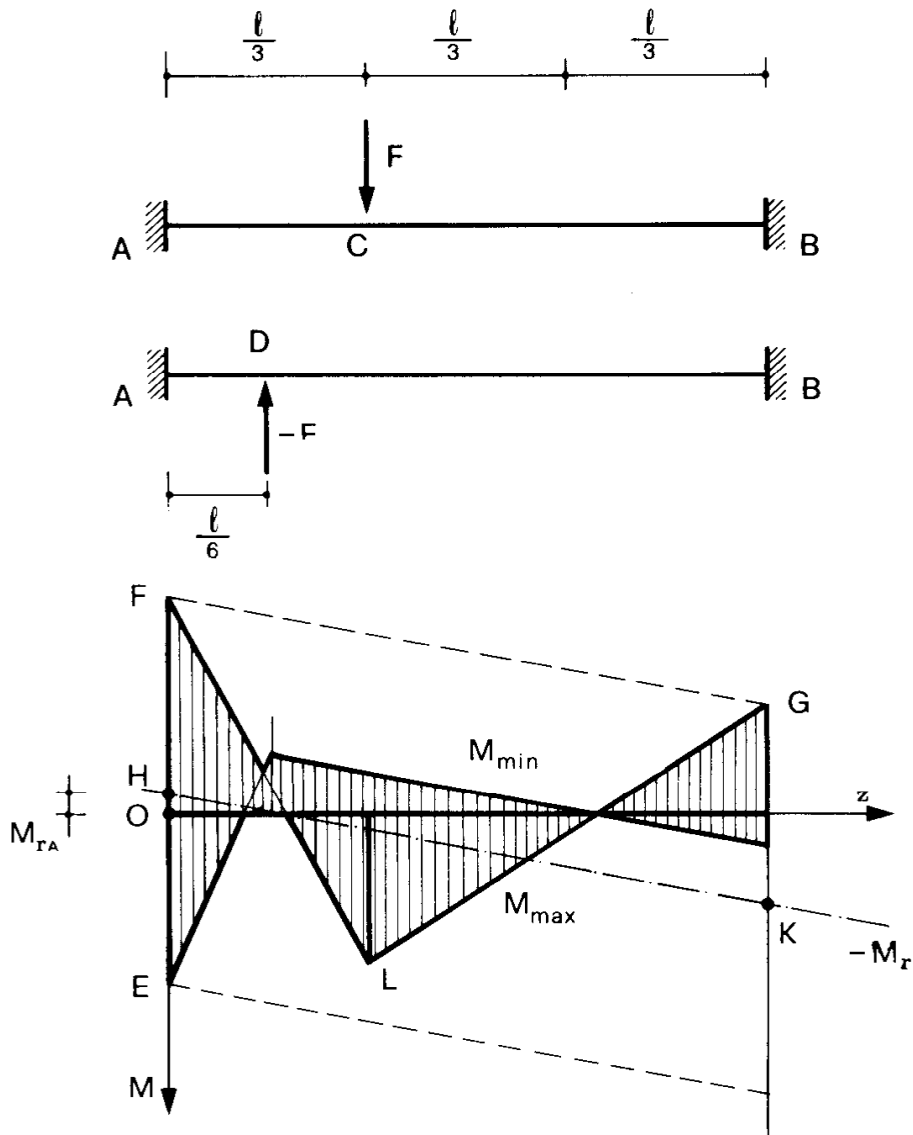


Fig. 5

da cui

$$\tilde{\gamma} F \ell \left(\frac{25}{216} + \frac{4}{27} \right) = 2M_o$$

$$\tilde{\gamma} = 7,5789 \frac{M_o}{F \ell} .$$

Il valore di M_{rA} è fornito da

$$M_{rA} = -M_o - M_{\min A} = -M_o + \frac{4}{27} \tilde{\gamma} F \ell = 0,1228 M_o .$$

Se OH rappresenta $-M_{rA}$, si adotti a rappresentare $-M_r$ una qualsiasi retta passante per H, compresa nell'angolo formato dalle parallele per H alla FG ed alla EL; si osserva subito che la (3) è rispettata, e quindi

$$\tilde{s}_r = 7,5789 \frac{M_o}{F \ell} .$$

La rottura sotto azioni variabili si ha perciò effettivamente, in A, per fatica plastica.

e) Si studi infine la trave della fig. 7, soggetta alternativamente al carico uniforme q sulle due semiluci.

Lo studio preliminare della trave soggetta al carico uniforme q su una semiluce (fig. 6) si esegue dividendo il carico in una condizione simmetrica ed una antisimmetrica. Si ha così, per la condizione simmetrica,

$$M'_A = M'_B = - \frac{q}{2} \frac{\ell^2}{12} = - \frac{q \ell^2}{24}$$

$$M'_C = \frac{q}{2} \frac{\ell^2}{24} = \frac{q \ell^2}{48} ,$$

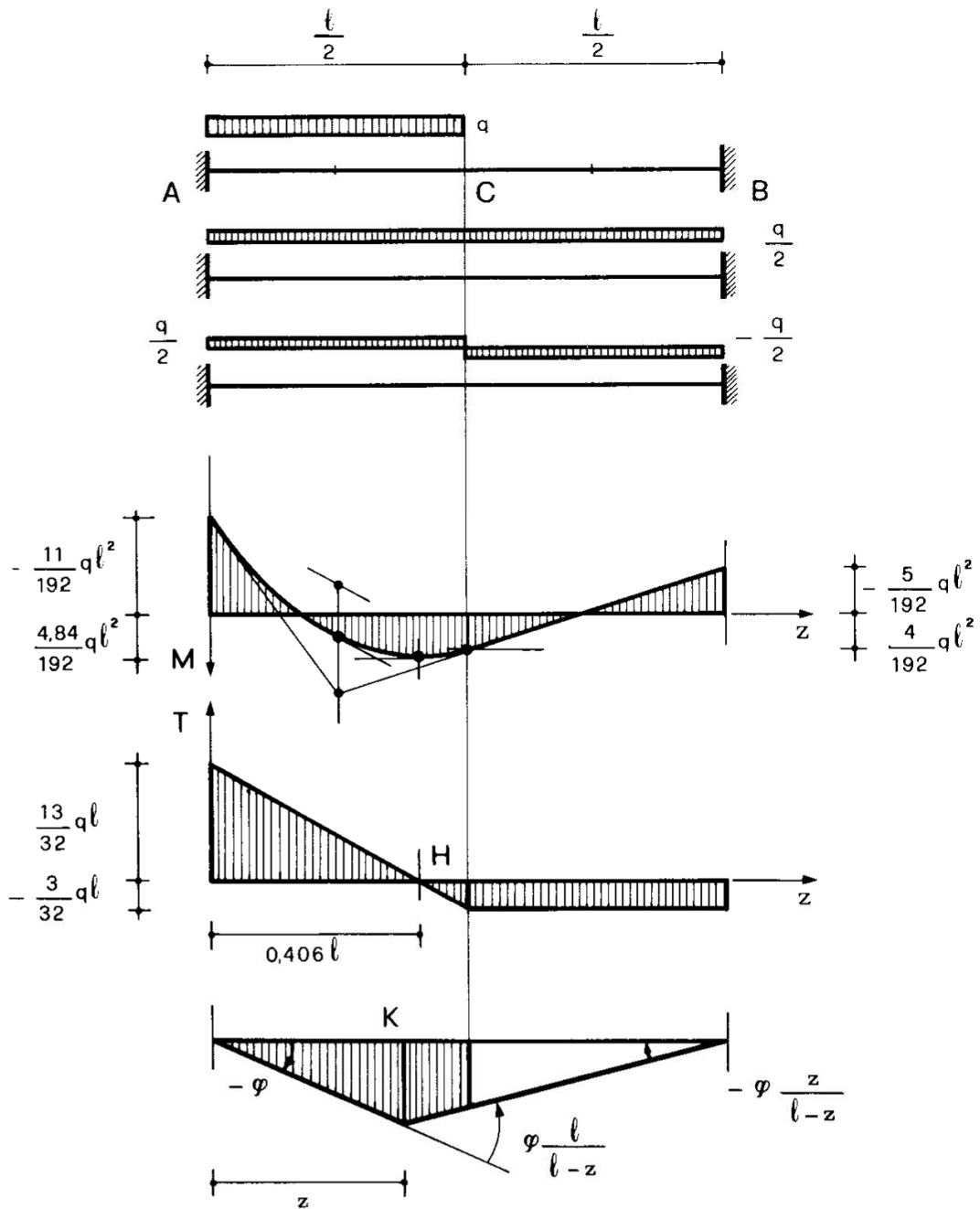


Fig. 6

e per la condizione antisimmetrica

$$M''_A = -M''_B = -\frac{1}{8} \frac{q}{2} \left(\frac{l}{2}\right)^2 = -\frac{ql^2}{64}$$

$$M''_C = 0.$$

E' perciò

$$M_A = q \ell^2 \left(-\frac{1}{24} - \frac{1}{64} \right) = -\frac{11}{192} q \ell^2 = -5,7292 \cdot 10^{-2} q \ell^2$$

$$M_B = q \ell^2 \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{64} \right) = -\frac{5}{192} q \ell^2 = -2,6042 \cdot 10^{-2} q \ell^2$$

$$M_C = \frac{q \ell^2}{48} = \frac{4}{192} q \ell^2 = 2,0833 \cdot 10^{-2} q \ell^2 .$$

Si ha poi

$$R'_A = R'_B = -\frac{q}{2} \frac{\ell}{2} = -\frac{q \ell}{4}$$

$$R''_A = -R''_B = -\frac{5}{8} \frac{q}{2} \frac{\ell}{2} = -\frac{5}{32} q \ell$$

e quindi

$$R_A = q \ell \left(-\frac{1}{4} - \frac{5}{32} \right) = -\frac{13}{32} q \ell$$

$$R_B = q \ell \left(-\frac{1}{4} + \frac{5}{32} \right) = -\frac{3}{32} q \ell .$$

L'ascissa z_m della sezione H di momento massimo si ottiene annullando il taglio:

$$T = -R_A - q z_m = 0$$

da cui

$$z_m = -\frac{R_A}{q} = \frac{13}{32} \ell = 0,40625 \ell ;$$

il valore di M_{\max} è

$$\begin{aligned} M_{\max} &= -m_A - R_A z_m - q \frac{z_m^2}{2} = M_A - R_A z_m - q \frac{z_m^2}{2} = \\ &= M_A + \frac{R_A^2}{2q} \end{aligned}$$

e cioè

$$M_{\max} = -\frac{11}{192} q \ell^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{13}{32} \right)^2 q \ell^2 = 2,5228 \cdot 10^{-2} q \ell^2 .$$

Per ottenere il moltiplicatore di rottura, si osservi che comunque due cerniere plastiche si formano in A e B. Chiamando z l'ascissa della cerniera K centrale, si calcoli γ ; l'area della deformata sottostante il carico è

$$\begin{aligned} A &= \varphi z \frac{\ell}{2} - \varphi \frac{z}{\ell - z} \frac{\ell}{2} \frac{\ell}{4} = \frac{\varphi z}{2} \left(\ell - \frac{\ell^2}{4(\ell - z)} \right) = \\ &= \varphi \frac{3\ell^2 z - 4\ell z^2}{8(\ell - z)} \end{aligned}$$

e quindi γ è fornito da

$$M_o \varphi \left(1 + \frac{\ell}{\ell - z} + \frac{z}{\ell - z} \right) = \gamma q \varphi \frac{3\ell^2 z - 4\ell z^2}{8(\ell - z)}$$

che porge

$$\gamma = \frac{16 M_o \ell}{q(3\ell^2 z - 4\ell z^2)} . \quad (34)$$

La condizione di minimo per γ ($\frac{d\gamma}{dz} = 0$) si scrive

$$3\ell^2 - 8z\ell = 0$$

da cui

$$z = \frac{3}{8} \ell = 0,375\ell.$$

Con tale valore di z la (34) fornisce

$$s_r = \frac{M_o}{q\ell^2} \frac{16 \cdot 16}{9} = 28,444 \frac{M_o}{q\ell^2}. \quad (35)$$

Il diagramma dei momenti M_{\max} ed M_{\min} è quello della fig. 7; si de-

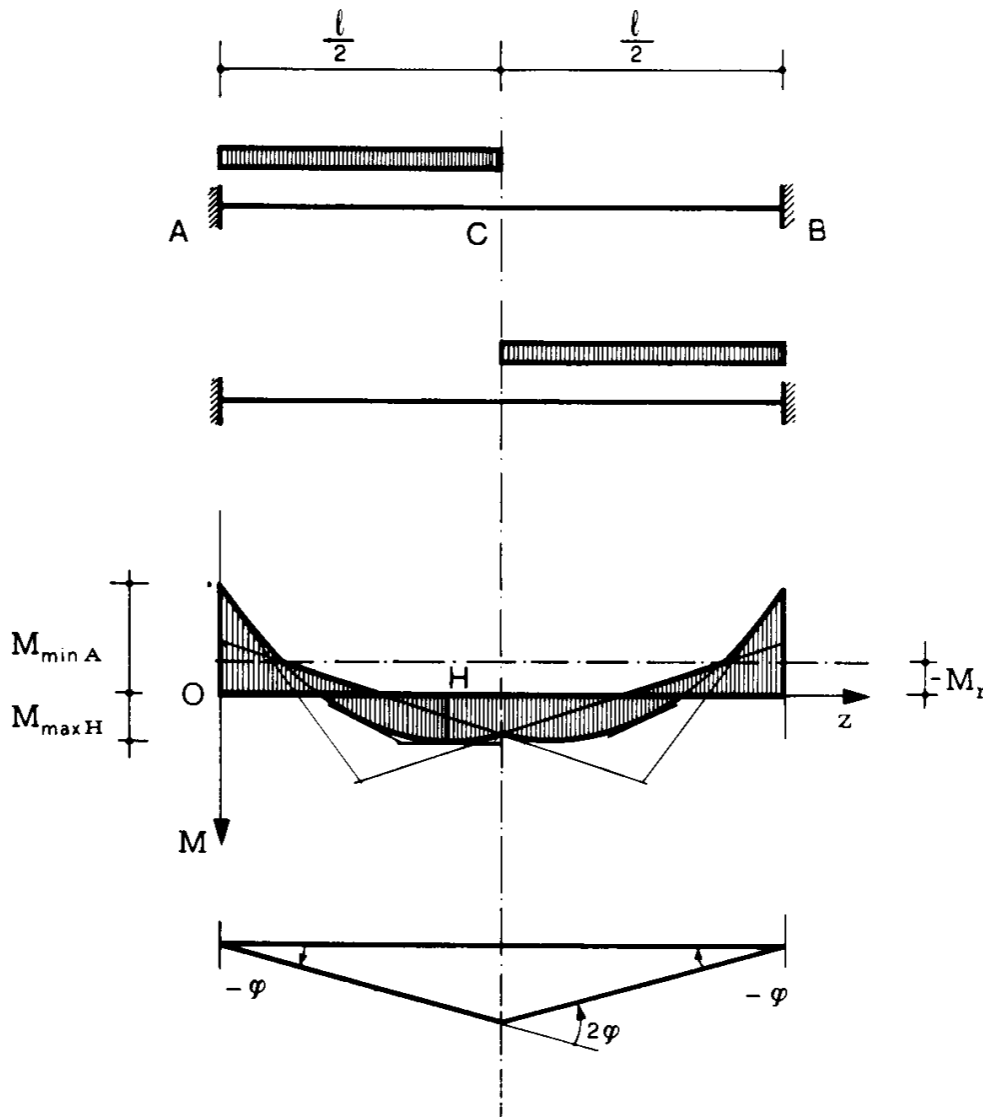


Fig. 7

duce da esso, per semplice ispezione, che si ha collasso incrementale con M_r costante. Dalle due relazioni

$$M_{\max H} + M_r = M_o$$

$$M_{\min A} + M_r = -M_o$$

si trae, come già fatto in a),

$$M_{\max H} - M_{\min A} = 2M_o ,$$

da cui

$$\tilde{s}_r q \ell^2 (2,5228 + 5,7292) \cdot 10^{-2} = 2M_o$$

e quindi

$$\tilde{s}_r = 24,236 \frac{M_o}{q \ell^2} . \quad (36).$$

Se si fosse calcolato $\tilde{\gamma}$ con il meccanismo della fig. 7, si sarebbe ottenuto

$$\tilde{\gamma} = \frac{4 M_o \varphi}{q \ell^2 \left(2 \cdot \frac{11}{192} + 2 \cdot \frac{4}{192} \right) \varphi} = 25,6 \frac{M_o}{q \ell^2} .$$

Poiché si ha

$$\begin{aligned} M_{rC} &= M_o - M_{\max C} = M_o - \frac{4}{192} \tilde{\gamma} q \ell^2 = \\ &= M_o - 0,53333 M_o = 0,46666 M_o \end{aligned}$$

si ha (M_γ è costante)

$$\begin{aligned} (M_\gamma + M_{\max})_{\max} &= 2,5228 \cdot 10^{-2} \tilde{\gamma} q \ell^2 + 0,46666 M_o = \\ &= (0,64584 + 0,46666) M_o = 1,1125 M_o \end{aligned}$$

da cui

$$\rho = 1,1125$$

e quindi

$$23,011 \frac{M_o}{q \ell^2} \leq \tilde{s}_r \leq 25,600 \frac{M_o}{q \ell^2} ;$$

il valore (36) è compreso in questo intervallo.