

## CAPITOLO II

### STUDIO DI UN TRONCO DI TRAVE SOGGETTO A MOMENTO COSTANTE

#### 1. Il momento limite in presenza di sola flessione: la cerniera plastica.

Si consideri la trave AB della fig. 1, dove il solo concio in C, di lunghezza  $\alpha l$  trascurabile rispetto alla luce  $l$ , è deformabile; per il resto

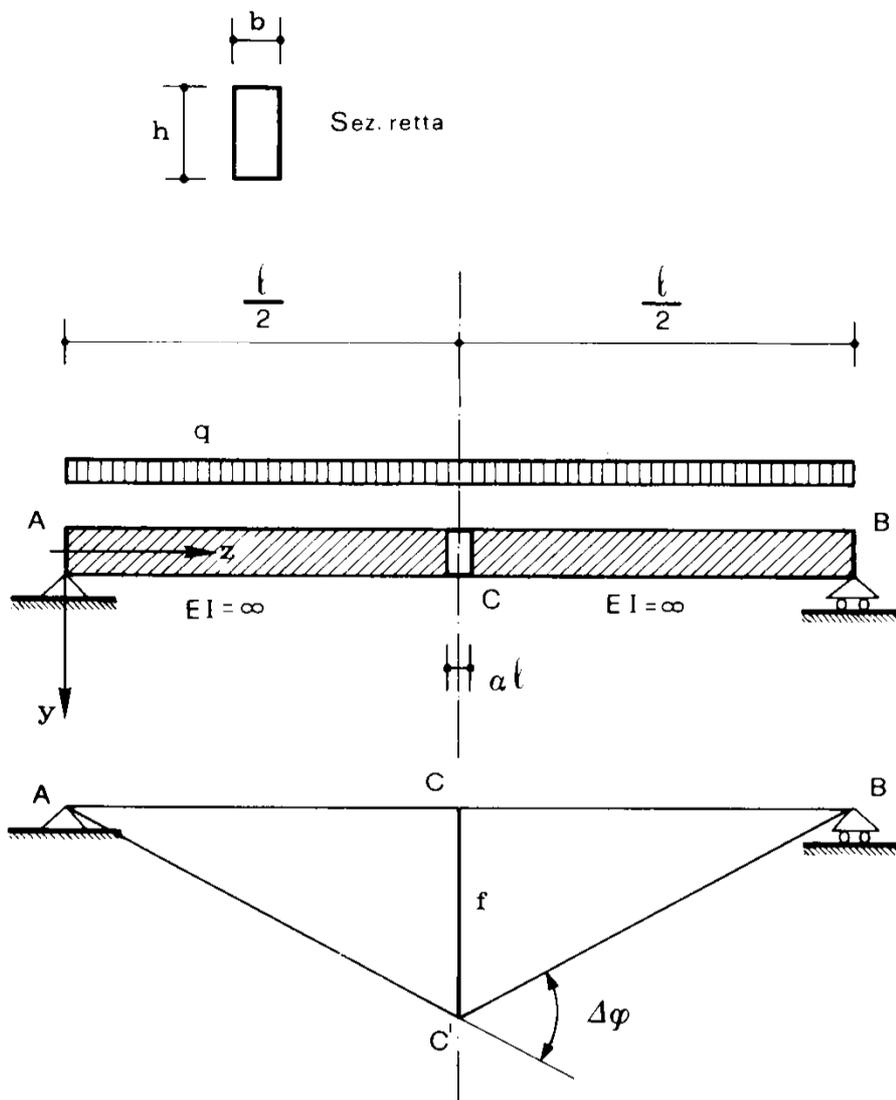


Fig. 1

sia  $EI = \infty$ . Il materiale sia duttile, e quindi iso-resistente; per esempio acciaio naturale. Il diagramma  $\sigma\epsilon$  per tale materiale sia idealizzato come nella fig. 2. La tensione  $\sigma'_0 = -\sigma''_0 = \sigma_0$  (*tensione limite*) è la tensione (di calcolo) di snervamento, pari a quella caratteristica di snervamento divisa per  $\gamma_m$ ;  $\epsilon'_r = -\epsilon''_r = \epsilon_r$  è la deformazione (di calcolo) di rottura.

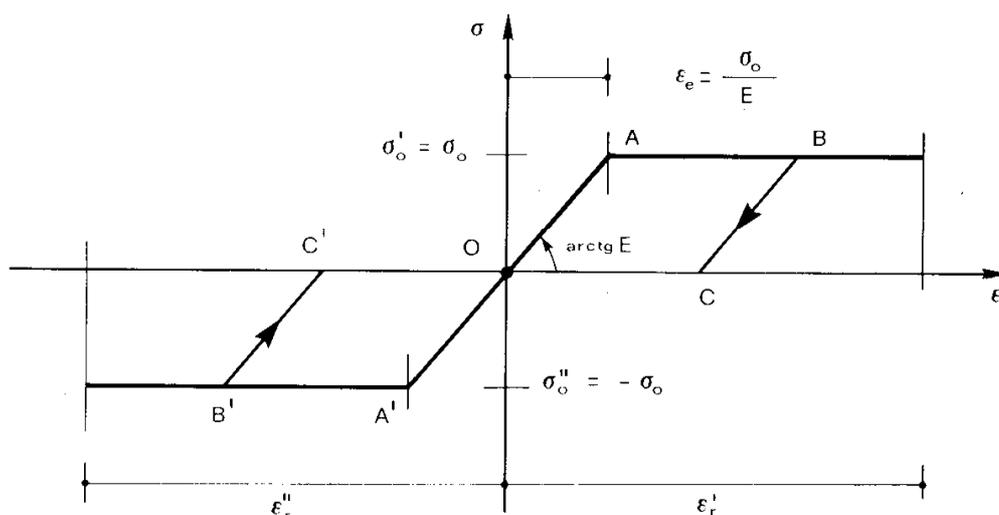


Fig. 2

La sezione sia rettangolare, di dimensioni  $b \times h$ . In C il taglio è nullo. Finché non è impegnato il campo plastico, si è in regime di elasticità lineare, la  $\sigma$  è distribuita alla Navier, e si ha (fig. 3)

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = 6 \frac{M}{bh^2}. \quad (1)$$

La (1) è valida, per  $q$  crescente a partire da zero, finché

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_0$$

e cioè finché

$$M \leq \frac{1}{6} \sigma_0 bh^2.$$

Il valore

$$M_e = \frac{1}{6} \sigma_0 b h^2 \quad (2)$$

è il momento al limite elastico.

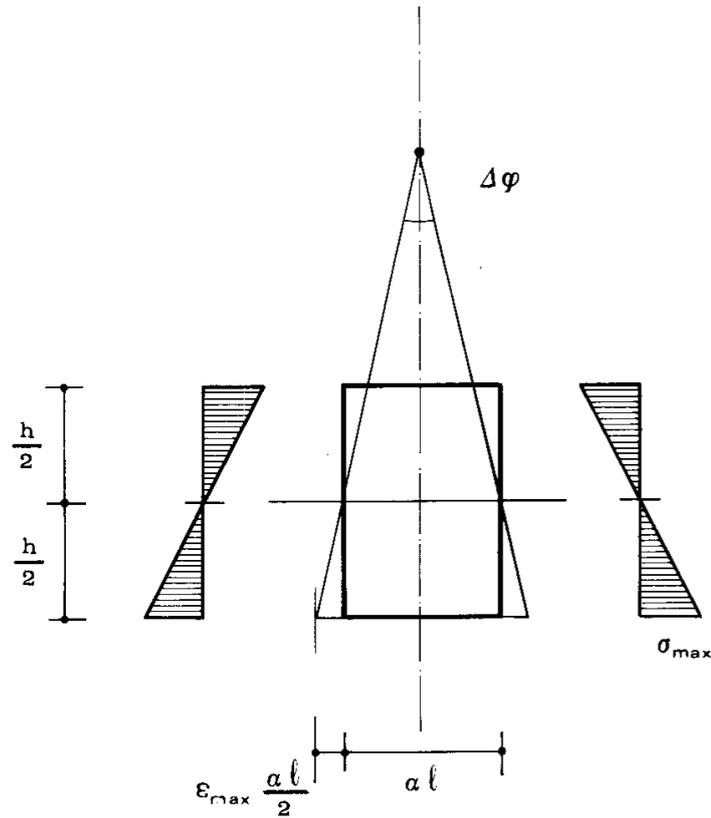


Fig. 3

Nell'intervallo

$$M \in [0, M_e] \quad (a)$$

si ha

$$\Delta\varphi = 2\epsilon_{\max} \frac{\alpha l}{h} = 2 \frac{\alpha l}{Eh} \sigma_{\max} \quad (b)$$

e cioè ancora

$$\Delta\varphi = 12 \frac{\alpha\ell}{Ebh^3} M. \quad (3)$$

Corrispondentemente la freccia in mezzeria è

$$f = \frac{\Delta\varphi}{2} \frac{\ell}{2} = 3 \frac{\alpha\ell^2}{Ebh^3} M = \frac{3}{8} \frac{\alpha\ell^4}{Ebh^3} q. \quad (4)$$

Quanto sopra presuppone l'ipotesi di piccoli spostamenti. Sempre in tale ipotesi,  $q$  cresca oltre il valore

$$q_e = 8 \frac{M_e}{\ell^2} = \frac{4}{3} \frac{bh^2}{\ell^2} \sigma_0, \quad (5)$$

che corrisponde ad  $M_e$ , e che si chiama *carico al limite elastico*. Poiché si è supposto che il tronco AC e quello BC siano infinitamente rigidi, è valida l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane. Per l'ipotesi di piccoli spostamenti, le tensioni sulle due facce del concio possono considerarsi sempre dirette secondo l'asse AC; così pure la lunghezza AC può considerarsi invariata, e la  $\Delta\varphi$  fornita sempre

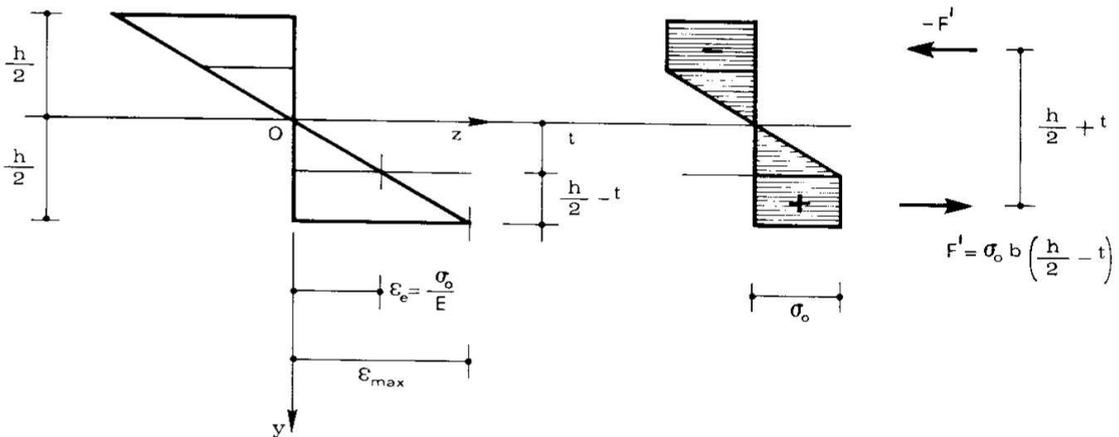


Fig. 4

dalla (b) in funzione di  $\epsilon_{\max}$ . Per l'ipotesi di planeità la  $\epsilon$  varia linearmente lungo l'altezza (fig. 4); se  $t$  è il valore di  $y$  cui corrisponde  $\epsilon = \epsilon_e = \frac{\sigma_0}{E}$ , per  $y \in [-t, t]$  è  $|\epsilon| \leq |\epsilon_e|$ , e quindi  $\sigma = E\epsilon$ , mentre al

di fuori del suddetto intervallo è  $|\epsilon| > |\epsilon_e|$ , e quindi (fig. 2)

$$\sigma = \sigma_0 \quad \text{per} \quad y \in [t, \frac{h}{2}] \quad (c)$$

$$\sigma = -\sigma_0 \quad \text{per} \quad y \in [-t, -\frac{h}{2}] .$$

In funzione di  $t$  si ha, chiamando  $M'$  il momento assorbito dalle  $\sigma_0$  nei due lembi plasticizzati, ed  $M''$  il momento assorbito dalle  $\sigma$  nella parte centrale che rimane elastica,

$$M' = \sigma_0 b \left( \frac{h}{2} - t \right) \left( \frac{h}{2} + t \right) = \sigma_0 \frac{bh^2}{4} \left( 1 - 4 \frac{t^2}{h^2} \right)$$

$$M'' = \frac{1}{6} \sigma_0 b (2t)^2 = \sigma_0 \frac{bh^2}{4} \frac{8}{3} \frac{t^2}{h^2} .$$

e quindi

$$M = \sigma_0 \frac{bh^2}{4} \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{t^2}{h^2} \right) . \quad (d)$$

Sempre in funzione di  $t$ , risulta (b)

$$\Delta\varphi = \frac{\alpha\ell}{t} \epsilon_e = \sigma_0 \frac{\alpha\ell}{Et} . \quad (e)$$

Eliminando  $t$  dalle (d) ed (e) si ottiene

$$M = \sigma_0 \frac{bh^2}{4} \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{\sigma_0^2}{E^2} \frac{\alpha^2 \ell^2}{(\Delta\varphi)^2 h^2} \right) .$$

La rotazione  $\Delta\varphi_e$  corrispondente ad  $M_e$  si trae dalla (e) per  $t = \frac{h}{2}$  :

$$\Delta\varphi_e = 2\sigma_0 \frac{\alpha\ell}{Eh} ;$$

perciò si può scrivere

$$M = \sigma_0 \frac{bh^2}{4} \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\Delta\varphi_e}{\Delta\varphi} \right)^2 \right]. \quad (f)$$

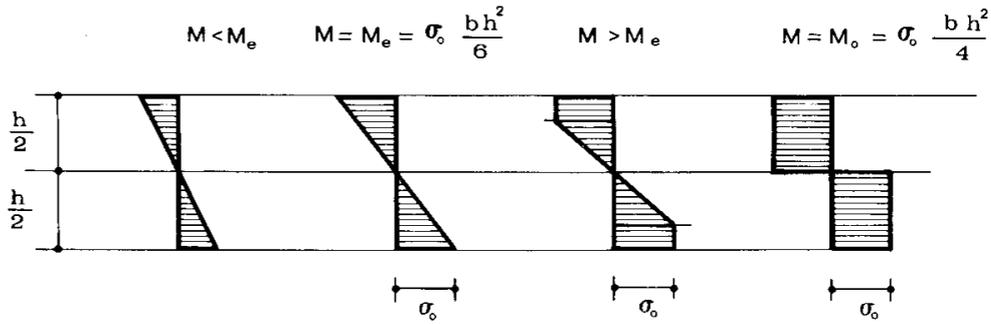


Fig. 5

Per  $t = 0$  il momento  $M$  assume il suo massimo possibile valore (d)

$$M_0 = \sigma_0 \frac{bh^2}{4} \quad (6)$$

che si chiama *momento limite* (fig. 5). Quindi la (f) porge

$$M = M_0 \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\Delta\varphi_e}{\Delta\varphi} \right)^2 \right]. \quad (7)$$

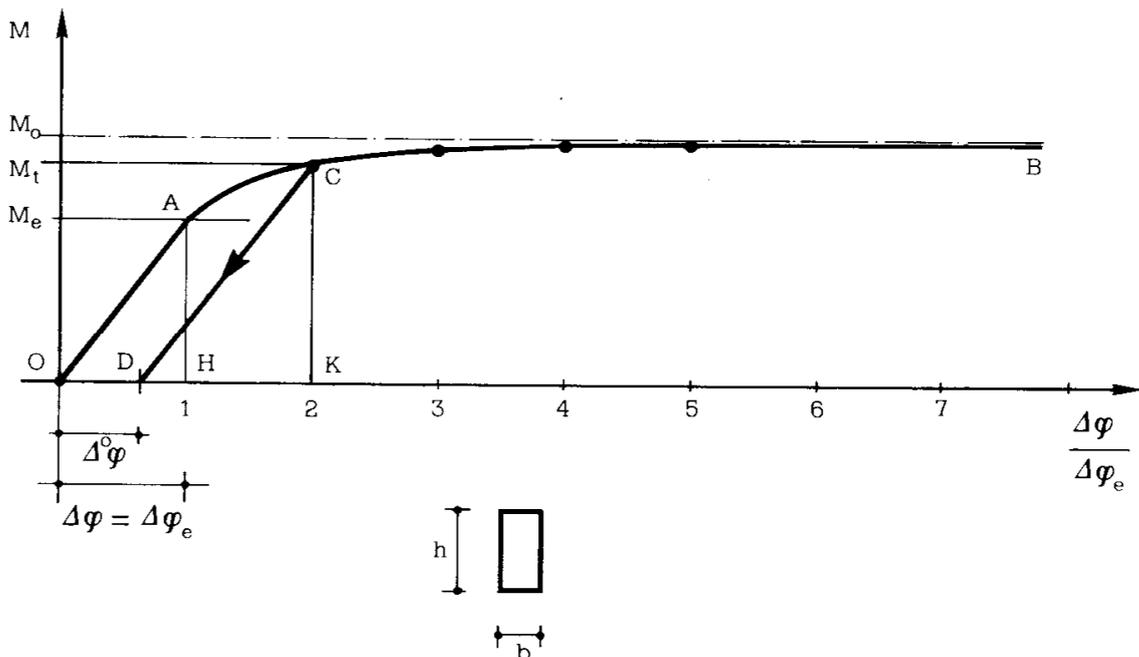


Fig. 6

Il diagramma della (7) è riportato nella fig. 6; la (7) è valida per  $\Delta\varphi \in [\Delta\varphi_e, \infty]$ , mentre per  $\Delta\varphi \in [0, \Delta\varphi_e]$  risulta (3)

$$M = \frac{Ebh^2}{12\alpha\ell} \Delta\varphi. \quad (8)$$

Quindi per  $M \in [0, M_e]$  il diagramma è il segmento di retta 0 A, per  $M \in [M_e, M_0]$  è una curva con asintoto orizzontale  $M = M_0$ . Si può scrivere la seguente tabella

TABELLA 1

$\frac{\Delta\varphi}{\Delta\varphi_e}$	$\frac{M}{M_0}$
1	0,6666
2	0,9166
3	0,9630
4	0,9792
5	0,9866
6	0,9907
7	0,9932
8	0,9948
9	0,9959
10	0,9966

Poiché è (fig. 4)

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta\varphi_e} = \frac{h}{2h_e} = \frac{\epsilon_{\max}}{\epsilon_e} \quad (g)$$

si osserva che già per  $\epsilon_{\max} = 3\epsilon_e$  si raggiunge il 96,3% di  $M_0$ . Per un acciaio FeB 38 k, con tensione caratteristica di snervamento  $R_{ak}(s) = 3800 \text{ Kg cm}^{-2}$ , e modulo elastico  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kg cm}^{-2}$ , è

$$\epsilon_e = \frac{\sigma_0}{E} = 0,00181,$$

mentre l'allungamento di rottura, che condiziona il massimo valore di  $M$ , deve essere

$$A_s \geq 0,14$$

e cioè

$$A_s \geq 77,35 \epsilon_e.$$

A tale valore di  $\epsilon_{\max}$  corrisponde  $M = 0,99994 M_0$ , e cioè  $M_0$  è in pratica attinto integralmente; inoltre il valore di rottura di  $\Delta\varphi$  è  $\Delta\varphi_r = 77,35 \Delta\varphi_e$ .

Conviene anche indagare sui limiti entro cui è valida l'ipotesi di piccoli spostamenti, che condiziona tutta la trattazione. A ciò fare, occorre fissare  $\alpha$ ; se per esempio  $\alpha = 0,1$ , e  $\frac{h}{\ell} = \frac{1}{15}$ , si ha

$$\Delta\varphi_e = \frac{2 \cdot 0,1 \cdot 15 \cdot 3800}{2,1 \cdot 10^6} = 0,00543$$

e quindi

$$f = \frac{\Delta\varphi_e \ell}{4} = 0,0014 \ell.$$

Per  $\Delta\varphi = 10 \Delta\varphi_e$  si ha

$$f = 0,0136 \ell$$

ancora tollerabile; ed infatti

$$\operatorname{tg}(10 \Delta\varphi_e) = \operatorname{tg} 0,0543 \text{ rad} = 0,0543$$

e la tangente può ben confondersi con l'angolo.

Per  $\Delta\varphi = 77,35 \Delta\varphi_e = 0,42 \text{ rad}$ , è

$$\operatorname{tg} 0,42 \text{ rad} = 0,4466;$$

corrispondentemente si ha

$$f = \frac{\ell}{2} \operatorname{sen} \frac{\Delta\varphi}{2} = 0,1042 \ell.$$

L'ipotesi di piccoli spostamenti può quindi considerarsi rispettata fino al valore estremo di  $M$ , che corrisponde appunto a  $\Delta\varphi_r = 77,35 \Delta\varphi_e$ . Se (fig. 6) in corrispondenza di un punto  $C$  del diagramma, di ordinata  $M_t \in ]M_e, M_0[$ , il processo di carico si inverte, e cioè il valore di  $q$  decresce, alla diminuzione  $dM$  del momento  $M$  si accompagna una diminuzione  $d\Delta\varphi$  della rotazione relativa  $\Delta\varphi$ . Poiché (fig. 2) si ammette che in regime monoassiale il ritorno in fase elastica avvenga secondo una retta  $BC$  o  $B'C'$  parallela a quella  $AA'$  caratterizzante il comportamento elastico, in ciò confortati anche dalle raccomandazioni CEB, si può scrivere (3)

$$d\Delta\varphi = 12 \frac{\alpha\ell}{Ebh^3} dM \quad (\text{h})$$

ove sia  $d\Delta\varphi$  che  $dM$  sono negativi. Si ha pure che a  $d\Delta\varphi$  corrisponde un diagramma di tensioni alla Navier, superiormente di trazione. Dalla (h) si trae che il diagramma  $M \Delta\varphi$  nella fase di scarico è una retta parallela alla  $OA$  (fig. 6), e che alla fine di tale fase ( $q = 0$ ) si ha una rotazione residua pari a

$$\Delta^0\varphi = OK - DK = \Delta\varphi - \Delta\varphi_e \frac{M_t}{M_e}.$$

Per  $q = 0$  si ha pure un diagramma di tensioni residue  $\bar{\sigma}$  (fig. 7), dato dalla differenza tra le  $\sigma$  sotto  $M_t$ , e le  $\bar{\sigma}$  generate dalla variazione

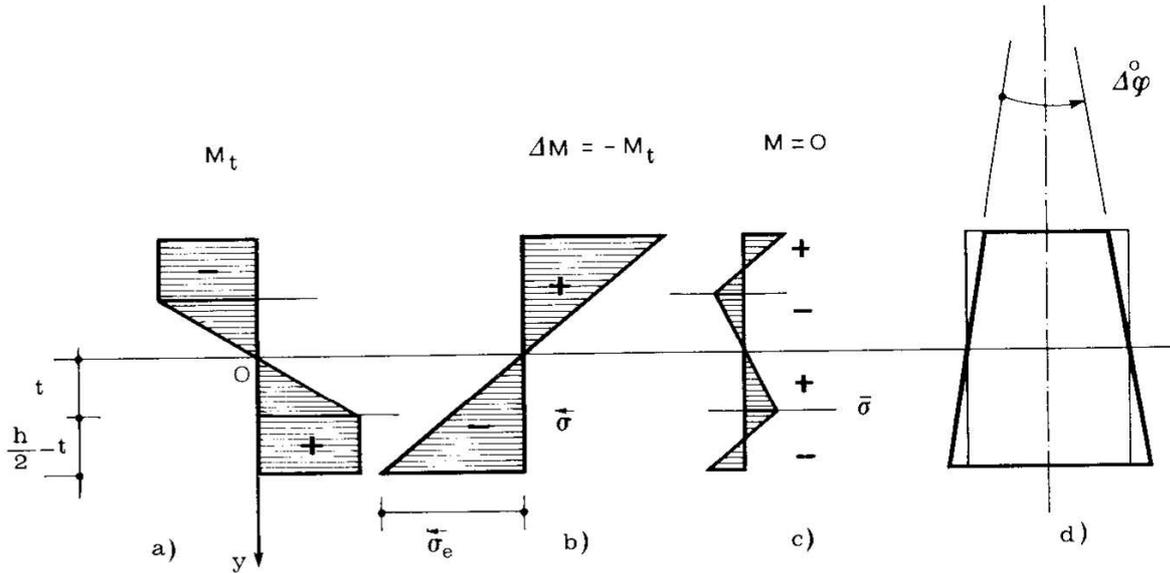


Fig. 7

$\Delta M = -M_t$ . Esso è definito dalla condizione che il momento delle  $\bar{\sigma} dA$  sia nullo. Chiamando  $\bar{\sigma}_e$  la tensione in  $y = \frac{h}{2}$  dovuta a  $\Delta M = -M_t$ , si ha

$$\sigma_0 \frac{bh^2}{4} \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{t^2}{h^2} \right) + \bar{\sigma}_e \frac{bh^2}{6} = 0$$

da cui

$$\bar{\sigma}_e = -\frac{3}{2} \sigma_0 \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{t^2}{h^2} \right)$$

Corrispondentemente è (b)

$$\Delta^0 \varphi = \Delta \varphi + 2 \frac{\alpha l}{Eh} \bar{\sigma}_e$$

e cioè (e)

$$\Delta^0 \varphi = \sigma_0 \frac{\alpha \ell}{Et} \left( 1 - 3 \frac{t}{h} + 4 \frac{t^3}{h^3} \right); \quad (9)$$

$$\text{per } t = \frac{h}{2} \quad \text{è} \quad \Delta^0 \varphi = 0, \quad \text{per } t = 0 \quad \text{è} \quad \Delta^0 \varphi = \infty.$$

Se a partire da D si esegue un secondo processo di carico, la legge  $M\Delta\varphi$  è la (3) fino al punto C, perché per  $M < M_t$  è ovunque (fig. 7)

$$\sigma = 12 \frac{M}{bh^3} y + \bar{\sigma},$$

e quindi  $|\sigma| < \sigma_0$ . Per  $M = M_t$  si riproduce il diagramma tensionale della fig. 7a, ottenuto alla fine della prima fase di carico. Se ne trae che, dato  $q$ , e cioè  $M_t$ , qualsiasi numero di ripetizione del carico non genera ulteriori rotazioni residue dopo quella ottenuta nella prima fase OAC, e le  $\sigma$  oscillano in fase elastica intorno al diagramma  $\bar{\sigma}$ . Dall'esempio svolto emergono le seguenti considerazioni:

a) Il momento  $M_e$  al limite elastico può essere superato, di una quantità tanto più grande quanto più elevato è l'allungamento a rottura del materiale, quanto più elevata cioè è la cosiddetta *duttilità* del materiale.

b) Il valore di  $M$  corrispondente alla completa plasticizzazione della sezione, e cioè il momento limite  $M_o$ , è un valore asintotico, quindi in teoria non raggiungibile; però anche per modesti valori dell'allungamento a rottura si attinge un valore di  $M$  molto prossimo ad  $M_o$ .

c) Il diagramma  $M\Delta\varphi$  si compone (fig. 6) di un tratto elastico  $OA$ , e di un tratto elastoplastico tanto più esteso quanto più elevato è il valore dell'allungamento a rottura e quanto più alto è il valore di  $\alpha$ , e cioè la lunghezza del tronco deformabile.

Per l'acciaio naturale l'ordine di grandezza della massima rotazione  $\Delta\varphi_r$  è di 50 ÷ 100 volte il valore di  $\Delta\varphi_e$  al limite elastico. Quindi il diagramma reale  $M\Delta\varphi$  della fig. 6 può comunque assimilarsi a quello ideale della fig. 8, ottenuto prolungando il segmento OA del comportamento elastico fin sull'asintoto, e confondendo la curva AB del comportamento plastico con l'asintoto, fino al valore  $\Delta\varphi_r$ . Per

l'acciaio naturale la lunghezza del tratto plastico rispetto al tratto elastico è molto elevato, e ciò è di estrema importanza, come si vedrà, nelle strutture iperstatiche. Naturalmente il diagramma  $M\Delta\varphi$  deve considerarsi anche per  $M$  (e  $\Delta\varphi$ ) negativo; nell'esempio trattato, date le simmetrie fisiche e geometriche, il diagramma per  $M < 0$  coincide con quello per  $M > 0$  ruotando intorno ad  $O$  di  $180^\circ$ .

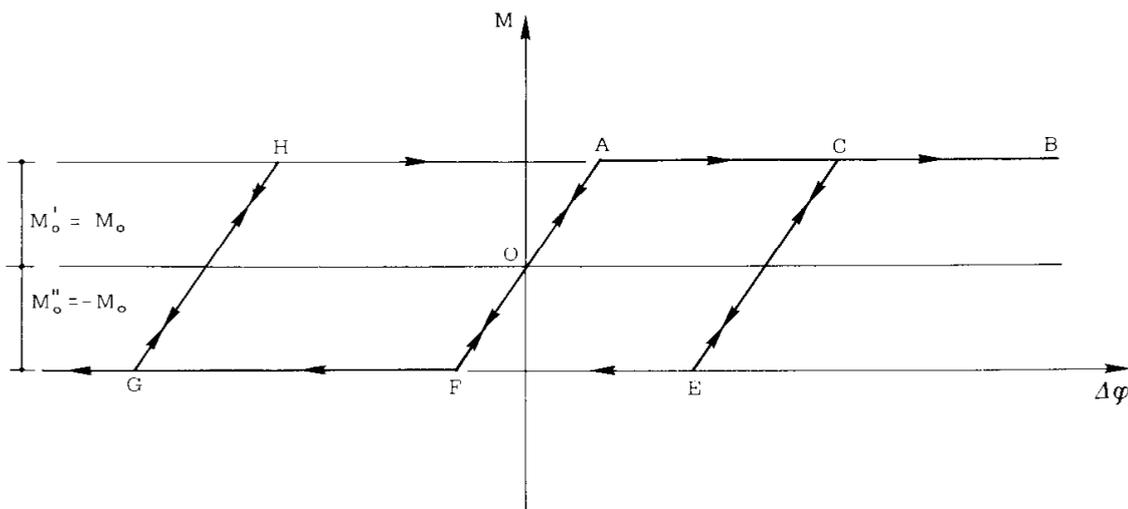


Fig. 8

Sorge così il concetto di *cerniera plastica*, o *snodo plastico*: quando in una sezione il valore del momento  $M$  raggiunge il valore limite, in essa si può verificare, sotto momento costante, una rotazione  $\Delta\varphi$  di forte ampiezza, come se si fosse formata quindi una cerniera.

Si faccia attenzione però al fatto che tale  $\Delta\varphi$  deve essere dello stesso segno di  $M$ ; e cioè, se si raggiunge il momento limite positivo  $M'_0 = M_0$ , si può avere qualsiasi rotazione  $\Delta\varphi$ , per esempio la  $AC$ , ma procedendo sempre verso destra. Se a partire da  $C$  la  $\Delta\varphi$  diminuisce, si ritorna in fase elastica, e cioè  $\Delta\varphi$  è accompagnata da una diminuzione del momento, secondo una retta  $CE$  parallela alla  $OA$ . In altre parole, il concio in corrispondenza della sezione ove è attinto il momento limite si comporta come un vincolo *unilaterale*: cerniera nel verso del momento, normale incastro elastico nel verso contrario.

## 2. Alcuni valori dei momenti limite per materiale iso-resistente.

Quanto scritto con riferimento alla sezione rettangolare è qualita-

tivamente valido per qualsiasi tipo di sezione; il valore del *momento limite*, detto anche *momento di completa plasticizzazione*, varia caso per caso.

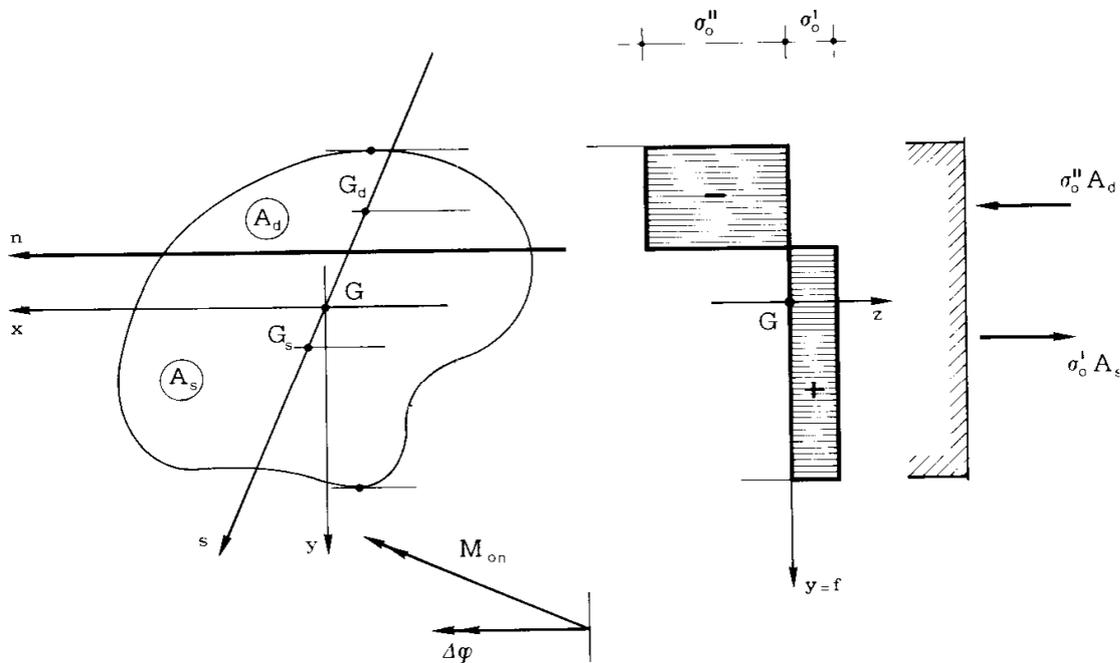


Fig. 9

Si faccia il caso generale di una sezione qualsiasi (fig. 9), e di materiale con due diverse tensioni limiti,  $\sigma'_0$  a trazione e  $\sigma''_0$  a compressione. L'asse neutro  $n$  abbia direzione e verso assegnati, per esempio quelli dell'asse  $x$  baricentrico; al verso di  $n$  sia associato lo stesso verso della rotazione plastica  $\Delta\varphi$ , e cioè le fibre tese siano alla sinistra di  $n$ . La posizione dell'asse neutro è fissata dall'uguaglianza

$$A_s \sigma'_0 = -A_d \sigma''_0, \quad (10)$$

dove  $A_s$  è l'area alla sinistra,  $A_d$  l'area alla destra dell'asse neutro; la (10) traduce la condizione di equilibrio alla traslazione secondo l'asse  $z$  della trave.

La risultante delle forze elementari  $\sigma'_0 dA$  alla sinistra dell'asse neutro è applicata nel baricentro  $G_s$  dell'area  $A_s$ , la risultante delle forze elementari  $\sigma''_0 dA$  alla destra dell'asse neutro è applicata nel baricentro  $G_d$  dell'area  $A_d$ ; il modulo comune delle due forze è fornito dalla (10). L'asse di sollecitazione  $s$  è dato dalla congiungente  $G_s G_d$ . Il

momento totale  $M_{on}$  è rappresentato da un vettore  $M_{on}$  ortogonale ad  $s$ ; il valore di  $M_{on}$  è

$$M_{on} = \sigma'_0 A_s (G_d G_s). \quad (11)$$

La componente di  $M_{on}$  su  $n$  è

$$M_{onx} = M_{on} \cos \widehat{s y} = \sigma'_0 A_s h_F, \quad (12)$$

dove  $h_F$  è la proiezione su  $y$  del vettore  $G_d G_s$ .

Come l'asse neutro non è più in genere baricentro, così l'asse di sollecitazione non è più in genere il suo coniugato nell'involuzione baricentrica di inerzia.

Se cambia il verso di  $n$ , in genere variano sia l'asse di sollecitazione che il modulo del momento limite.

Se  $\sigma''_0 = -\sigma'_0$ , la condizione (10) si traduce in quella di uguaglianza delle aree  $A_d$  ed  $A_s$ , e cambiando il verso di  $n$  l'asse di sollecitazione resta inalterato, ed il vettore  $M_{on}$  cambia solo di segno.

Sempre nell'ipotesi  $\sigma''_0 = -\sigma'_0$ , e se l'asse  $x$  è di simmetria ortogonale (fig. 10 e 12),  $x = n$  ed  $y \parallel s$  sia in fase elastica che in fase plastica; se invece l'asse di simmetria ortogonale è  $y$  (fig. 11) è  $y = s$ , ma  $n$ , pur restando parallelo ad  $x$ , non coincide con esso. Se  $\sigma''_0 \neq -\sigma'_0$ , e l'asse  $x$  o l'asse  $y$  sono di simmetria ortogonale,  $y \parallel s$ , ed  $n$  è parallelo ad  $x$  ma non coincidente con esso; nel primo caso è ancora  $M_{on} = -M_{o,-n}$ . Il caso in cui  $x$  o  $y$  sono di simmetria ortogonale corrisponde quindi alla flessione retta ( $f = s$ ,  $n \perp f$ ), ed è quello che sarà oggetto dei nostri studi ulteriori.

E' facile rendersi conto che il rapporto tra il momento limite  $M_o$  e quello di prima plasticizzazione  $M_e$  è più elevato per le sezioni in cui le aree maggiormente si addensano intorno all'asse neutro, per esempio la sezione circolare, mentre è più basso per le sezioni in cui le aree sono lontane dall'asse neutro, per esempio i profilati metallici; e cioè più basso per le sezioni meglio utilizzate in fase elastica. Ciò significa che le sezioni meno razionali sotto il profilo del calcolo classico sono le meno economiche, ma anche quelle con maggiori margini di sicurezza nei riguardi della rottura.

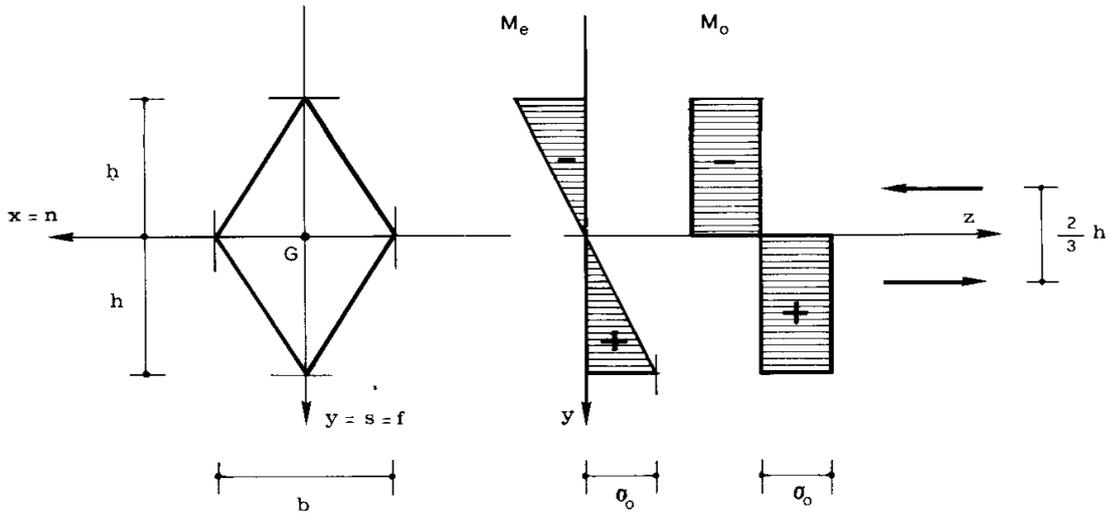


Fig. 10

Si consideri una sezione rombica (fig. 10) in cui l'asse neutro sia parallelo ad una diagonale; sia  $\sigma'_0 = -\sigma''_0 = \sigma_0$ .  
Si ha

$$I_x = 2 \frac{bh^3}{12} = \frac{bh^3}{6}$$

$$W_x = \frac{I_x}{h} = \frac{bh^2}{6}$$

$$M_e = \frac{1}{6} \sigma_0 bh^2$$

mentre è

$$M_o = \sigma_0 \frac{bh}{2} \frac{2}{3} h = \frac{1}{3} \sigma_0 bh^2$$

e quindi

$$\frac{M_o}{M_e} = 2,$$

quale che sia il rapporto  $\frac{b}{h}$ .

Si consideri poi (fig. 11) una sezione a forma di triangolo isoscele ( $AC = BC$ ) in cui l'asse neutro sia parallelo al lato  $AB$  (base).

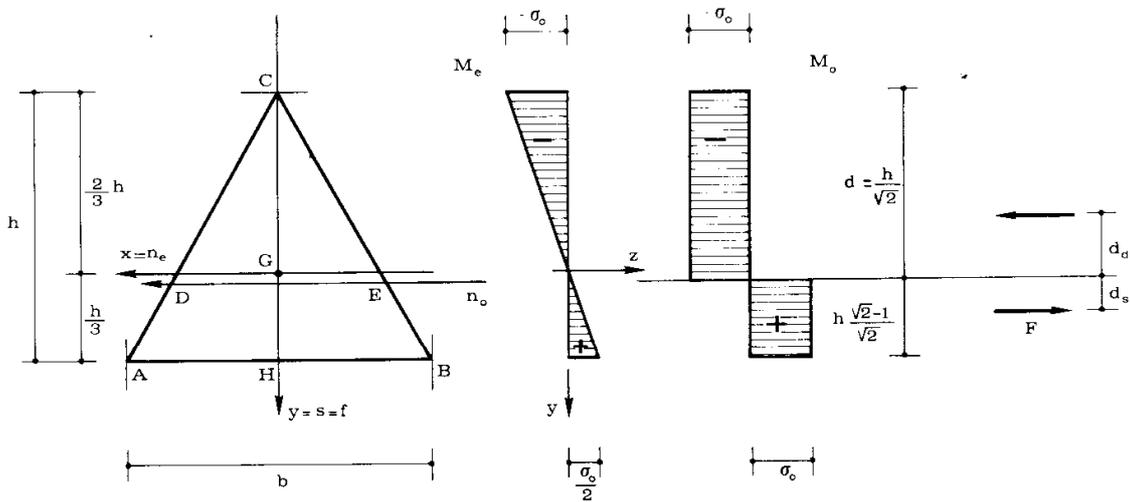


Fig. 11

Si ha

$$I_x = \frac{bh^3}{36}$$

$$W_x = \frac{3}{2} \frac{I_x}{h} = \frac{bh^2}{24}$$

$$M_e = \frac{1}{24} \sigma_0 bh^2 .$$

In condizioni di completa plasticizzazione sia  $d$  il modulo della distanza dell'asse neutro  $n_0 \ni DE$  dal vertice  $C$ ; è

$$DE = \frac{b}{h} d ,$$

e quindi le due aree sono

$$A_d = \frac{bd}{h} \frac{d}{2}$$

$$A_s = \left( b + \frac{bd}{h} \right) \frac{h-d}{2} = \frac{b}{2h} (h^2 - d^2).$$

Dalla condizione

$$A_d = A_s$$

si trae

$$d = \frac{h}{\sqrt{2}},$$

e quindi

$$A_d = A_s = \frac{bh}{4}.$$

Il modulo della distanza  $d_d$  del baricentro  $G_d$  di  $A_d$  da  $n_0$  è

$$d_d = \frac{d}{3} = \frac{h}{3\sqrt{2}}.$$

La distanza  $d_s$  del baricentro di  $A_s$  da  $n_0$  si ha dalla condizione

$$d_s = \frac{S_s}{A_s}$$

dove  $S_s$  è il momento statico rispetto ad  $n_0$  ed  $A_s$  l'area della parte alla sinistra di  $n_0$ . Poiché si ha

$$S_s = b(h-d) \frac{h-d}{2} - b \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{h-d}{2} \frac{h-d}{3} =$$

$$= \frac{b(h-d)^2}{6} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$A_s = b(h-d) - b \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{h-d}{2} = \frac{b(h-d)}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

è pure

$$d_s = \frac{h}{3} \frac{\sqrt{2-1}}{\sqrt{2}} \frac{2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$$

E' perciò

$$d_d + d_s = \frac{4h}{3\sqrt{2}} \frac{1+\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}},$$

e quindi

$$M_o = A_s \sigma_o (d_d + d_s) = \sigma_o \frac{bh^2}{3\sqrt{2}} \frac{1+\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{6} \sigma_o bh^2.$$

da cui

$$\frac{M_o}{M_e} = 2,3431.$$

Se l'asse neutro è parallelo all'altezza CH (fig. 12) si ha  $n_o = n_e$ ; e inoltre

$$M_e = \frac{1}{24} \sigma_o hb^2$$

$$M_o = \sigma_o \frac{bh}{4} \frac{b}{3} = \frac{1}{12} \sigma_o h b^2$$

e quindi

$$\frac{M_o}{M_e} = 2 .$$

Ciò era da attendersi, poiché la sezione rombica (fig. 10) risulta dall'accoppiamento di due sezioni del tipo della fig. 12 secondo la base  $b$ .

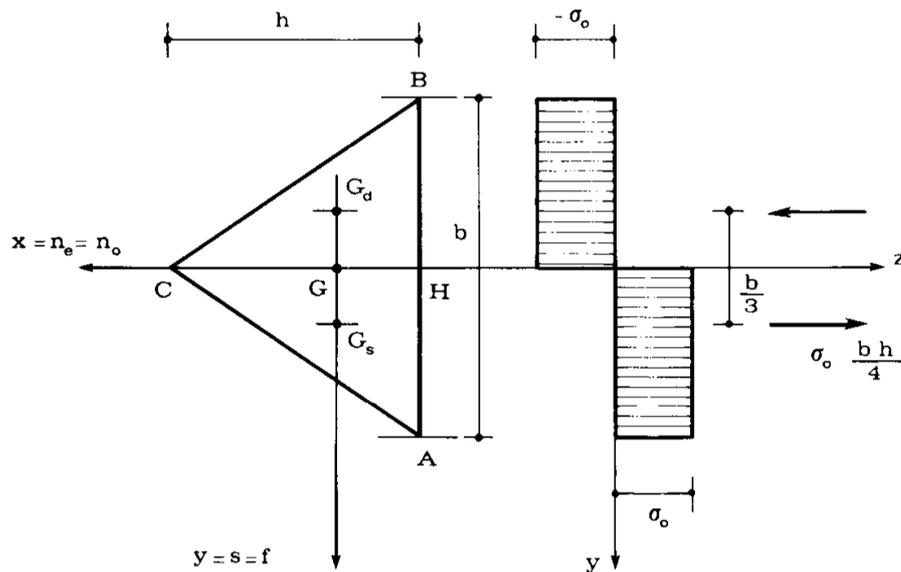


Fig. 12

In una sezione circolare (fig. 13) è

$$M_e = \sigma_o W_x = \frac{\pi}{4} \sigma_o R^3 ;$$

poiché è poi

$$G_d G = G G_s = \frac{4R}{3\pi}$$

è pure

$$M_o = \sigma_o \pi R^2 \frac{4}{3} \frac{R}{\pi} = \frac{4}{3} \sigma_o R^3$$

e quindi

$$\frac{M_o}{M_e} = \frac{16}{3\pi} = 1,6976 .$$

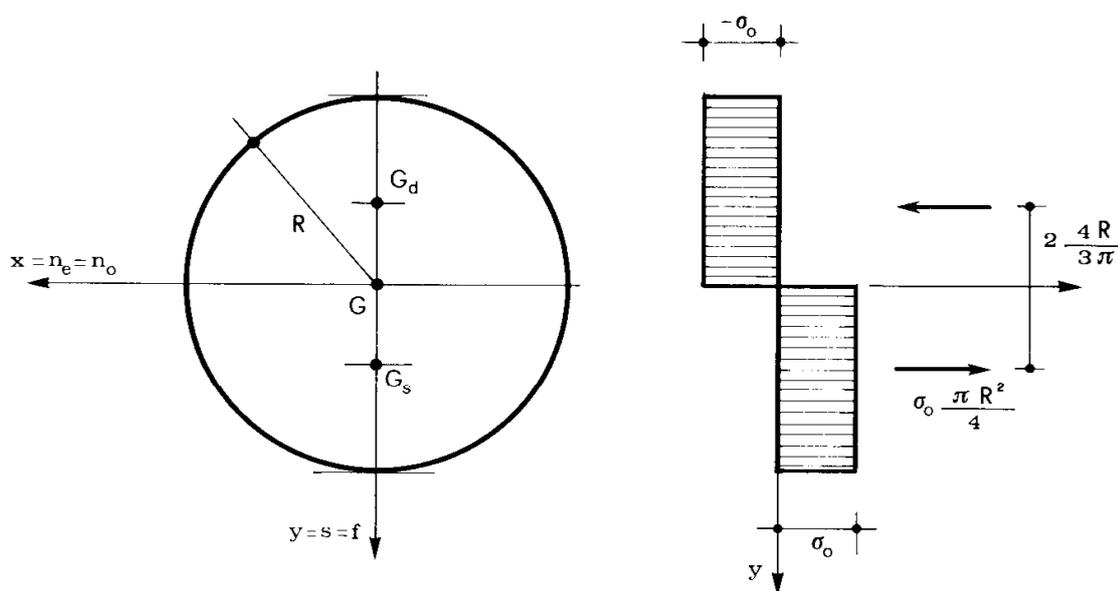


Fig. 13

In una sezione a forma di corona circolare sottile (fig. 14) è

$$M_e = \sigma_o W_x = \pi \sigma_o R^2 \delta;$$

poiché si ha

$$G_d G = G G_s = \frac{2}{\pi} R$$

è

$$M_o = \sigma_o \pi R \delta \frac{4R}{\pi} = 4 \sigma_o R^2 \delta$$

da cui

$$\frac{M_o}{M_e} = \frac{4}{\pi} = 1,2732.$$

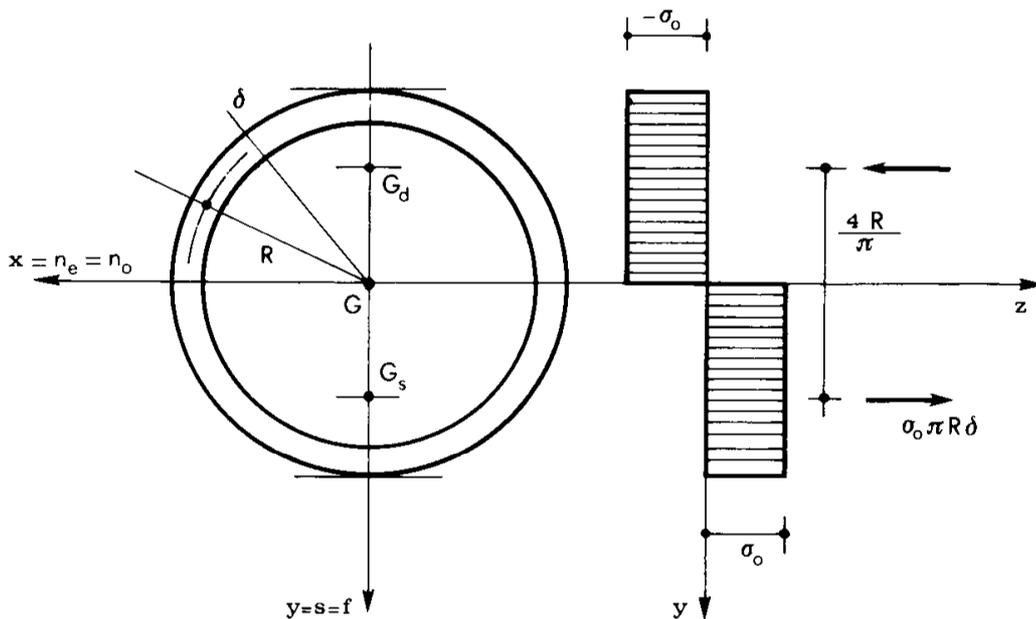


Fig. 14

Si consideri un profilato IPE 300 (fig. 15) in cui l'asse neutro sia coincidente con la retta x di massimo momento d'inerzia. Poiché risulta

$$A = 53,8 \text{ cm}^2$$

$$I_x = 8356 \text{ cm}^4$$

$$W_x = 557 \text{ cm}^3$$

$$S_x = 314 \text{ cm}^3 ,$$

dove  $S_x$  è il momento statico rispetto all'asse x della mezza sezione sottostante, si ha

$$M_e = 557 \sigma_0 \text{ Kg cm .}$$

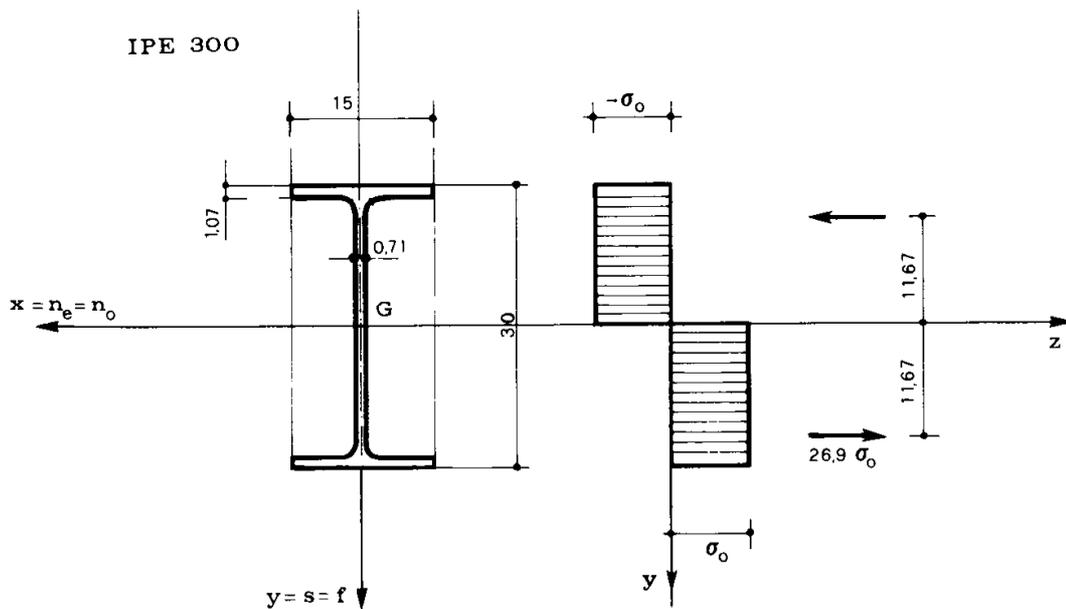


Fig. 15

E' poi

$$G_d G = \frac{2S_x}{A} = 11,67 \text{ cm}$$

e quindi

$$M_o = \sigma_0 \frac{A}{2} 2(G_s G) = 628 \sigma_0 \text{ Kg cm.}$$

da cui

$$\frac{M_o}{M_e} = 1,1274.$$

Se l'asse neutro coincide con la retta di minimo momento d'inerzia si ha (fig. 16)

$$I_x = 604 \text{ cm}^4$$

$$W_x = 80,5 \text{ cm}^3$$

da cui

$$M_e = 80,5 \sigma_0 \text{ Kg cm};$$

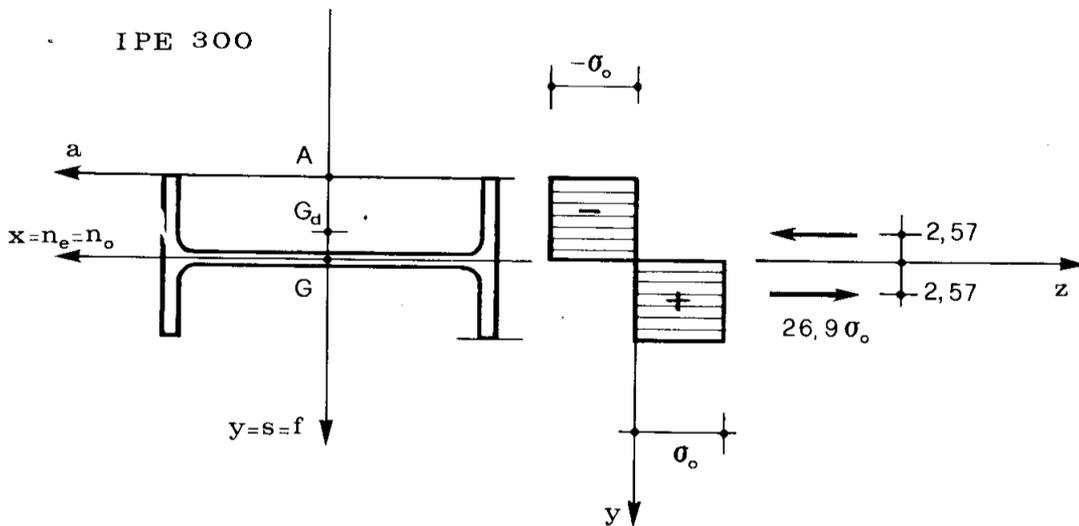


Fig. 16

E' poi, in relazione alla mezza sezione al disopra dell'asse neutro,

$$S_a = \frac{30 \cdot (7,5)^2}{2} - \frac{27,86 - (7,145)^2}{2} = 132,61 \text{ cm}^3$$

$$AG_d = \frac{2}{53,8} 132,61 = 4,93 \text{ cm}$$

$$G_d G = 2,57 \text{ cm}$$

e quindi

$$M_o = \sigma_o \frac{A}{2} 2(G_s G) = 138,28 \text{ Kg cm}$$

da cui

$$\frac{M_o}{M_e} = 1,7178.$$

**3. La sezione in conglomerato armato rettangolare, a semplice armatura**

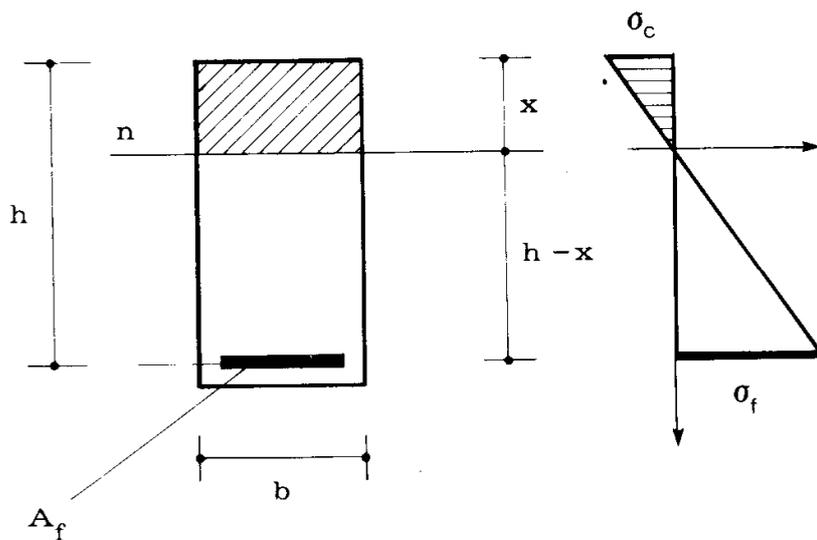


Fig. 17

I dati della sezione sono quelli riportati nella fig. 17. Essi sono presi con riferimento al nucleo cerchiato. Sia poi

$$n = \frac{E_f}{E_c} \tag{13}$$

il rapporto tra i moduli elastici dell'acciaio e del conglomerato, ove per quest'ultimo si fa l'ipotesi di elasticità lineare,

$$\mu = \frac{A_f}{bh} \quad (14)$$

la percentuale di armatura,

$$p = n\mu \quad (15)$$

la percentuale sulla sezione equivalente,

$$\beta = \frac{\sigma_{f_0}}{\sigma_{c_0}} \quad (16)$$

il rapporto tra le tensioni di crisi nell'acciaio e nel conglomerato. L'asse neutro sia parallelo al lato  $b$  (flessione retta). In fase elastica, nella ipotesi di conservazione delle sezioni piane e di non resistenza del conglomerato a trazione, chiamando  $x$  la distanza dell'asse neutro dal bordo compresso (valore assoluto),  $\epsilon_f$  la deformazione dell'acciaio ed  $\epsilon_c$  la massima deformazione del conglomerato,  $\sigma_f$  e  $\sigma_c$  i corrispondenti valori delle tensioni, si ha

$$\begin{aligned} \epsilon_f &= -\epsilon_c \frac{h-x}{x} \\ E_c \epsilon_f &= -\sigma_c \frac{h-x}{x} \\ \frac{E_c}{E_f} E_f \epsilon_f &= -\sigma_c \frac{h-x}{x} \\ \sigma_f &= -n\sigma_c \frac{h-x}{x} \end{aligned} \quad (i)$$

L'equazione di equilibrio alla traslazione secondo l'asse della trave si scrive

$$\sigma_f A_f + \sigma_c \frac{bx}{2} = 0$$

da cui

$$-n\sigma_c \frac{h-x}{x} A_f + \sigma_c \frac{bx}{2} = 0$$

$$x^2 + 2phx - 2ph^2 = 0$$

Con la posizione

$$\xi = \frac{x}{h} \quad (17)$$

si ha

$$\xi^2 + 2p\xi - 2p = 0$$

da cui

$$\xi = -p + \sqrt{p^2 + 2p} . \quad (18)$$

L'equivalenza delle  $\sigma dA$  agenti sulla sezione di normale equiversa all'asse  $z$  alla coppia  $\mathfrak{M}$  di valore  $M$  induce a scrivere

$$M = \sigma_f A_f \left( h - \frac{x}{3} \right) = \sigma_f A_f h \left( 1 - \frac{\xi}{3} \right)$$

da cui si trae, per la (18),

$$\sigma_f = \frac{3M}{hA_f} \frac{1}{(3 + p - \sqrt{p^2 + 2p})} \quad (19)$$

$$\sigma_c = -\sigma_f \frac{x}{n(h-x)} = -\frac{\sigma_f}{n} \frac{\xi}{(1-\xi)} =$$

$$= - \frac{3M}{hnA_f} \frac{-p + \sqrt{p^2 + 2p}}{(3 + p - \sqrt{p^2 + 2p})(1 + p - \sqrt{p^2 + 2p})}$$

Se al crescere di  $M$  si attingono contemporaneamente i valori di crisi  $\sigma_{co}$  e  $\sigma_{fo}$ , dalla (i) si ottiene

$$- \frac{\sigma_{fo}}{\sigma_{fo}} = \frac{\xi}{n(1 - \xi)}$$

e, per la (18),

$$\frac{-p + \sqrt{p^2 + 2p}}{1 + p - \sqrt{p^2 + 2p}} + n \frac{\sigma_{co}}{\sigma_{fo}} = 0 .$$

Si ha così

$$\left( \frac{n}{\beta} - 1 \right) p + \frac{n}{\beta} = \left( \frac{n}{\beta} - 1 \right) \sqrt{p^2 + 2p} ,$$

da cui, quadrando e semplificando,

$$\mu_s = \frac{n}{2\beta(\beta - n)} . \quad (20)$$

La (20) fornisce il valore  $\mu_s$  di  $\mu$  per cui il momento  $M_e$  al limite elastico si accompagna a contemporanea crisi ai due bordi. Se  $\mu < \mu_s$ ,  $M_e$  è definito dalla comparsa di  $\sigma_{fo}$ , se  $\mu > \mu_s$  dalla comparsa di  $\sigma_{co}$ ; il primo caso è quello dell'*armatura debole*, il secondo dell'*armatura forte*.

Nel primo caso  $M_e$  si ottiene dalla prima delle (19) per  $\sigma_f = \sigma_{fo}$ :

$$M'_e = \sigma_{fo} A_f h \frac{3 + p - \sqrt{p^2 + 2p}}{3} ; \quad (21)$$

nel secondo caso  $M_e$  si trae dalla seconda delle (19) per  $\sigma_c = \sigma_{c_0}^{(*)}$ :

$$M_e'' = -\sigma_{c_0} n A_f h \frac{(3 + p - \sqrt{p^2 + 2p})(1 + p - \sqrt{p^2 + 2p})}{3(-p + \sqrt{p^2 + 2p})}. \quad (22)$$

Nella tabella 1 e nella fig. 18 sono riportati, per  $n = 10$ , il grafico ed il diagramma della funzione  $\mu \rightarrow \xi$ .

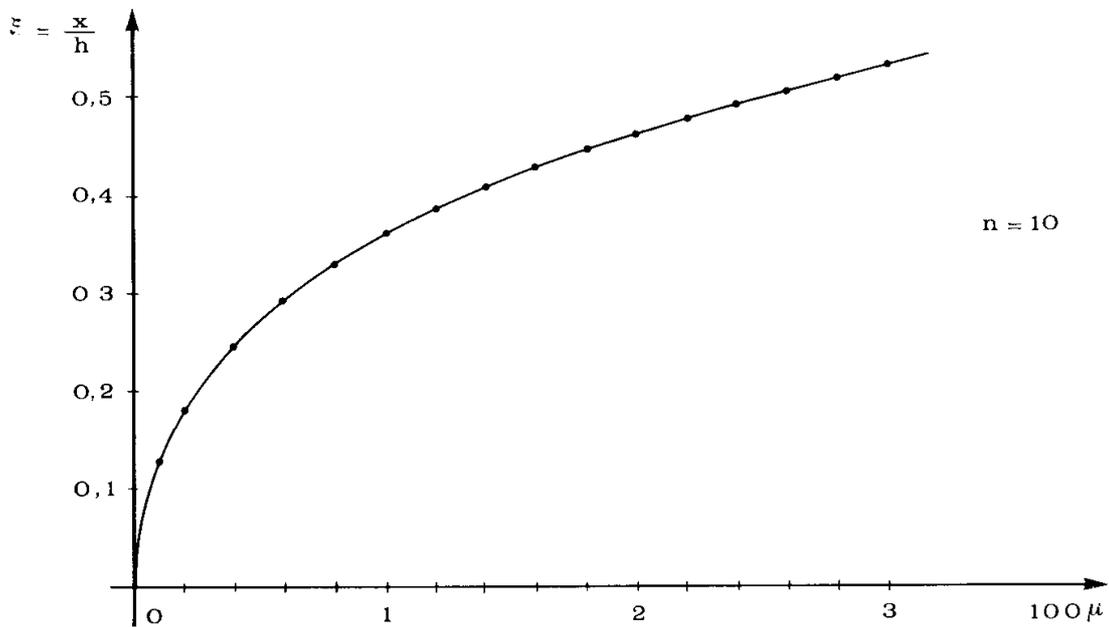


Fig. 18

Nella tabella 2 e nella fig. 19 sono riportati, per  $n = 10$ ,  $n = 15$ ,  $n = 30$ , il grafico ed il diagramma della funzione  $\beta \rightarrow \mu_s$ .

---

(\*) Si ha anche

$$M_e'' = -M_e' \frac{n}{\beta} \frac{1 + p - \sqrt{p^2 + 2p}}{-p + \sqrt{p^2 + 2p}}.$$

TABELLA 1

$100 \mu$	$\xi$
0	0
0,1	0,1318
0,2	0,1810
0,3	0,2168
0,4	0,2456
0,5	0,2701
0,6	0,2916
0,7	0,3106
0,8	0,3279
0,9	0,3437
1,0	0,3582
1,1	0,3718
1,2	0,3844
1,3	0,3962
1,4	0,4074
1,5	0,4179
1,6	0,4276
1,7	0,4374
1,8	0,4484
1,9	0,4551
2,0	0,4633
2,2	0,4788
2,4	0,4932
2,6	0,5065
2,8	0,5190
3,0	0,5306

TABELLA 2

$\beta$ $100\mu_s$	-5	-10	-15	-20	-25	-30
n=10	6,66	2,50	1,31	0,83	0,57	0,42
n=15	7,50	3,01	1,67	1,07	0,75	0,55
n=30	8,57	3,75	2,22	1,50	1,09	0,83

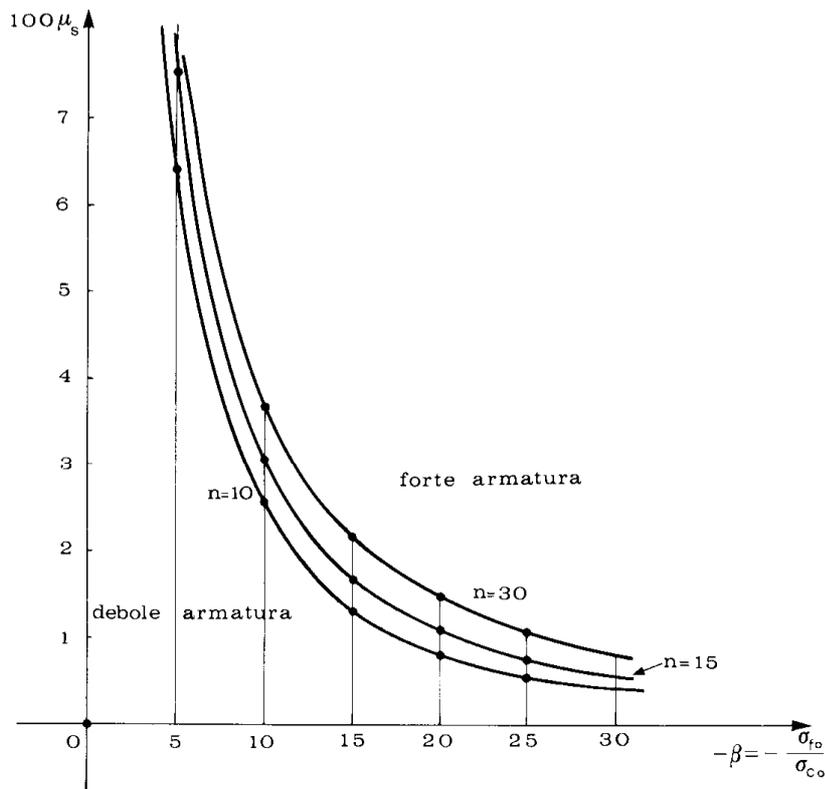


Fig. 19

Le raccomandazioni del CEB [17] prevedono, per gli stati limite ultimi, un  $\gamma_m$  dell'acciaio pari ad 1,15; così pure le norme italiane del '76, che però concedono, per gli acciai controllati in stabilimento, un  $\gamma_m$  unitario. Sia le une che le altre fanno coincidere la  $\sigma_{fo}$  con la tensione di snervamento, ove esista (acciai cosiddetti *naturali*).

Secondo le Raccomandazioni CEB è quindi sempre

$$\sigma_{fo} = \frac{R_{ak}(s)}{1,15}; \quad (23)$$

secondo le norme italiane, per acciai controllati in stabilimento, è invece

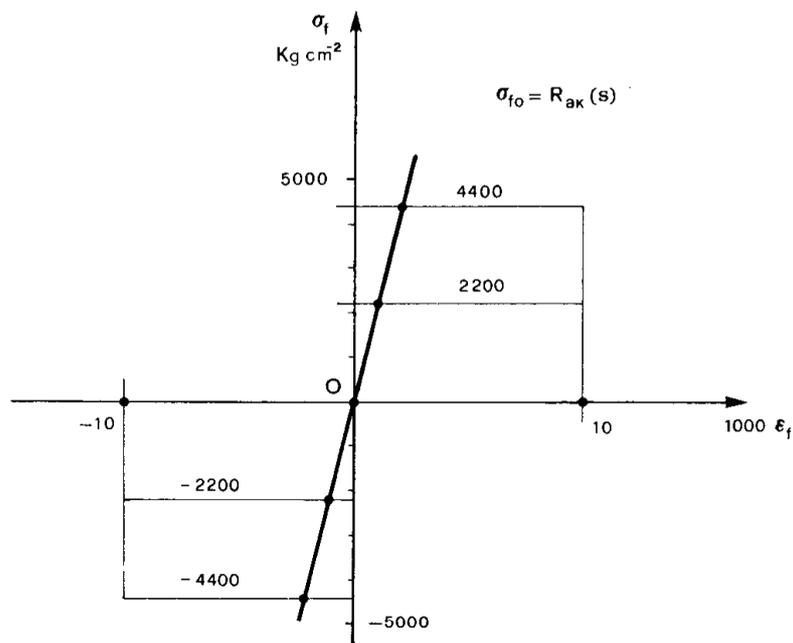
$$\sigma_{fo} = R_{ak}(s). \quad (21)$$

Le Raccomandazioni CEB consigliano poi per l'acciaio naturale un diagramma come quello della fig. 20, con

$$E_f = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kg cm}^{-2} \quad (25)$$

per qualsiasi valore di  $R_{ak}(s)$ , e con due tratti orizzontali corrispondenti a  $\pm \sigma_{fo}$ ; tali tratti sono limitati ad una  $\epsilon$  di rottura pari a

$$\epsilon_{fr} = \pm \frac{10}{1000}.$$



$$E_f = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kg cm}^{-2}$$

$$\epsilon_f = \frac{1}{1000} \rightarrow \sigma_f = 2100 \text{ Kg cm}^{-2}$$

$$R_{ak}(s) = 2200 \text{ Kg cm}^{-2} \rightarrow \epsilon_{fe} = \frac{1,048}{1000}$$

$$R_{ak}(s) = 4400 \text{ Kg cm}^{-2} \rightarrow \epsilon_{fe} = \frac{2,095}{1000}$$

Fig. 20

Su questa limitazione, troppo drastica, si tornerà a parlare tra poco. Si può intanto dire che la  $\epsilon_f$  al limite elastico è data da

$$\epsilon_{fe} = \frac{\sigma_{fo}}{2,1 \cdot 10^6}$$

ed è quindi proporzionale alla  $\sigma_{fo}$ .

Per il calcolo delle sezioni “nello stato limite ultimo” le Raccomandazioni CEB consigliano per il conglomerato il “diagramma di calcolo parabola rettangolo” della fig. 21, dove l’ordinata della parte rettangolare è pari a

$$\sigma_{co} = \frac{0,85 R'_{bk}}{1,4} = 0,607 R'_{bk} . \quad (26)$$

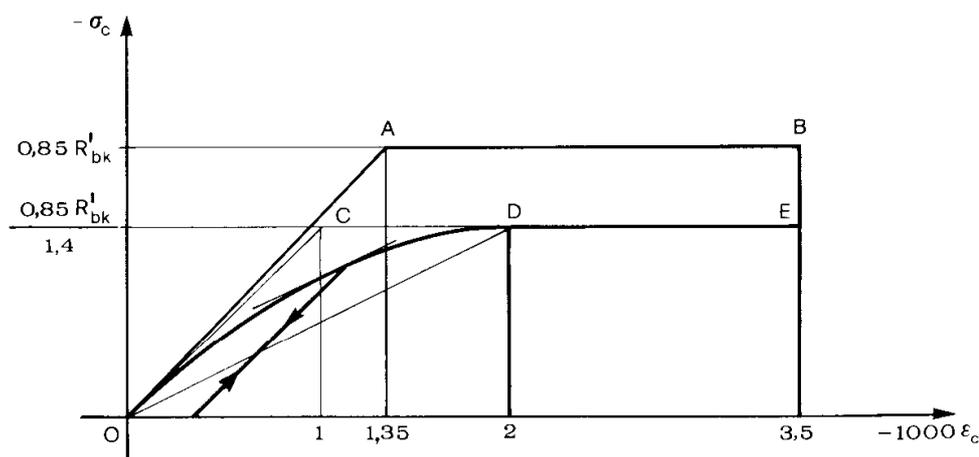


Fig. 21

Altro diagramma, utilizzabile “nel calcolo delle deformazioni”, è quello bilineare riportato anch’esso nella fig. 21, dove l’ordinata della parte rettangolare è

$$\sigma_{co} = 0,85 R'_{bk} .$$

Si tenga presente che per le norme italiane è invece

$$\sigma_{co} = 0,55 R'_{bk}$$

in pressoflessione, e

$$\sigma_{co} = 0,40 R'_{bk}$$

in compressione semplice.

Per il calcolo del momento limite importa ovviamente il solo valore  $\sigma_{co}$ , che deve assumersi pari al valore fornito dalla (26). Per il calcolo in fase elastica lineare ed in fase elasto plastica (calcolo del momento di rottura, con fase elastica lineare) occorre invece operare su un diagramma lineare, che non può essere quello OAB della fig. 21; infatti la quota del tratto orizzontale deve essere fornita dalla (26). Perciò nel seguito si adotterà il diagramma OCE, ottenuto assumendo come primo tratto rettilineo OC la tangente nell'origine, e facendo partire da C il secondo tratto rettilineo. Si è confortati in ciò dall'osservazione che scaricando il provino a partire da un punto qualsiasi del diagramma si percorre un tratto rettilineo parallelo alla tangente nell'origine. Tale diagramma è riportato nella fig. 22.

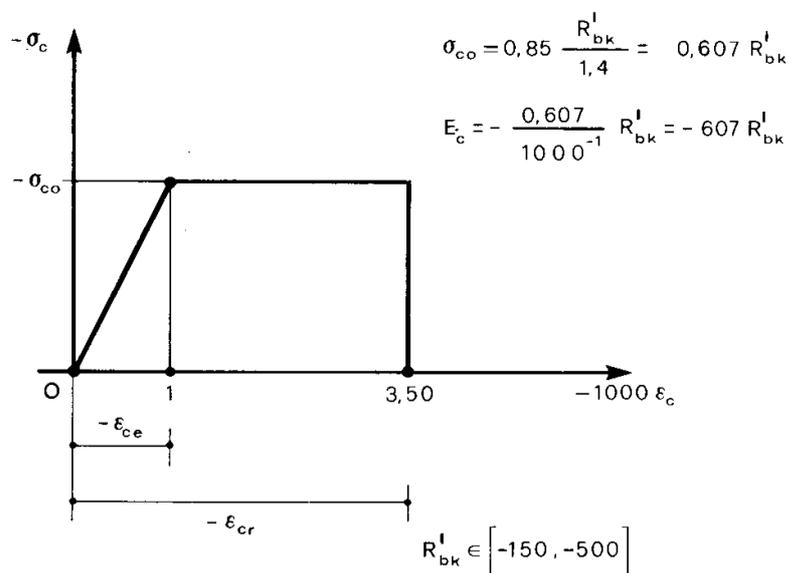


Fig. 22

Si ha così

$$E_c = - \frac{0,85 R'_{bk}}{1,4} 1000 \quad (27)$$

e cioè

$$E_c = - 607 R'_{bk} .$$

Si fa osservare che le norme italiane consigliano, per il calcolo delle deformazioni (e quindi anche degli effetti statici delle distorsioni) la formula non lineare

$$E_c = 18.000 \sqrt{-R'_{bk}} ; \quad (28)$$

essa fornisce valori molto più elevati della (27), come si osserva dal quadro seguente

$R'_{bk}$	$E_c$ (27)	$E_c$ (28)
150	$0,910 \cdot 10^5$	$2,20 \cdot 10^5$
250	$1,518 \cdot 10^5$	$2,85 \cdot 10^5$
400	$2,428 \cdot 10^5$	$3,60 \cdot 10^5$
500	$3,035 \cdot 10^5$	$4,02 \cdot 10^5$

Così pure, le norme italiane ammettono in genere come modulo della tensione ammissibile nel conglomerato a compressione la

$$|\sigma_{ca}| = 60 + \frac{|R'_{bk}| - 150}{4} \quad (29)$$

e come tensione ammissibile dell'acciaio le seguenti

$$\sigma_{fa} \text{ (Kg cm}^{-2}\text{)} \quad (30)$$

F e B 22 k	1200	
F e B 32 k	1600	
F e B 38 k	1900	2200
F e B 44 k	2200	2600

dove i valori dell'ultima colonna sono relativi ad acciai controllati in stabilimento.

Si ricordi pure che comunque deve essere, in  $\text{Kg cm}^{-2}$ ,

$$R'_{bk} \in [-150, -500] \quad (31)$$

e che deve anche essere, sempre in  $\text{Kg cm}^{-2}$ ,

$$\sigma_{\text{fes}} \in [1900, 2200] \rightarrow R'_{\text{bk}} \geq 200 \quad (32)$$

$$\sigma_{\text{fes}} > 2200 \rightarrow R'_{\text{bk}} \geq 250$$

Si trae da quanto sopra che

$$n = \frac{E_f}{E_c} = \frac{2100 \cdot 1,4}{0,85 R'_{\text{bk}}} = \frac{3459}{R'_{\text{bk}}} \quad (33)$$

e, usando la (24),

$$\beta = \frac{\sigma_{\text{fo}}}{\sigma_{\text{co}}} = \frac{1,4}{0,85} \frac{R_{\text{ak}}(s)}{R'_{\text{bk}}} = \frac{R_{\text{ak}}(s)}{0,607 R'_{\text{bk}}} \quad (34)$$

Si ha pure che  $n$  è compreso nell'intervallo

$$n \in [6,92 ; 23,06] ; \quad (35)$$

e poiché, se si opera economicamente<sup>(\*)</sup>

$$\frac{R_{\text{ak}}(s)}{R'_{\text{bk}}} \in [4,40 ; 17,60]$$

è pure

$$\beta \in [-29 ; -7,25] . \quad (36)$$

Si prenda in esame la sezione della fig. 17, dove

$$b = 40 \text{ cm}$$

$$h = 80 \text{ cm} .$$

(\*) Si ha, per le (30), (31) e (32),

$$\left( \frac{R_{\text{ak}}(s)}{R'_{\text{bk}}} \right)_{\text{min}} = \frac{2200}{500} = 4,40 ; \left( \frac{R_{\text{ak}}(s)}{R'_{\text{bk}}} \right)_{\text{max}} = \frac{4400}{250} = 17,60$$

Sia adottato un FeB 44 k, controllato in stabilimento, e quindi (30)  
(24)

$$\sigma_{fa} = 2600 \text{ Kg cm}^{-2}$$

$$\sigma_{fo} = 4400 \text{ Kg cm}^{-2}.$$

Per il conglomerato sia

$$R'_{bk} = -300 \text{ Kg cm}^{-2}$$

e quindi (29) (26)

$$\sigma_{ca} = -97,50 \text{ Kg cm}^{-2}$$

$$\sigma_{co} = -182,14 \text{ Kg cm}^{-2}.$$

E' pure (27)

$$E_c = 182143 \text{ Kg cm}^{-2}$$

e quindi (33)

$$n = 11,5294$$

E' poi (34)

$$\beta = -24,16.$$

Se la sezione è armata con 4  $\phi$  22, è

$$A_f = 15,20 \text{ cm}^2$$

$$\mu = 0,475 \cdot 10^{-2}$$

$$p = 0,548 \cdot 10^{-1}.$$

Per tale sezione è (18)

$$\xi = 0,2807$$

e quindi

$$x = 22,46 \text{ cm}$$

Per un momento di 10 tm risulta (19)

$$\sigma_c = -30,70 \text{ Kg cm}^{-2}$$

$$\sigma_f = 906,95 \text{ Kg cm}^{-2} ;$$

quindi dei due momenti

$$M'_e = 10 \frac{\sigma_{fo}}{\sigma_f} = 48,514 \text{ tm}$$

$$M''_e = 10 \frac{\sigma_{co}}{\sigma_c} = 59,325 \text{ tm}$$

è minore il primo, e cioè  $M = M'_e$ . Si è infatti nel campo delle deboli armature, poiché (20)

$$\mu_s = \frac{n}{2\beta(\beta - n)} = 0,669 \cdot 10^{-2}.$$

Si noti che il momento ammissibile (procedimento delle tensioni ammissibili) è il più piccolo tra i due

$$M'_a = 10 \frac{\sigma_{fa}}{\sigma_f} = 28,667 \text{ tm}$$

$$M''_a = 10 \frac{\sigma_{ca}}{\sigma_c} = 31,757 \text{ tm}$$

e cioè

$$M_a = 28,667 \text{ tm} ,$$

cui corrispondono

$$\sigma_f = \sigma_{fa} = 2600 \text{ Kg cm}^{-2}$$

$$\sigma_c = -88,01 \text{ Kg cm}^{-2} ;$$

si ha poi

$$\frac{M_e}{M_a} = 1,6923.$$

Se la sezione è armata con 20  $\phi$  22, è

$$A_f = 76,03 \text{ cm}^2$$

$$\mu = 2,376 \cdot 10^{-2}$$

$$p = 2,739 \cdot 10^{-1} .$$

Per tale sezione è

$$\xi = 0,5153$$

e quindi

$$x = 41,22 \text{ cm}.$$

Per un momento di 10 tm risulta

$$\sigma_c = -18,30 \text{ Kg cm}^{-2}$$

$$\sigma_f = 198,51 \text{ Kg cm}^{-2} ;$$

dei due e momenti

$$M'_e = 10 \frac{\sigma_{fo}}{\sigma_f} = 221,646 \text{ tm}$$

$$M''_e = 10 \frac{\sigma_{co}}{\sigma_c} = 99,503 \text{ tm}$$

è minore il secondo, e quindi  $M = M''_e$ ; ciò doveva attendersi, trovandoci nel campo delle forti armature.

Il momento ammissibile è il più piccolo dei due

$$M'_a = 10 \frac{\sigma_{fa}}{\sigma_f} = 130,973 \text{ tm}$$

$$M''_a = 10 \frac{\sigma_{ca}}{\sigma_c} = 53,263 \text{ tm} ,$$

e cioè

$$M_a = 53,263 \text{ tm} ,$$

cui corrispondono

$$\sigma_f = 1057,35 \text{ Kg cm}^{-2}$$

$$\sigma_c = \sigma_{ca} = -97,50 \text{ Kg cm}^{-2} ;$$

si ha poi

$$\frac{M_e}{M_a} = 1,8681 .$$

Se è  $\mu = \mu_s = 0,669 \cdot 10^{-2}$ , e cioè

$$A_f = 21,41 \text{ cm}^2 ,$$

si ha

$$p = 0,771 \cdot 10^{-1}$$

e quindi

$$\xi = 0,3231$$

$$x = 25,85 \text{ cm} .$$

Per un momento di 10 tm risulta

$$\sigma_c = -27,10 \text{ Kg cm}^{-2}$$

$$\sigma_f = 654,65 \text{ Kg cm}^{-2} .$$

Si ottiene

$$M'_e = 10 \frac{\sigma_{fo}}{\sigma_f} = 67,211 \text{ tm}$$

$$M''_e = 10 \frac{\sigma_{co}}{\sigma_c} = 67,211 \text{ tm} .$$

Il momento ammissibile è il più piccolo dei due

$$M'_a = 10 \frac{\sigma_{fa}}{\sigma_f} = 39,716 \text{ tm}$$

$$M''_a = 10 \frac{\sigma_{ca}}{\sigma_c} = 35,978 \text{ tm}$$

e cioè

$$M_a = 35,978 \text{ tm}$$

cui corrispondono

$$\sigma_f = 2355,30 \text{ Kg cm}^{-2}$$

$$\sigma_c = -97,50 \text{ Kg cm}^{-2} .$$

Si ha poi ancora

$$\frac{M_e}{M_a} = 1,8681 .$$

A tale proposito si osservi che il momento ammissibile è fornito dalle stesse espressioni (21) e (22) che danno il momento al limite elastico; e cioè  $M_a$  è il più piccolo valore tra  $M'_a$  ed  $M''_a$ , dove questi sono forniti dalla (21), ove  $\sigma_{fo}$  è sostituito da  $\sigma_{fa}$ , e dalla (22), ove  $\sigma_{co}$  è sostituito da  $\sigma_{ca}$ . Quindi, se  $M_e = M'_e$  ed  $M_a = M'_a$ , è

$$\frac{M_e}{M_a} = \frac{\sigma_{fo}}{\sigma_{fa}} ;$$

e, se  $M_e = M''_e$  ed  $M_a = M''_a$ , è invece

$$\frac{M_e}{M_a} = \frac{\sigma_{co}}{\sigma_{ca}} .$$

L'asse neutro corrispondente al momento limite di una sezione a semplice armatura si ottiene (fig. 23) scrivendo l'equazione di equili-

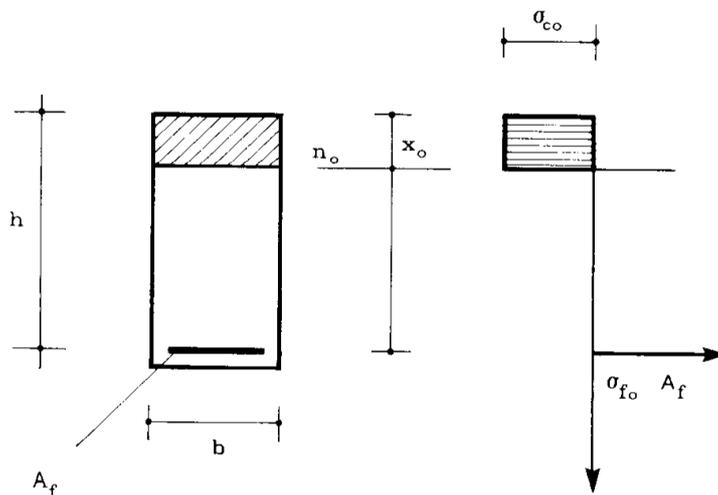


Fig. 23

brio alla traslazione lungo l'asse con riferimento alla situazione limite:

$$\sigma_{fo} A_f + \sigma_{co} b x_0 = 0$$

da cui

$$x_0 = -\frac{\sigma_{fo}}{\sigma_{co}} \frac{A_f}{b} = -\beta \mu h \quad (37)$$

$$\xi_0 = -\beta \mu .$$

Il momento limite si ottiene dalla condizione di equivalenza delle  $\sigma dA$  e di  $M$ :

$$\sigma_{fo} A_f \left( h - \frac{x}{2} \right) = M_0$$

da cui

$$M_0 = \sigma_{fo} A_f h \left( 1 + \frac{\beta \mu}{2} \right) \quad (38)$$

oppure

$$M_0 = \sigma_{co} b h^2 \left( \beta \mu + \frac{\beta^2 \mu^2}{2} \right) \quad (39)$$

Nei tre casi esaminati si ha

$100 \mu$	$M_a$	$M_e$	$\xi_0$	$M_0$	$M_e/M_a$	$M_0/M_a$	$M_0/M_e$
0,475	28,667	48,514	0,11476	50,450	1,692	1,760	1,040
0,669	35,978	67,211	0,16154	69,243	1,868	1,924	1,030
2,376	53,263	99,503	0,57404	190,80	1,868	3,582	1,918

Si osserva che il rapporto  $\frac{M_0}{M_a}$  è, per deboli armature, prossimo al valore 1,75 imposto dalle norme italiane come coefficiente di sicurezza nella verifica delle sezioni allo stato limite ultimo; mentre si eleva per forti armature. Verificando quindi la sezione allo stato limite ultimo secondo le norme italiane, ed attraverso il momento limite (38) o (39), si ottengono per deboli armature carichi ammissibili solo di poco più alti rispetto a quelli ottenibili attraverso il procedimento delle tensioni ammissibili; essi invece risultano molto più elevati (nel caso in esame 2,1) in presenza di forti armature. In questo caso però le norme italiane impongono limitazioni alle deformazioni, che riducono il valore del momento limite, come si osserverà tra poco. Nella tabella 3 e nella fig. 24 sono riportati, per la sezione ed il materiale già esaminati, il grafico ed il diagramma delle funzioni  $\mu \rightarrow M'_e$ ,  $\mu \rightarrow M''_e$ ,  $\mu \rightarrow M_0$ .

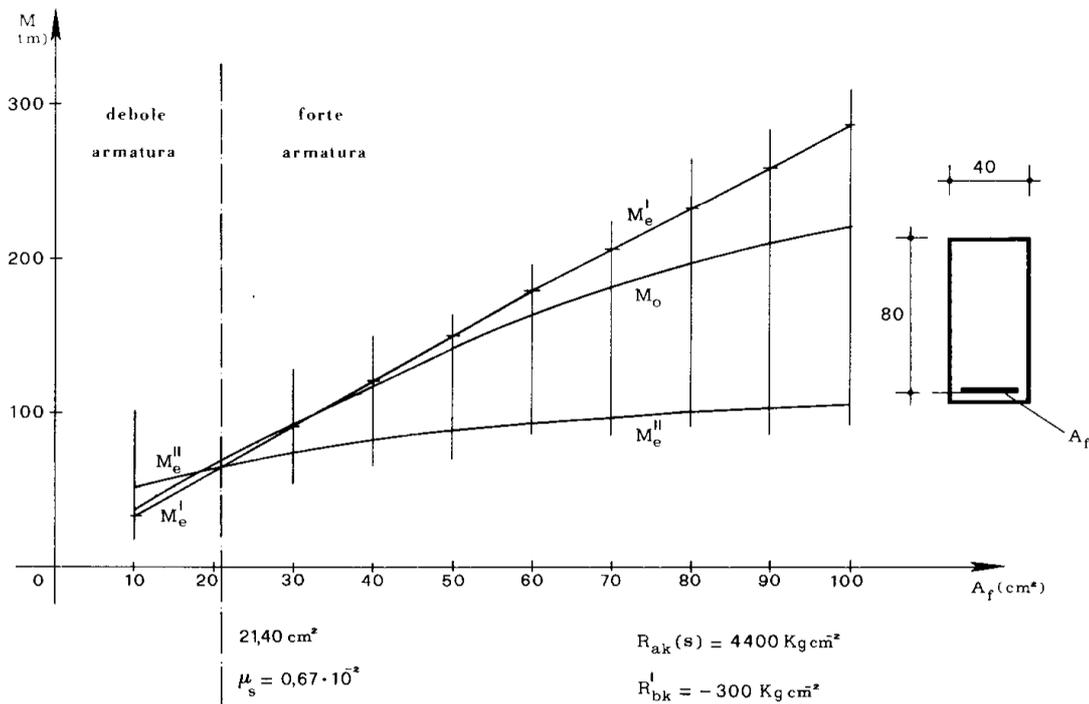


Fig. 24

Si effettui adesso lo studio del periodo  $M \in [M_e, M_0]$ , e cioè del periodo elasto plastico; esso deve essere eseguito in modo diverso secondo che si abbia a che fare con sezioni a debole armatura o a

TABELLA 3

$A_f$ (cm <sup>2</sup> )	$M_e^I$ (tm)	$M_e^{II}$ (tm)	$M_o$ (tm)
10	3 2,4 4	5 0,46	3 3,87
15,21	4 8,5 1	5 9,33	5 0,45
20	6 3,0 2	6 5,6 1	6 5,08
21,40	6 7,2 1	6 7,2 1	6 9,24
30	9 2,6 0	7 5,4 9	9 3,6 4
40	1 21,4 7	8 2,8 2	1 19,5 4
50	1 49,8 0	8 8,6 1	1 42,7 8
60	1 77,6 9	9 3,3 7	1 63,3 7
70	2 05,2 1	9 7,3 7	1 81,3 0
76,03	2 21,6 5	9 9,5 0	1 90,8 2
80	2 32,4 2	1 00,8 1	1 96,5 7
90	2 59,3 7	1 03,8 1	2 09,1 8
100	2 86,0 7	1 06,4 6	2 19,1 4

forte armatura. Nel primo caso ( $\mu < \mu_s$ ) è  $M_e = M'_e$  (21); sotto  $M_e$  il diagramma delle  $\sigma$  si presenta come nella fig. 25a. Per  $M$  crescente al di là di  $M_e$ , e finché tutta la zona compressa si mantiene in fase elastica, il diagramma delle  $\sigma$  nel conglomerato è lineare (fig. 25b),

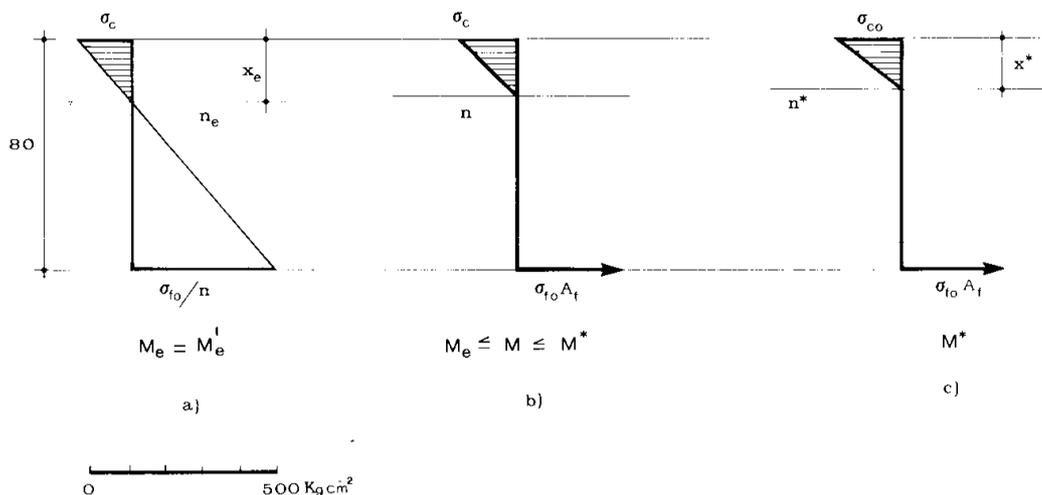


Fig. 25a

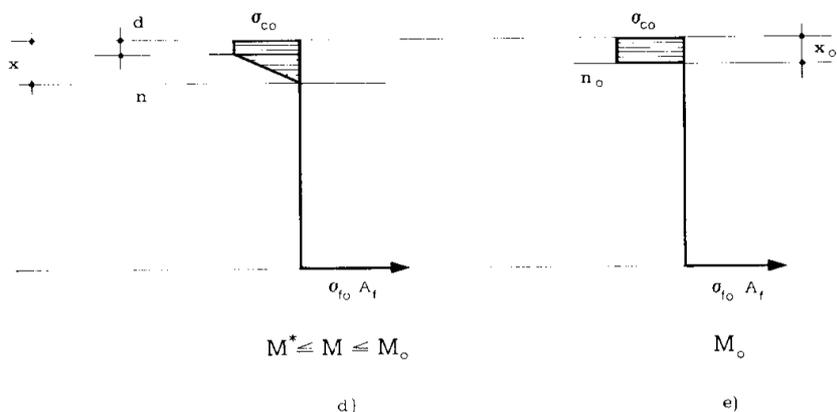


Fig. 25b

mentre la forza relativa alle armature è  $\sigma_{fo} A_f$ ; il vettore  $\frac{\sigma_{fo}}{n}$  non vede più il suo estremo sulla retta della  $\sigma$  del conglomerato. Le due incognite sono  $x$  e  $\sigma_c$ . L'equazione di equilibrio alla traslazione lungo l'asse fornisce

$$\sigma_{fo} A_f + \sigma_c b \frac{x}{2} = 0$$

e quella di equivalenza alla rotazione intorno al baricentro delle armature metalliche

$$-\sigma_c b \frac{x}{2} \left( h - \frac{x}{3} \right) = M.$$

E' così

$$x = -2 \frac{\sigma_{fo} A_f}{\sigma_c b} = -2 \frac{\sigma_{fo}}{\sigma_c} \mu h \quad (4)$$

$$\sigma_c = - \frac{2\sigma_{fo}^2 b h^2 \mu^2}{3\sigma_{fo} b h^2 \mu - 3M}$$

e quindi

$$x = \frac{3\sigma_{fo} b h^2 \mu - 3M}{\sigma_{fo} b h \mu}$$

Dalla (4), per  $\sigma_c = \sigma_{co}$ , si ottiene il valore  $x^* = \xi^* h$  per cui (fig. 25c) è attinta la zona plastica anche al lembo superiore:

$$\xi^* = -2\beta\mu \quad (40)$$

da cui

$$M^* = \sigma_{fo} A_f h \left( 1 + \frac{2}{3} \beta\mu \right). \quad (41)$$

Per  $M > M^*$  (fig. 25d) le incognite sono  $d$  (altezza della zona plasticizzata) ed  $x$ . Si hanno le due equazioni

$$\sigma_{fo} A_f + \sigma_{co} b d + \sigma_{co} b \frac{x-d}{2} = 0$$

$$-\sigma_{co} \left[ b d \left( h - \frac{d}{2} \right) + b \frac{x-d}{2} \left( h - d - \frac{x-d}{3} \right) \right] = M ;$$

ponendo

$$\delta = \frac{d}{h} \quad (42)$$