

dalla prima si trae

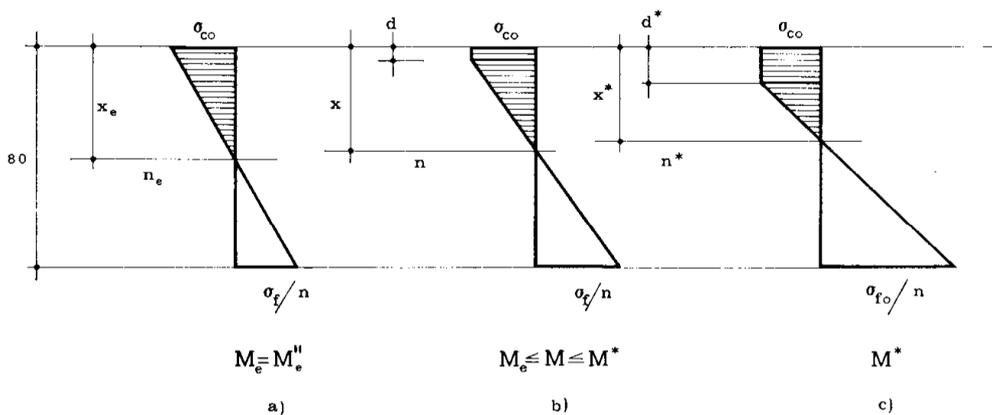
$$\xi = -2\beta\mu - \delta \tag{m}$$

e dalla seconda quindi

$$M = \frac{\sigma_{co} b h^2}{6} (\delta^2 + 2\beta\mu\delta + 6\beta\mu + 4\beta^2 \mu^2). \tag{n}$$

Si osserva che per  $\delta = 0$  si riottiene la (41); in condizioni limiti ( $\xi_0 = \delta_0 = -\beta\mu$ ) si riottengono invece le (38) e (39).

Nel caso della forte armatura ( $\mu > \mu_s$ ) è  $M_e = M_e''$  (22); sotto  $M_e$  il diagramma si presenta come nella fig. 26a. Per  $M$  crescente al di là di  $M_e$ , e finché  $\sigma_f < \sigma_{fo}$ , il diagramma si presenta come nella fig. 26b.



0 500 Kg/cm<sup>2</sup>

Fig. 26a

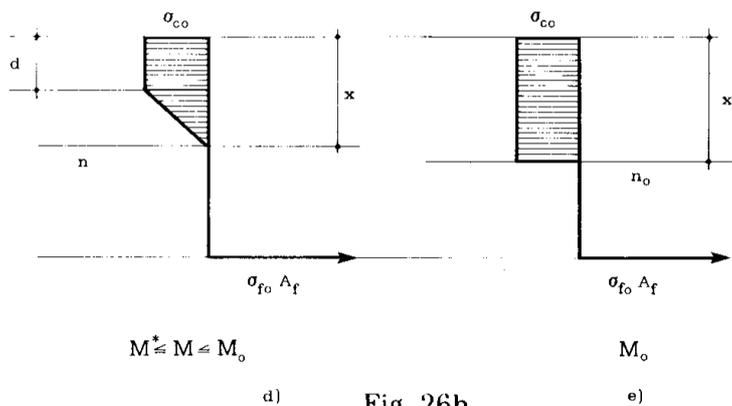


Fig. 26b

Le incognite sono  $x$ ,  $d$  e  $\sigma_f$ ; le condizioni sono quella di equilibrio alla traslazione secondo l'asse, quella di equivalenza alla rotazione intorno al baricentro dell'armatura metallica, e quella che lega  $\frac{\sigma_f}{n}$  alla  $\sigma_c$  attraverso l'ipotesi di planeità delle sezioni rette. Si hanno così le tre equazioni

$$\begin{aligned} \sigma_f A_f + \sigma_{co} b d + \sigma_{co} b \frac{x-d}{2} &= 0 \\ -\sigma_{co} b d \left( h - \frac{d}{2} \right) - \sigma_{co} b \frac{x-d}{2} \left( h - d - \frac{x-d}{2} \right) &= M \\ -\frac{\sigma_f}{n \sigma_{co}} &= \frac{h-x}{x-d}. \end{aligned}$$

Dalla prima e dalla terza si trae

$$\xi = -p + \sqrt{p^2 + 2p + \delta^2} \quad (o)$$

e dalla seconda

$$M = -\sigma_{co} b h^2 \left[ \delta \left( 1 - \frac{\delta}{2} \right) + \frac{\xi - \delta}{2} \left( 1 - \delta - \frac{\xi - \delta}{3} \right) \right]. \quad (p)$$

Se  $\sigma_f = \sigma_{fo}$ , dalla terza delle (o) si ottiene

$$\xi^* = \frac{\beta \delta^* - n}{\beta - n},$$

e sostituendo tale valore nella espressione di  $\xi$  si trae

$$\delta^* = \frac{1}{2} (1 + p - \beta \mu - \sqrt{(1 + p - \beta \mu)^2 - 4p}). \quad (9)$$

Ponendo, nella (p),  $\xi = \xi^*$  e  $\delta = \delta^*$  si ottiene il valore di  $M^*$  (fig. 26c). Per  $M > M^*$  vale ancora la (n); naturalmente, in questo caso, essa deve essere adoperata per  $\delta \geq \delta^*$ . Così pure,  $M_0$  è fornito sempre dalla (38) o (39).

La fig. 25 è stata ottenuta con i dati del primo esempio già svolto, e cioè con  $\mu = 0,475 \cdot 10^{-2}$ .

Per essa è

$x_e = 22,46 \text{ cm}$	$M_e = 48,514 \text{ tm}$
$x^* = 18,36 \text{ cm}$	$M^* = 49,430 \text{ tm}$
$x_0 = 9,18 \text{ cm}$	$M_0 = 50,450 \text{ tm}$

$$\frac{M_0}{M_e} = 1,040$$

Si sono indicati con i deponenti *e* ed *o* le quantità relative all'inizio della plasticizzazione ed alla condizione limite, con l'asterisco le quantità relative all'inizio della plasticizzazione sul secondo bordo.

Ferme restando le dimensioni  $b = 40 \text{ cm}$  ed  $h = 80 \text{ cm}$ , l'armatura si porti a  $20\phi 22$ , come nel secondo esempio già svolto.

Si ottiene così

$x_e = 41,22 \text{ cm}$	$M_e = 99,503 \text{ tm}$	
$x^* = 34,65 \text{ cm}$	$d^* = 13,00 \text{ cm}$	$M^* = 111,24 \text{ tm}$
$x_0 = 45,92 \text{ cm}$		$M_0 = 190,80 \text{ tm}$

$$\frac{M_0}{M_e} = 1,266$$

Con tali dati è disegnata la fig. 26.

Negli esempi di questo paragrafo si è adottata, come già detto, come tensione di calcolo di crisi  $\sigma_{fo}$  dell'acciaio quella caratteristica di

snervamento, e come tensione di calcolo di crisi del conglomerato  $\sigma_{c_0}$  quella caratteristica cubica a rottura a 28 giorni moltiplicata per 0,85 e divisa per 1,4. In particolare, dal diagramma  $\sigma\epsilon$  del conglomerato (fig. 22) si osserva che la  $\epsilon_c$  al limite elastico è

$$\epsilon_{ce} = -1,00 \text{ ‰} , \quad (43) ,$$

e quella al limite di rottura è

$$\epsilon_{cr} = -3,50 \text{ ‰} . \quad (44)$$

La limitazione (44) importa, come già detto al par. 1, una riduzione del valore del momento fornito dalle (38) o (39). Se  $M_r$  è il momento ridotto è  $M_r \in [M^*M_0$  [per le deboli armature (fig. 25),  $M_r \in [M_e M_0$  | per le forti. Sfruttando l'esistenza della zona di conglomerato a comportamento elastico si ha (fig. 25d) in ogni caso, purché  $d \neq 0$ ,

$$\epsilon_c = \epsilon_{ce} \frac{x}{x - d} ,$$

dove  $\epsilon_c$  è l'accorciamento al bordo compresso; ponendo  $\epsilon_c = \epsilon_{cr}$  si ha

$$\epsilon_{cr} = \epsilon_{ce} \frac{x_r}{x_r - d_r} ,$$

da cui

$$\delta_r = \left( 1 - \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_{cr}} \right) \xi_r . \quad (r)$$

Dalla (m), che vale comunque, se e solo se  $M \geq M^*$ , si ha poi

$$\delta = -2\beta\mu - \xi \quad (s)$$

e quindi, uguagliando i secondi membri delle (r) ed (s),

$$\left( 1 - \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_{cr}} \right) \xi_r = -2\beta\mu - \xi_r$$

da cui

$$\xi_r = -\frac{2\beta\mu\epsilon_{cr}}{2\epsilon_{cr} - \epsilon_{ce}}. \quad (45)$$

Dalla (s) si trae perciò

$$\delta_r = -2\beta\mu A$$

dove si è posto

$$A = \frac{\epsilon_{cr} - \epsilon_{ce}}{2\epsilon_{cr} - \epsilon_{ce}}. \quad (46)$$

Sostituendo nella (n) si ottiene il *momento al limite di rottura*  $M_r$ :

$$M_r = \sigma_{co} bh^2 \left[ \beta\mu + \frac{2}{3}\beta^2\mu^2(A^2 - A + 1) \right]; \quad (47)$$

tale valore è sempre valido per le deboli armature, ove è sempre  $M_r > M^*$ ; per le forti se e solo se supera  $M^*$ .

Per la (39) è poi

$$\frac{M_r}{M_0} = \frac{1 + \frac{2}{3}\beta\mu(A^2 - A + 1)}{1 + \frac{\beta\mu}{2}}. \quad (48)$$

Si osserva che per  $\mu \rightarrow 0$  è  $\frac{M_r}{M_0} \rightarrow 1$ , e cioè la decurtazione di  $M_0$  per effetto della rottura del conglomerato è meno sentita nel campo delle deboli armature. Si osserva pure che per  $\epsilon_{cr} = \epsilon_{ce}$  (materiale molto fragile) è  $A = 0$ , e quindi

$$M_r = \sigma_{co} bh^2 \left( \beta\mu + \frac{2}{3}\beta^2\mu^2 \right).$$

Se l'armatura è debole, tale valore è senz'altro valido, e coincide infatti con l'espressione (41) di  $M^*$ , ottenuta per deboli armature. Se l'armatura è forte, non è valido, perché risulta minore di  $M^*$ ; per forte armatura, infatti, e per  $\epsilon_{cr} = \epsilon_{ce}$ , è (fig. 26a)  $M_r = M'_e$ , che non può coincidere con il predetto valore di  $M_r$ , dove  $n$  non appare.

Per  $\epsilon_{cr} \rightarrow \infty$  è  $A \rightarrow \frac{1}{2}$ , e quindi (39)

$$M_r = \sigma_{co} b h^2 \left( \beta \mu + \frac{\beta^2 \mu^2}{2} \right) = M_0.$$

Per i valori della fig. 22 si ha

$$A = \frac{2,50}{6} = 0,4167$$

$$A^2 - A + 1 = 0,7569$$

$$\frac{M_r}{M_0} = \frac{1 + 0,50463 \beta \mu}{1 + 0,50000 \beta \mu} . \quad (49)$$

Nei due casi già esaminati ( $\beta \mu = -0,1147$  e  $\beta \mu = -0,5739$ ) risulta rispettivamente

$$M_r = 0,999436 M_0 = 50,421 \text{ tm}$$

$$M_r = 0,996273 M_0 = 190,089 \text{ tm}$$

La ricerca di  $M_r$  si è eseguita nell'ipotesi che la  $\epsilon_{cr}$  si attinga nella fase  $M > M^*$ . Come detto, ciò è senz'altro vero nel campo delle deboli armature; nel campo delle forti, invece, si ha

$$M_r \leq M^* \leftrightarrow \epsilon_f \leq \epsilon_{fe} .$$

Poiché è comunque

$$\epsilon_f = -\epsilon_{cr} \frac{1 - \xi_r}{\xi_r}$$

la suddetta condizione si scrive

$$M_r \leq M^* \leftrightarrow \xi_r \leq -\frac{\epsilon_{cr}}{\epsilon_{fe} - \epsilon_{cr}} \quad (50)$$

Per  $M_r < M^*$  la (m) cede il posto alla (o)

$$\xi_r = -p + \sqrt{p^2 + 2p + \delta_r^2},$$

e quindi l'equazione che porge  $\xi_r$  è

$$\xi_r = -p + \sqrt{p^2 + 2p + \left(1 - \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_{cr}}\right)^2 \xi_r^2}; \quad (t)$$

infatti  $\delta_r$  è sempre fornita dalla (r). Ottenuta  $\xi_r$ , e quindi  $\delta_r$  dalla (r), la (p) porge  $M_r$ .  
Dalla (t) si ha

$$\xi_r = \frac{1}{A'} (-p + \sqrt{p^2 + 2pA'}) \quad (u)$$

con

$$A' = \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_{cr}} \left(2 - \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_{cr}}\right); \quad (v)$$

è quindi (r)

$$\delta_r = \frac{\epsilon_{cr} - \epsilon_{ce}}{A' \epsilon_{cr}} (-p + \sqrt{p^2 + 2pA'}).$$

Per  $\epsilon_{cr} = \epsilon_{ce}$  è  $A' = 1$ ,  $\delta_r = 0$ ,  $\xi_r = -p + \sqrt{p^2 + 2p}$ , e cioè il valore (18) corrispondente alla  $\xi_e$  (fig. 26a).

Nel caso della fig. 26 ( $\mu = 2,376 \cdot 10^{-2}$ ) si avrebbe, dalla (45),  $\xi_r = 0,6695$ , mentre  $-\frac{\epsilon_{cr}}{\epsilon_{fe} - \epsilon_{cr}} = 0,6255$ ; quindi la (50) avverte che

il calcolo eseguito per  $M_r > M^*$  è inesatto. Invece la (t) porge  $\xi_r = 0,6371$ ; questo valore è esatto. Dalla (r) si ha poi  $\delta_r = 0,4551$ , e dalla (p)

$$M_r = 184,443 \text{ tm.}$$

Si osservi però come il caso della fig. 26 sia molto spinto nel campo delle forti armature; in genere è  $M_r > M^*$ .

Per ottenere (fig. 1) l'angolo  $\Delta\varphi_r$  di rottura si sfrutta ancora la zona elastica del conglomerato; si ha così

$$\Delta\varphi_r = - \frac{\epsilon_{cr}}{\xi_r} \frac{\alpha\ell}{h} . \quad (51)$$

Se  $M_r > M^*$ , dalla (45)

$$\delta_r = -2\beta\mu A$$

e dalla (m)

$$\xi_r - \delta_r = -2\beta\mu - 2\delta_r$$

si trae

$$\xi_r - \delta_r = -2\beta\mu(1 - 2A) .$$

E' perciò

$$\Delta\varphi_r = - \frac{\epsilon_{ce}}{2\beta\mu(1 - 2A)} \frac{\alpha\ell}{h} . \quad (52).$$

Per  $\epsilon_{cr} = \epsilon_{ce}$  è  $A = 0$ , e

$$\Delta\varphi_r = \frac{\epsilon_{cr}}{2\beta\mu} \frac{\alpha\ell}{h} ;$$

per  $\epsilon_{cr} \rightarrow \infty$ ,  $A \rightarrow \frac{1}{2}$ , e  $\Delta\varphi_r \rightarrow \infty$ .

Se  $M_x < M^*$ , vale sempre la (51), per cui la (u) fornisce

$$\Delta\varphi_r = - \frac{\epsilon_{cr} A'}{-p + \sqrt{p^2 + 2pA'}} \frac{\alpha\ell}{h}.$$

Per  $\epsilon_{cr} = \epsilon_{ce}$ , è  $A' = 1$ , e quindi

$$\Delta\varphi_r = - \frac{\epsilon_{cr}}{-p + \sqrt{p^2 + 2p}} \frac{\alpha\ell}{h}. \quad (z)$$

Si trae da quanto sopra che il valore del momento limite  $M_0$  fornito dalla (38) è in pratica raggiunto sempre, sia nel campo delle deboli che delle forti armature; il rapporto  $\frac{M_0}{M_e}$  aumenta al crescere della

percentuale di armatura.

La limitazione del diagramma  $\sigma\epsilon$  del conglomerato (fig. 22) non implica quindi variazioni di  $M_0$ ; in tale prospettiva il valore di  $\epsilon_{cr}$  è insignificante.

Ben altro è il discorso in relazione alla  $\Delta\varphi_r$ ; infatti il rapporto  $\frac{\Delta\varphi_r}{\Delta\varphi_e}$

è nel conglomerato armato molto più basso che nell'acciaio, e ciò significa che il diagramma ideale  $M\Delta\varphi$ , ancora riducibile (fig. 8) ad un tratto elastico OA ed un tratto plastico AB (nel caso in esame però  $M'_0 = 0$ ), è caratterizzato da una lunghezza del tratto plastico molto minore.

Nel primo dei casi studiati risulta ( $\sigma_c < \sigma_{co}$ )

$$\Delta\varphi_e = -\epsilon_c \frac{\alpha\ell}{x} = -\frac{\epsilon_c}{\xi} \frac{\alpha\ell}{h} = -\frac{\sigma_c}{E_c} \frac{\alpha\ell}{\xi h}$$

e cioè

$$\Delta\varphi_e = -\frac{\sigma_c}{\sigma_{co}} \frac{\epsilon_{ce}}{\xi} \frac{\alpha\ell}{h} \quad (54)$$

da cui ( $\sigma_c = -148,95$ )

$$\Delta\varphi_e = 2,9130 \cdot 10^{-3} \frac{\alpha l}{h},$$

mentre la (45) porge  $\xi_r = 0,1339$ , e la (51)

$$\Delta\varphi_r = -\frac{\epsilon_{cr}}{\xi_r} \frac{\alpha l}{h} = 26,1353 \cdot 10^{-3} \frac{\alpha l}{h}.$$

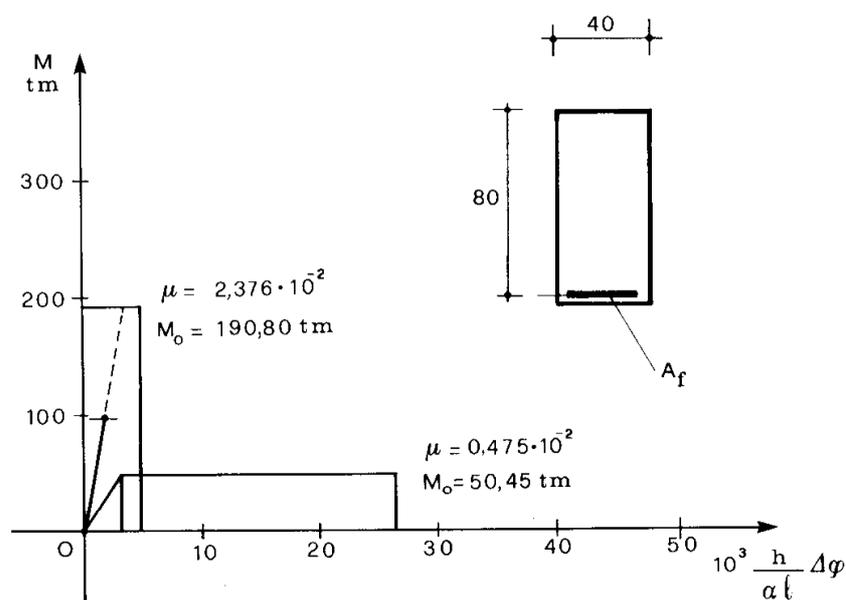


Fig. 27

Nel secondo caso<sup>(\*)</sup> è ( $\sigma_c = \sigma_{co}$ ,  $\xi_r = 0,6371$ )

$$\Delta\varphi_e = 1,9408 \cdot 10^{-3} \frac{\alpha l}{h}$$

$$\Delta\varphi_r = 5,4936 \cdot 10^{-3} \frac{\alpha l}{h}.$$

(\*) Se  $M_e = M''_e$ , sotto di esso è  $\sigma_c = \sigma_{co}$ ,  $\epsilon_c = \epsilon_{ce}$ , e quindi vale la formula analoga alla (51)

$$\Delta\varphi_e = -\frac{\epsilon_{ce}}{\xi} \frac{\alpha l}{h}. \quad (55)$$

Nel primo caso è

$$\frac{\Delta\varphi_r}{\Delta\varphi_e} = 8,98$$

e nel secondo

$$\frac{\Delta\varphi_r}{\Delta\varphi_e} = 2,83 .$$

I suddetti risultati sono riportati nella fig. 27

**4. La sezione in conglomerato armato a T, a semplice armatura**

I risultati della trattazione precedente possono essere tutti utilizzati nel caso della sezione a T con asse neutro parallelo al lato B, purché  $x \leq s$  (fig. 28a); ovviamente deve porsi

$$\mu = \frac{A_f}{Bh} .$$

E' ciò che si verifica spesso nella flessione semplice. Se però  $s/h$  è ri-

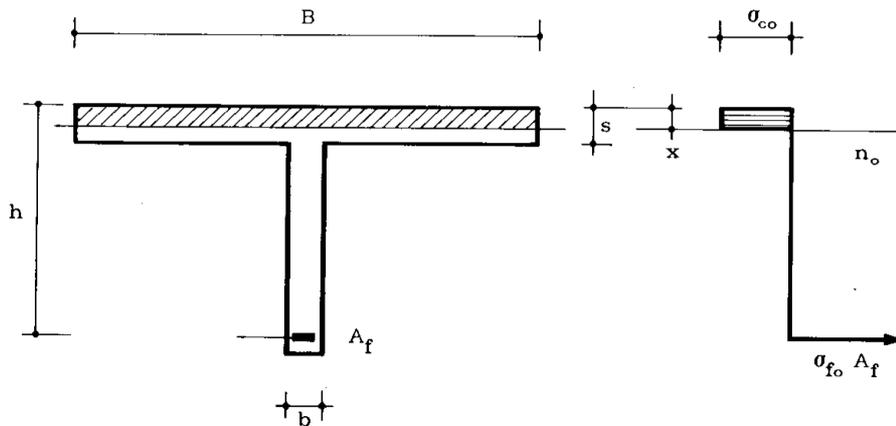


Fig. 28a

dotto, o  $\mu$  elevato, può risultare  $x > s$ . In tal caso (fig. 28b) l'equazione di equilibrio alla traslazione secondo l'asse si scrive

$$\sigma_{fo} A_f + \sigma_{co} Bs + \sigma_{co} b(x - s) = 0$$

da cui

$$x = h \left( -\beta\mu \frac{B}{b} - \frac{B - b}{b} \frac{s}{h} \right). \quad (56)$$

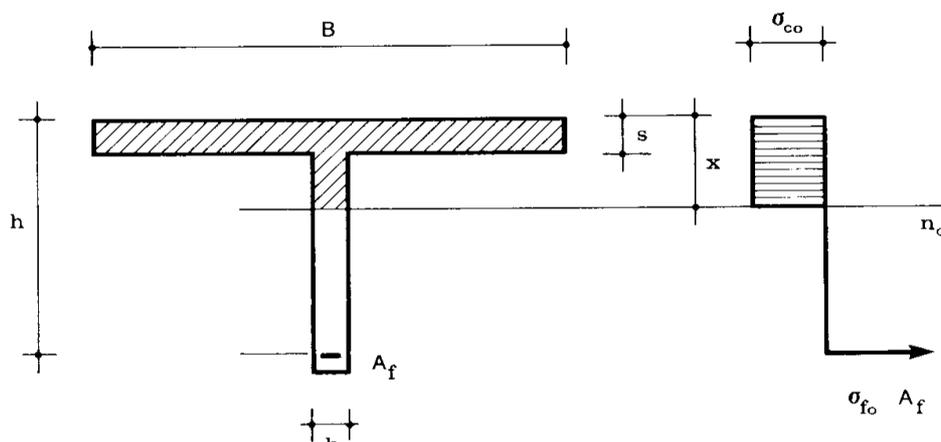


Fig. 28b

L'equazione di equivalenza relativa al momento si scrive

$$M_0 = -\sigma_{co} Bs \left( h - \frac{s}{2} \right) - \sigma_{co} b(x - s) \left( h - s - \frac{x - s}{2} \right)$$

da cui

$$M_0 = -\sigma_{co} bh^2 \left[ -\beta\mu \frac{B}{b} - \beta^2 \mu^2 \frac{B^2}{2b^2} + \frac{B - b}{b} \frac{s}{h} - \frac{B - b}{2b} \frac{s^2}{h^2} - 2\beta\mu \frac{B - b}{b} \frac{s}{h} \frac{B}{b} - \frac{(B - b)^2}{2b^2} \frac{s^2}{h^2} \right].$$

Per  $B = b$ , o per  $s = 0$ , si riottiene la (39).

Con riferimento allo stadio limite, la condizione

$$x \leq s$$

si traduce (37) nell'altra

$$\mu \leq -\frac{1}{\beta} \frac{s}{h}. \quad (57)$$

Dalla (56) si ha poi, dovendo essere  $x \leq h$ ,

$$\mu \leq -\frac{1}{\beta} \left( \frac{b}{B} + \frac{B-b}{B} \frac{s}{h} \right).$$

Quindi, con riferimento allo stato limite, può porsi  $\left( \mu = \frac{A_f}{Bh} \right)$

$$M_0 = \begin{cases} \sigma_{fo} A_f h \left( 1 + \frac{\beta\mu}{2} \right) & \text{se } 0 < \mu < -\frac{1}{\beta} \frac{s}{h} \\ \sigma_{fo} A_f h \left[ 1 + \beta\mu \frac{B}{2b} + \frac{s^2}{h^2} \left( \frac{B-b}{2B\beta\mu} + \frac{(B-b)^2}{2bB\beta\mu} \right) \right] + \\ \quad + \frac{s}{h} \left( 2 \frac{B-b}{b} - \frac{B-b}{B\beta\mu} \right) \end{cases} \quad (58)$$

$$\text{se } -\frac{1}{\beta} \frac{s}{h} < \mu < -\frac{1}{\beta} \left( \frac{b}{B} + \frac{B-b}{B} \frac{s}{h} \right).$$

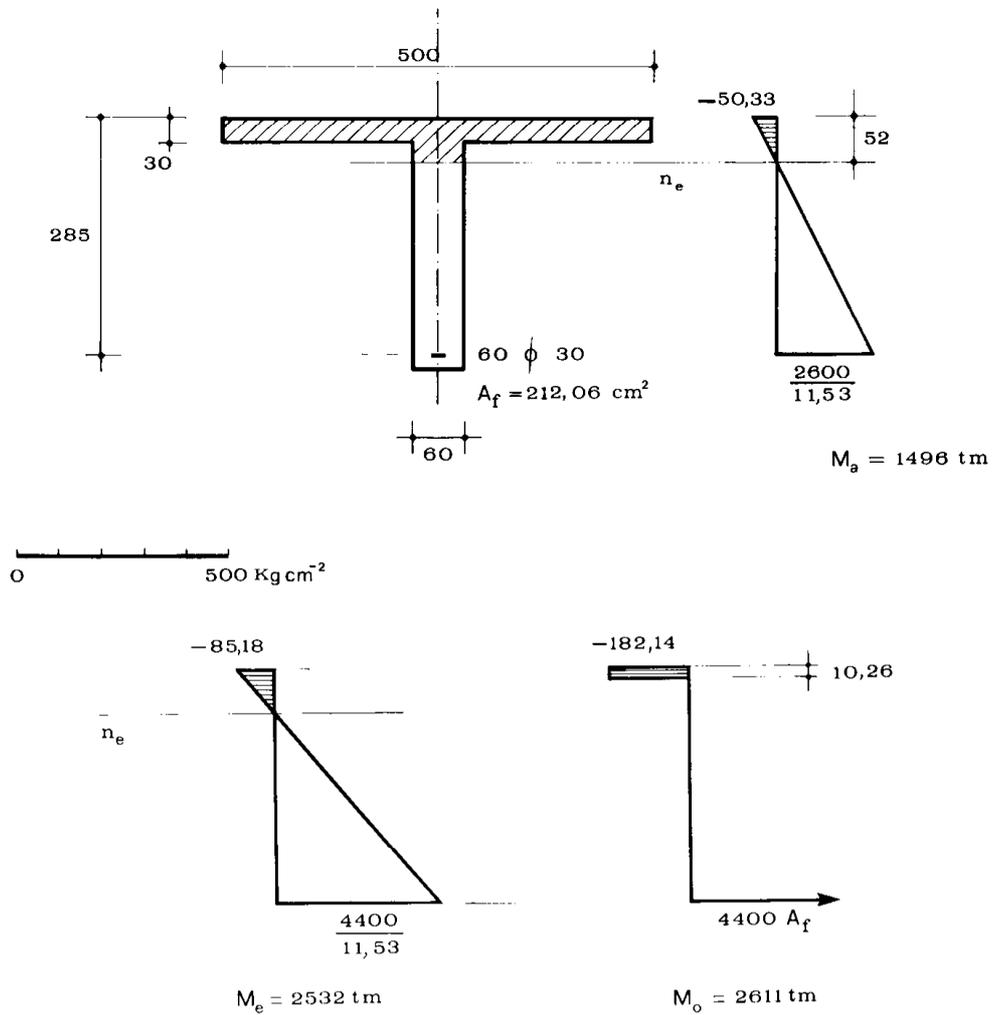


Fig. 29

Si consideri la sezione della fig. 29, dove le lunghezze sono espresse in cm, e le tensioni in  $\text{Kg cm}^{-2}$ . Per essa è, in fase elastica, per  $n = 11,53$ ,

$$x = 52,01 \text{ cm}$$

$$I = 1,546124 \cdot 10^8 \text{ cm}^4 ;$$

è inoltre

$$\mu = 0,149 \cdot 10^{-2} .$$

Considerando un materiale con le caratteristiche meccaniche già accettate, (par. 3), e cioè

$$R'_{bk} = -300 \text{ Kg cm}^{-2}$$

$$R_{ak}(s) = 4400 \text{ Kg cm}^{-2},$$

le tensioni ammissibili e limiti sono (vedi sempre par. 3)

$$\sigma_{ca} = -97,50 \text{ Kg cm}^{-2}$$

$$\sigma_{fa} = 2600 \text{ Kg cm}^{-2}$$

$$\sigma_{co} = -182,14 \text{ Kg cm}^{-2}$$

$$\sigma_{fo} = 4400 \text{ Kg cm}^{-2} .$$

Sotto un momento di esercizio pari a 100 tm è

$$\sigma_c = -3,3638 \text{ Kg cm}^{-2}$$

$$\sigma_f = 173,7494 \text{ Kg cm}^{-2}$$

Si ha così

$$M'_e = 100 \frac{4400}{173,75} = 2532,374 \text{ tm}$$

$$M''_e = 100 \frac{182,14}{3,3638} = 5414,709 \text{ tm} .$$

Si è perciò nel campo delle deboli armature. Il momento ammissibile

è il più piccolo tra i due

$$M'_a = 100 \frac{2600}{173,75} = 1496,408 \text{ tm}$$

$$M''_a = 100 \frac{97,50}{3,3638} = 2898,507 \text{ tm} .$$

Si trae da quanto sopra

$$\frac{M_e}{M_a} = 1,6925$$

Ad  $M_a$  corrisponde

$$\sigma_c = 50,33 \text{ Kg cm}^{-2} ,$$

e ad  $M_e$

$$\sigma_c = 85,19 \text{ Kg cm}^{-2} .$$

Poiché è  $\beta = -24,157$ , risulta

$$-\frac{1}{\beta} \frac{s}{h} = 0,436 \cdot 10^{-2} > \mu$$

e quindi vale la prima delle (58); si ha così

$$M_0 = 2611,374 \text{ tm}$$

$$x_0 = -h\beta\mu = 10,26 \text{ cm} .$$

E' perciò

$$\frac{M_0}{M_e} = 1,0312$$

$$\frac{M_0}{M_a} = 1,7451.$$

La sezione presa in esame è quella di un ponte a travata, ma dello stesso aspetto sono tutte le travi con soletta collaborante; in queste ultime generalmente il rapporto  $\frac{s}{h}$  è più elevato, e quindi quasi sempre il momento limite è fornito dalla prima delle (58). Si osserva però dall'esempio che ciò accade frequentemente anche nelle travate da ponte; infatti già in tale esempio la percentuale di armatura, calcolata con la (55), è abbastanza elevata per una sezione di tale tipo.

Si osserva come il rapporto  $\frac{M_0}{M_e}$  è prossimo all'unità, pur verificandosi che sotto  $M_e$  la  $\sigma_c$  è ancora molto distante da  $\sigma_{co}$ ; ciò perché nel caso in esame (debole armatura) il valore di  $M_0$  dipende prevalentemente dalla  $\sigma_{fo}$ .

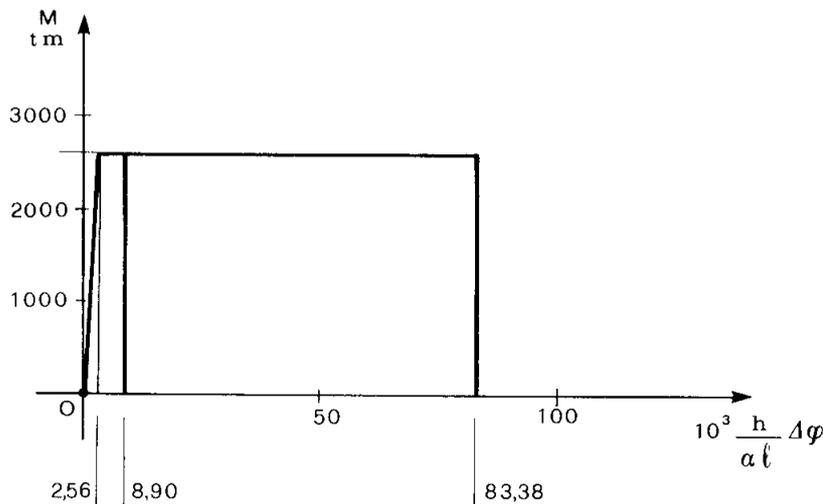


Fig. 30

Si vuole far notare che anche in questo caso il rapporto  $\frac{M_0}{M_{es}}$  è pros-

simo al valore 1,75 imposto dalle norme italiane.

Il diagramma  $M\Delta\varphi$  si presenta come nella fig. 30 .

Per il calcolo di  $\Delta\varphi_r$ , se  $x_r \leq s$  vale quanto detto al par. 3.  
Poiché dalla (46), con i dati della fig. 22, si trae come già detto  $A = 0,4167$ , è (45)

$$\delta_r = -2\beta\mu A = -0,8334 \beta\mu,$$

da cui (s)

$$\xi_r = -2\beta\mu - \delta_r = -1,1666 \beta\mu ;$$

quindi se

$$\mu \leq -0,8572 \frac{s}{\beta\mu} \quad (59)$$

si può porre (51)

$$\Delta\varphi_r = -3,0012 \cdot 10^{-3} \frac{\alpha\ell}{\beta\mu h} . \quad (60)$$

Nel caso in esame risulta

$$-0,8572 \frac{s}{\beta h} = 0,3735 \cdot 10^{-2} ;$$

dunque la (59) è rispettata, e la (60) porge

$$\Delta\varphi_r = 83,38 \cdot 10^{-3} \frac{\alpha\ell}{h} ,$$

come si ha pure direttamente dalla (51), mentre<sup>(\*)</sup>

---

(\*) Dalla (27) si trae

$$E_c = 1,82143 \cdot 10^5 \text{ Kg cm}^{-2}$$

$$\Delta\varphi_e = \frac{M_e \alpha \ell}{EI} = 2,563 \cdot 10^{-3} \frac{\alpha \ell}{h} .$$

D'altro canto, sotto  $M_e$  è

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_{co}} = \frac{85,19}{182,14} = 0,4677$$

da cui

$$\epsilon_c = \frac{\sigma_c}{\sigma_{co}} \epsilon_{ce} = 0,4677 \cdot 10^{-3} ;$$

quindi, sempre sotto  $M_e$ , si ritrova (54)

$$\Delta\varphi_e = \frac{\epsilon_c}{\xi} \frac{\alpha \ell}{h} = 2,563 \cdot 10^{-3} \frac{\alpha \ell}{h} .$$

Si ha poi, corrispondentemente ad  $\epsilon_c = \epsilon_{cr}$  ( $\xi_r = 0,04199$ ),

$$\epsilon_f = \frac{\epsilon_{cr}}{\xi_r} (1 - \xi_r) = 79,85 \cdot 10^{-3} .$$

A tale proposito, sia le norme italiane che le Raccomandazioni CEB impongono una  $\epsilon_f$  massima del 10 per 1000; quella da noi ottenuta sarebbe perciò inammissibile.

Occorre però esprimere la più ferma ripulsa di tale imposizione; infatti la  $\epsilon_{fr}$  degli acciai a più elevata tensione di rottura (acciaio armonico) è sempre superiore, per l'accettazione, al 60 per 1000, per gli acciai naturali varia dal 240 al 120 per 1000. Questi poi sono valori da ottenersi attraverso una prova ordinaria a trazione su 5 o 10 diametri; in realtà, la  $\epsilon_{fr}$  misurata per piegamento (vedi per esempio [2]) attinge anche il 1000 per 1000. E' assurdo perciò imporre in buona fede alla  $\epsilon_{fr}$  il tetto del 10 per 1000; si dica piuttosto esplicitamente che con ciò la norma intende costruire garanzie nei riguardi

della fessurazione. Ma quest'ultima è già compresa tra gli stati limite di esercizio, nei cui riguardi la verifica è d'obbligo. Inoltre, la formazione di meccanismo è uno stato limite ultimo, e per esso si esigono ovviamente margini di sicurezza maggiori di quelli richiesti per gli stati limite di esercizio; è quindi eccessivo, ed illogico, imporre i primi in una verifica che per sua natura, e per esplicito dettato di norma, rientra negli stati di esercizio. In altre parole, una forte fessurazione in fase di rottura imminente non può certo preoccupare, quando ben più pressante è in tale fase il pericolo del crollo.

Si noti che anche la condizione (59), poco più restrittiva della prima delle (58), è quasi sempre rispettata nel caso delle sezioni a T; perciò il diagramma  $M\Delta\varphi$  si presenta in genere come quello della fig. 30, con un notevole tratto orizzontale. Naturalmente, se  $M$  cambia di segno sono nulli sia  $M_e$  che  $M_0$ , ed è nullo  $\Delta\varphi_r$ .

#### 5. La sezione in conglomerato armato rettangolare, a doppia armatura.

La sezione è quella della fig. 31; siano

$$\mu = \frac{A_f}{bh} \quad (61)$$

$$\mu' = \frac{A'_f}{bh}$$

le percentuali di armatura inferiore e superiore. I dati al solito sono riferiti al nucleo cerchiato. Nella fig. 32 sono rappresentati assieme i

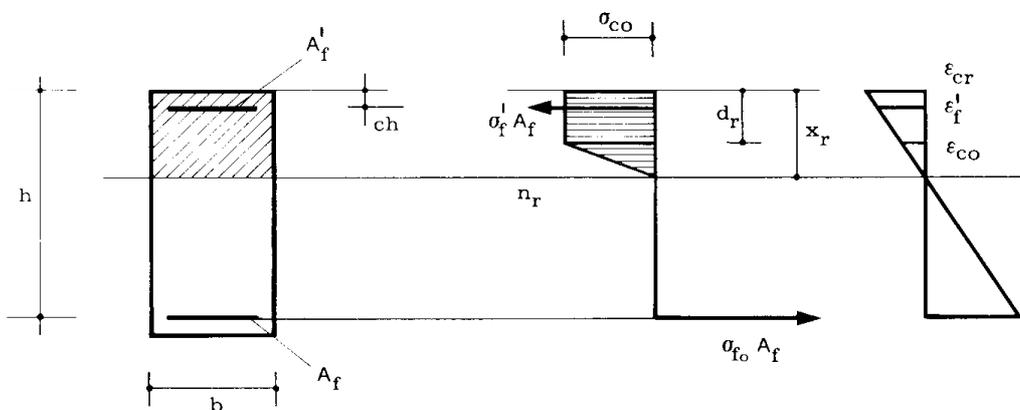


Fig. 31

diagrammi  $\sigma \epsilon$  dell'acciaio e del conglomerato, così come già forniti nella fig. 20 e 22.

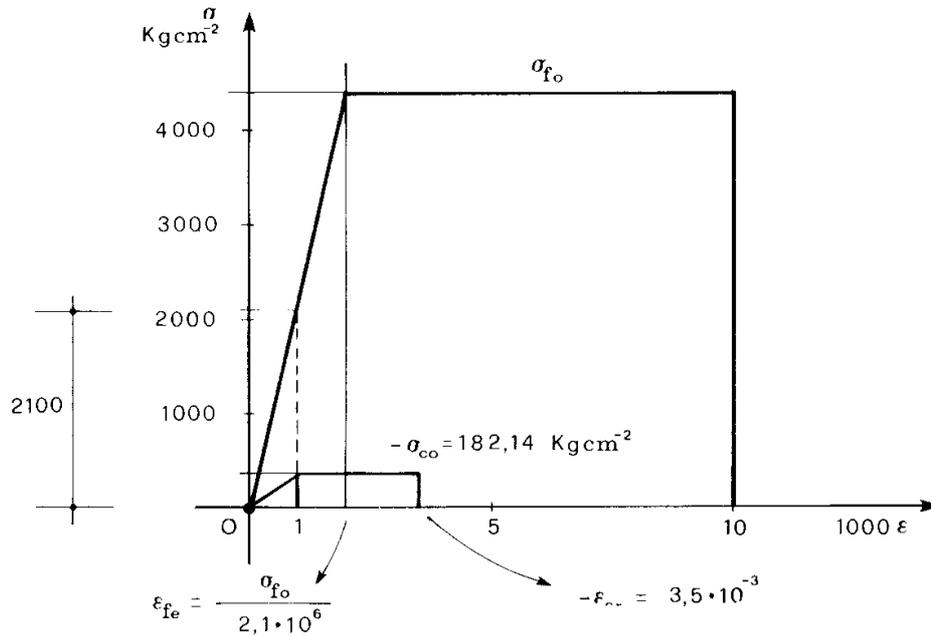


Fig. 32

In fase elastica, e nell'ipotesi di conservazione delle sezioni piane, si ha

$$\sigma_f = -n \sigma_c \frac{h-x}{x} = -n \frac{1-\xi}{\xi} \sigma_c \quad (62)$$

$$\sigma'_f = n \sigma_c \frac{x-ch}{x} = n \frac{\xi-c}{\xi} \sigma_c.$$

L'equazione di equilibrio alla traslazione secondo l'asse della trave si scrive

$$\sigma_f A_f + \sigma_c \frac{bx}{2} + \sigma'_f A'_f = 0 ;$$

in questa non si è tenuto conto del fatto che parte dell'area compressa  $bx$  è occupata dall'area del ferro  $A'_f$ , ma l'errore che ne consegue

nel valore del momento è trascurabile<sup>(\*)</sup>.

La suddetta equazione si scrive, per le (62), e ponendo

$$p = n\mu \quad (63)$$

$$p' = n\mu'$$

nel modo che segue

$$\xi^2 + 2\xi(p + p') - 2(p + p'c) = 0$$

da cui

$$\xi = -(p + p') + \sqrt{(p + p')^2 + 2(p + p'c)}. \quad (64)$$

La condizione di equivalenza delle  $\sigma dA$  alla coppia  $\mathfrak{M}$  di valore  $M$  porge (scritta rispetto al baricentro dell'armatura tesa)

$$M = -\sigma_c \frac{bx}{2} \left( h - \frac{x}{3} \right) - \sigma'_f A'_f h (1 - c)$$

da cui, per la seconda delle (62),

$$\sigma_c = -\frac{M}{bh^2} \frac{6\xi}{-\xi^3 + 3\xi^2 + 6p'(1-c)(\xi-c)}. \quad (65)$$

La (64) fornisce così  $\xi$ , la (65)  $\sigma_c$ , e le (62)  $\sigma_f$  e  $\sigma'_f$ . La condizione

---

(\*) Tale prassi è generale; essa del resto è giustificata dalla grossolanità dell'ipotesi di conservazione delle sezioni piane, e di comportamento elastico lineare del conglomerato, da cui deriva l'incertezza circa il valore di  $E_c$ , e quindi di  $n$ . E' accademico, in tale ordine di approssimazione, decurtare l'area del conglomerato compreso dell'area  $A'_f$ .

per cui si attingono assieme  $\sigma_c = \sigma_{c_0}$  e  $\sigma_f = \sigma_{f_0}$  è, per la prima delle (62),

$$\beta = -n \frac{1 - \xi}{\xi},$$

e cioè

$$\beta = -n \frac{1 + p + p' - \sqrt{(p + p')^2 + 2(p + p'c)}}{-(p + p') + \sqrt{(p + p')^2 + 2(p + p'c)}}$$

da cui

$$(n - \beta)p + (n - \beta)p' + n = (n - \beta)\sqrt{(p + p')^2 + 2(p + p'c)}.$$

Quadrando e sommando si ottiene

$$\mu_s = \frac{n - 2\mu'[(n - \beta)c - n](n - \beta)}{2\beta(\beta - n)}, \quad (66)$$

che è funzione di  $\mu'$ .

Per  $\mu' = 0$ , o per  $c = 1$ , si riottiene (20).

Per  $A_f = A'_f$  (armatura simmetrica) si ha invece

$$\mu_s = \frac{n}{2(\beta^2 - n^2 + \beta^2 c + n^2 c - n^2 - 2n\beta c)}. \quad (67)$$

Si è chiamato  $M^*$  il momento sotto il quale comincia a plasticizzarsi anche il secondo lembo. Se  $\mu = \mu_s$ , si ha

$$M'_e = M''_e = M^*.$$

Se  $\mu < \mu_s$ , è

$$M_e = M'_e,$$

ed in fase plastica è comunque  $\sigma_f = \sigma_{fo}$ ; quindi la  $\epsilon_{cr}$  è raggiunta per  $M > M^*$ .

Se  $\mu > \mu_s$ , è invece

$$M_e = M_e'',$$

e la  $\epsilon_{cr}$  può essere raggiunta anche per  $\epsilon_f < \epsilon_{fo}$ , e cioè per  $M < M^*$ . Questo caso però, già raro per travi a semplice armatura, lo è ancor più per travi a doppia armatura. Ci si limita perciò a trattare il caso  $M_r > M^*$ , e cioè quello (fig. 31) in cui la  $\epsilon_{cr}$  si attinge sotto  $\sigma_f = \sigma_{fo}$  (\*).

In generale è, per  $\epsilon_c = \epsilon_{cr}$ ,

$$\epsilon_f' = \epsilon_{cr} \frac{\xi_r - c}{\xi_r} = \epsilon_{ce} \frac{\xi_r - c}{\xi_r - \delta_r}, \quad (69)$$

e così pure

$$\sigma_f' = \begin{cases} -\sigma_{fo} & \leftrightarrow \epsilon_f' \in ]-\infty, -\epsilon_{fe}] \\ n\sigma_{co} \frac{\xi_r - c}{\xi_r - \delta_r} & \leftrightarrow \epsilon_f' \in [-\epsilon_{fe}, \epsilon_{fe}] \\ \sigma_{fo} & \leftrightarrow \epsilon_f' \in [\epsilon_{fe}, \infty[. \end{cases} \quad (70)$$

---

(\*) Questa condizione è sempre la (50), e cioè

$$\xi_r < \bar{\xi}$$

dove

$$\bar{\xi} = - \frac{\epsilon_{cr}}{\epsilon_{fe} - \epsilon_{cr}}.$$

Si ha, sempre per  $\epsilon_c = \epsilon_{cr}$ ,

$$\frac{x_r - d_r}{x_r} = \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_{cr}}$$

da cui

$$\xi_r = \delta_r \frac{\epsilon_{cr}}{\epsilon_{cr} - \epsilon_{ce}} \quad (71)$$

$$\xi_r - \delta_r = \delta_r \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_{cr} - \epsilon_{ce}}. \quad (72)$$

Nell'ipotesi poi  $M > M^*$ , la condizione di equilibrio alla traslazione fornisce

$$\sigma_{fo} A_f + \sigma_{co} b d + \sigma_{co} b \frac{x - d}{2} + \sigma'_f A'_f = 0 \quad (73)$$

mentre le condizioni di equivalenza tra le  $\sigma dA$  e la coppia  $\mathfrak{M}$  di valore  $M$ , scritta rispetto al baricentro delle armature tese, porge

$$-\sigma_{co} b d \left( h - \frac{d}{2} \right) - \sigma_{co} b \frac{x - d}{2} \left( h - d - \frac{x - d}{3} \right) -$$

$$-\sigma'_f A'_f h (1 - c) = M$$

---

Con i dati della fig. 32 si ha  $\epsilon_{cr} = -3,5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\epsilon_{fe} = \frac{\sigma_{fo}}{2,1 \cdot 10^6}$ , e quindi (in Kg e cm)

$$\bar{\xi} = \frac{1}{1 + 0,136 \cdot 10^{-3} \sigma_{fo}}. \quad (68)$$

La condizione  $\xi_r < \bar{\xi}$ , di verifica della  $M_r > M^*$ , e quasi sempre rispettata; essa è valida anche nel caso della sollecitazione composta di flessione e sforzo normale, come si vedrà.

e cioè

$$M = -\frac{\sigma_{co} b h^2}{2} \left( \xi + \delta - \frac{\xi^2 + \delta^2 + \xi \delta}{3} \right) - \sigma'_f A'_f h (1 - c). \quad (74)$$

Attesa la (72), la (73) porge, per  $M = M_r$ ,

$$\mu \sigma_{fo} + \sigma_{co} \delta_r \frac{2\epsilon_{cr} - \epsilon_{ce}}{2(\epsilon_{cr} - \epsilon_{ce})} + \mu' \sigma'_f = 0. \quad (75)$$

Le (75) sono tre distinte equazioni in  $\delta_r$ , secondo che  $\sigma'_f$  assuma una delle tre espressioni (70); essa offre quindi tre radici per  $\delta_r$ . Poiché (fig. 31) a parità di  $\epsilon_{cr}$  un aumento di  $x_r$  induce un aumento in modulo della risultante delle  $\sigma_c dA$ , ed eventualmente un aumento in modulo della  $\sigma'_f A'_f$  se di compressione, ed una diminuzione della stessa se di trazione, e poiché la somma delle suddette forze deve essere costante (pari a  $-\sigma_{fo} A_f$ ), se ne trae che la soluzione per  $\xi_r$ , e quindi per  $\delta_r$ , è unica.

Nell'ipotesi

$$\sigma'_f = \mp \sigma_{fo}$$

la (75) si scrive

$$\sigma_{fo} (\mu \mp \mu') + \sigma_{co} \delta_r \frac{2\epsilon_{cr} - \epsilon_{ce}}{2(\epsilon_{cr} - \epsilon_{ce})} = 0,$$

e cioè (46)

$$2A\sigma_{fo} (A_f \mp A'_f) + \sigma_{co} b d_r = 0,$$

da cui

$$\delta_r = -2A\beta (\mu \mp \mu')$$

e quindi

$$\xi_r = -2\beta(\mu \mp \mu') \frac{\epsilon_{cr}}{2\epsilon_{cr} - \epsilon_{ce}} \quad (76') \quad (76''')$$

Ovviamente, se  $\mu' \geq \mu$  la (76') va scartata perché fornirebbe  $\xi_r \leq 0$ .  
Nell'ipotesi

$$\sigma'_f = n\sigma_{co} \frac{\xi_r - c}{\xi_r - \delta_r}$$

la (75) si scrive, per le (71) e (72), e tenuto conto della (46),

$$\delta_r^2 + 2A \left( \beta\mu + n\mu' \frac{\epsilon_{cr}}{\epsilon_{ce}} \right) \delta_r - 2An\mu'c \frac{\epsilon_{cr} - \epsilon_{ce}}{\epsilon_{ce}} = 0$$

da cui

$$\begin{aligned} \delta_r = & -A \left( \beta\mu + n\mu' \frac{\epsilon_{cr}}{\epsilon_{ce}} \right) \pm \\ & \pm \sqrt{A^2 \left( \beta\mu + n\mu' \frac{\epsilon_{cr}}{\epsilon_{ce}} \right)^2 + 2An\mu'c \frac{\epsilon_{cr} - \epsilon_{ce}}{\epsilon_{ce}}} \end{aligned}$$

e quindi (71)

$$\begin{aligned} \xi_r = & \frac{\epsilon_{cr}}{2\epsilon_{cr} - \epsilon_{ce}} \left[ -\beta\mu - n\mu' \frac{\epsilon_{cr}}{\epsilon_{ce}} \pm \right. \\ & \left. \pm \sqrt{\left( \beta\mu + n\mu' \frac{\epsilon_{cr}}{\epsilon_{ce}} \right)^2 + 2n\mu'c \frac{2\epsilon_{cr} - \epsilon_{ce}}{\epsilon_{ce}}} \right] \end{aligned}$$

Naturalmente delle due radici della (76'') va scelta la positiva.  
Delle tre radici che così si ottengono dalle (76) una ed una sola soddisfa la corrispondente condizione (70); con essa si calcola  $M_r$  dalla

(74). La programmazione di tale problema è molto facile. Forniti i valori di  $\sigma_{co}$ ,  $\sigma_{fo}$ ,  $\epsilon_{cr}$ ,  $\epsilon_{ce}$ ,  $b$ ,  $h$ ,  $c$ ,  $\mu$ ,  $\mu'$ , l'elaboratore calcola il valore di  $\xi_r$  dalla (76'), e pone il quesito

$$\xi_r > 0 ? .$$

Se la risposta è negativa, si passa al calcolo di  $\xi_r$  con la (76'''); se è positiva, si passa al calcolo di  $\delta_r$  con la (71), della  $\epsilon'_f$  con la (69), e si chiede

$$\epsilon'_f < -\epsilon_{fe} ? .$$

Se la risposta è positiva, si stampano  $\xi_r$  e  $\delta_r$ , si calcola (74) e si stampa  $M_r$ ; se la risposta è negativa, si calcolano  $\xi_r$  con la (76'''),  $\delta_r$  ed  $\epsilon'_f$  sempre con le (71) e (69), e si pone il quesito

$$\epsilon'_f > \epsilon_{fe} ? .$$

Se la risposta è positiva, si stampano  $\xi_r$  e  $\delta_r$ , si calcola  $M_r$  con la (74) e si stampa; se è negativa, si prosegue calcolando  $\xi_r$  con la (76''),  $\delta_r$  con la (71),  $M_r$  con la (74), e si stampa il tutto. Il diagramma di flusso è quello della fig. 33.

Naturalmente tale programma comprende il caso della semplice armatura ( $\mu' = 0$ ); infatti per  $\mu' = 0$  sia la (76') che la (76'') e (76''') porgono

$$\xi_r = -2\beta\mu \frac{\epsilon_{cr}}{2\epsilon_{cr} - \epsilon_{ce}} ,$$

come già noto (45).

Per  $c = 0$  è  $\epsilon'_f = \epsilon_{cr}$ , e poiché  $\epsilon_{fe} < -\epsilon_{cr}$  (fig. 32), vale la prima delle (70). Se ne ha conferma dal fatto che la (76'') fornisce il valore zero ed il valore

$$\xi_r = -\frac{2\epsilon_{cr}}{2\epsilon_{cr} - \epsilon_{ce}} \left( \beta\mu + n\mu' \frac{\epsilon_{cr}}{\epsilon_{ce}} \right)$$

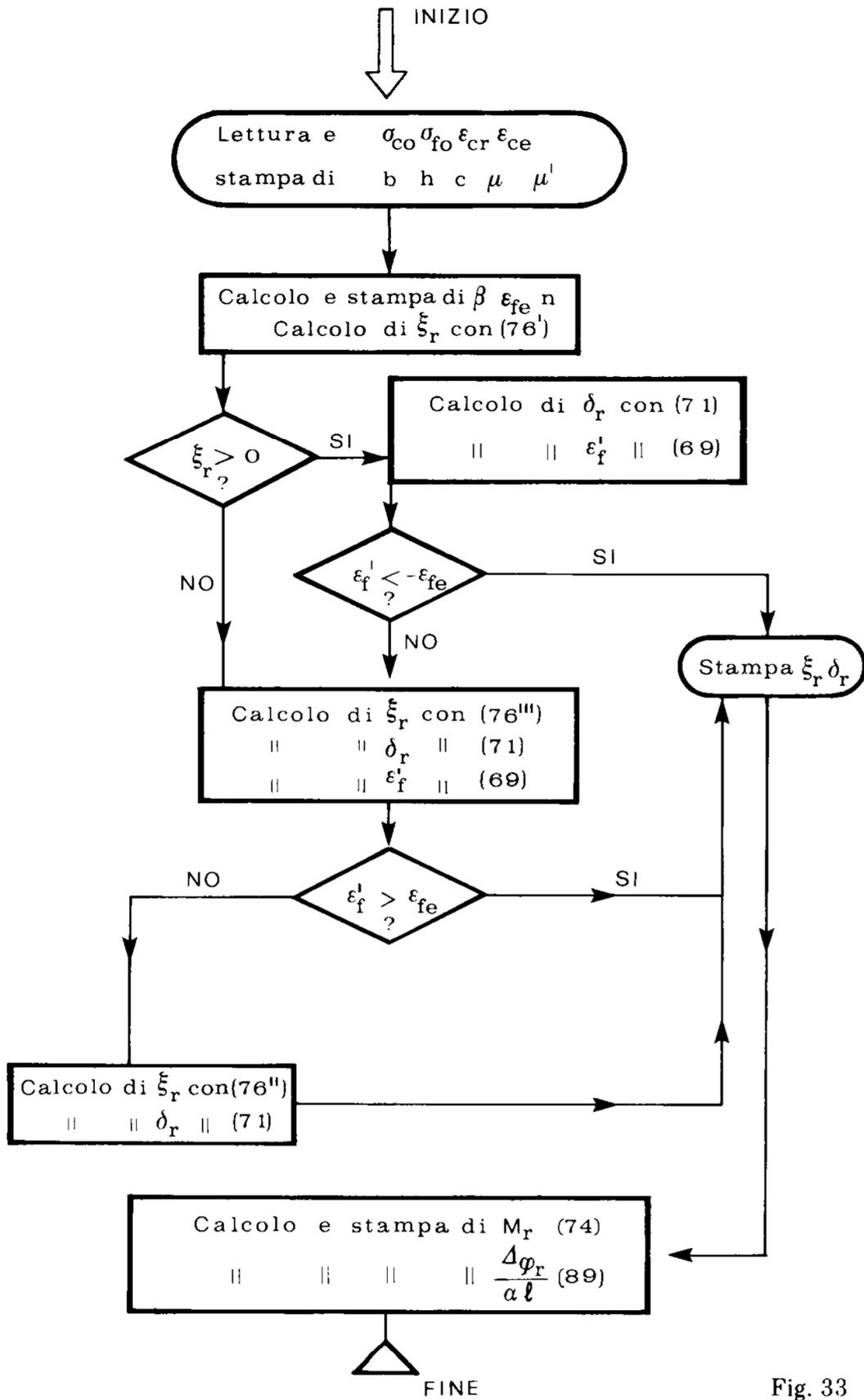


Fig. 33

che per essere positivo può essere preso in considerazione solo se

$$\beta\mu + n\mu' \frac{\epsilon_{cr}}{\epsilon_{ce}} < 0$$

e cioè se

$$\mu' < -\mu \frac{\beta}{n} \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_{cr}}. \quad (a')$$

In tal caso è (72)

$$\xi_r - \delta_r = \xi_r \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_{cr}} = -\frac{2\epsilon_{ce}}{2\epsilon_{cr} - \epsilon_{ce}} \left( \beta\mu + n\mu' \frac{\epsilon_{cr}}{\epsilon_{ce}} \right)$$

e quindi (69)

$$\epsilon'_f = \epsilon_{ce} \frac{\xi_r}{\xi_r - \delta_r} = \epsilon_{cr} \dots$$

La condizione (a'), e quella di validità della (76)''

$$\epsilon_{cr} = \epsilon'_f \in [-\epsilon_{fe}, \epsilon_{fe}],$$

e cioè

$$-\epsilon_{cr} \leq \epsilon_{fe}, \quad (b')$$

sono perciò necessarie perché sia accettabile la (76)''). Ma la (b') non è verificata con i dati delle norme (fig. 32), e quindi la (76)'' non può essere usata.

D'altro canto, la  $\sigma'_f$  non può essere pari a  $\sigma_{fo}$ , per il necessario rispetto dell'equilibrio alla traslazione lungo l'asse; quindi vale la prima delle (70), e la (76'). Poiché poi deve essere  $\xi_r > 0$ , deve anche essere  $\mu - \mu' > 0$ , e cioè  $\mu > \mu'$ . Se invece  $\mu < \mu'$ , vale la (76)'', che per  $c = 0$  si è visto ammettere la soluzione  $\xi_r = 0$ . Ma questo è un caso limite, poiché per  $x_r = 0$  alla  $\epsilon_c = \epsilon_{cr}$  corrisponderebbe  $\epsilon_f = \infty$ , e cioè il momento  $M_r$  e l'ampiezza  $\Delta\varphi_r$  devono valutarsi in relazione alla rottura dell'armatura tesa; in altre parole, il concio plasticizzato presenta tutto il conglomerato teso, e la  $\sigma_{fo} A_f$  inferiore è equilibrata da una  $-\sigma_{fo} A_f$  superiore applicata in corrispondenza dell'armatura compressa, che però non può plasticizzarsi. E' evidente che in tal caso si ha

$$M_r = M_0 = \sigma_{fo} A_f h.$$

Interessante è il caso dell'armatura simmetrica, che riguarda la maggior parte dei pilastri ( $\mu = \mu'$ ). Le (76') e (76''') si scrivono allora

$$\xi_r = 0$$

$$\xi_r = -4\beta\mu \frac{\epsilon_{cr}}{2\epsilon_{cr} - \epsilon_{ce}} ;$$

la prima non è accettabile, la seconda può essere vera solo se  $c$  è molto elevato. Infatti (69) si avrebbe

$$\epsilon'_f = \epsilon_{ce} \left( \frac{\epsilon_{cr}}{\epsilon_{ce}} + \frac{2\epsilon_{cr} - \epsilon_{ce}}{4\epsilon_{ce}} \frac{c}{\beta\mu} \right)$$

e quindi la terza delle (70) si scriverebbe

$$\epsilon_{ce} \left( \frac{\epsilon_{cr}}{\epsilon_{ce}} + \frac{2\epsilon_{cr} - \epsilon_{ce}}{4\epsilon_{ce}} \frac{c}{\beta\mu} \right) > \epsilon_{fe}$$

da cui

$$c > \left( \frac{\epsilon_{fe}}{\epsilon_{cr}} - \frac{\epsilon_{cr}}{\epsilon_{ce}} \right) \frac{4\epsilon_{ce}}{2\epsilon_{cr} - \epsilon_{ce}} \beta\mu . \quad (78)$$

Con i dati della fig. 32, e per  $\sigma_{fo} = 4400 \text{ Kg cm}^{-2}$ , la (78) si scrive

$$c > -2,732 \beta\mu ,$$

e, per  $\beta\mu = -0,03$ , valore molto basso, già si ha  $-2,732 \beta\mu = 0,082$ , quasi certamente superiore a  $c$ . Comunque, se vale la (78), dalla (77) si ricava  $\xi_r$ , e dalla (74) si ha  $M_r$ .

La (76'') invece porge  $\left( \beta + n \frac{\epsilon_{cr}}{\epsilon_{ce}} = \beta + 3,5n > 0 \right)$

$$\xi_r = \frac{\epsilon_{cr}}{2\epsilon_c - \epsilon_{ce}} \left[ -\mu \left( \beta + n \frac{\epsilon_{cr}}{\epsilon_{ce}} \right) + \sqrt{\mu^2 \left( \beta + n \frac{\epsilon_{cr}}{\epsilon_{ce}} \right)^2 + 2\mu n c \frac{2\epsilon_{cr} - \epsilon_{ce}}{\epsilon_{ce}}} \right] \quad (79)$$

Con i dati CEB di  $\epsilon_{ce}$  ed  $\epsilon_{cr}$  (fig. 32) la (79) si scrive

$$\xi_r = 0,583 \left[ -\mu (\beta + 3,5n) + \sqrt{\mu^2 (\beta + 3,5n)^2 + 12\mu n c} \right]; \quad (80)$$

si ha così (69) (71)

$$\epsilon'_f = -3,5 \cdot 10^{-3} \left( 1 - \frac{c}{\xi_r} \right)$$

$$\sigma'_f = E \epsilon'_f$$

$$\delta_r = 0,7143 \xi_r \quad (81)$$

da cui, attraverso la (74), si ottiene  $M_r$ .

Il momento limite  $M_0$  si ottiene definendo prima la posizione dell'asse neutro attraverso la condizione di equilibrio alla traslazione lungo l'asse; si ha così, ammettendo la piena plasticizzazione dell'armatura compressa (fig. 34)

$$\sigma_{co} b x_0 - \sigma_{fo} A'_f + \sigma_{fo} A_f = 0$$

da cui

$$\xi_0 = -\beta (\mu - \mu'). \quad (82)$$

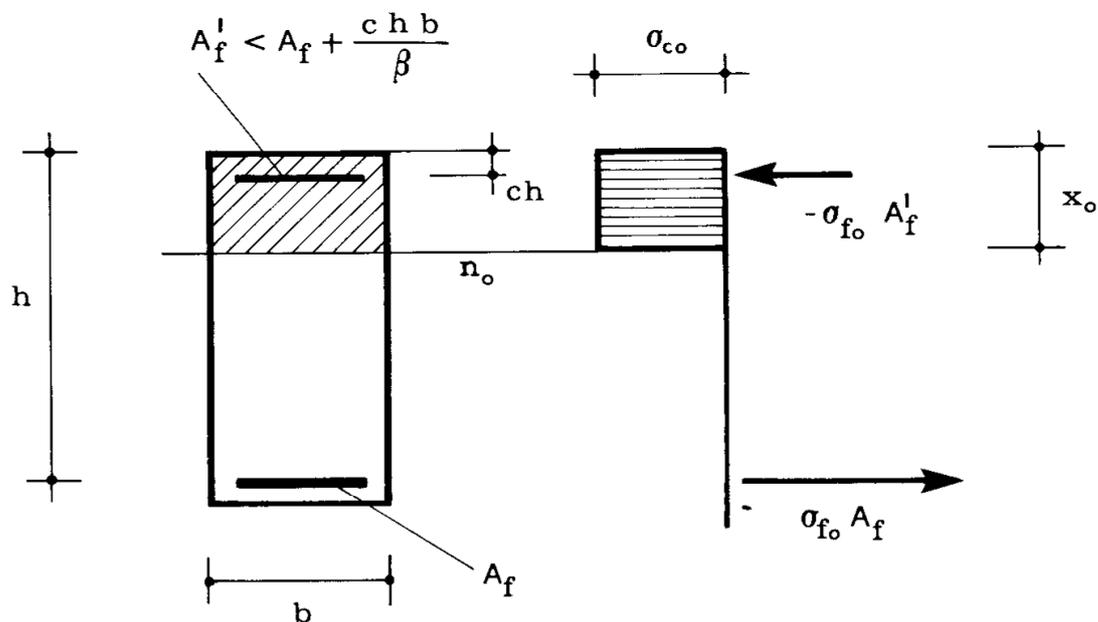


Fig. 34

Perché la  $A'_f$  sia plasticizzata a compressione occorre che sia

$$\xi_o > c,$$

e cioè

$$\mu - \mu' > -\frac{c}{\beta},$$

da cui

$$0 < \mu' < \mu + \frac{c}{\beta} \quad (83)$$

Per

$$\mu' = \mu + \frac{c}{\beta}$$

è

$$\mu - \mu' = -\frac{c}{\beta}$$

e quindi

$$\xi_0 = -\beta(\mu - \mu') = c.$$

Il momento limite  $M_0$  si ha scrivendo l'equazione di equivalenza rispetto al baricentro delle armature tese, e considerando che  $\sigma_{co}$  è la tensione limite di compressione nel conglomerato, e  $-\sigma_{fo}$  la tensione limite di compressione nell'acciaio:

$$-\sigma_{co} b x_0 \left( h - \frac{x_0}{2} \right) + \sigma_{fo} A'_f h (1 - c) = M_0$$

da cui, per la (82)<sup>(\*)</sup>,

$$M_0 = \sigma_{co} b h^2 \left[ \frac{\beta^2}{2} (\mu - \mu')^2 + \beta(\mu - c\mu') \right]. \quad (84)$$

---

(\*) Dalla

$$x_0 = -\beta h (\mu - \mu')$$

si trae

$$\begin{aligned} M_0 &= \sigma_{co} b h^2 \beta (\mu - \mu') + \sigma_{co} \frac{b h^2}{2} \beta^2 (\mu - \mu')^2 + \sigma_{fo} \mu' b h^2 (1 - c) = \\ &= \sigma_{co} b h^2 \left[ \beta (\mu - \mu') + \frac{\beta^2}{2} (\mu - \mu')^2 + \beta \mu' (1 - c) \right] = \\ &= \sigma_{co} b h^2 \left[ \frac{\beta^2}{2} (\mu - \mu') + \beta (\mu - c\mu') \right]. \end{aligned}$$

Per  $\mu' = 0$  si ritrova la (39). Per  $\mu = \mu'$  e  $c = 0$  è  $M_0 = \sigma_{fo} A_f h$ .  
Se è

$$\mu' > \mu + \frac{c}{\beta} \quad (85)$$

la  $x_0$  sarebbe minore di  $ch$ , e ciò è in contraddizione con l'ipotesi di plasticizzazione a compressione della  $A'_f$ . In tal caso non può ipotizzarsi piena plasticizzazione dell'acciaio compresso, e lo stesso concetto di cerniera plastica deve essere sottoposto ad analisi; se infatti la  $A'_f$  si plasticizzasse a trazione, la  $x_0$  sarebbe maggiore di  $ch$ , e ciò è ancora contraddittorio. La risultante di tutte le forze di compressione deve comunque essere pari a  $-\sigma_{fo} A_f$ ; così pure, la zona compressa deve essere tutta plasticizzata. Il modello fisico più ovvio è quello dell'armatura  $A'_f$  compressa ma non plasticizzata, e

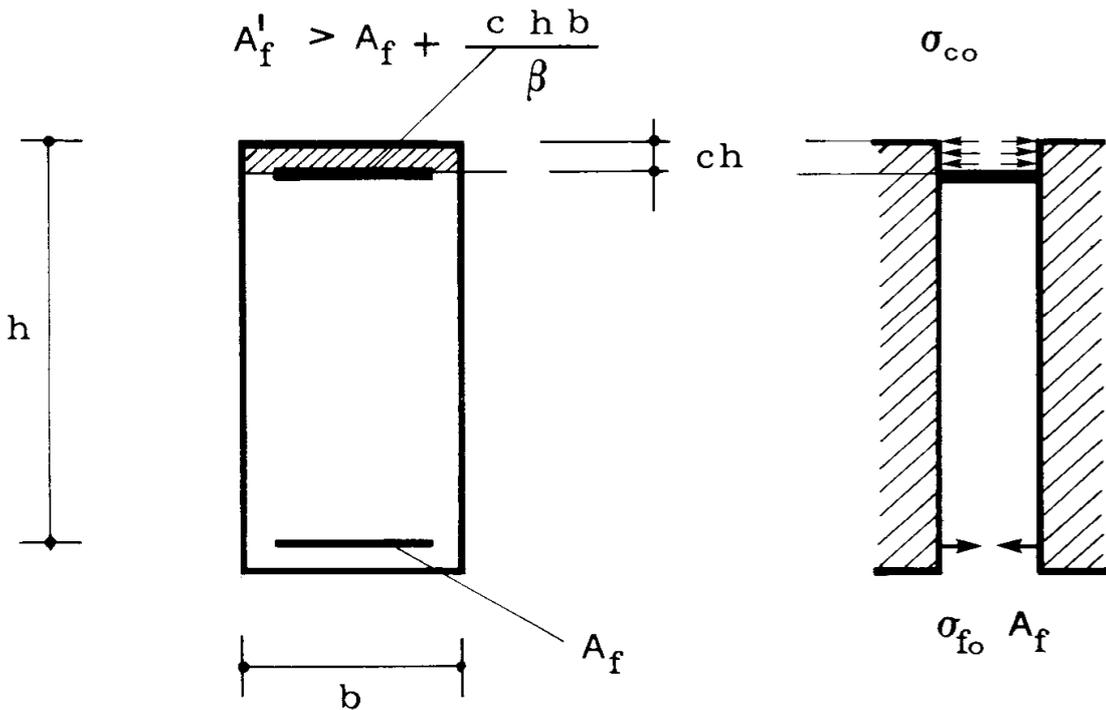


Fig. 35

della zona superiore  $ch$  di conglomerato plasticizzata (fig. 35). E' così, scrivendo l'equazione di equivalenza alla rotazione rispetto al baricentro della  $A'_f$ ,

$$M_0 = \sigma_{fo} A_f h(1 - c) - \sigma_{co} \frac{bh^2}{2} c^2 = \sigma_{co} bh^2 \left[ \beta\mu(1 - c) - \frac{c^2}{2} \right]; \quad (86)$$

l'equazione di equilibrio alla traslazione lungo l'asse

$$\sigma_{co} chb + \sigma_{fo} A_f + \sigma'_f A'_f = 0$$

fornisce

$$\sigma'_f = - \frac{\sigma_{fo} A_f + \sigma_{co} chb}{A'_f} = - \sigma_{co} \frac{c + \beta\mu}{\mu'}$$

Se vale la

$$\mu - \mu' = - \frac{c}{\beta}$$

sia la (84) che la (86) forniscono

$$M_0 = \sigma_{co} bh^2 \left[ \frac{\beta^2}{2} (\mu^2 - \mu'^2) + \beta\mu \right]. \quad (88)$$

L'angolo  $\Delta\varphi_r$  corrispondente al momento di rottura  $M_r$  è

$$\Delta\varphi_r = - \frac{\epsilon_{ce}}{\xi_r - \delta_r} \frac{\alpha\ell}{h}$$

e cioè (72)

$$\Delta\varphi_r = - \frac{\epsilon_{cr} - \epsilon_{ce}}{\delta_r} \frac{\alpha\ell}{h}$$

oppure (51)

$$\Delta\varphi_r = - \frac{\epsilon_{cr}}{\xi_r} \frac{\alpha\ell}{h}. \quad (89)$$

Lo stesso programma di cui si è parlato più sopra (fig. 33) può fornire  $\Delta\varphi_r$  una volta assegnato  $\alpha$ .

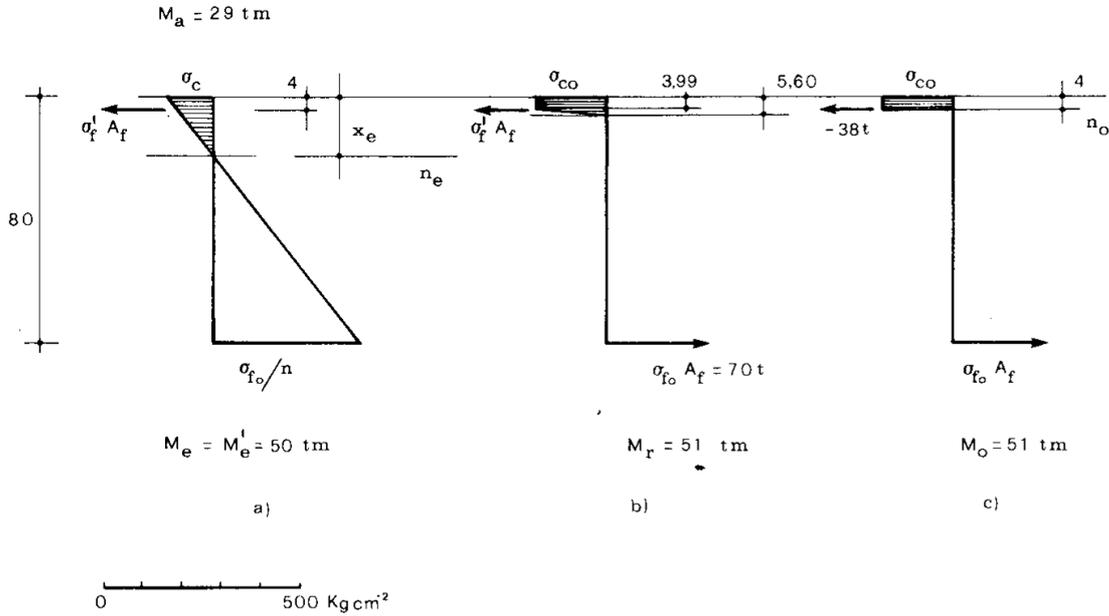


Fig. 36

Si prenda in esame la stessa sezione rettangolare studiata al par. 3, con le stesse percentuali di armatura, ma ad armatura simmetrica (fig. 38), Se la sezione è armata con 4  $\phi$  22 inferiori a 4  $\phi$  22 superiori (fig. 36) è

$$\mu = \mu' = 0,475 \cdot 10^{-2}$$

$$p = p' = 0,548 \cdot 10^{-1};$$

si ha poi, per l'acciaio già adottato (fig. 32)

$$\epsilon_{fe} = \frac{\sigma_{fo}}{2,1 \cdot 10^6} = 2,095 \cdot 10^{-3}.$$

Dalla (64) si trae, in fase elastica,

$$\xi = -2p + \sqrt{4p^2 + 2p(1 + c)} \quad (90)$$

e, per  $c = 0,05$ ,

$$\xi = 0,2469$$

$$x_e = 19,75 \text{ cm} .$$

Per  $M = 10 \text{ tm}$  risulta dalla (65)

$$\sigma_c = -25,237 \text{ Kg cm}^{-2}$$

e dalle (62)

$$\sigma'_f = -232,036 \text{ Kg cm}^{-2}$$

$$\sigma_f = 887,635 \text{ Kg cm}^{-2}$$

Dalla (67) risulta

$$\mu_s = 1,5115 \cdot 10^{-2}; \quad (c')$$

si è quindi nel campo delle deboli armature.

Infatti si ha

$$M'_a = 10 \frac{2600}{\sigma_f} = 29,291 \text{ tm}$$

$$M''_a = -10 \frac{97,50}{\sigma_c} = 38,634 \text{ tm}$$

$$M'_e = 10 \frac{4400}{\sigma_f} = 49,570 \text{ tm}$$

$$M''_e = -10 \frac{182,14}{\sigma_c} = 72,173 \text{ tm} ,$$

e quindi

$$M_a = M'_a = 29,291 \text{ tr}$$

cui corrisponde

$$\sigma_c = 73,92 \text{ Kg cm}^{-2} ,$$

ed ancora (fig. 36a)

$$M_e = M'_e = 49,570 \text{ tm}$$

cui corrisponde

$$\sigma_c = 125,10 \text{ Kg cm}^{-2} .$$

La (78) non è verificata, poiché si ha

$$-2,732 \beta \mu = 3,136 \cdot 10^{-1} > c ;$$

quindi vale la (76''), che porge (80)

$$\xi_x = 0,06996$$

$$x_r = 5,597 \text{ cm} .$$

Si ha poi (81)

$$\epsilon'_f = -0,9986 \cdot 10^{-3}$$

$$\sigma'_f = -2097,03 \text{ Kg cm}^{-2}$$

$$\delta_x = 0,04995$$

$$d_x = 3,996 \text{ cm}$$

e ancora (74)

$$M_r = 27,111 + 24,233 = 51,344 \text{ tm.}$$

Dalla (86) si ha ancora

$$M_0 = 51,429 \text{ tm ;}$$

corrispondentemente la (87) fornisce (fig. 36c)

$$\sigma'_f = -2483 \text{ Kg cm}^{-2}$$

$$F'_f = -37,75 \text{ t.}$$

L'angolo  $\Delta\varphi_e$  al limite elastico è (54)

$$\Delta\varphi_e = -\frac{\epsilon_c}{\xi} \frac{\alpha\ell}{h} = -\frac{\sigma_c}{\sigma_{co}} \frac{\epsilon_{ce}}{\xi} \frac{\alpha\ell}{h} \quad (91)$$

e cioè

$$\Delta\varphi_e = 2,782 \cdot 10^{-3} \frac{\alpha\ell}{h} .$$

La (89) fornisce poi

$$\Delta\varphi_r = 50,028 \cdot 10^{-3} \frac{\alpha\ell}{h} ,$$

cui corrisponde al lembo teso una  $\epsilon_f$  pari a

$$\epsilon_f = 3,5 \cdot 10^{-3} \frac{1-\xi}{\xi}$$

e cioè

$$\epsilon_f = 46,527 \cdot 10^{-3} .$$

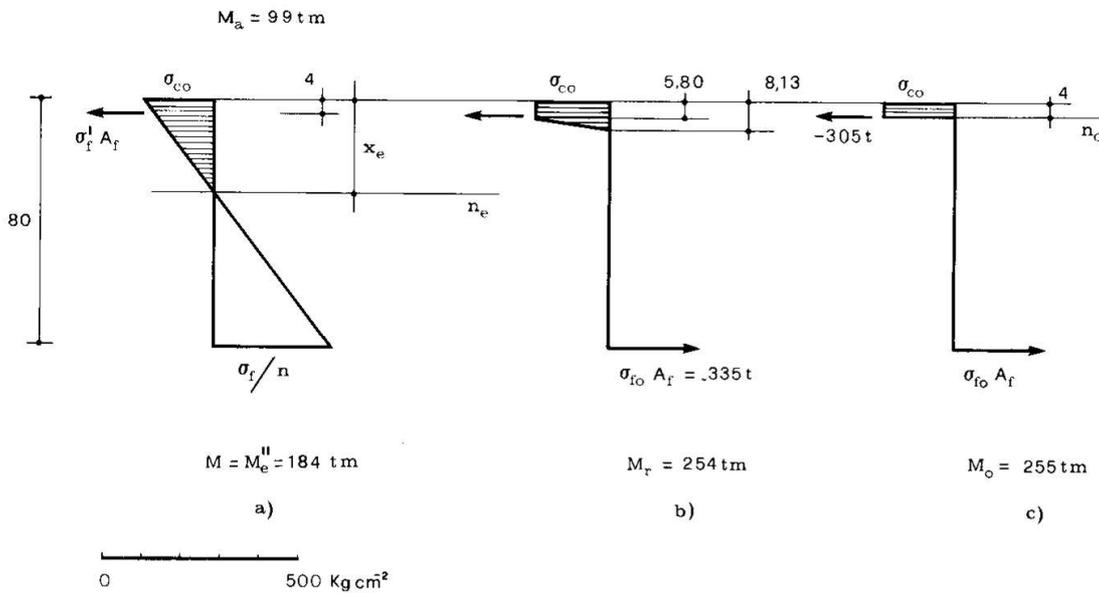


Fig. 37

Se la sezione è armata con 20  $\phi$  22 inferiori e 20  $\phi$  22 superiori (fig. 37) è

$$\mu = \mu' = 2,376 \cdot 10^{-2}$$

$$p = p' = 2,739 \cdot 10^{-1}$$

Dalla (64) si trae, per lo stesso valore di  $c$ .

$$\xi = 0,3878$$

$$x_e = 31,02 \text{ cm} ;$$

per  $M = 10 \text{ tm}$ , dalle (65) e (62) si ha

$$\sigma_c = - 9,877 \text{ Kg cm}^{-2}$$

$$\sigma'_f = - 99,192 \text{ Kg cm}^{-2}$$

$$\sigma_f = 179,794 \text{ Kg cm}^{-2} .$$

Risulta  $\mu > \mu_s$  ( $c'$ ), si è quindi nel campo delle forti armature. Infatti si ha

$$M'_a = 10 \frac{2600}{\sigma_f} = 144,610 \text{ tm}$$

$$M''_a = -10 \frac{97,50}{\sigma_c} = 98,715 \text{ tm}$$

$$M'_e = 10 \frac{4400}{\sigma_f} = 244,724 \text{ tm}$$

$$M''_e = -10 \frac{182,14}{\sigma_c} = 184,413 \text{ tm}$$

e quindi

$$M_a = M''_a = 98,715 \text{ tm}$$

cui corrisponde

$$\sigma_f = 1775 \text{ Kg cm}^{-2}$$

ed ancora (fig. 37a)

$$M_e = M''_e = 184,413 \text{ tm}$$

cui corrisponde

$$\sigma_f = 3316 \text{ Kg cm}^{-2} .$$

La (78) è ovviamente ancora non verificata, poiché si ha

$$-2,732 \beta \mu = 1,5679 > c;$$

la (80) porge

$$\xi_r = 0,10159$$

$$x_r = 8,127 \text{ cm} .$$

Si ha poi (81)

$$\epsilon'_f = -1,7773 \cdot 10^{-3}$$

$$\sigma'_f = -3732,44 \text{ Kg cm}^{-2}$$

$$\delta_r = 0,07256$$

$$d_r = 5,805 \text{ cm}$$

e ancora (74)

$$\begin{aligned} M_r &= 38,818 + 215,661 = \\ &= 254,479 \text{ tm} . \end{aligned}$$

Dalla (86) si ha

$$M_0 = 254,815 \text{ tm} ;$$

corrispondentemente la (87) fornisce (fig. 37c)

$$\sigma'_f = -4017 \text{ Kg cm}^{-2}$$

$$F'_f = - 305,37 \text{ t} .$$

Infine è (54) (51)

$$\Delta\varphi_e = 2,579 \cdot 10^{-3} \frac{\alpha\ell}{h}$$

$$\Delta\varphi_r = 34,453 \cdot 10^{-3} \frac{\alpha\ell}{h}$$

cui corrisponde al lembo teso

$$\epsilon_f = 30,953 \cdot 10^{-3} .$$

Nel primo caso è

$$\frac{M_0}{M_a} = 1,7557$$

$$\frac{M_0}{M_r} = 1,0016 ;$$

nei secondo invece

$$\frac{M_0}{M_a} = 2,5813$$

$$\frac{M_0}{M_r} = 1,0013 .$$

Nella fig. 38 sono riportati, per i due casi trattati, i diagrammi  $M\Delta\varphi$ , che giova confrontare con quelli (fig. 27) relativi alle analoghe sezioni

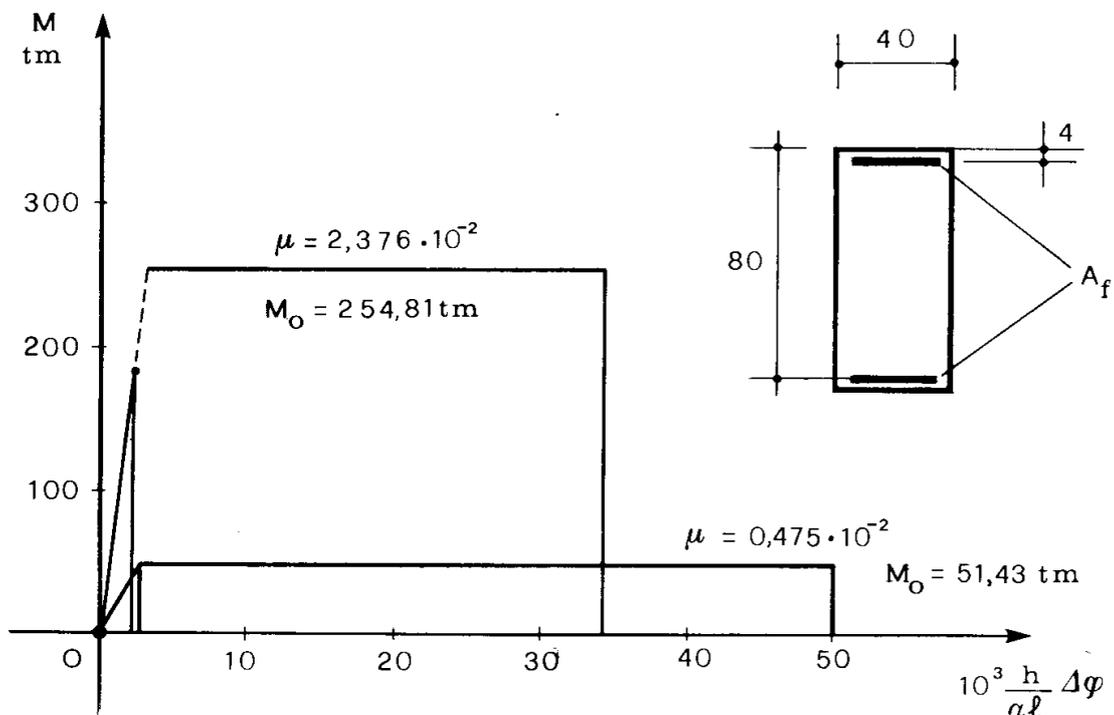


Fig. 38

a semplice armatura. Si osserva subito che l'armatura superiore varia di poco il momento limite, specialmente nel caso delle deboli armature, ma allunga molto il tratto orizzontale, specialmente nel caso delle forti armature.