

## CAPITOLO III

### LA CRISI PER FORMAZIONE DI MECCANISMO DA SOLA FLESSIONE

#### 1. Il procedimento "step by step".

Se si accetta che il diagramma  $M - \Delta\varphi$  per il *tronco elementare* sia del tipo bilineare a tratto orizzontale indefinito (fig. 8 del cap. 2), date le forze agenti su una struttura monodimensionale si può agevolmente determinare il moltiplicatore  $k$  cui corrisponde la crisi per formazione di meccanismo. Naturalmente le forze applicate  $F_i$  sono quelle di calcolo, le caratteristiche del materiale anche, ambedue con riferimento allo stato ultimo, ed il moltiplicatore deve risultare uguale all'unità o di essa maggiore. Questo moltiplicatore è il *moltiplicatore di rottura*  $s_r$ , e deve essere, come detto,

$$s_r \geq 1. \quad (1)$$

Il procedimento di calcolo più ovvio consiste nel determinare le cerniere che successivamente si formano dopo il raggiungimento delle prime deformazioni permanenti; esso si chiama, con terminologia anglosassone ormai affermatasi tra i cultori della materia, *procedimento step by step*. Si parte ovviamente, attesa la (1), da un valore  $k < 1$ , tale che il diagramma dei momenti calcolato in fase elastica lineare e nell'ipotesi di piccoli spostamenti rispetti ovunque le *condizioni di compatibilità*

$$M'' < M < M' . \quad (2)$$

Il valore  $k$  aumenti finché, per  $k = k_1$ , in una prima sezione  $S_1$  si verifichi  $M = M'_0$  (oppure  $M = M''_0$ ). Si studia quindi una struttura derivante da quella reale per sconnessione completa ed introduzione di una cerniera baricentrica in  $S_1$ , soggetta alle forze  $k_1 F_i$ , nonché a due coppie  $\mathfrak{m}_s$  ed  $\mathfrak{m}_d$  sulle due facce, di sinistra e di destra unite

dalla suddetta cerniera, e tali che

$$m_s = M'_0 \quad (3)$$

$$m_d = -M'_0$$

se  $M = M'_0$ , oppure

$$m_s = M''_0 \quad (4)$$

$$m_d = -M''_0$$

se  $M = M''_0$  (fig. 1). Infatti, se  $M = M'_0$  il tronco ubicato in corrispon-

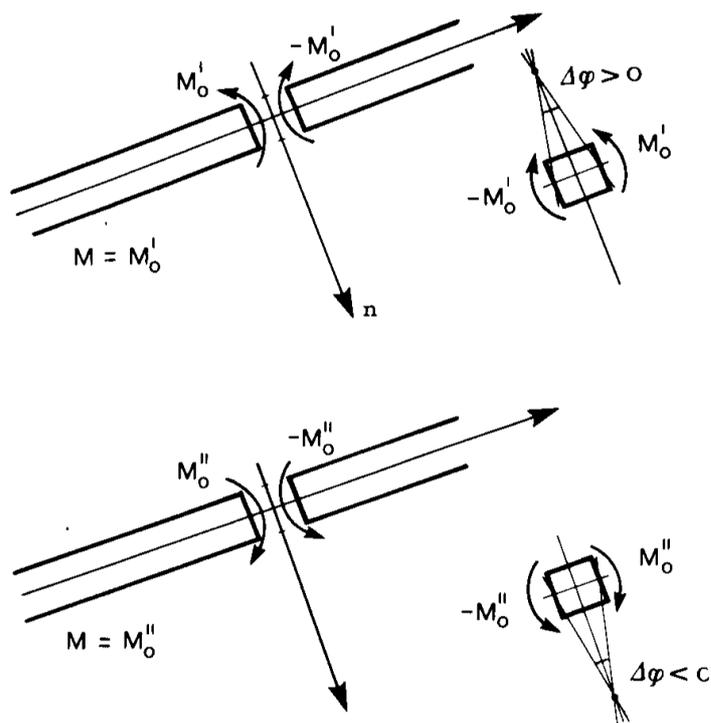


Fig. 1

denza della sezione  $S_1$  è soggetto sulle due facce a due coppie uguali e contrarie di valore

$$m_s = -M'_0$$

$$m_d = M'_0 ,$$

e sotto tali coppie la rotazione relativa tra le due facce può presentare qualsiasi  $\Delta\varphi > 0$ ; quindi, per rotazioni relative di tale segno (tali cioè che per esse le coppie agenti sul tronco compiono lavoro positivo), il tronco si comporta come una cerniera, mentre rotazioni relative di segno opposto possono aversi solo con diminuzione del valore assoluto delle due coppie. Se invece  $M = M_0''$  il tronco è soggetto alle due coppie di valore

$$m_s = -M_0''$$

$$m_d = M_0'' ,$$

e funziona come cerniera nel verso per cui  $\Delta\varphi < 0$ . Ove quindi si verificano le (3) o le (4) si crea uno *snodo unilaterale*, o *cerniera plastica* (par. 2-1). Aumentando  $k$  oltre il valore  $k_1$  (il moltiplicatore  $k$  è relativo alle sole  $F_i$ , mentre le coppie in  $S_1$  restano costanti), si perviene ad un valore  $k_2$  di  $k$  sotto il quale in una seconda sezione  $S_2$  si verifica  $M = M_0'$  (oppure  $M = M_0''$ ). La nuova struttura da studiare per  $k > k_2$  è quella derivante dalla reale per introduzione di una cerniera in  $S_1$  ed un'altra in  $S_2$ .

Il procedimento si itera, studiando strutture via via meno iperstatiche, fino a raggiungere un numero di cerniere tale da rendere labile la struttura; il valore  $k$  che corrisponde a tale stadio è il moltiplicatore di rottura.

Occorre con molta attenzione verificare che nel generico stadio del procedimento, caratterizzato da

$$k_i < k < k_{i+1} ,$$

l'incremento  $dkF_i$  delle forze provochi in ognuna delle  $i$  cerniere plastiche già formatesi una rotazione  $\Delta\varphi$  dello stesso segno di quello del momento. Se in qualche cerniera ciò non si verifica, occorre prendere atto che dette cerniere non funzionano più come tali; quindi in quello stadio il calcolo deve essere eseguito in assenza di dette cerniere. Si usa dire che le cerniere plastiche in parola *si richiudono*.

Il procedimento è lungo ma semplice, ed ha il vantaggio, rispetto a quello che si esporrà in seguito, di fornire i successivi valori delle rotazioni in corrispondenza delle cerniere plastiche. Questo è un

criterio per giudicare se in qualcuna di esse non si pervenga alla rottura (*crisi per rottura localizzata*) prima della formazione del meccanismo, e quindi sotto un carico minore di quello che si avrebbe se tutte le cerniere potessero formarsi. Altro vantaggio è quello di poter conoscere, sia pure con approssimazione, i successivi valori degli spostamenti fin nei pressi della formazione del meccanismo.

## 2. Un elementare esempio numerico di procedimento step by step

Si prenda in esame (fig. 2) la trave AB con incastro ed appoggio, di sezione costante, con  $M'_0 = -M''_0 = M_0$ , soggetta ad un carico uniforme  $q$  su tutta la luce  $\ell$ . In fase elastica è (fig. 2a)

$$M_A = -\frac{q\ell^2}{8},$$

mentre il massimo momento di campata è

$$M_{\max} = \frac{q\ell^2}{14,2}.$$

La prima cerniera plastica si forma quindi in A, sotto un carico  $q_1$  fornito dall'uguaglianza

$$-q_1 \frac{\ell^2}{8} = -M_0$$

da cui

$$q_1 = 8 \frac{M_0}{\ell^2}. \quad (5)$$

Se  $q$  aumenta oltre il valore  $q_1$ , la struttura da studiare è quella della fig. 2b, una volta meno iperstatica di quella data (e quindi isostatica) per creazione di cerniera in A.

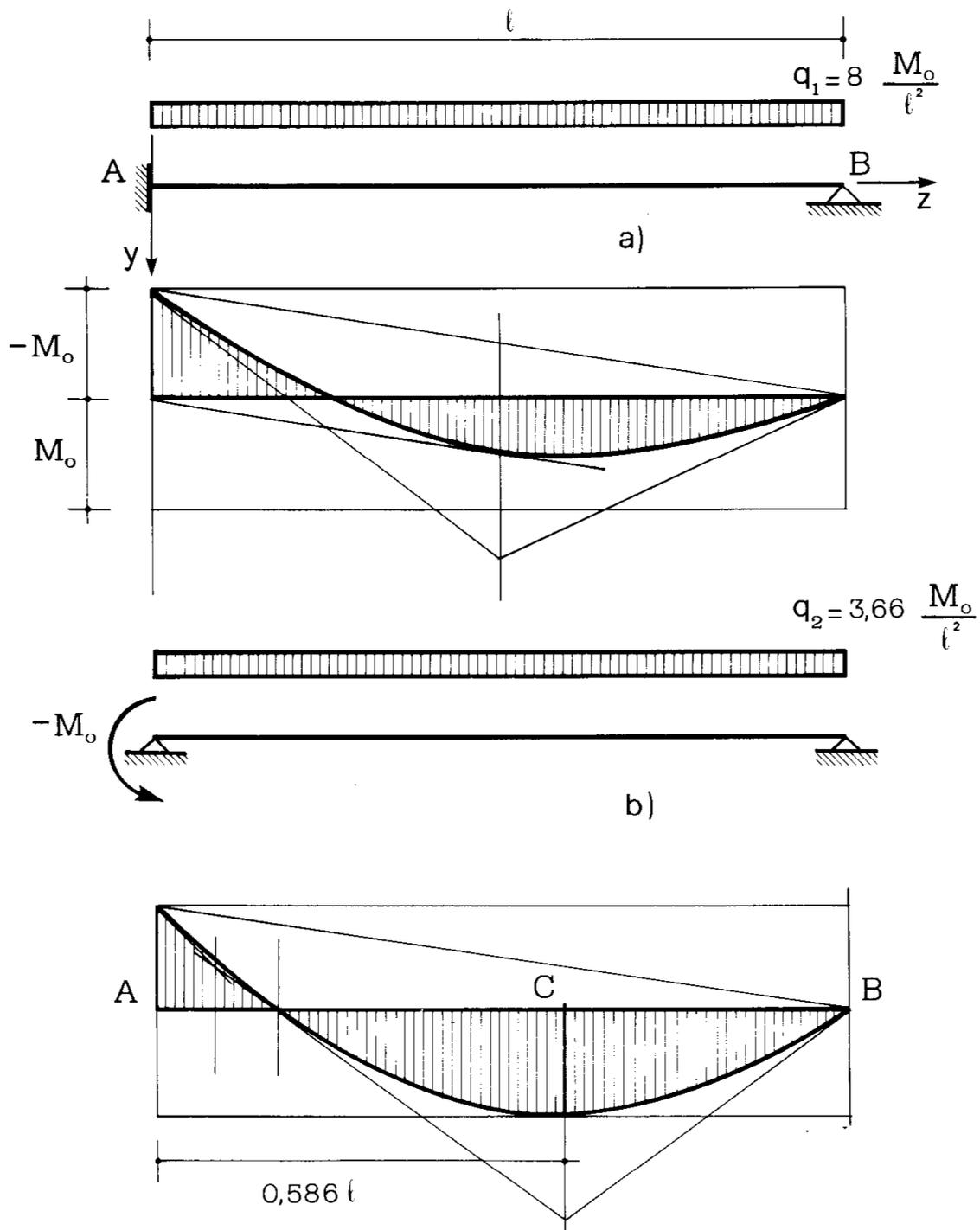


Fig. 2

Il momento flettente nella situazione a), e cioè in presenza del carico  $q_1$ , è

$$M_1(z) = -\frac{M_0}{\ell} (\ell - z) + \frac{q_1}{2} z (\ell - z) =$$

$$= -\frac{M_0}{\ell} (\ell - z) + 4 \frac{M_0}{\ell^2} z (\ell - z);$$

quindi sotto il carico  $q_1 + q_s$  (fig. 2b) è

$$M(z) = -\frac{M_0}{\ell} (\ell - z) + 4 \frac{M_0}{\ell^2} z (\ell - z) + \frac{q_s}{2} z (\ell - z). \quad (a)$$

La condizione

$$M(z) = M_0$$

si scrive

$$z^2 (8M_0 + q_s \ell^2) - z (10M_0 \ell + q_s \ell^3) + 4M_0 \ell^2 = 0. \quad (b)$$

La condizione (b) si verifica in corrispondenza della sezione C ove si forma la seconda cerniera plastica. In tale sezione è pure

$$\frac{dM}{dz} = 0$$

e cioè (a)

$$\frac{M_0}{\ell} + 4 \frac{M_0}{\ell^2} (\ell - 2z_c) + \frac{q_s}{2} (\ell - 2z_c) = 0$$

da cui

$$z_c (16M_0 + 2q_s \ell^2) = 10M_0 \ell + q_s \ell^3. \quad (c)$$

Sostituendo nella (b) al coefficiente di  $z$  il valore fornito dalla (c), si trae

$$z_c^2 (8M_0 + q_s \ell^2) - z_c^2 (16M_0 + 2q_s \ell^2) + 4M_0 \ell^2 = 0$$

da cui

$$q_s = 4 \frac{M_0}{z_c^2} - 8 \frac{M_0}{\ell^2} .$$

Sostituendo tale valore nella (b) si ha

$$z_c^2 - 4 \ell z_c + 2 \ell^2 = 0$$

da cui

$$z_c = (2 - \sqrt{2}) \ell = 0,5858 \ell \quad (d)$$

e, dalla (c) ,

$$q_s = q_2 = 3,6568 \frac{M_0}{\ell^2} . \quad (6)$$

Il carico totale che la trave potrebbe sopportare è quindi

$$q = q_1 + q_2 = 11,66 \frac{M_0}{\ell^2} , \quad (7)$$

con un incremento del 45,7% rispetto a quello (5) sostenibile in fase elastica.

L'angolo di rotazione relativa nella cerniera plastica in A, nel momento in cui si attinge il valore limite del momento C, è dato da

$$\varphi_A = \Delta\varphi_A^* = -\frac{q_2 \ell^3}{24 EI} = -0,1524 \frac{M_0 \ell}{EI} ; \quad (8)$$

essa ha il verso secondo cui il vincolo funziona come cerniera.

Naturalmente, nella realtà le cose vanno in maniera un pò diversa; infatti (fig. 3) il momento limite  $M_0$  non può essere raggiunto, poi-

ché per  $M = M_r$  si ha la rottura. Non ci si deve preoccupare della differenza di valori tra  $M_0$  ed  $M_r$ , non rilevante; e comunque la difficoltà si può superare ponendo  $M_0 = M_r$ , anche se il calcolo di  $M_r$  non è agevole come quello di  $M_0$ . Occorre piuttosto assicurarsi che in A

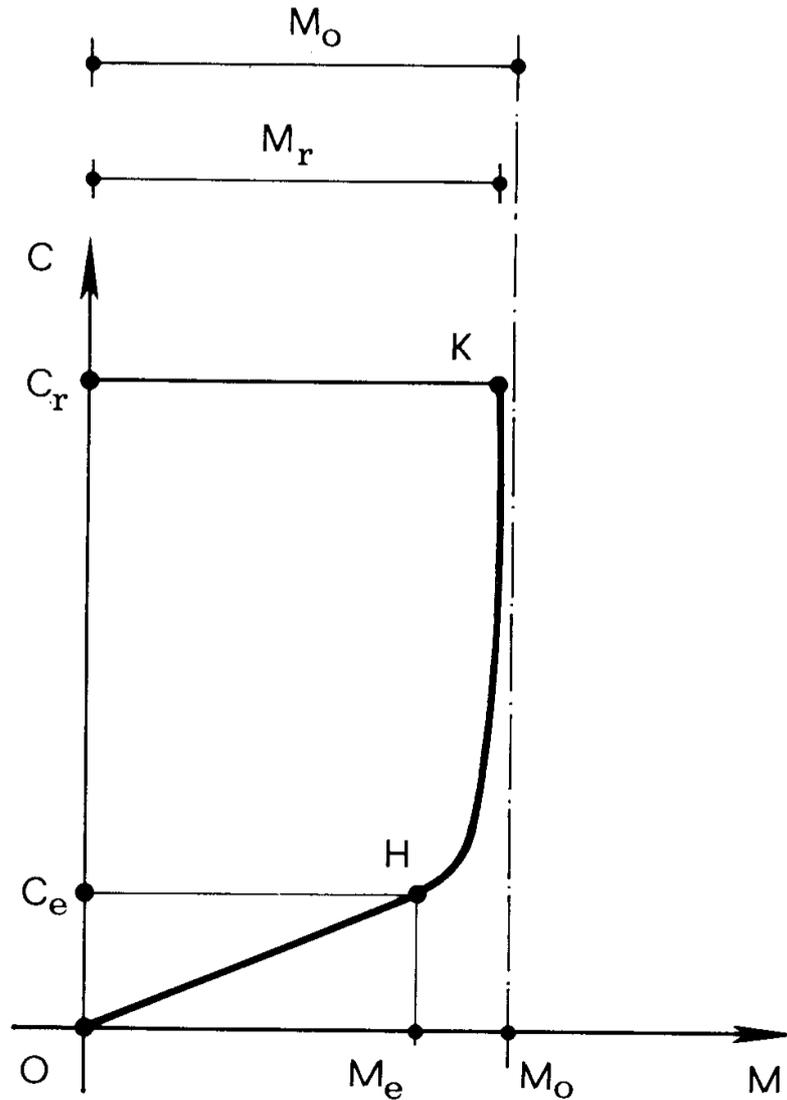


Fig. 3

non intervenga rottura prima del raggiungimento della (8). Sia noto (fig. 3) il diagramma momento curvatura; la curvatura  $c$  è fornita dal valore della rotazione relativa  $\Delta\varphi$  tra gli estremi di un tronco di lunghezza  $\alpha\ell$  soggetto a momento costante, dividendo tale valore per la lunghezza  $\alpha\ell$ ; il valore di  $\Delta\varphi$  è stato fornito nel precedente capitolo. Nella fig. 4 è riportato il diagramma delle curvature all'atto della rottura, che si verifica comunque in A, poiché il procedimento

step by step già eseguito assicura che la cerniera in C si forma per ultima. In A è quindi comunque  $c = c_r$ ; in C è  $|c| \leq c_r$ , e basta che  $M_c$  sia poco più basso di  $M_r$  perché l'area del diagramma  $c(z)$ , che rappresenta la rotazione plastica in campata, si riduca ad un valore trascurabile. Invece la rotazione plastica in A dipende solo da  $c_r$ ,

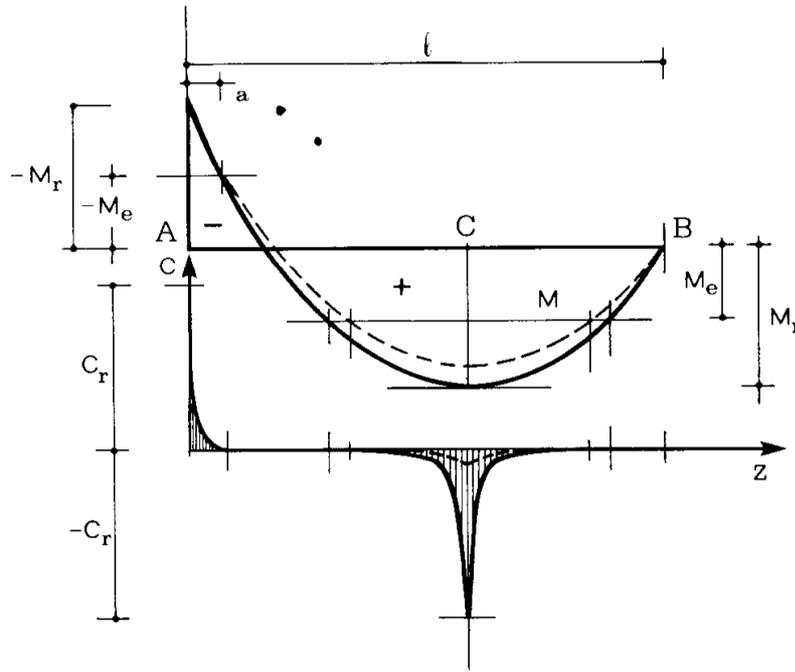


Fig. 4

poiché il diagramma  $c(z)$  nella zona di incastro presenta variazioni trascurabili al variare dei momenti di campata. Quindi la rotazione plastica  $\Delta\varphi_{rA}$  che precede la rottura è calcolabile sul diagramma limite dei momenti, ed è fornita da

$$\Delta\varphi_{rA} = -\int_0^a c(z) dz = -\int_0^a c [M(z)] dz. \quad (9)$$

Se  $\Delta\varphi_{rA} \geq \Delta\varphi_A^*$ , la rotazione (8) può esplicarsi, e  $q_s = q_2$ ; in caso contrario, il carico  $q_s$  si riduce nel rapporto

$$q_s = q_2 \frac{\Delta\varphi_{rA}}{\Delta\varphi_A^*}.$$

Quanto detto in relazione al caso particolare della fig. 2 vale in generale; ottenuto con il procedimento step by step il meccanismo ed il diagramma finale dei momenti, nonché le rotazioni relative  $\Delta\varphi_i^*$  in tutte le cerniere (meno ovviamente l'ultima) sulla struttura isostatica all'atto del collasso, occorre calcolare con la (9) le rotazioni  $\Delta\varphi_{ri}$  di rottura in corrispondenza delle suddette cerniere, e verificare che ovunque sia  $\Delta\varphi_{ri} \geq \Delta\varphi_i^*$ . Se ciò accade, e se si è certi che in nessuna sezione si è avuta una richiusura di cerniere, può dirsi che le deformazioni plastiche sono tutte crescenti in modulo con  $q_s$ , e si esauriscono quindi nelle  $\Delta\varphi_i^*$ ; se ne trae che il coefficiente di sicurezza a rottura  $s_r$  ottenuto nell'ipotesi di formazione di tutte le cerniere alla realizzazione del meccanismo è esatto.

Se invece in qualche cerniera è  $\Delta\varphi_{ri} < \Delta\varphi_i^*$ , è necessario verificare in ogni stadio del procedimento step by step la validità della condizione  $\Delta\varphi_{ri} \geq \Delta\varphi_i^*$  con riferimento alle cerniere ed alle aperture in quello stadio; non è lecito, cioè, decurtare il carico  $q_s$  conoscendo la sola situazione finale.

Nel caso del c.a., il momento  $M_e$  al sorgere delle prime deformazioni plastiche è stato valutato riferendosi alla sezione parzializzata (cap. 2); il calcolo delle rotazioni  $\Delta\varphi_i^*$  deve eseguirsi però riferendosi alla sezione completamente reagente, e quindi  $I$  deve essere valutato, agli effetti delle  $\Delta\varphi_i^*$ , tenendo conto dell'area del conglomerato di tutta la sezione, e di quella dei ferri amplificata per  $n = \frac{E_f}{E_c}$ . Inoltre,

il diagramma  $c(M)$  deve essere costruito tenendo conto della prima fase OA (fig. 5) ove il momento  $M$  è minore di quello  $M_f$  di fessurazione; della seconda fase AB ove il momento è minore di quello al limite elastico  $M_e$ , e quindi la sezione è fessurata ma si comporta ancora elasticamente; ed infine della terza fase BC ove il momento è superiore ad  $M_e$ , e quindi c'è comportamento plastico.

Siano  $M_f$  il momento di fessurazione e  $c_f$  la corrispondente curvatura<sup>(\*)</sup>. In  $[0, M_f]$  ed  $[M_f, M_e]$  l'applicazione  $M \rightarrow c$  è lineare, con

---

(\*) Se  $I$  è il momento d'inerzia della sezione completamente reagente,  $d$ , la distanza del lembo teso dal baricentro,  $M_f$  è fornito dalla relazione

$$\sigma_{ct} = \frac{M_f}{I} d, \quad (10)$$

dove  $\sigma_{ct}$  è la tensione di trazione del conglomerato corrispondente alla crisi; si

due pendenze diverse. In  $[M_e M_r]$  invece l'applicazione  $M \rightarrow c$  è rappresentata in diagramma dal tratto BC curvilineo, che deve contenere

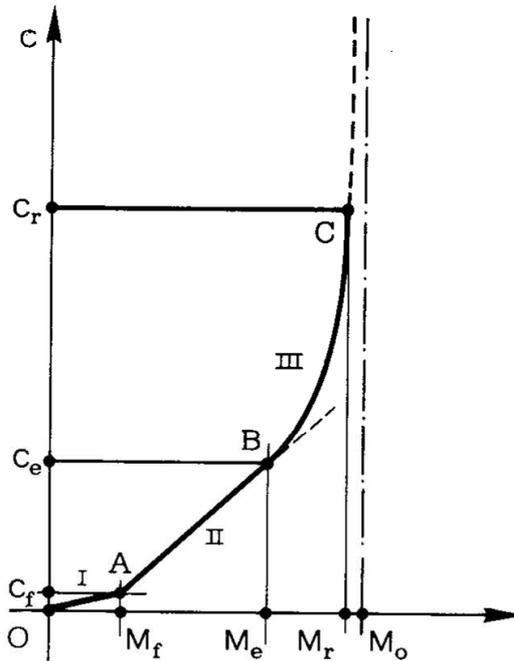


Fig. 5

i punti  $B(M_e c_e)$  e  $C(M_r c_r)$ , avere in B come tangente la retta AB, ove A è definito dalla coppia di valori  $M_f c_f$ , ed ammettere infine l'asintoto  $M = M_o$ .

In  $[M_e M_r]$  quindi si può porre

$$c = \frac{AM^2 + BM + C}{M_o - M},$$

può assumere ([19] pag. 45)

$$\sigma_{ct} = 7 - 0,06 \sigma_{co} \quad (11)$$

Corrispondentemente è

$$c_f = \frac{\sigma_{ct}}{d_1} = \frac{\sigma_{ct}}{E_c d_1},$$

o anche

$$c_f = \frac{M_f}{E_c I} \quad (12)$$

la cui derivata è

$$\frac{dc}{dM} = \frac{(2AM + B)(M_0 - M) + AM^2 + BM + C}{(M_0 - M)^2}$$

Si verifica subito che se la funzione  $AM^2 + BM + C$  non ha uno zero in  $M = M_0$ , la retta  $M = M_0$  è un asintoto; infatti in tal caso si ha

$$\lim_{M \rightarrow M_0} c = \infty$$

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{dc}{dM} = \infty .$$

I valori di  $A$ ,  $B$  e  $C$  si ottengono dalle condizioni

$$M = M_e \rightarrow c = c_e$$

$$M = M_r \rightarrow c = c_r \quad (e)$$

$$M = M_e \rightarrow \frac{dc}{dM} = \frac{c_e - c_f}{M_e - M_f} .$$

Il sistema (e) può scriversi in forma matriciale come segue

$$\mathbf{TX} = \mathbf{N} , \quad (f)$$

dove la matrice  $\mathbf{T}$  dei coefficienti è

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} M_e^2 & M_e & 1 \\ M_r^2 & M_r & 1 \\ 2M_e M_0 - M_e^2 & M_0 & 1 \end{vmatrix} \quad (g)$$

e la matrice colonna dei termini noti è

$$N = \begin{vmatrix} c_e (M_0 - M_e) \\ c_r (M_0 - M_r) \\ (c_e - c_f) \frac{(M_0 - M_e)^2}{(M_e - M_f)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix} \quad (h)$$

Si ha così

$$\Delta = \det T = M_e^2 (2M_r + M_0) + \quad (14)$$

$$+ M_r^2 (M_0 - M_e) - 2M_e M_r M_0 - M_e^3 ,$$

ed inoltre

$$A = \frac{1}{\Delta} [\alpha(-M_0 + M_r) + \beta(M_0 - M_e) + \gamma(-M_r + M_e)] ;$$

$$B = \frac{1}{\Delta} [\alpha(-M_r^2 - M_e^2 + 2M_e M_0) + \beta(2M_e^2 - 2M_0 M_e) + \gamma(M_r^2 - M_e^2)] ;$$

$$C = \frac{1}{\Delta} [\alpha(M_r^2 M_0 - 2M_0 M_r M_e + M_r M_e^2) + \beta(M_0 M_e^2 - M_e^3) + \gamma(M_r M_e^2 - M_r^2 M_e)] .$$

Data la sezione, è possibile con un modesto microcomputer programmare sia il calcolo delle costanti ABC che l'integrale (9). A questo proposito si osservi che, chiamando (fig. 6b)<sup>(\*)</sup>  $a_f$  ed  $a_e$  le ampiezze

---

(\*) Nella fig. 6 è riportato il caso già trattato, per  $\ell = 8$  m, e adottando le due sezioni ad armatura simmetrica già prese più volte in esame (nella fig. 6a quella a debole armatura, nella fig. 6b quella a forte).

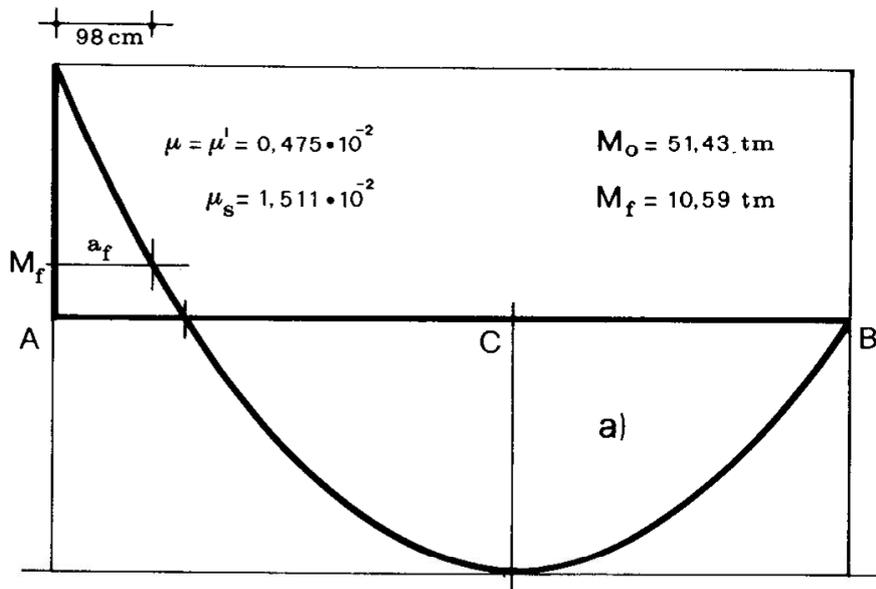


Fig. 6a

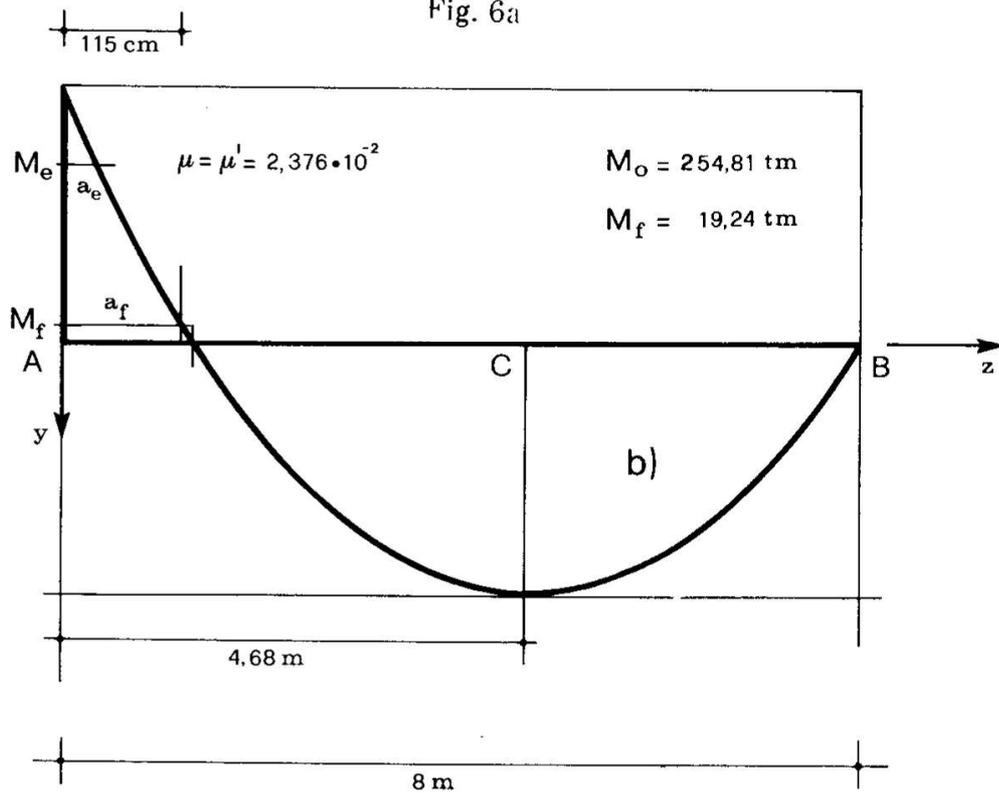


Fig. 6b

di trave in cui rispettivamente è  $|M| > |M_f|$  ed  $|M| > |M_e|$ , si può porre

$$\int_0^{a_f} cdz = \int_0^{a_e} cdz + \frac{c_e + c_f}{2} (a_f - a_e). \quad (i)$$

Infatti nel tratto  $z \in [0, a_f]$  il diagramma del momento può assimilarsi ad una retta, e perciò la funzione  $c(z)$  in  $z \in [a_e, a_f]$  è lineare. La  $c(z)$  sotto integrale in  $z \in [0, a_e]$  è fornita dalla (13), considerando che, nell'ipotesi di linearità già fatta, è, confondendo  $M_r$  con  $M_0$ ,

$$M = M_r - \frac{M_r - M_f}{a_f} z . \quad (l)$$

Nella tab. 1 sono riportati i calcoli eseguiti nei quattro casi di armatura semplice e doppia simmetrica, debole e forte, già ripetutamente incontrati.

Per essere

$$\sigma_{co} = -182,14 \text{ Kg cm}^{-2}$$

è pure (11)

$$\sigma_{ct} = 17,93 \text{ Kg cm}^{-2} ;$$

è poi, come già detto,

$$E_c = 182143 \text{ Kg cm}^{-2}$$

e quindi

$$n = 11,5294 .$$

Le  $c_e$  e  $c_r$  si sono calcolate dai valori già ottenuti di  $\Delta\varphi_e$  e  $\Delta\varphi_r$  dividendoli per  $\alpha l$ , e cioè dividendo i coefficienti numerici di  $\Delta\varphi_e$  e  $\Delta\varphi_r$  per  $h = 80 \text{ cm}$ . E' quindi (54) (55)

$$c_e = \begin{cases} \frac{\sigma_c}{\sigma_{co}} \frac{\epsilon_{ce}}{\xi} \frac{1}{h} & \text{(debole armatura)} \\ \frac{\epsilon_{ce}}{\xi} \frac{1}{h} & \text{(forte armatura)} \end{cases} \quad (m)$$

TABELLA 1

	Armatura semplice		Armatura doppia	
	debole	forte	debole	forte
I	2.216.272	2.979.526	2.481.970	4.507.129
$10^6 c_f$	2,4533	2,8830	2,3435	2,3435
$M_f$	9,904	15,646	10,594	19,239
$\xi$	0,2807	0,5152	0,2469	0,3878
$10^6 c_e$	36,41	24,26	34,77	32,24
$M_e$	48,514	99,503	49,570	184,413
$\xi_r$	0,1339	0,6371	0,0699	0,1016
$10^6 c_r$	326,69	68,67	625,35	430,66
$M_r$	50,421	184,443	51,344	254,479
$M_0$	50,450	190,800	51,429	254,815
A	$1,5123 \cdot 10^{-11}$	$-2,3487 \cdot 10^{-12}$	$1,5079 \cdot 10^{-10}$	$-1,5521 \cdot 10^{-12}$
B	$-1,8161 \cdot 10^{-4}$	$4,5754 \cdot 10^{-5}$	$-1,5282 \cdot 10^{-3}$	$3,7692 \cdot 10^{-5}$
C	532,2	-1,2407	3876,48	60,44
$a_f$	105	125	98	115
$10^3 \Delta\varphi_r$	-2,1514	-4,0807	-2,2299	-4,0709
$10^3 \Delta\varphi_A^*$	-1,5237	-4,2864	-1,3870	-3,7843
$10^3 \vartheta$	-19	-5	-22	-12

I momenti sono espressi in tm, le curvature in  $\text{cm}^{-1}$ ,  $a_f$  in cm, A in  $\text{Kg}^{-1} \text{cm}^2$ , B in  $\text{cm}^{-1}$ , C in Kg, I in  $\text{cm}^4$ .

ed ancora (51)

$$c_r = - \frac{\epsilon_{cr}}{\xi_r} \frac{1}{h} . \quad (n)$$

Si è sempre assunto

$$\epsilon_{ce} = -1 \cdot 10^{-3}$$

$$\epsilon_{cr} = -3,5 \cdot 10^{-3} .$$

Si osserva dall'esame della riga dei  $\Delta\varphi_A^*$  e da quella dei  $\Delta\varphi_r$  che il valore (6) è sempre raggiunto, salvo il caso della armatura semplice forte, ove

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{4,0807}{4,2864} \cdot 3,6568 \frac{M_0}{\ell^2} = \\ &= 0,952 \cdot 3,6568 \frac{M_0}{\ell^2} = \\ &= 3,4813 \frac{M_0}{\ell^2} . \end{aligned}$$

Le "Istruzioni CNR 1978 ([19] pag. 85) forniscono un diagramm. empirico (fig. 7) che vale per sezioni rettangolari od a T, soggette

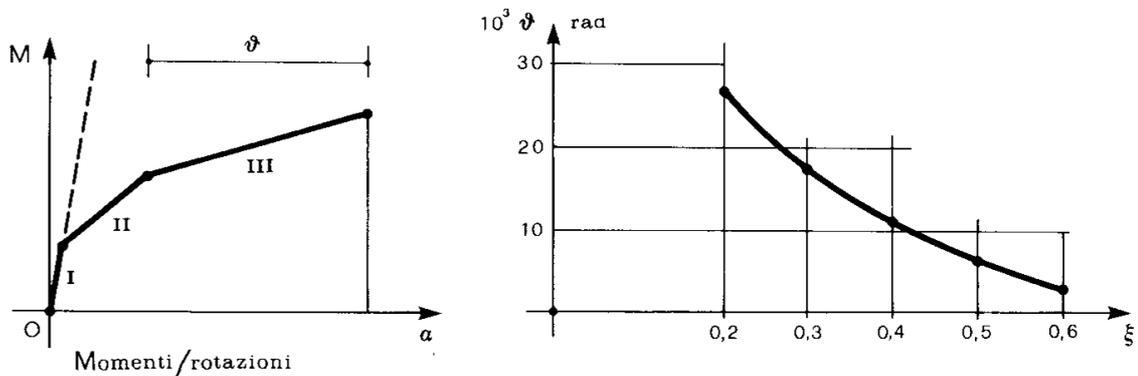


Fig. 7

“prevalentemente a flessione”, e che permette di trarre, in funzione di  $\xi = \frac{x}{h}$  ( $x$  posizione dell’asse neutro nel calcolo classico a sezione parzializzata) la rotazione  $\vartheta$  nella zona ove  $M \in [M_e \ M_r]$ , “sostanzialmente localizzata nella sezione critica”. I valori di  $\vartheta$  tratti da questo diagramma sono anch’essi riportati nella tabella 1; essi sono sempre ampiamente maggiori di quelli ( $\Delta\varphi_r$ ) ottenuti teoricamente, fatta eccezione per il caso dell’armatura semplice forte, ove comunque è sempre  $\vartheta > \Delta\varphi_r$ .

Nella tabella 2 si sono riportati i valori di  $\Delta\varphi_r$  suddivisi nella parte  $\Delta'\varphi_r$  dovuta alla plasticizzazione (integrale a secondo membro della (i)), ed in quella  $\Delta''\varphi_r$  dovuta alla fessurazione (secondo addendo del secondo membro della (i)); si osserva come la seconda predomini sulla prima nella sezione a debole armatura, e viceversa.

La rotazione  $\vartheta$  deve paragonarsi, per sua natura, alla  $\Delta'\varphi_r$ ; ma una certa concordanza si verifica soltanto nel caso della sezione ad armatura semplice forte. E’ da notare, piuttosto, come si pervenga a valori prossimi a quelli di  $\vartheta$  moltiplicando la curvatura  $c_r$  di rottura per  $h$  nel caso della semplice armatura, per  $\frac{h}{2}$  nel caso della doppia.

TABELLA 2

	Armatura semplice		Armatura doppia	
	debole	forte	debole	forte
$10^3 \Delta'\varphi_r$	-0,207	-3,238	-0,491	-2,675
$10^3 \Delta''\varphi_r$	-1,944	-0,843	-1,739	-1,396
$10^3 \cdot 80 c_r$	26,13	5,49		
$10^3 \cdot 40 c_r$			25	17,23

E' importante rilevare che la limitazione della  $\epsilon_{cr}$  al  $-3,5\%$  è imposta per il calcolo a rottura della sezione, ma risulta eccessivamente limitativa in tema di redistribuzione dei momenti. Soprattutto, gioca molto il passo delle staffe. Le esperienze di Tassios e Plainis<sup>(\*)</sup> portano alla formula,

$$1000 |\epsilon_{cr}| = 3,5 + 100 (q_v)^2$$

dove

$$q_v = \frac{V_f \sigma_f}{V_c \sigma_c};$$

$V_f$  e  $V_c$  sono i volumi dell'acciaio delle staffe, e del conglomerato. Nel caso della sezione a semplice armatura debole ( $x_r = 10,71$  cm) risulta, con staffe  $\phi$  8 al passo di 20 cm,

$$V_c = 8576 \text{ cm}^3$$

$$V_f = 120 \text{ cm}^3;$$

per  $\sigma_f = 4400 \text{ Kg cm}^{-2}$  e  $\sigma_c = 300 \text{ Kg cm}^{-2}$  è

$$q_v = 0,205$$

$$\epsilon_{cr} = -7,71 \cdot 10^{-3}.$$

Per strutture metalliche, Hodge consiglia di supporre che le deformazioni plastiche siano distribuite uniformemente in un concio di lunghezze pari ad  $1/24$  della lunghezza  $\ell$  della più corta delle travi interessate dalla cerniera plastica (fig. 8); e quindi

$$\Delta\varphi_r = \frac{1}{24} \ell c_r.$$

---

\* Tassios T., Plainis P. Re-design of R.C. buildings, damaged by an earthquake. Giornate AICAP. Venezia 1977.

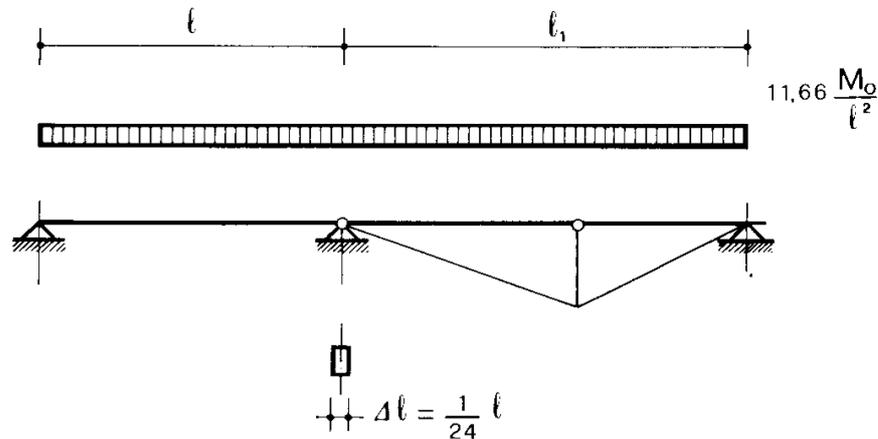


Fig. 8

È interessante osservare come nelle travi in c.a. a doppia armatura si abbia un comportamento analogo a quello delle strutture metalliche; ciò si deduce dal confronto tra i valori  $\vartheta$  e quelli  $\epsilon_{cr} \frac{h}{2}$ , poiché  $\frac{h}{2}$  è proprio pari, nel caso esaminato, ad un ventesimo della luce.

Determinare il  $\Delta\varphi_r$  alla Hodge è molto aderente allo spirito del calcolo di  $s_r$  nell'ipotesi delle cerniere plastiche (par. 3.1); il maggior rigore del metodo che si basa sulla (9) è soltanto apparente. Ed infatti la cerniera plastica impegna non la sola sezione, bensì un tronco di trave a cavallo di essa, di lunghezza  $\Delta\ell$  piccola nei confronti della luce, ma non altrimenti definita; è intrinseco nell'ipotesi stessa di cerniera plastica che il momento sia pari ad  $M_0$  in tutto il tronco, e quindi è in contraddizione con tale fatto supporre  $M$  variabile, e pari ad  $M_r$  in una sola sezione. Inoltre, il tratto in cui  $|M| > |M_e|$  può risultare troppo corto, o troppo lungo. Si aggiunga a ciò che tutta l'imponente casistica sperimentale, e quella relativa ai crolli reali — purtroppo arricchita dai recenti fatti sismici — conferma la localizzazione delle cerniere plastiche in tronchi di lunghezza piccola ma finita, sia nelle strutture metalliche che in quelle in c.a.

Fissata la lunghezza  $\Delta\ell$  del tronco in cui si può supporre esaurito il fenomeno plastico, si tenga presente che in tale tronco deve anche essere  $\epsilon$  costante con l'ascissa, in dipendenza della costanza di  $M$ ; nota  $\epsilon_r$ , e quindi  $c_r$ , è perciò

$$\Delta\varphi_r = \Delta\ell \cdot c_r .$$

Nel caso del conglomerato armato, il diagramma della fig. 7 fornisce, data la sezione e quindi  $\xi$ , la rotazione plastica  $\vartheta$  (da reputare con-

centrata, in perfetto accordo con il concetto di cerniera plastica), e quindi, essendo nota  $c_r$ , consente di trarre il valore di  $\Delta\ell$ ; il diagramma è di natura sperimentale, e conferma perciò l'ipotesi di Hodge. Dai dati delle tabelle 1 e 2, e da quelli della fig. 7, si evince che facendo coincidere, a vantaggio di sicurezza,  $\vartheta$  con  $\Delta\varphi_r$ , può porsi

$$\Delta\ell = 0,8 h$$

per le sezioni a semplice armatura, e

$$\Delta\ell = 0,4 h$$

per le sezioni a doppia armatura simmetrica.

### 3. Il calcolo delle rotazioni plastiche e degli spostamenti connessi con un diagramma di momenti noto.

Si consideri la stessa trave dell'esempio già svolto, soggetta al carico  $q$  uniforme ed a due distorsioni concentrate  $D_{\varphi_A}$  e  $D_{\varphi_C}$  nelle sezioni A e C (fig. 9a). Si conosca il diagramma dei momenti  $M(z)$ , dato nella fig. 9b.

La trave, resa isostatica sostituendo una cerniera all'incastro in A, sia soggetta alla coppia  $\mathfrak{M}_A$  unitaria positiva in A, e ad essa si associi il diagramma dei momenti  $M'(z)$  (fig. 9c). Assumendo la situazione della fig. 9 a come insieme di spostamenti, e la situazione della fig. 9c come insieme di forze, ed operando sulla struttura reale, il principio dei lavori virtuali porge il valore di  $\varphi_A$  :

$$1 \cdot \varphi_A = \int_0^{\ell} \frac{M' M}{EI} dz - \int_0^{\ell} M' \mu dz .$$

Per  $\varphi_A = 0$  si ha

$$\int_0^{\ell} \frac{M' M}{EI} dz = M'_A D_{\varphi_A} + M'_C D_{\varphi_C} . \quad (16)$$

La (16) è la condizione necessaria e sufficiente perché le due distor-

sioni  $D_{\varphi_A}$  e  $D_{\varphi_C}$ , quale che sia la loro natura e la loro ubicazione, assieme alle rotazioni connesse con i momenti  $M$  soddisfino la congruenza  $\varphi_A = 0$ .

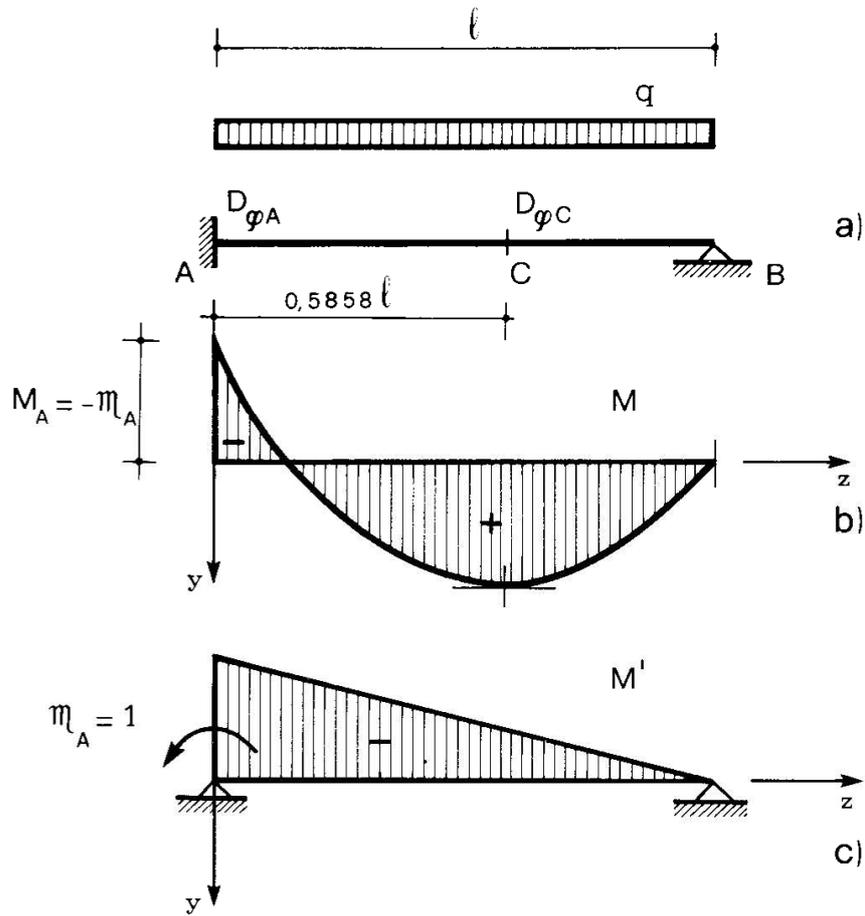


Fig. 9

Nel caso in esame è

$$M_A = -M_0$$

$$m_A = M_0$$

$$M = -\frac{M_0}{l} (\ell - z) + \frac{q}{2} z (\ell - z)$$

e, per la (7),

$$M = -\frac{M_0}{l} (\ell - z) + 5,828 \frac{M_0}{l^2} z (\ell - z) ;$$

è inoltre

$$M' = -\frac{\ell - z}{\ell} .$$

Se  $D_{\varphi_C} = 0$ , si ha così ( $M'_A = -1$ )

$$\begin{aligned} D_{\varphi_A} = -\Delta\varphi_A^* &= -\int_0^{\ell} \frac{M'M}{EI} dz = -\frac{M_0}{EI\ell^2} \left( \frac{\ell^3}{3} - 5,828 \frac{\ell^3}{12} \right) = \\ &= 0,1524 \frac{M_0 \ell}{EI} , \end{aligned} \quad (o)$$

conformemente alla (8).

Se  $D_{\varphi_A} = 0$ , si ha

$$M'_C = -\frac{\ell - z_C}{\ell} ;$$

per il valore (d) di  $z_C$ , risulta così

$$M'_C = -0,4142 .$$

Dalla (16) si trae perciò

$$D_{\varphi_C} = -\Delta\varphi_C^* = -\frac{1}{0,4142} \int_0^{\ell} \frac{M'M}{EI} dz = 0,3679 \frac{M_0 \ell}{EI} . \quad (p)$$

Se si conosce soltanto il diagramma dei momenti nella condizione di meccanismo (fig. 6), senza possedere le varie fasi del procedimento step by step, non può dirsi a priori in quale delle due sezioni A o C si è formata per prima una cerniera plastica. Se si forma prima la cerniera in A, la  $D_{\varphi_C}$  deve essere considerata nulla, fino alla formazione del meccanismo, e quindi in tale fase vale la (o). Se si formasse invece prima la cerniera di campata, varrebbe la (p). E' facile però constata-

re che mentre la (o) è congruente al verso di plasticizzazione della cerniera A, la (p) non lo è; quindi la cerniera in C deve formarsi come seconda, perché nel caso in esame è possibile dire con sicurezza che non si hanno distorsioni occulte (par. 3).

E' interessante osservare che se in A è presente una distorsione precedente all'applicazione del carico, di segno positivo ( $\Delta\varphi_A < 0$ ), il valore della  $D_{\varphi A}$  plastica diminuisce. Se la  $D_{\varphi A}$  è pari alla (o), non si hanno distorsioni plastiche; se  $D_{\varphi A}$  è superiore alla (o), si forma per prima la cerniera di campata. In ambedue i casi il valore (6) è attinto integralmente. Nello stesso senso giocano le variazioni termiche. Se infatti assieme al carico  $q$  agisce una variazione termica alla Navier  $\Delta t$ , positiva (aumento di temperatura nelle fibre inferiori, diminuzione nelle superiori), la (16) si scrive

$$\mu = -\alpha \frac{\overline{\Delta t}}{h}$$

$$\int_0^{\ell} \frac{M' M}{EI} dz = - \int_0^{\ell} M' \alpha \frac{\overline{\Delta t}}{h} dz + M'_A D_{\varphi A} + M'_C D_{\varphi C},$$

e quindi, per  $D_{\varphi C} = 0$ , la  $D_{\varphi A}$  diminuisce.

Gli stessi risultati possono ottenersi, forse con maggiore eleganza formale, considerando il momento  $M(z)$  come somma (fig. 10) di quello  $M_r$  dovuto ai carichi e di quello  $\overline{M}$  dovuto alle distorsioni, ambedue nell'ambito della fase elastica. Sia  $m_A^\mu$  la linea d'influenza di  $M_A$  per effetto di una distorsione viaggiante del tipo  $\mu$  (e cioè di rotazione relativa). Può porsi

$$\overline{M}_A = \int_0^{\ell} m_A^\mu \mu dz \quad (17)$$

o, nel caso di distorsioni concentrate,

$$\overline{M}_A = \sum_j m_A^\mu(z_j) D_{\varphi j}. \quad (18)$$

Se le distorsioni sono presenti in A e C, si ha

$$\overline{M}_A = D_{\varphi A} m_A^\mu(0) + D_{\varphi C} m_A^\mu(z_C)$$

e cioè

$$0,4571 M_0 = \frac{3 EI}{\ell} D_{\varphi A} + \frac{1,2426 EI}{\ell} D_{\varphi C} ;$$

quindi la (o) e la (p).

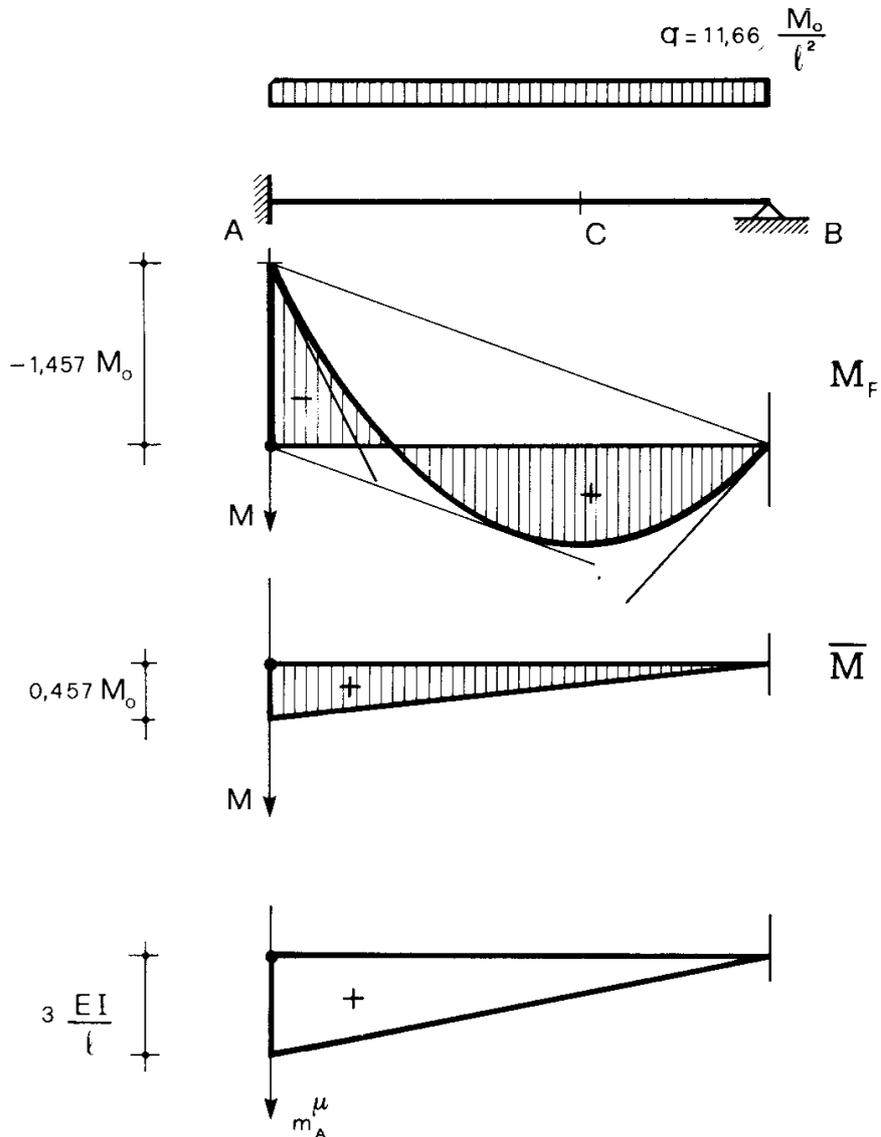


Fig. 10

La (18), come la (16), è di carattere generale. Sia infatti la struttura  $n$  volte iperstatica, ed  $S_1 S_2 \dots S_n$  siano  $n$  sezioni  $S_i$  tali che, introducendo in ciascuna di esse una cerniera baricentrica, la struttura diventi isostatica. Dato il diagramma  $M$  dovuto ai carichi ed alle distorsioni

$D_{\varphi_j}$  agenti nelle sezioni  $S_j$  ( $j = 1, 2 \dots m$ ), poiché è noto il diagramma  $M_{\varphi_j}$ , lo è anche il diagramma  $\bar{M} = M - M_F$ , e quindi sono noti i valori  $\bar{M}_i$  ( $i = 1, 2 \dots n$ ) nelle  $n$  sezioni  $S_i$  anzidette. Tali valori definiscono il diagramma  $\bar{M}$ . Tracciate le  $n$  linee  $m_{S_i}^\mu$ , è

$$M_i = \sum_j D_{\varphi_j} m_{S_i}^\mu(j). \quad (19)$$

La (19) non varia se la struttura si rende isostatica introducendo snodi diversi dalle cerniere; si ha allora

$$\bar{C}_i = \sum_j D_{\varphi_j} C_{S_i}^\mu(j), \quad (20)$$

dove  $\bar{C}_i$  è la caratteristica annullata dallo snodo in  $S_i$ .

Se  $m = n$ , e la matrice  $|m_{S_i}^\mu(j)|$  non è singolare le (19) definiscono le  $D_{\varphi_j}$ . Nel caso del collasso da meccanismo totale,  $m = n + 1$ ; inoltre sono note le sezioni  $S_j$  dove si formano le cerniere plastiche. Fatta l'ipotesi che in una di queste sezioni,  $S_k$ , la cerniera si formi per ultima, le distorsioni  $D_{\varphi_j}$  nelle altre sezioni, in prossimità del collasso, sono fornite dalle (19). Si hanno così  $n + 1$  ennuple  $D_{\varphi_j}$ , poiché non si sa a priori quale cerniera si formi per ultima. Tra esse sta la ennupla reale, sempreché si sia sicuri che non si verifichi, all'aumentare del carico fino al valore finale, che in qualche sezione, diversa dalle  $S_j$ , una cerniera plastica si formi e poi si richiuda. Delle distorsioni così formatesi (*distorsioni occulte*) non può infatti tenersi conto in tale tipo di procedimento, ma solo operando step by step.

Si può verificare, come già visto nell'esempio precedente, che in qualcuna delle  $n + 1$  ennuple  $D_{\varphi_j}$  una distorsione sia di segno uguale a quello del corrispondente momento limite, e quindi non congruente al verso di plasticizzazione. Tale ennupla si scarta se e solo se si è sicuri che in tali sezioni non si sia potuta verificare, nel corso del carico, una cerniera plastica di verso contrario a quello connesso con il meccanismo, con una rotazione plastica maggiore, in modulo, di quella congruente con il momento limite e relativa all'incipiente collasso.

Siano  $s_h$  ed  $s_k$  gli *spostamenti ultimi* (e cioè quelli della fase che precede immediatamente il collasso) calcolati rispettivamente nell'ipotesi che l'ultima cerniera si formi in  $S_h$  o in  $S_k$ ; tale calcolo si esegua

in fase elastica, sulla struttura soggetta alle forze  $F_t$  che sono presenti in fase di collasso, ed alle distorsioni  $D_{\varphi_j}$ , presenti in tutte le sezioni  $S_j$  (ad eccezione della  $S_h$ , o della  $S_k$ ), e calcolabili con le (19). Con ciò si esclude la presenza di distorsioni occulte nelle sezioni che non appartengono a quelle del meccanismo.

Le deformazioni connesse con il campo  $s_k - s_h$  sono nulle, poiché i momenti flettenti connessi con  $s_h$  ed  $s_k$  sono gli stessi. Quindi il campo  $s_k - s_h$  è da ascrivere ad un meccanismo; e per la fatta ipotesi che non si verifichi in nessuna sezione al di fuori delle  $S_j$  una richiusura di cerniera plastica,  $s_k - s_h$  deve ascrivere al meccanismo di rottura. Si faccia l'ulteriore ipotesi che neppure nelle  $S_j$  esistano, nella deformata reale, distorsioni occulte; se in realtà la cerniera  $S_h$  si forma per ultima, nel passaggio  $s_h \rightarrow s_k$  la rotazione relativa in  $S_k$  (comunque per effetto di  $s_h \rightarrow s_k$  tale rotazione deve annullarsi) non può che essere di segno opposto a quello connesso con gli spostamenti  $s_r$  di incipiente collasso (reali). Ed infatti, poiché gli  $s_h$  sono reali, ad essi deve corrispondere in  $S_k$  un angolo di rotazione congruente con il verso del momento limite in  $S_k$ , non essendo in  $S_k$  presenti, per ipotesi, distorsioni occulte. Poiché si è nell'ambito dei piccoli spostamenti, gli  $s_k - s_h$  sono affini agli  $s_r$ , e definiti dal fatto che ad essi si associa una  $\Delta\varphi_k$  di valore opposto a quello connesso con gli  $s_h$ ; per quanto detto circa il segno della  $\Delta\varphi_k$  associata agli  $s_h - s_k$ , gli  $s_k - s_h$  sono di segno opposto a quello degli  $s_r$ , e quindi ad essi si associa un lavoro negativo delle forze applicate:

$$\sum_t F_t \cdot (s_{kt} - s_{ht}) < 0$$

da cui

$$\sum_t F_t \cdot s_{ht} > \sum_t F_t \cdot s_{kt} \quad (21)$$

La (21) assicura che, sotto l'ipotesi di inesistenza di distorsioni occulte, la deformata reale è, fra le  $n + 1$  definite dalle (19), quella cui corrisponde il massimo dell'espressione  $\sum_t F_t \cdot s_t$ . Sono così definite anche le distorsioni nelle cerniere plastiche corrispondenti agli spostamenti ultimi.

Se in qualcuna delle  $n + 1$  sezioni  $S_j$ , e solo in esse, è presente una distorsione occulta, la deformata reale (e le distorsioni compressive finali) coincide sempre con una delle  $n + 1$  deformate calcolabili attraverso le (19); però non può dirsi che essa è quella cui corrispon-

de il massimo valore della  $\sum_t F_t \cdot s_t$ . Ed infatti non può più asserirsi che nella deformata ultima reale le distorsioni  $D_{\varphi_j}$  in corrispondenza delle cerniere plastiche devono avere verso congruente con quello dei momenti limite, e cioè essere dello stesso segno delle  $D_{\varphi_j}$  connesse con la reale deformata di incipiente collasso. Può dirsi però che se in una delle  $S_j$  c'è una distorsione occulta, il valore della  $\sum_t F_t \cdot s_t$  reale è uguale o minore di quello calcolabile prescindendo dalla distorsione occulta, e cioè uguale o minore della maggiore tra le  $\sum_t F_t \cdot s_t$  calcolabile con le  $n + 1$  ennuple fornite dalle (19). Ciò è evidente, perché la ennupla delle  $D_{\varphi_j}$  reali è sempre una delle  $n + 1$  ennuple fornite dalle (19). Quanto sopra è dovuto, in sostanza, ad *Hodge*.

L'utilità di quanto detto in questo paragrafo deriva dal fatto che, come tra poco si mostrerà, è possibile ottenere direttamente il diagramma ultimo dei momenti ed il meccanismo di collasso, senza essere costretti a seguire il troppo lungo procedimento step by step.

#### *4. Il procedimento di verifica al collasso incipiente ("limit design").*

Se si ammette che nelle cerniere del meccanismo non si producono rotture fino alla formazione dell'ultima di esse, è possibile, con il procedimento che si esporrà in questo paragrafo, determinare il *moltiplicatore di rottura*  $s_r$  delle forze applicate, senza dover seguire passo passo il successivo formarsi delle cerniere plastiche all'aumentare delle forze stesse, così come proposto nel primo paragrafo. Naturalmente, l'ipotesi che la struttura abbia sufficiente respiro plastico perché tutte le cerniere teoriche reggano in realtà, senza spezzarsi, fino alla formazione del meccanismo, può essere accettata generalmente nelle costruzioni in acciaio, mentre deve essere generalmente verificata, con i procedimenti esposti nei precedenti paragrafi 2 e 3, nelle costruzioni in conglomerato. Nei riguardi di tale verifica, le distorsioni concentrate di rotazione relativa connesse con gli spostamenti ultimi possono valutarsi così come detto nel precedente paragrafo, una volta noto il meccanismo, e quindi i momenti ultimi in tutta la struttura.

Ciò premesso, si definisce *moltiplicatore staticamente ammissibile* delle forze applicate  $F_i$  un numero reale positivo  $\psi$  tale che alle forze  $\psi F_i$  possa associarsi almeno una ennupla di iperstatiche che, con le  $\psi F_i$ , dia luogo ad un diagramma di momenti  $M_\psi$  *compatibile*; che cioè soddisfi ovunque la *condizione di compatibilità*

$$M''_0 \leq M_\psi \leq M'_0 . \quad (22)$$

Si può anche dire che  $\psi$  è staticamente ammissibile se alle forze  $\psi F_i$  associabile almeno un diagramma di momenti  $M_\psi$  in equilibrio con le  $\psi F_i$ , e compatibile.

Si definisce *rinforzata* una struttura ottenuta da quella reale incrementando oltre ogni limite i moduli di  $M'_0$  ed  $M''_0$  ovunque, meno che in alcune sezioni, o meglio nei tronchi elementari a cavallo di alcune sezioni; queste devono essere, per numero ed ubicazione, tali da corrispondere ad un meccanismo; e cioè da rendere una volta labile tutta la struttura, o una sua parte, non appena i tronchi sono sostituiti da cerniere baricentriche.

Un numero reale  $\gamma$  si definisce *moltiplicatore cinematicamente sufficiente* delle forze applicate  $F_i$  se è il coefficiente di sicurezza delle  $F_i$  agenti su una struttura rinforzata. Se ne trae che  $\gamma$  deve essere positivo. Inoltre, ad ogni struttura rinforzata, o meglio ad ogni meccanismo, si associa un  $\gamma$  definito (e non viceversa); ciò si deduce dal modo stesso con cui si calcola  $\gamma$  una volta assegnato il meccanismo. Questo calcolo si esegue sfruttando il fatto che le forze  $\gamma F_i$  devono essere in equilibrio, sulla struttura labile, con le coppie agenti dai concii plasticizzati sulla struttura stessa. Si scrive perciò l'equazione di *Lagrange*, e come variazione di configurazione, a ciò fare, si assume proprio il moto iniziale del meccanismo a rottura avvenuta; dei due possibili versi del meccanismo si sceglie quindi quello per cui le  $\gamma F_i$  compiono lavoro positivo. In corrispondenza del generico concio plasticizzato le coppie agenti dal concio sulla struttura sono

$$m_{ms} = M'_{om} > 0 \tag{23'}$$

$$m_{md} = M'_{om} < 0$$

se per il suddetto verso del meccanismo è  $\Delta\varphi_m > 0$ , oppure

$$m_{ms} = M''_{om} < 0 \tag{23''}$$

$$m_{md} = -M''_{om} > 0$$

se  $\Delta\varphi_m < 0$ . L'equazione di Lagrange è, indicando con  $s_i$  la componente di spostamento corrispondente ad  $F_i$ ,

$$\gamma \sum_i F_i s_i + \sum_m \mathfrak{M}_{md} \Delta\varphi_m = 0, \quad (24)$$

da cui

$$\gamma = - \frac{\sum_m \mathfrak{M}_{md} \Delta\varphi_m}{\sum_i F_i s_i}. \quad (25)$$

E' facile osservare che in ogni cerniera si ha

$$\mathfrak{M}_{md} \Delta\varphi_m < 0 \quad (q)$$

e quindi  $\gamma > 0$ .

Può ora enunciarsi il *teorema fondamentale*: dati un qualsiasi  $\psi$  ed un qualsiasi  $\gamma$ , deve essere

$$\psi \leq \gamma. \quad (26)$$

Sia infatti, per assurdo,

$$\psi > \gamma; \quad (r)$$

in relazione al meccanismo ed agli spostamenti con i quali si ottiene  $\gamma$ , ed ai momenti  $M_\psi$  compatibili in equilibrio con le  $\psi F_i$ , si ha

$$\psi \sum_i F_i s_i + \sum_m \mathfrak{M}_{\psi md} \Delta\varphi_m = 0. \quad (s)$$

Sottraendo dalla (24) si ha poi

$$(\gamma - \psi) \sum_i F_i s_i + \sum_m (\mathfrak{M}_{md} - \mathfrak{M}_{\psi md}) \Delta\varphi_m = 0. \quad (t)$$

Il primo termine è, per la (r), negativo. Il generico addendo della sommatoria costituente il secondo membro è negativo o nullo; infatti (fig. 11) per  $\Delta\varphi_m > 0$  risulta dalla (23')

$$\mathfrak{M}_{md} = -M'_{om},$$

mentre (22) è

$$m_{\psi_{md}} = -M_{\psi_m} \geq -M'_{om} ;$$

e per  $\Delta\varphi_m < 0$  risulta dalla (23'')

$$m_{md} = -M''_{om} ,$$

mentre (22) è

$$m_{\psi_{md}} = -M_{\psi_m} \leq -M''_{om} .$$

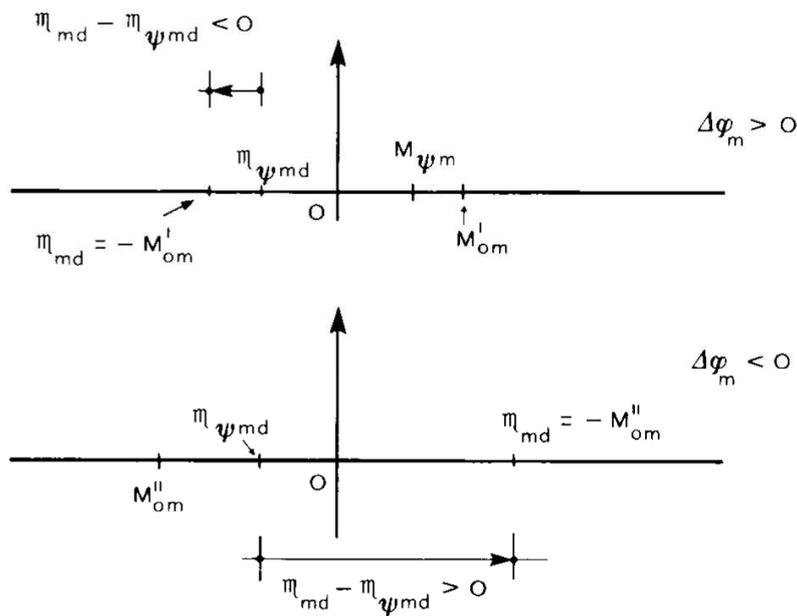


Fig. 11

Poiché la somma di termini tutti negativi o nulli non può essere diversa da zero e positiva, la (t) è impossibile, e quindi la (r) è falsa.

Si osservi che la dimostrazione ora svolta è valida anche se il meccanismo connesso con  $\gamma$  è parziale.

Poiché il moltiplicatore di rottura  $s_r$  può essere considerato, come è immediato verificare, alla stregua di un  $\psi$  o di un  $\gamma$ , dal teorema fondamentale si trae che l'insieme dei  $\psi$  e l'insieme dei  $\gamma$  sono contigui, e l'elemento comune è

$$s_r = \{\psi\} \cap \{\gamma\}; \tag{27}$$

e così pure

$$s_r = \text{Max} \{ \psi \} = \text{Min} \{ \gamma \}. \quad (28)$$

Le (27) e (28) esprimono il cosiddetto *teorema di unicità del moltiplicatore di rottura*.

Dal teorema fondamentale discende anche un elegante metodo per la ricerca di un intervallo, comunque restringibile, cui  $s_r$  appartiene. Si costruisca infatti, utilizzando un qualsiasi meccanismo, parziale o totale, un moltiplicatore  $\gamma$  (25). Se il meccanismo è totale, la struttura su cui si opera per ottenere  $\gamma$  è una volta labile, ed isostatica, e cioè

$$\ell - i = 3t - s = 1$$

$$\ell = 1$$

$$i = 0 ;$$

in tal caso, il diagramma  $M_\gamma$  è univocamente determinato. Se invece il meccanismo è parziale, la struttura è sempre una volta labile, ma iperstatica, e cioè

$$\ell - i = 3t - s = -k$$

$$\ell = 1$$

$$i = k + 1 ;$$

in tal caso il momento  $M_\gamma$  è definito sulla parte labile della struttura; lo si completa con un qualsiasi diagramma equilibrato nella parte iperstatica. Ottenuti così gli  $M_\gamma$ , si calcoli in ogni sezione il rapporto  $\rho$  dato da

$$\rho = \begin{cases} \frac{M_\gamma}{M'_0} & \text{se } M_\gamma > 0 \\ \frac{M_\gamma}{M''_0} & \text{se } M_\gamma < 0 . \end{cases} \quad (29)$$

Sia

$$\rho_{\max} = \text{Max} \{ \rho \} .$$

Si osserva facilmente che i momenti

$$\frac{M_\gamma}{\rho_{\max}}$$

sono in equilibrio con le forze  $\frac{\gamma}{\rho_{\max}} F_i$ , e sono compatibili; quindi

$$\frac{\gamma}{\rho_{\max}} = \psi \tag{30}$$

e cioè, per la (28) ,

$$\frac{\gamma}{\rho_{\max}} \leq s_r \leq \gamma \tag{31}$$

La (31) è un caso particolare della ovvia proposizione più generale: dati un  $\psi$  ed un  $\gamma$ , il moltiplicatore  $s_r$  è compreso nell'intervallo da essi definito; e cioè

$$\psi \leq s_r \leq \gamma . \tag{32}$$

Come esempio elementare, ci si rifaccia ancora (fig. 12a) a quello della fig. 2. Si tragga un  $\gamma$  supponendo che le cerniere del meccanismo si formino all'incastro ed in mezzeria (fig. 12b). Risulta

$$\Delta\varphi_A = \varphi < 0$$

$$\Delta\varphi_D = -2\varphi$$

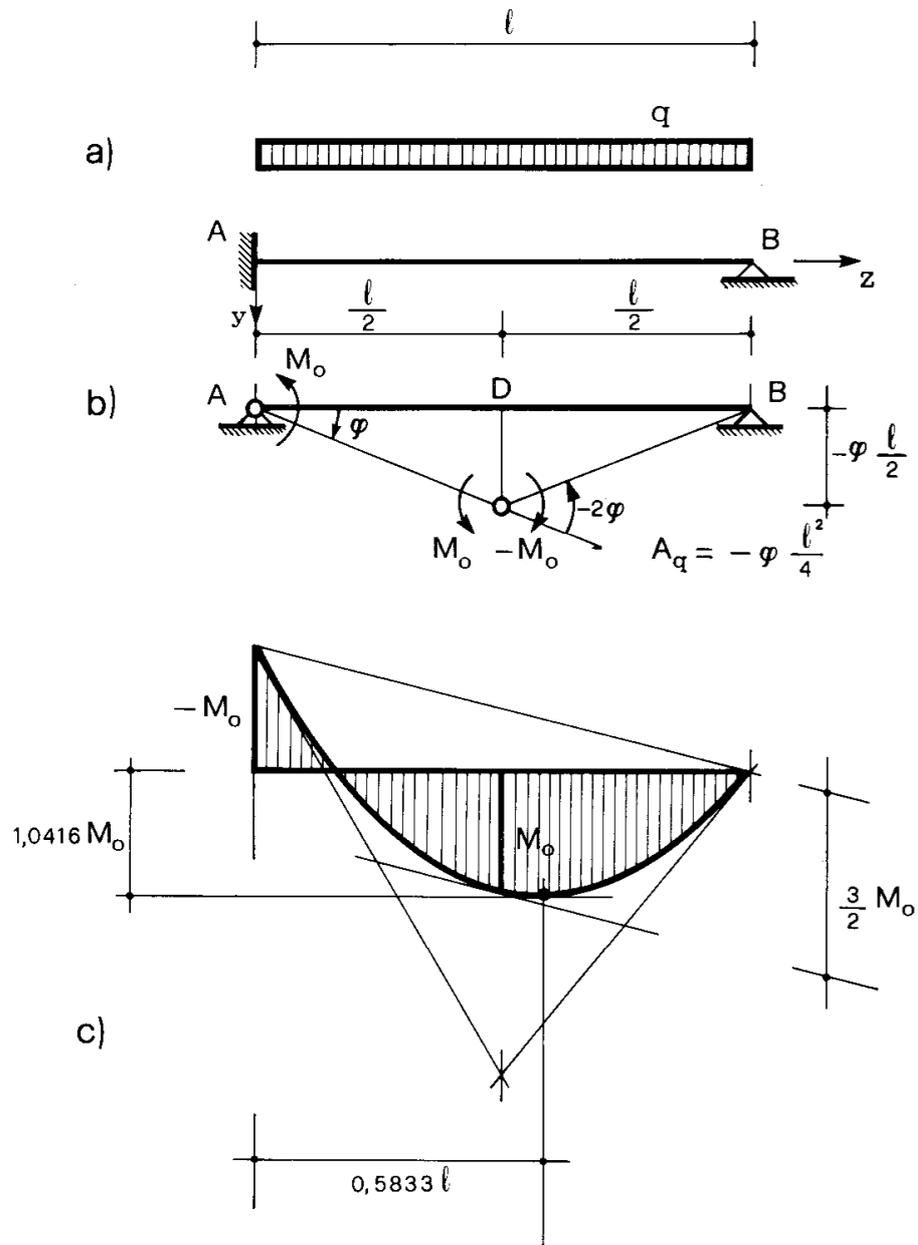


Fig. 12

e si pone

$$m_{Ad} = -M_0'' = M_0$$

$$m_{Dd} = -M_0' = -M_0.$$

Si ha perciò (24)

$$-\gamma q \varphi \frac{l^2}{4} + 3M_0 \varphi = 0$$

da cui

$$\gamma = 12 \frac{M_0}{q \ell^2} .$$

Il momento  $M_\gamma$  (fig. 12c) è dato da

$$M_\gamma = -\frac{M_0}{\ell} (\ell - z) + \frac{3}{2} M_0 \frac{4z(\ell - z)}{\ell^2} ;$$

l'ascissa  $z_m$  in cui  $M_\gamma$  raggiunge il massimo è definita da

$$\frac{dM_\gamma}{dz} = 0$$

e cioè da

$$\frac{M_0}{\ell} + 6 \frac{M_0}{\ell^2} (\ell - 2z) = 0 ,$$

da cui

$$z_m = \frac{7}{12} \ell = 0,5833 \ell . \quad (u)$$

A tale ascissa corrisponde

$$M_\gamma = 1,0416 M_0$$

e quindi

$$\rho_{\max} = 1,0416 .$$

E' perciò

$$11,52 \frac{M_0}{q \ell^2} \leq s_r \leq 12 \frac{M_0}{q \ell^2} ; \quad (v)$$

poiché (7) è  $s_r = 11,66 \frac{M_0}{q \ell^2}$ , la (31) è verificata.

Risulta sovente che  $s_r$  sia più vicino a  $\frac{\gamma}{\rho_{\max}}$  che a  $\gamma$ .

Ripetendo il calcolo per restringere l'intervallo (v), converrà porre la cerniera di mezzeria all'ascissa (u) ove nel primo tentativo si verifica il massimo scarto dal valore limite. Si ha così

$$\Delta\varphi_D = -\varphi \frac{\ell}{0,4167\ell} = -2,3998 \varphi$$

$$A_q = -\varphi 0,5833 \ell \frac{\ell}{2} = -0,2916 \varphi \ell^2$$

e quindi

$$-0,2916 \gamma q \varphi \ell^2 + M_0 \varphi + 2,3998 M_0 \varphi = 0$$

da cui

$$\gamma = 11,6591$$

contro il valore (6)

$$s_r = 11,6568 .$$

Naturalmente, la scelta del meccanismo per il calcolo del  $\gamma$  nel primo tentativo è suggerita da considerazioni di carattere pratico; converrà per esempio ubicare le cerniere laddove il diagramma dei momenti in fase elastica attinge i massimi e minimi, in particolare nelle estremità delle travi incastrate, e in corrispondenza di una o più delle eventuali forze concentrate.

In seguito si parlerà dei casi in cui è necessario tenere conto del taglio, che in questa sede è stato trascurato.

5. Un altro esempio elementare di verifica del collasso incipiente.

Si prenda in esame la struttura della fig. 13, sette volte iperstatica; in essa sono indicati i moduli dei momenti limite (supposti uguali nei

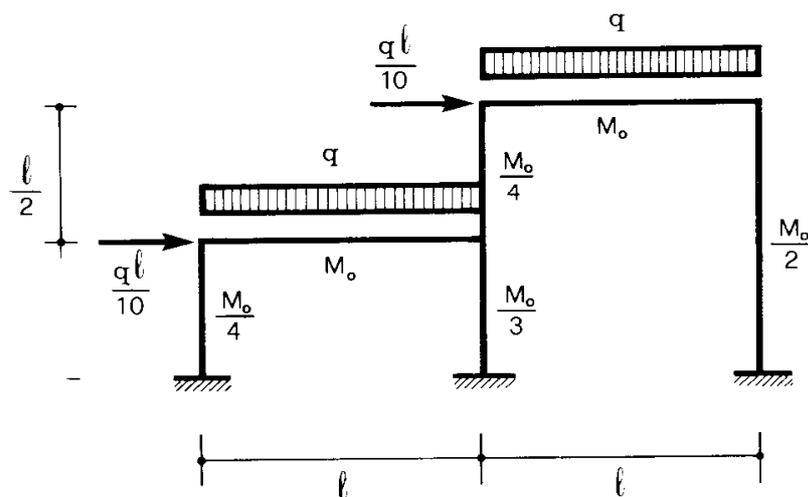


Fig. 13

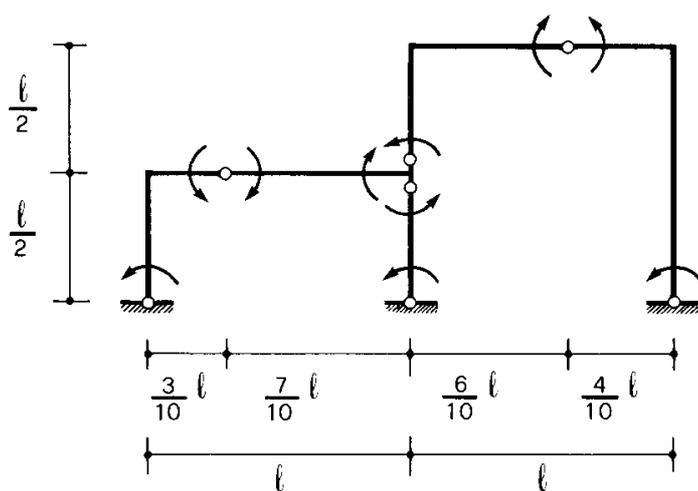
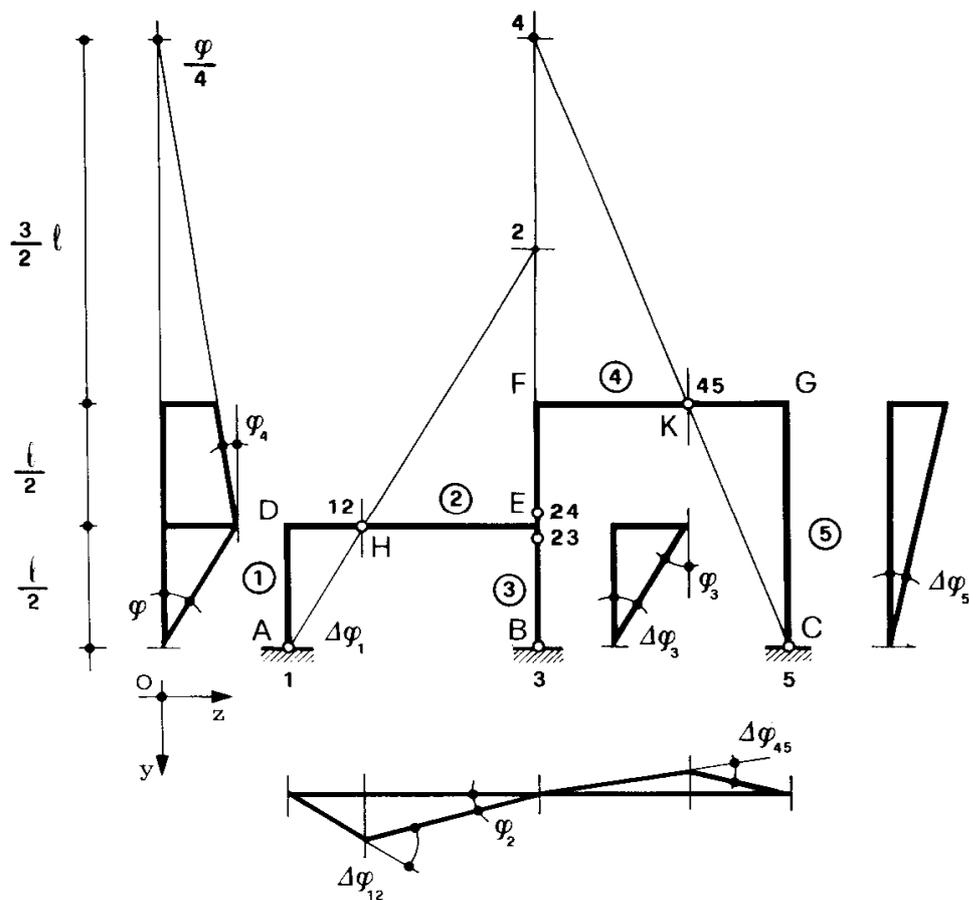


Fig. 14

due versi) dei traversi e dei ritti. Nella fig. 14 è riportato un primo tentativo di ubicazione delle cerniere plastiche, in numero tale da generare un meccanismo di collasso totale; tale meccanismo è disegnato nella fig. 15. Se si assume come coordinata lagrangiana la rota-



$$\begin{aligned}
 w_D &= -\frac{1}{2} \varphi l & w_F &= -\frac{3}{8} \varphi l \\
 v_H &= -\frac{3}{10} \varphi l & v_K &= -\frac{3}{20} \varphi l \\
 A_{DE} &= -\frac{3}{20} \varphi l^2 & A_{FG} &= \frac{4}{40} \varphi l^2 \\
 \Delta\varphi_1 &= \varphi & \Delta\varphi_3 &= \varphi \\
 \Delta\varphi_5 &= \frac{3}{8} \varphi & \Delta\varphi_{12} &= -\frac{10}{7} \varphi \\
 \Delta\varphi_{23} &= \frac{10}{7} \varphi & \Delta\varphi_{24} &= \frac{5}{28} \varphi \\
 \Delta\varphi_{45} &= \frac{5}{8} \varphi & &
 \end{aligned}$$

Fig. 15

zione  $\varphi$  del tratto AH, positiva al solito se antioraria, si ottiene nell'ordine

$$w_D = w_H = -\frac{1}{2} \varphi \ell$$

$$w_F = w_G = -\frac{3}{8} \varphi \ell$$

$$\varphi_5 = \Delta\varphi_5 = -\frac{w_G}{\ell} = \frac{3}{8} \varphi$$

$$v_H = -\frac{3}{10} \ell \varphi_1 = -\frac{3}{10} \varphi \ell$$

$$v_K = \frac{4}{10} \ell \varphi_5 = \frac{3}{20} \varphi \ell$$

$$A_{DE} = v_H \frac{\ell}{2} = -\frac{3}{20} \varphi \ell^2$$

$$A_{FG} = v_K \frac{\ell}{2} = \frac{3}{40} \varphi \ell^2$$

$$\varphi_2 = v_H \frac{10}{7\ell} = -\frac{3}{7} \varphi$$

$$\varphi_3 = \Delta\varphi_3 = \varphi$$

$$\varphi_4 = w_H \frac{1}{2\ell} = -\frac{1}{4} \varphi$$

$$\Delta\varphi_{12} = \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{10}{7} \varphi$$

$$\Delta\varphi_{23} = \varphi_3 - \varphi_2 = \frac{10}{7} \varphi$$

$$\Delta\varphi_{24} = \varphi_4 - \varphi_2 = \frac{5}{28} \varphi$$

$$\Delta\varphi_{45} = \varphi_5 - \varphi_4 = \frac{5}{8} \varphi.$$

Con riferimento agli spostamenti della fig. 15, la (24) si scrive

$$\begin{aligned} \gamma q \left( -\frac{\ell}{10} \frac{1}{2} \varphi \ell - \frac{\ell}{10} \frac{3}{8} \varphi \ell - \frac{3}{20} \varphi \ell^2 + \frac{3}{40} \varphi \ell^2 \right) - \\ - \frac{M_0}{4} \varphi - \frac{M_0}{3} \varphi - \frac{M_0}{2} \frac{3}{8} \varphi - M_0 \frac{10}{7} \varphi - \frac{M_0}{3} \frac{10}{7} \varphi - \\ - \frac{M_0}{4} \frac{5}{28} \varphi - M_0 \frac{5}{8} \varphi = 0 \end{aligned}$$

da cui

$$\gamma = 20,586 \frac{M_0}{q \ell^2}. \quad (z)$$

Occorre adesso costruire il diagramma dei momenti  $M_\gamma$ .

Il momento  $M_{ED}$  in E relativo al traverso è fornito dalla condizione di equilibrio alla rotazione del nodo E (fig. 16):

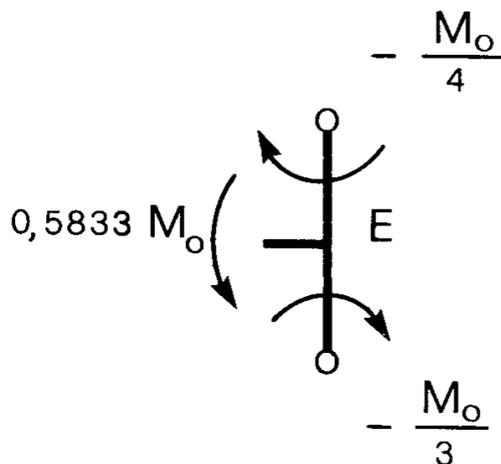


Fig. 16

$$M_{ED} = - \left( \frac{M_0}{4} + \frac{M_0}{3} \right) = - \frac{7}{12} M_0 = - 0,5833 M_0 .$$

Il momento in D si ottiene con il procedimento di Lagrange, utilizzando la deformata del traverso DE permessa dalla presenza delle cerniere in D, H ed E (fig. 17)

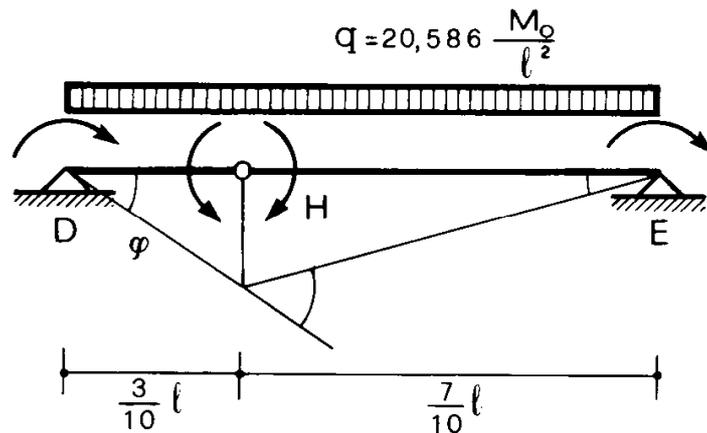


Fig. 17

$$M_{DE} \varphi - M_0 \frac{10}{7} \varphi - \frac{7}{12} M_0 \frac{3}{7} \varphi + 20,586 \frac{M_0}{l^2} \frac{3}{20} \varphi l^2 = 0$$

da cui

$$M_{DE} = - 1,4093 M_0 = M_{DA} .$$

La condizione di equilibrio alla traslazione della parte di struttura al disopra di una sezione globale che tagli i ritti AD, BE e CG si scrive (fig. 18)

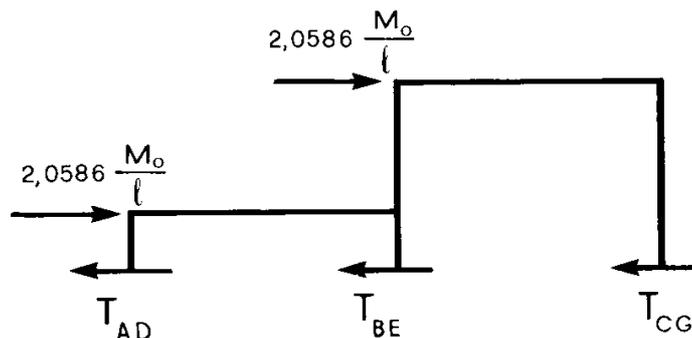


Fig. 18

$$T_{AD} + T_{BE} + T_{CG} = 4,1172 \frac{M_0}{\ell}; \quad (a')$$

dalla relazione (fig. 19)

$$-T_{AD} \frac{\ell}{2} - M_A - M_{DA} = 0$$

si trae

$$T_{AD} = (-M_A + M_D) \frac{2}{\ell} = \left( \frac{M_0}{4} - 1,4093 M_0 \right) \frac{2}{\ell} = -2,3186 \frac{M_0}{\ell};$$

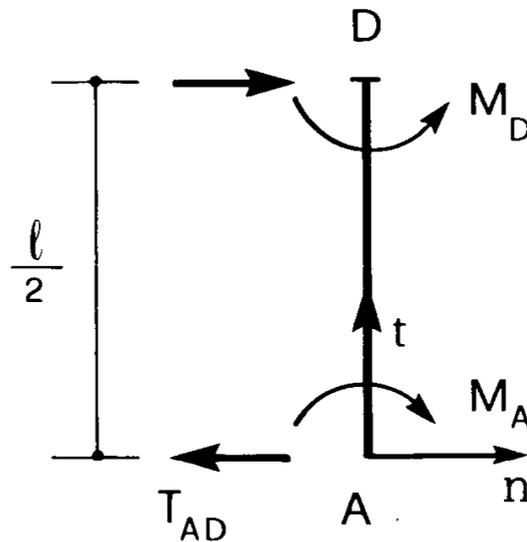


Fig. 19

analogamente si ottiene

$$T_{BE} = (-M_B + M_{EB}) \frac{2}{\ell} = \left( \frac{M_0}{3} + \frac{M_0}{3} \right) \frac{2}{\ell} = 1,3333 \frac{M_0}{\ell};$$

è perciò

$$T_{CG} = 5,1025 \frac{M_0}{\ell}$$

da cui

$$M_{GC} = T_{CG} \ell + M_C = 5,1025 M_0 - \frac{M_0}{2} = 4,6025 M_0 = -M_{GF}.$$

Infine, operando così come nel calcolo di  $M_{DE}$ , si ha (fig. 20)

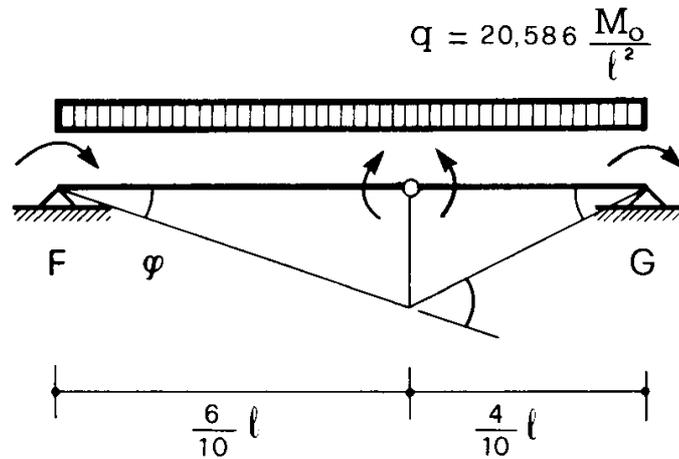


Fig. 20

$$M_{FG} \varphi + M_0 \frac{5}{2} \varphi - 4,6025 M_0 \frac{3}{2} \varphi + 20,586 \frac{M_0}{l^2} \frac{3}{10} \varphi l^2 = 0$$

da cui

$$M_{FG} = -1,7721 M_0 = M_{FE} .$$

Il diagramma dei momenti è quindi quello della fig. 21.

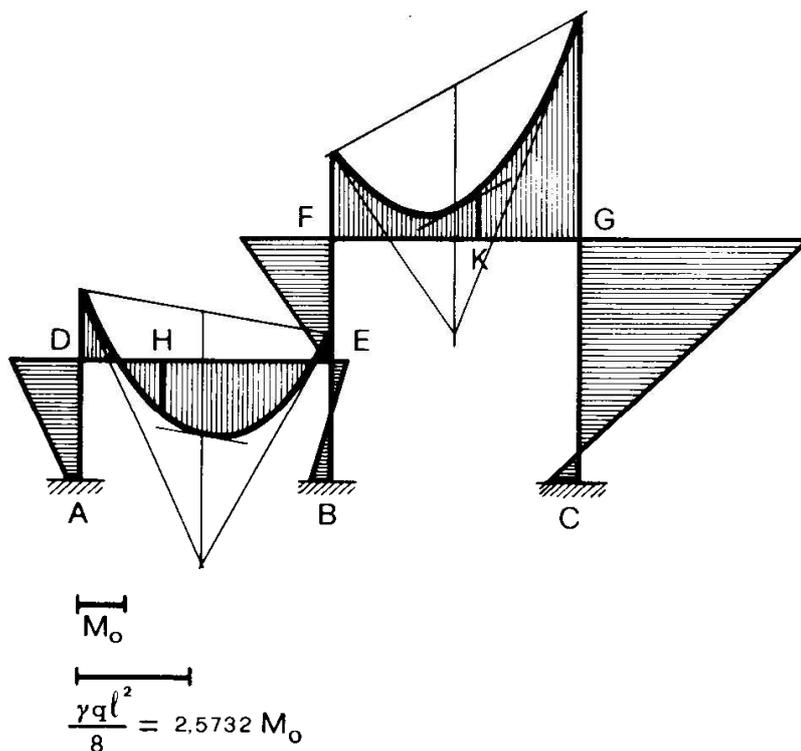


Fig. 21

I valori più elevati dei rapporti  $\rho = \frac{M_\gamma}{M_0}$  sono i seguenti

$$\rho_{DA} = \frac{1,4093}{0,25} = 5,6372$$

$$\rho_{FE} = \frac{1,7721}{0,25} = 7,0884$$

$$\rho_{GC} = \frac{4,6025}{0,50} = 9,2050 .$$

E' perciò

$$\rho_{\max} = 9,2050$$

e quindi

$$2,2364 \frac{M_0}{q \ell^2} \leq s_r \leq 20,586 \frac{M_0}{q \ell^2} . \quad (b')$$

Nel secondo tentativo si assume il meccanismo della fig. 22, dove si sono supposte cerniere plastiche in F e G; naturalmente esse sono in

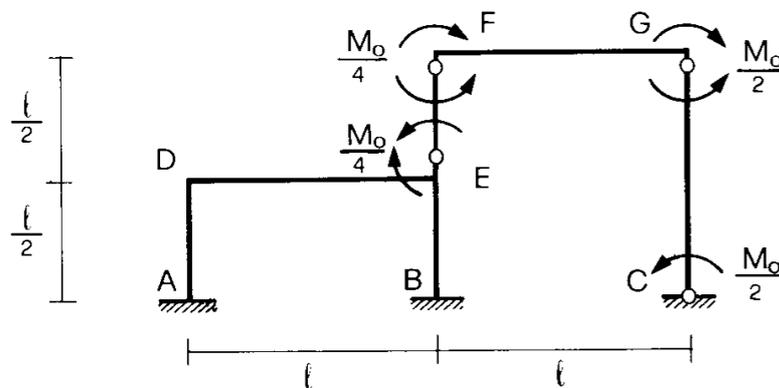


Fig. 22

corrispondenza dei ritti, poiché in questi si verificano i valori di  $\rho$  che si sono riportati. Si osserva subito (fig. 23) che il collasso interessa la

sola parte di destra (collasso parziale). Si ha così

$$\gamma \frac{q\ell}{10} \varphi \frac{\ell}{2} - 2 \frac{M_0}{4} \varphi - 2 \frac{M_0}{2} \frac{\varphi}{2} = 0$$

da cui

$$\gamma = 20 \frac{M_0}{q\ell^2} . \quad (c')$$

Il diagramma dei momenti  $M_\gamma$  (fig. 24) è definito nella parte interessata dal collasso. Per il resto esso si traccia in modo arbitrario, con il

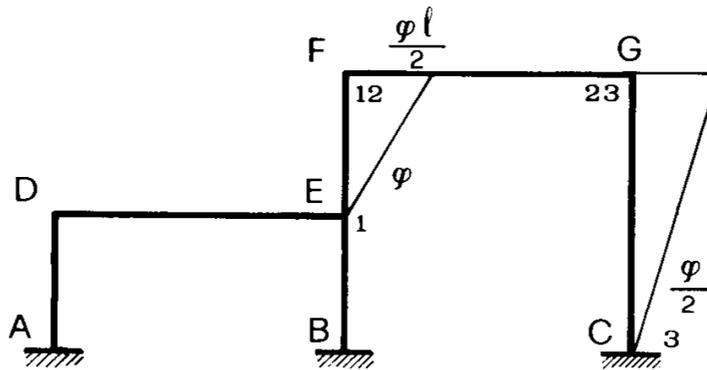


Fig. 23

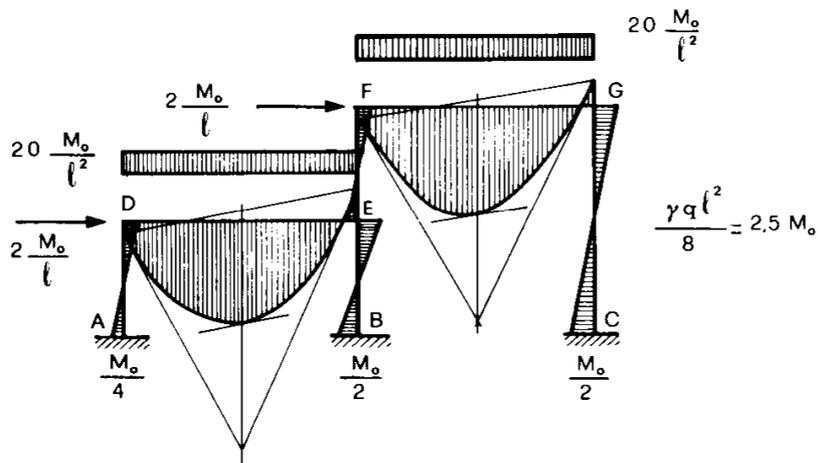


Fig. 24

solo rispetto delle condizioni di equilibrio. Si è posto

$$M_B = -M_{EB} = -\frac{M_0}{2}$$

$$M_A = -M_{DA} = -\frac{M_0}{4};$$

così è rispettata la condizione di equilibrio alla traslazione analoga alla (a')

$$2 \frac{M_0}{4} \frac{2}{\ell} + 2 \frac{M_0}{2} \frac{2}{\ell} + 2 \frac{M_0}{2} \frac{1}{\ell} = 4 \frac{M_0}{\ell}$$

Sulle fondamentali così definite per i tratti DE ed FG si sono disegnate le superfici semplici dei momenti, tenendo conto che

$$\gamma \frac{q \ell^2}{8} = 2,5 M_0 .$$

Il valore di  $\rho$  è pari a  $\frac{3}{2}$  in relazione ad  $M_{\gamma B}$  ed  $M_{\gamma EB}$ . I valori più

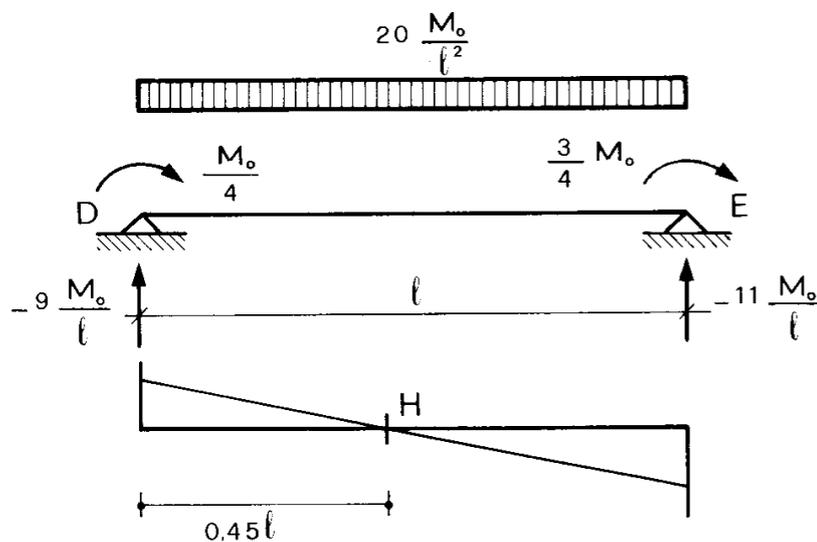


Fig. 25

alti si hanno però nei traversi. In DE il massimo valore di  $M_\gamma$  si verifica nella sezione H di taglio nullo; la sua ascissa  $DS = z_H$  è fornita da (fig. 25)

$$T_H = -R_D - \gamma q z_H = 0$$

e cioè

$$10 \frac{M_0}{\ell} - \frac{M_0}{\ell} - 20 \frac{M_0}{\ell^2} z_H = 0$$

da cui

$$z_H = \frac{9}{20} \ell = 0,45 \ell$$

e quindi

$$M_H = \frac{M_0}{4} + 9 \frac{M_0}{\ell} z_H - 20 \frac{M_0}{\ell^2} \left( \frac{9}{20} \ell \right)^2 \frac{1}{2} = 2,2750 M_0 .$$

Analogamente, in FG il massimo valore di  $M_\gamma$  si verifica nella sezione K la cui ascissa è fornita da

$$10 \frac{M_0}{\ell} - \frac{3}{4} \frac{M_0}{\ell} - 20 \frac{M_0}{\ell^2} z_K = 0$$

da cui

$$z_K = 0,4625 \ell$$

$$M_K = 2,3891 M_0$$

E' quindi

$$\rho_{\max} = 2,3891$$

e ancora

$$8,3714 \frac{M_0}{q \ell^2} \leq s_r \leq 20 \frac{M_0}{q \ell^2}. \quad (d')$$

Nel terzo tentativo si adotta ancora un meccanismo di collasso par-

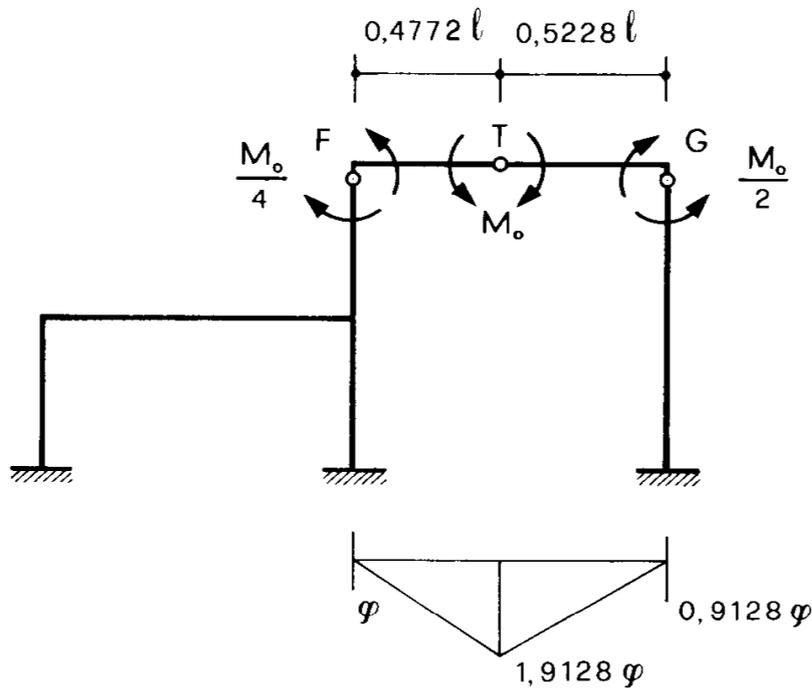


Fig. 26

ziale (fig. 26), e cioè quello che si genera ipotizzando due cerniere plastiche nelle sezioni F e G dei ritti, ed una terza cerniera T lungo il traverso FG. Se è z l'ascissa FT (fig. 27) si ha

$$\gamma q \varphi z \frac{\ell}{2} - \frac{M_0}{4} \varphi - \frac{M_0}{2} \varphi \frac{z}{\ell - z} - M_0 \varphi \frac{\ell}{\ell - z} = 0$$

da cui

$$\gamma = \frac{M_0}{q} \frac{z + 5\ell}{2z\ell(\ell - z)}.$$

La condizione per il minimo di  $\gamma$  è

$$\frac{d\gamma}{dz} = \frac{M_0}{q} \frac{2z\ell(\ell - z) - (2\ell^2 - 4z\ell)(z + 5\ell)}{(2z\ell^2 - 2z^2\ell)^2} = 0$$

da cui

$$z^2 + 10\ell z - 5\ell^2 = 0$$

che porge

$$z = \ell(\sqrt{30} - 5) = 0,4772 \ell \quad (e')$$

$$\gamma = 10,977 \frac{M_0}{q\ell^2} \quad (f')$$

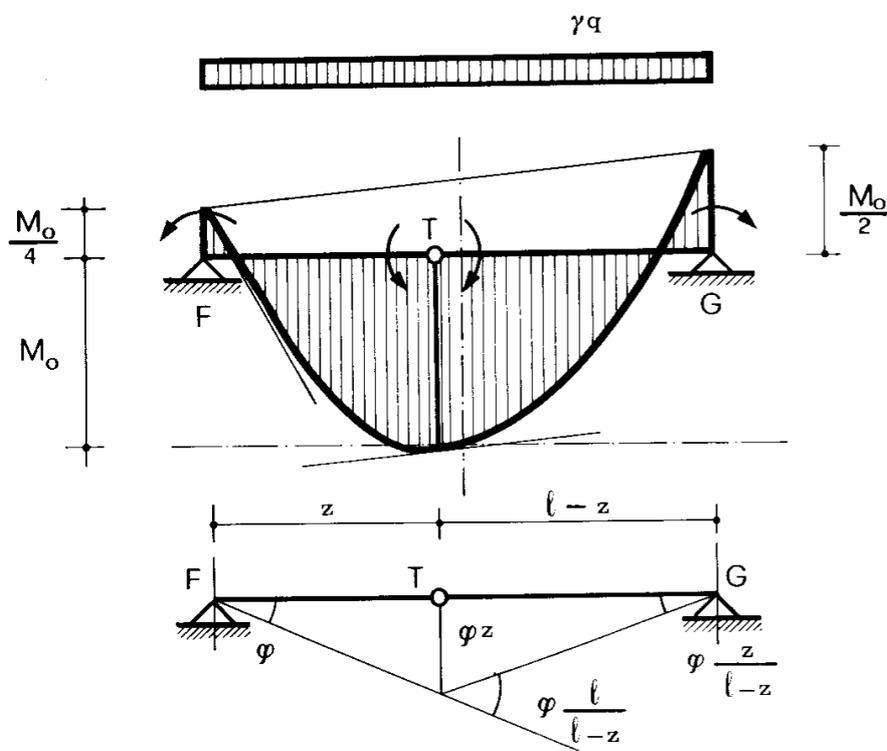


Fig. 27

Limitatamente al tratto FG, e cioè considerando la trave FG come incastrata al suolo alle due estremità attraverso due concetti di momento limite  $\frac{M_0}{4}$  ed  $\frac{M_0}{2}$ , il valore di  $\gamma$  così ottenuto è naturalmente anche il moltiplicatore di rottura; si verifica infatti

$$R_F = -\frac{10,98}{2} \frac{M_0}{\ell} + 0,25 \frac{M_0}{\ell} = -5,24 \frac{M_0}{\ell}$$

e l'ascissa di taglio nullo è fornita da

$$5,24 \frac{M_0}{\ell} - 10,98 \frac{M_0}{\ell^2} z_m = 0$$

da cui

$$z_m = 0,4772 \ell .$$

Quindi il momento massimo si verifica proprio ( $e'$ ) nella sezione T, dove  $M = M_0$ ; in tutte le altre sezioni le condizioni di compatibilità sono rispettate, e perciò  $\gamma$  è anche un  $\psi$ , e cioè è il moltiplicatore di rottura.

Non altrettanto accade però nella struttura in esame, poiché ci si deve preoccupare della compatibilità in tutte le sezioni. Giacché il meccanismo è di collasso parziale, il diagramma dei momenti  $M_\gamma$  può essere disegnato con una qualsiasi scelta delle iperstatiche; ci si è prefissi di eseguire tale scelta tentando di ottenere  $\rho_{\max} = 1,05$ . A ciò fare si sono assunti i momenti in F e G diversi (fig. 28) da quelli limite; ciò è lecito, perché si vuole soltanto tracciare un diagramma equilibrato con i valori dei carichi fissati dalla ( $f'$ ). Si è posto così

$$M_{GC} = 1,05 \frac{M_0}{2} = 0,5250 M_0$$

e ancora

$$M_C = -0,5250 M_0 .$$



$$M_{EF} = -1,05 \frac{M_0}{4} = -0,2625 M_0$$

da cui

$$M_{FE} = M_E + T_{FE} \frac{\ell}{2} = -0,2385 M_0 .$$

Deve poi essere rispettata l'altra condizione

$$-T_{AD} - T_{BE} - T_{CG} + 2,196 \frac{M_0}{\ell} = 0;$$

assumendo

$$M_{EB} = 0,2625 M_0$$

si ha

$$M_{ED} = -0,5250 M_0 ,$$

pari ad  $M_{GF}$ , e cioè si riproduce all'estremità di destra del traverso DE la situazione all'estremità di destra del traverso FG. Ponendo  $T_{AD} = 0$ , deve essere

$$T_{BE} = 2,196 \frac{M_0}{\ell} - 1,050 \frac{M_0}{\ell} = 1,146 \frac{M_0}{\ell}$$

e quindi

$$M_B = 0,2625 M_0 - T_{BE} \frac{\ell}{2} = -0,3105 M_0 .$$

Si assume poi

$$M_{DA} = M_{AD} = -0,2500 M_0 .$$

Nei ritti AD e BE la compatibilità è verificata; nei ritti EF e CG si ha invece  $\rho = 1,05$ .

Nel traverso FG si ha

$$R_F = -\frac{10,98}{2} \frac{M_0}{\ell} + 0,2865 \frac{M_0}{\ell} = -5,2035 \frac{M_0}{\ell} ,$$

e l'ascissa di taglio nullo è fornita da

$$5,2035 \frac{M_0}{\ell} - 10,98 \frac{M_0}{\ell^2} z_m = 0$$

da cui

$$z_m = 0,4739 \ell .$$

Il momento massimo è perciò

$$\begin{aligned} M_{\max} &= -0,2385 M_0 + 5,2035 \frac{M_0}{\ell} \cdot 0,4739 \ell - \\ &- 10,98 \frac{M_0}{\ell^2} \frac{(0,4739 \ell)^2}{2} = 0,9945 M_0 ; \end{aligned}$$

quindi in FG è  $\rho < 1$ . Altrettanto accade in DE, poiché il momento  $M_{ED}$  è pari al momento  $M_{GF}$ , mentre il momento  $M_{DE}$  è maggiore in modulo del momento  $M_{FG}$ , e quindi il diagramma del momento positivo presenta ovunque in DE valori minori che in FG. In definitiva è  $\rho_{\max} = 1,05$ , e quindi

$$10,454 \frac{M_0}{q \ell^2} \leq s_r \leq 10,977 \frac{M_0}{q \ell^2} .$$

Il meccanismo del quarto tentativo è quello, sempre di collasso parziale, disegnato nella fig. 29; in esso, ferme restando le cerniere pla-

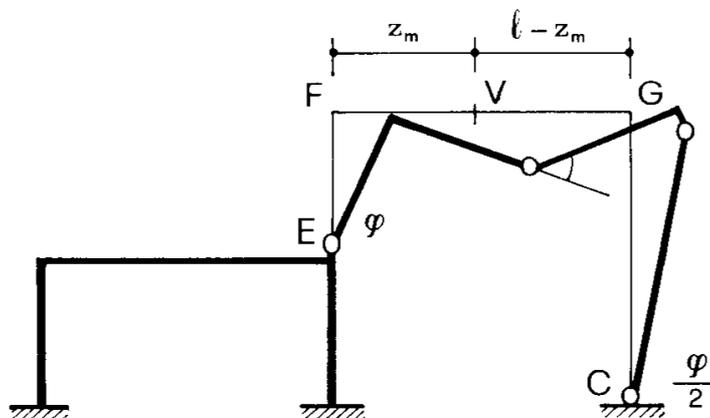


Fig. 29

stiche in G e nella campata FG come nel terzo tentativo, si sono ubicate altre cerniere in E e C, dove il diagramma  $M_\gamma$  di tale tentativo (fig. 28) presentava i  $\rho$  più elevati, e si è eliminata la cerniera in F. Chiamando  $z_m$  la ascissa da F della cerniera plastica V di campata, si ha

$$\Delta\varphi_V = -\varphi \frac{\ell}{\ell - z_m}$$

$$\Delta\varphi_G = \varphi \frac{z_m}{\ell - z_m} + \frac{\varphi}{2} = \varphi \frac{\ell + z_m}{2(\ell - z_m)}$$

$$\varphi_C = \frac{\varphi}{2}$$

e quindi

$$\gamma q \frac{\ell}{10} \varphi \frac{\ell}{2} + \gamma q \varphi z_m \frac{\ell}{2} - \frac{M_0}{4} \varphi - M_0 \varphi \frac{\ell}{\ell - z_m} -$$

$$- \frac{M_0}{2} \frac{\ell + z_m}{2(\ell - z_m)} - \frac{M_0}{2} \frac{\varphi}{2} = 0$$

da cui

$$\gamma = 5 \frac{M_0}{q} \frac{7\ell - z_m}{\ell^3 + 9\ell^2 z_m - 10\ell z_m^2} . \quad (h')$$

La condizione

$$\frac{d\gamma}{dz_m} = 0$$

porge

$$z_m^2 - 14\ell z_m + 6,4\ell^2 = 0$$

da cui

$$z_m = 0,4731 \ell ;$$

per tale valore di  $z_m$  la (h') fornisce

$$\gamma = 10,8072 \frac{M_0}{q\ell^2} . \quad (i')$$

Nella fig. 30 è riportato il diagramma  $M_\gamma$ , definito nel tratto ED. A tale proposito, il valore  $M_F$  è ottenuto calcolando prima il taglio in EF dalla relazione

$$T_{EF} + T_{CG} = 1,0807 \frac{M_0}{\ell} ,$$

da cui deriva

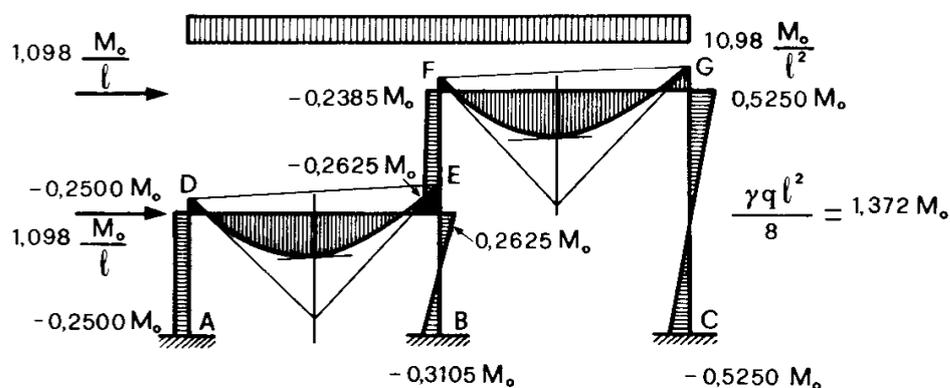
$$T_{EF} = 0,0807 \frac{M_0}{\ell} ;$$

dalla

$$-M_E + M_F - T_{EF} \frac{\ell}{2} = 0$$

si ha quindi

$$M_F = -0,25 M_0 + 0,0403 M_0 = -0,2097 M_0 .$$



$$T_{EF} = 0,048 \frac{M_0}{\ell}$$

$$T_{CG} = 1,050 \frac{M_0}{\ell}$$

$$T_{BE} = 1,146 \frac{M_0}{\ell}$$

$$T_{AD} = 0$$

Fig. 30

Deve poi aversi

$$T_{AD} + T_{BE} + T_{CG} = 2,1614 \frac{M_0}{\ell} ; \quad (\ell')$$

posto

$$M_{DE} = -0,2097 M_0$$

$$M_{ED} = -0,5000 M_0$$

in modo da garantire  $\rho = 1$  in DE, così come in FG, si ha

$$M_{EB} = M_{EF} - M_{ED} = 0,2500 M_0 .$$

Posto

$$M_B = -0,32 M_0$$

è

$$T_{BE} = 1,14 \frac{M_0}{\ell} .$$

Dalla ( $\ell'$ ) si ha perciò

$$T_{AD} = 0,0214 \frac{M_0}{\ell} ,$$

e dalla

$$-M_A + M_D - T_{AD} \frac{\ell}{2} = 0$$

si trae

$$M_A = -0,2097 M_0 - 0,0107 M_0 = -0,2204 M_0 .$$

Dall'esame dei momenti  $M_\gamma$  della fig. 30 risulta ovunque  $\rho \leq 1$ ; quindi  $\gamma = \psi$ , e cioè (i')

$$s_r = 10,8072 \frac{M_0}{q \ell^2} . \quad (m')$$

### 6. Il teorema di unicità del meccanismo di rottura .

Si osservi che, per il teorema di unicità del moltiplicatore di rottura (par. 4), la (m') fornisce il valore del moltiplicatore di rottura, ma non è ancora detto che il meccanismo della fig. 29, da cui esso è stato ricavato, sia il vero meccanismo di rottura. Ebbene, può dimostrarsi che è unico, nella parte soggetta a collasso, il diagramma dei momenti  $M_c$  corrispondenti al collasso incipiente (e quindi, *generalmente*, è unico il meccanismo di collasso). Se infatti ci fossero due diagrammi  $M_c$  ed  $M'_c$  distinti, ambedue sarebbero in equilibrio, per il teorema di unicità del moltiplicatore di rottura, con le stesse forze  $s_r F_i$ , e quindi i momenti  $M_c - M'_c$  sarebbero in equilibrio con forze nulle. Con riferimento perciò allo stesso meccanismo da cui si sono tratti  $s_r$  ed  $M_c$ , si può scrivere

$$\sum_i \Delta\varphi_i (M_{ci} - M'_{ci}) = 0. \quad (n')$$

Poiché non può essere che

$$\Delta\varphi_i M'_{ci} \geq \Delta\varphi_i M_{ci},$$

la (n') implica che in ogni cerniera del meccanismo sia  $\Delta\varphi_i M'_{ci} = \Delta\varphi_i M_{ci}$ , e cioè  $M'_{ci} = M_{ci}$ . Quindi in tutta la parte labile  $M'_c = M_c$ . Se poi  $M_c$  attinge la frontiera di compatibilità solo nelle cerniere del meccanismo, si può anche dire che il meccanismo è nullo.

E' questo il *teorema di unicità del meccanismo di rottura*, molto utile poiché permette un calcolo univoco delle distorsioni plastiche, e questo si è visto quanto sia necessario nelle strutture in conglomerato armato.

Nelle strutture in acciaio non è necessario in genere giungere al valore esatto di  $s_r$ , ma ci si può contentare di un giusto intervallo  $\psi - \gamma$  tra cui  $s_r$  è compreso; ciò appunto perché in tali strutture non occorre in genere valutare le distorsioni plastiche.

Non sfugga al lettore che, nel calcolo al collasso incipiente, delle due discipline del calcolo alle tensioni ammissibili, l'equilibrio e la congruenza, la seconda cede il posto a quella della compatibilità. Altra fondamentale differenza tra i due procedimenti consiste nel fatto che il calcolo alle tensioni ammissibili è ben più oneroso nel progetto che nella verifica, mentre il contrario accade nel calcolo al collasso

incipiente; è molto facile, infatti, ottenuto un diagramma  $M_\gamma$ , modificare le sezioni ove  $\rho > 1$  per rendere il diagramma compatibile, e quindi  $\gamma = s_r$ .

### 7. Il metodo di combinazione dei meccanismi elementari. La programmazione lineare

Si osserva che il meccanismo della fig. 29 è somma di quello della fig. 23 (*meccanismo di piano*) e di quello della fig. 26 (*meccanismo di trave*), dosati in modo che  $\varphi_F = 0$ . Si basa su tale constatazione il metodo di combinazione dei meccanismi elementari (*Neal e Symonds, 1951*): poiché nei telai le cerniere plastiche si formano in generale alle estremità dei ritti, ed in una sezione di campata, il meccanismo di rottura sarà una combinazione di *meccanismi elementari* del tipo anzidetto. Tenendo presente che

$$\gamma = - \frac{L_M}{L_F},$$

occorre ovviamente nella scelta dei meccanismi elementari da combinare far sì che  $L_M$  risulti il più basso possibile, ed  $L_F$  il più alto; il procedimento consiste quindi nel calcolare  $s_r$  come il più basso dei possibili  $\gamma$ .

Il metodo presenta il suo punto debole nella ubicazione delle cerniere di campata, specie se sotto carico distribuito, e nella eccessiva quantità di possibili combinazioni non appena il telaio diventi di una certa complessità; esso si basa quindi soprattutto sull'esperienza e l'intuito del calcolatore.

Un metodo per così dire automatico è invece quello della programmazione lineare, da utilizzare quindi con l'ausilio di un elaboratore di dati.

Si assuma un generico meccanismo di collasso totale; siano  $X_1, X_2, \dots, \dots, X_{n+1}$  ( $n$  grado di iperstaticità della struttura) i momenti nelle sezioni del meccanismo, ed  $\epsilon$  il moltiplicatore delle forze applicate che le pone in equilibrio con le  $X_i$ . Risulta  $\epsilon$  funzione lineare omogenea delle  $X_i$ ; la  $\epsilon$  si considera crescente.

Si consideri poi un sufficiente numero  $m$  di sezioni  $S_j$ , ivi comprese quelle del meccanismo, ed in esse si imponga la condizione di compatibilità

$$M''_{oj} \leq M_j \leq M'_{oj} \quad (o')$$

Le  $m$  condizioni (o') sono lineari nelle  $X_i$ , poiché  $M_j$  è funzione lineare delle  $X_i$  e di  $\epsilon$ , e quindi delle sole  $X_i$ . Il calcolo delle  $X_i$  con la condizione che  $\epsilon$  (funzione obiettivo) sia massimo è un classico problema di programmazione lineare. Si osservi che così sarebbe calcolato  $s_r$  come  $\psi$ , se la (o') fosse rispettata ovunque. Poiché però la (o') può essere disattesa fuori delle sezioni  $S_j$ , in realtà si ottiene un valore di  $s_r$  per eccesso, e quindi un  $\gamma$ .

E' appena necessario rilevare che il meccanismo adottato serve solo per calcolare, nel rispetto dell'equilibrio,  $\epsilon$  come funzione delle  $X_i$ ; esso non è quindi in genere il meccanismo di rottura.

Analogo metodo vale per il calcolo di  $s_r$  come moltiplicatore  $\gamma$ . Di tutto questo, però, si parlerà in extenso nella seconda parte del libro.