

CAPITOLO X

IL COLLASSO DEI TELAI IN REGIME DI GRANDI SPOSTAMENTI

1. Limiti di validità dell'ipotesi di piccoli spostamenti.

Tutta la trattazione precedente si svolge sotto l'ipotesi di piccoli spostamenti; supponendo cioè che questi, fino alla formazione dell'ultima cerniera, non siano così grandi da costringere a tener conto delle caratteristiche della sollecitazione interna da essi stessi generate. Il problema dei grandi spostamenti è sentito particolarmente nelle costruzioni metalliche; e soprattutto, tra queste, nei telai soggetti

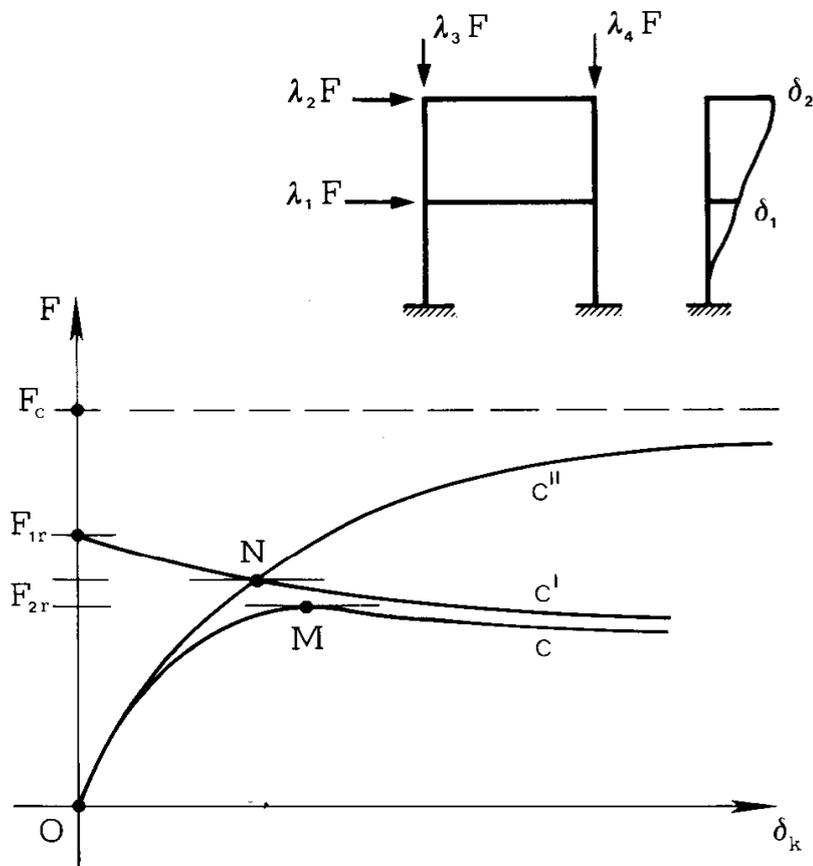


Fig. 1

a forze assiali di notevole entità (fig. 1). In queste strutture occorre appunto tener conto dei momenti flettenti generati dai carichi verticali per effetto degli spostamenti orizzontali. Poiché però gli spostamenti all'inizio della crisi sono comunque ridotti rispetto alle dimensioni globali del telaio, si reputa sufficiente limitare il calcolo alla seconda approssimazione; e cioè si fa l'ipotesi che la variazione di distanza tra gli estremi di un generico elemento (ritto o trave) dovuta alle deformazioni flessionali sia trascurabile. Quindi le incognite continuano ad essere le n rotazioni φ_i dei nodi e le m traslazioni δ_k orizzontali dei traversi.

Occorrerebbe, sia pure in tali ipotesi semplificative, tracciare il diagramma $F \delta_k$ (F forza di riferimento, δ_k spostamento di un generico traverso) considerando la successiva formazione (ed eventuale richiusura) delle cerniere plastiche; in corrispondenza del punto di massimo si ha la F_{2r} di rottura. Il procedimento risulta però ancora troppo oneroso. Secondo la proposta di *Merchant*, si costruisce la curva $c'(F \delta_k)$ del meccanismo di rottura ottenuto operando nel modo noto (e cioè nell'ipotesi di piccoli spostamenti), e la curva $c''(F \delta_k)$ relativa alla struttura in fase elastica; ambedue le curve si costruiscono, come detto, limitando il calcolo alla seconda approssimazione. La curva c' parte da $F = F_{1r}$ (forza di rottura calcolata nell'ipotesi di piccoli spostamenti), ed è decrescente sull'asintoto $F = 0$; la curva c'' parte da $F = 0$, ed è crescente sull'asintoto $F = F_c$ (forza critica euleriana in presenza delle sole forze assiali). La curva $c(F \delta_k)$ reale è sottoposta alla c' ed alla c'' , e si confonde con c'' in $\delta_k = 0$, con c' in $\delta_k = \infty$; si può assumere per F_{2r} il punto di intersezione di c' e c'' , ottenendo però un F_{2r} in eccesso.

2. Un esempio elementare secondo la proposta di Merchant.

Si studia il telaio in acciaio della fig. 2; sulla tabella 1 sono riportati le lunghezze degli elementi, il momento limite ed il momento d'inerzia delle rispettive sezioni.

Il meccanismo della fig. 3 è ottenuto con sei cerniere plastiche; bastano sei cerniere, e non sette, perché gli assi dei due pendoli orizzontali generati dalle cerniere sui due traversi sono paralleli tra loro e con la congiungente le cerniere di imposta.

Risulta così, in tm,

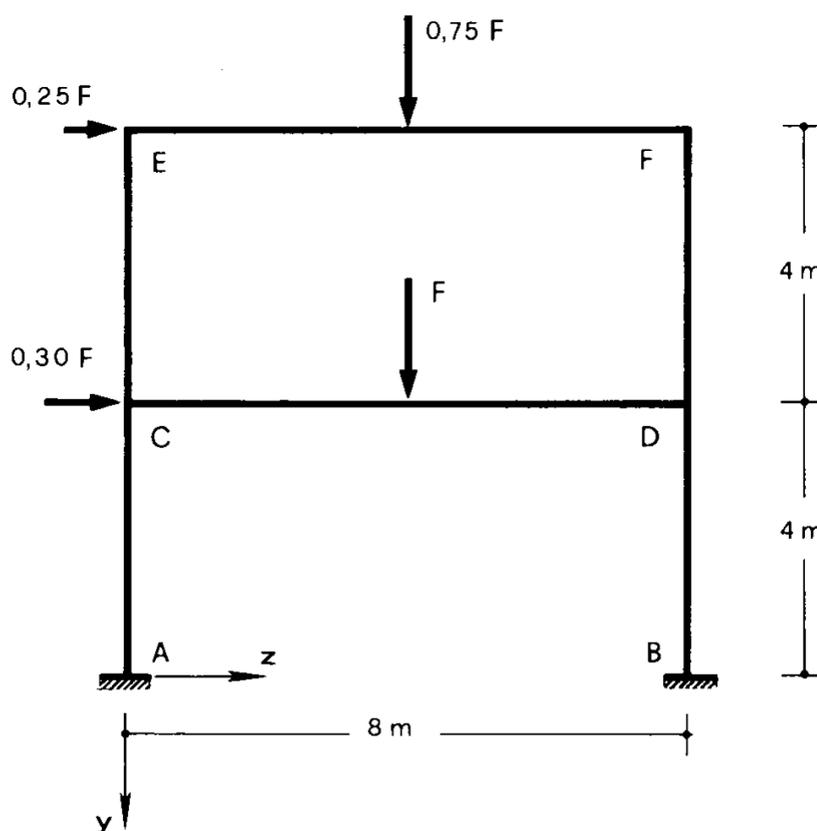


Fig. 2

TABELLA 1

	$\ell(\text{m})$	tipo	$I(\text{cm}^4)$	$M_o(\text{tm})$
AC BD	4	HE 500 B	107 176	140,383
CE DF	4	HE 320 A	22 928	46,337
CD EF	8	IPE 600	92 080	101,283

$$L_F = 0,25 F \cdot 8\varphi + 0,30 F \cdot 4\varphi + 0,75 F \cdot 4\varphi + F \cdot 4\varphi = 10,2 F \varphi$$

$$L_M = 2 M_{oAC} \cdot \varphi + M_{oDF} \cdot 2\varphi + 3 M_{oCD} \cdot 2\varphi = 981,138\varphi$$

da cui

$$F_{1r} = 96,190 \text{ t.} \quad (1)$$

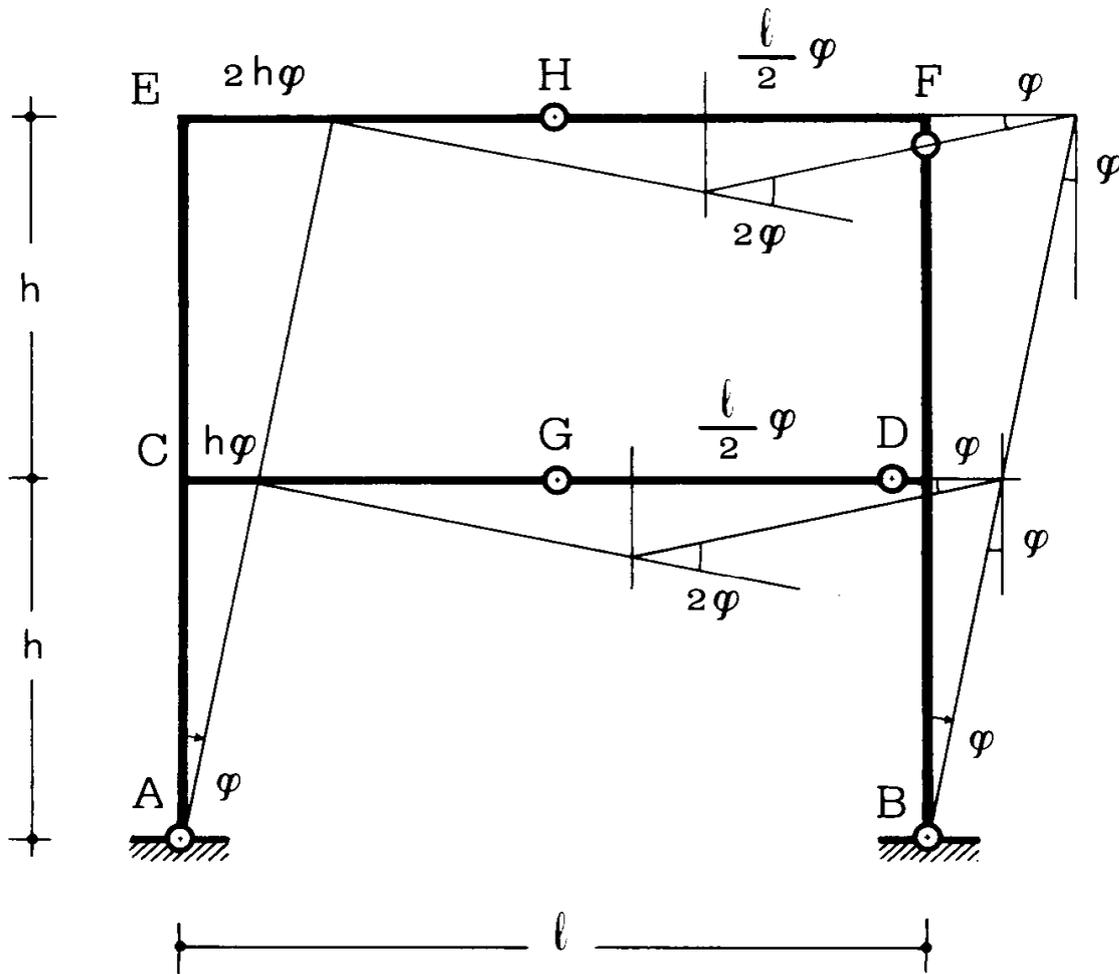


Fig. 3

La (1) è in realtà la forza di rottura, poiché ad essa si associa un diagramma di momenti equilibrato e compatibile. Infatti (fig. 4)

$$T_{GD} = - \frac{2 M_{oCD}}{4} = - 50,642 \text{ t}$$

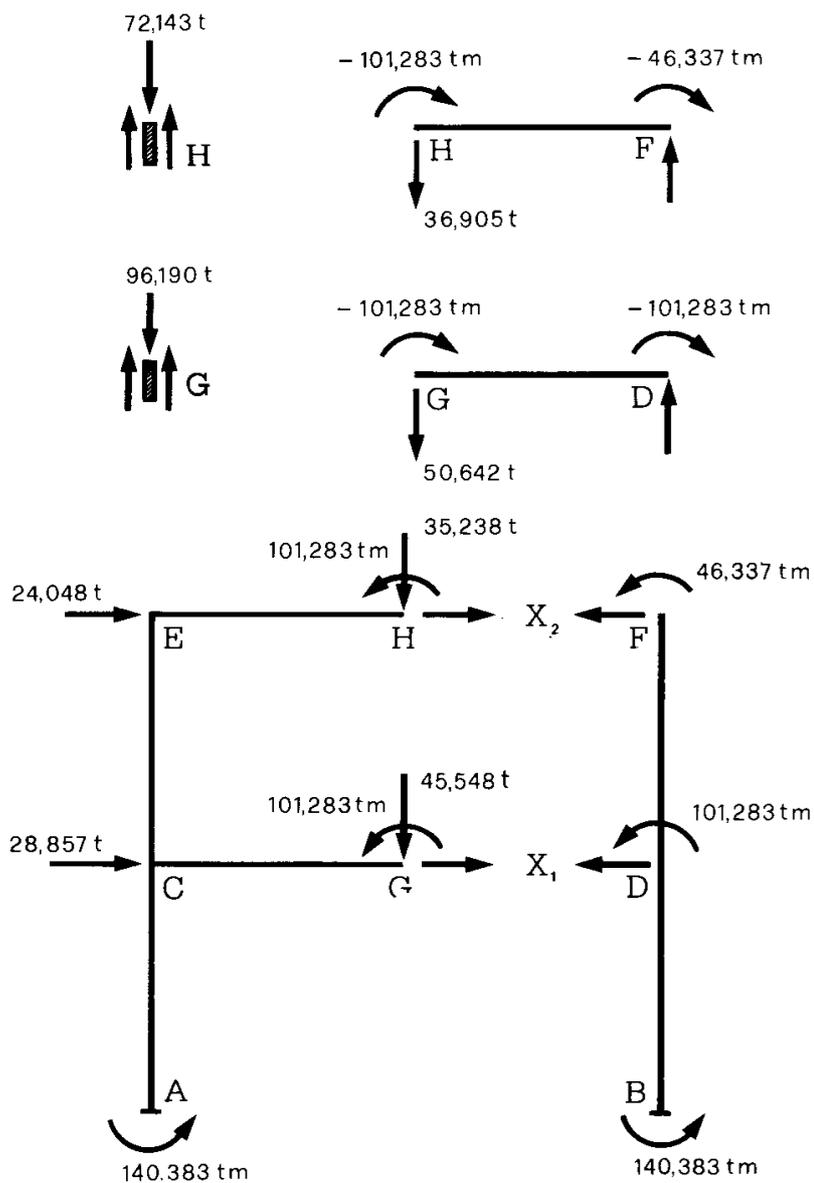


Fig. 4

$$T_{HF} = - \frac{M_{oEF} + M_{oDF}}{4} = - 36,905 \text{ t}$$

$$T_{CG} = F + T_{GD} = 45,548 \text{ t}$$

$$T_{EH} = 0,75 F + T_{HF} = 35,238 \text{ t} ;$$

quindi

$$M_{CG} = 101,238 - 45,548 \cdot 4 = -80,909 \text{ tm}$$

$$M_{EH} = 101,238 - 35,238 \cdot 4 = -39,669 \text{ tm},$$

e nei traversi i momenti sono compatibili. Per giudicare dei ritti occorre calcolare gli sforzi normali X_1 ed X_2 nei due traversi. L'equazione di equilibrio del tratto A G H alla rotazione intorno alla cerniera A si scrive

$$\begin{aligned} & -35,238 \cdot 4 + 101,283 & - X_2 \cdot 8 - \\ & -45,548 \cdot 4 + 101,283 & - X_1 \cdot 4 - \\ & -24,048 \cdot 8 - 28,857 \cdot 4 & + 140,383 = 0 \end{aligned}$$

e cioè

$$4 X_1 + 8 X_2 = -288 \text{ t} . \quad (2)$$

L'equazione di equilibrio del tratto BDF alla rotazione intorno alla cerniera B è invece

$$X_2 \cdot 8 + 46,337 + X_1 \cdot 4 + 101,283 + 140,383 = 0$$

da cui

$$4 X_1 + 8 X_2 = -288 \text{ t} .$$

Le (2) e (3) indicano che X_1 ed X_2 sono indeterminate; ciò bisognava attendersi, poiché le cerniere che rendono la struttura labile (fig. 3) sono in numero pari al grado di iperstaticità, e quindi la struttura diviene nello stesso tempo una volta labile ed una volta iperstatica.

Se si impone

$$M_{CE} = M_{oCE} = -46,337 \text{ tm}$$

(il verso di percorrenza dei ritti è dal basso all'alto, dei traversi da sinistra a destra) si ha, da CE,

$$-X_2 \cdot 4 - 135,861 = -46,337$$

da cui

$$X_2 = -22,381 \text{ t}$$

e per la (2), o (3),

$$X_1 = -27,238 \text{ t} .$$

Si ha così, per l'equilibrio alla rotazione del nodo C,

$$M_{CE} - M_{CA} + M_{CG} = 0 ,$$

da cui

$$M_{CA} = M_{CE} + M_{CG} = -127,246 \text{ tm} ;$$

così pure è

$$M_{DF} = 46,337 + X_2 \cdot 4 = -43,187 \text{ tm} ,$$

e dalla condizione

$$M_{DF} - M_{DB} - M_{DG} = 0$$

si trae

$$M_{DB} = M_{DF} - M_{DG} = 58,096 \text{ tm} .$$

Il diagramma dei momenti nella fig. 5, e assicura, essendo ovunque compatibile, che la (1) è la forza di rottura.

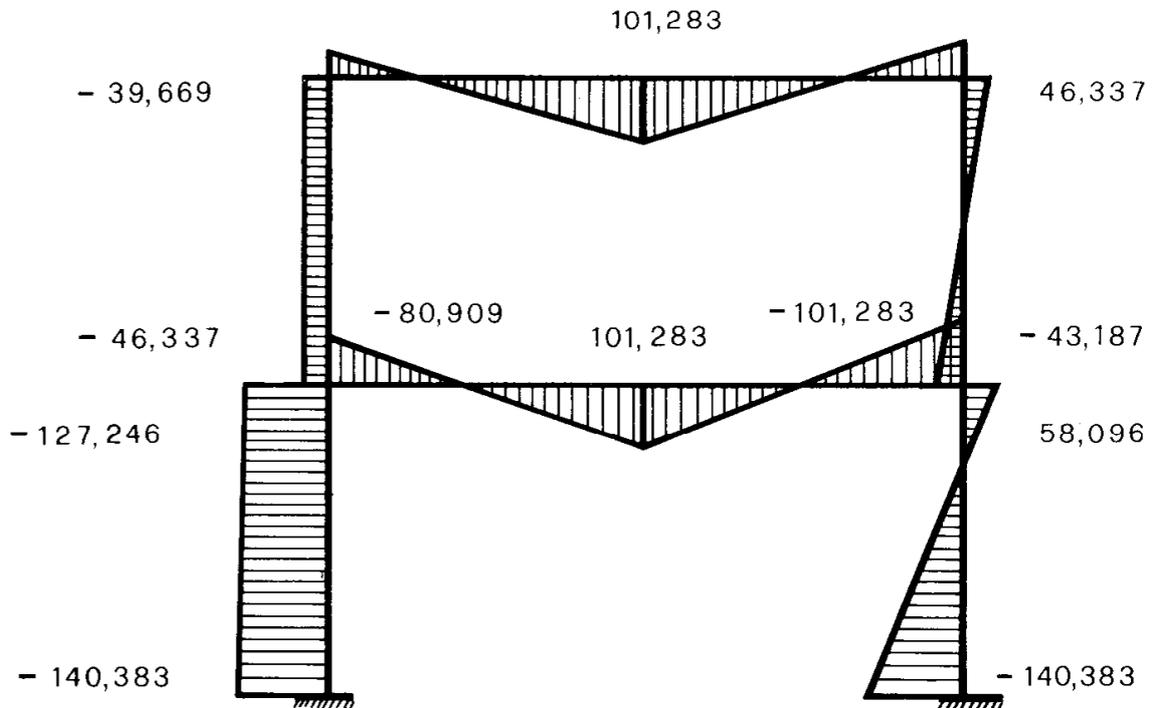


Fig. 5

La curva c' (fig. 1) si ottiene scrivendo in seconda approssimazione l'equazione di equilibrio della configurazione del meccanismo (fig. 3) già utilizzata per ottenere la (1); essa non è più lineare omogenea in φ , e perciò fornisce una relazione tra F e φ .
In dettaglio è (in tm)

$$10,2 F \varphi + F \cdot h \frac{\varphi^2}{2} + 0,75 F \cdot 2 h \frac{\varphi^2}{2} = 981,138 \varphi$$

e cioè

$$F (10,2 + 5 \varphi) = 981,138$$

da cui

$$\varphi = \frac{196,228}{F} - 2,040. \quad (4)$$

La (4) è un'iperbole; per $F = 0$, è $\varphi = \infty$; per $F = 96,190$ t, è $\varphi = 0$. Poiché è

$$\delta_1 = 4\varphi$$

$$\delta_2 = 8\varphi$$

è pure

$$\delta_1 = \frac{784,910}{F} - 8,160, \quad (5)$$

e così

$$\delta_2 = \frac{1569,821}{F} - 16,320. \quad (6)$$

Per $F = 95$ t è già

$$\delta_1 = 10,2 \text{ cm}$$

$$\delta_2 = 20,4 \text{ cm};$$

la curva $\delta_1 \rightarrow F$ (fig. 13), e così pure la $\delta_2 \rightarrow F$, decresce quindi molto lentamente, nel senso che nell'ambito dei piccoli spostamenti dF è piccolo rispetto ad F .

Occorre adesso la curva c'' della fig.1. Poiché per $F < 96,190$ la funzione $F \rightarrow \delta$ è pressoché lineare (e di ciò si avrà presto conferma, attraverso la piccolezza degli spostamenti), si opera, nel primo stadio, su una F piuttosto elevata, e cioè (fig. 6) per

$$F = 60 \text{ t};$$

le forze verticali si riportano sui ritti, per semplificare il procedimento. Per simmetria di struttura si può operare sullo schema della fig. 6; i coefficienti di ripartizione per nodi fissi sono riportati nella stessa

figura. Nel loro calcolo si è assunto, essendo E ed ℓ uguali per tutti gli elementi.

$$\rho_{EH} = \rho_{CG} = k \cdot 3 \cdot 92080 = k \cdot 276240$$

$$\rho_{EC} = \rho_{CE} = k \cdot 4 \cdot 22928 = k \cdot 91712$$

$$\rho_{CA} = \quad = k \cdot 4 \cdot 107176 = k \cdot 428704 .$$

Si bloccano i nodi H e G con due carrelli a piano di scorrimento verticale, e si imprime poi al nodo G una traslazione orizzontale pari ad 1 cm.

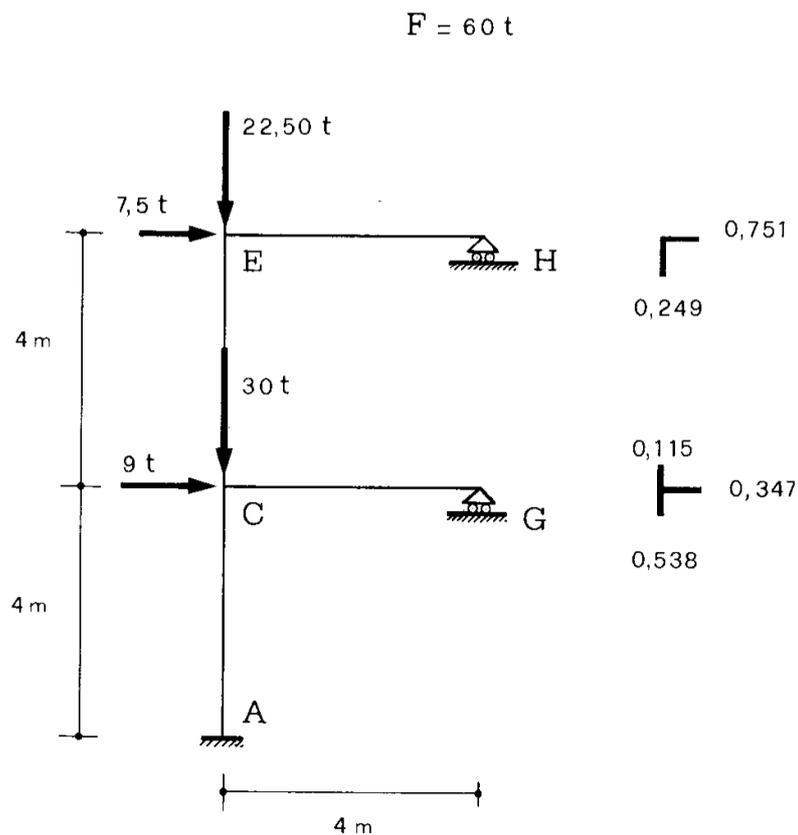
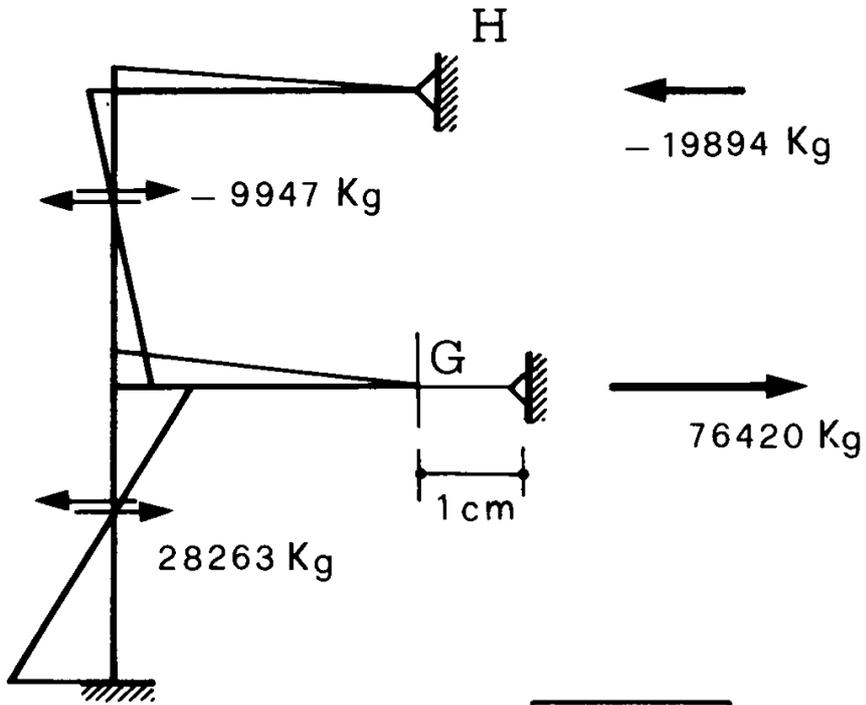


Fig. 6

In questa fase i nodi C ed E non possono ruotare, e sorgono quindi le coppie di incastro perfetto



+16524
 + 2961
 +13563

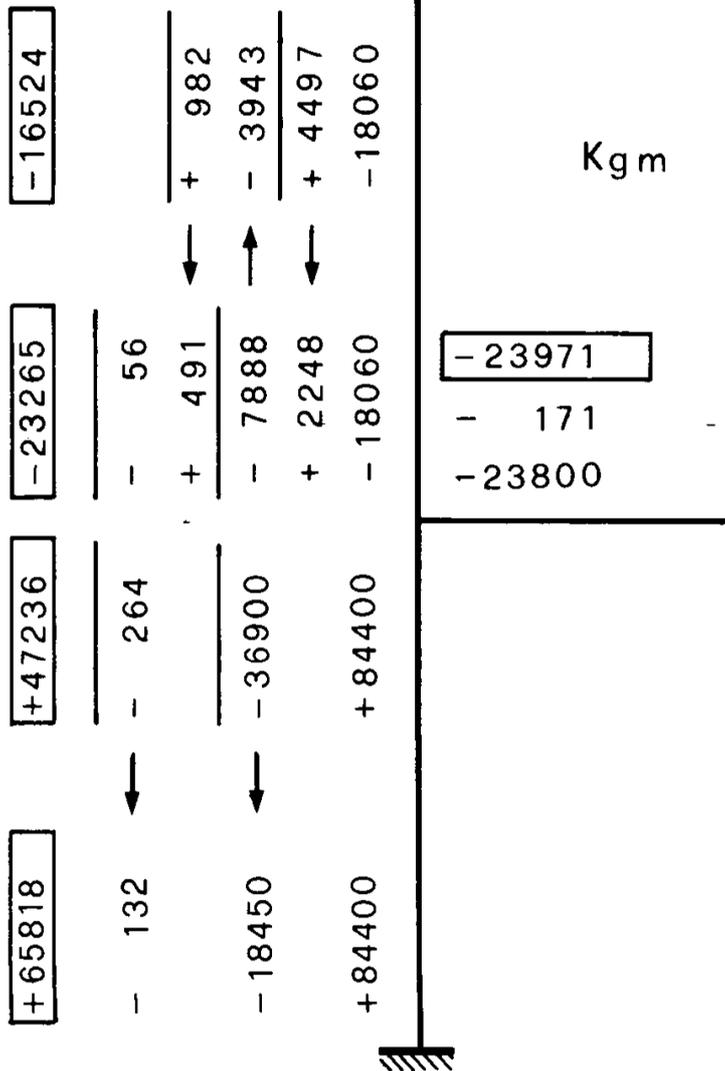


Fig. 7

$$\begin{aligned}\bar{m}_{EC} = \bar{m}_{CE} &= -\frac{6 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,22928 \cdot 10^5}{16 \cdot 10^4} = \\ &= -1,806 \cdot 10^6 \text{ Kg cm} = -18060 \text{ Kg m;} \\ \bar{m}_{CA} = \bar{m}_{AC} &= \frac{6 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 1,07176 \cdot 10^5}{16 \cdot 10^4} = \\ &= 8,440 \cdot 10^6 \text{ Kg cm} = 84400 \text{ Kg m.}\end{aligned}\tag{7}$$

Tali coppie si diffondono alla Cross (fig. 7); sorgono così le due reazioni

$$R_{11} = 76420 \text{ Kg}$$

$$R_{21} = -19894 \text{ Kg}.$$

Analogamente, si imprime al nodo H una traslazione orizzontale pari ad 1 cm (fig. 8), ottenendo

$$R_{12} = -19913 \text{ Kg}$$

$$R_{22} = 13487 \text{ Kg}.$$

La condizione

$$R_{11} \delta_1 + R_{12} \delta_2 = 18000$$

$$R_{21} \delta_1 + R_{22} \delta_2 = 15000$$

fornisce i valori degli spostamenti dei traversi nella struttura della fig. 6:

$$\delta_1 = 0,854 \text{ cm}\tag{8}$$

$$\delta_2 = 2,372 \text{ cm}.$$

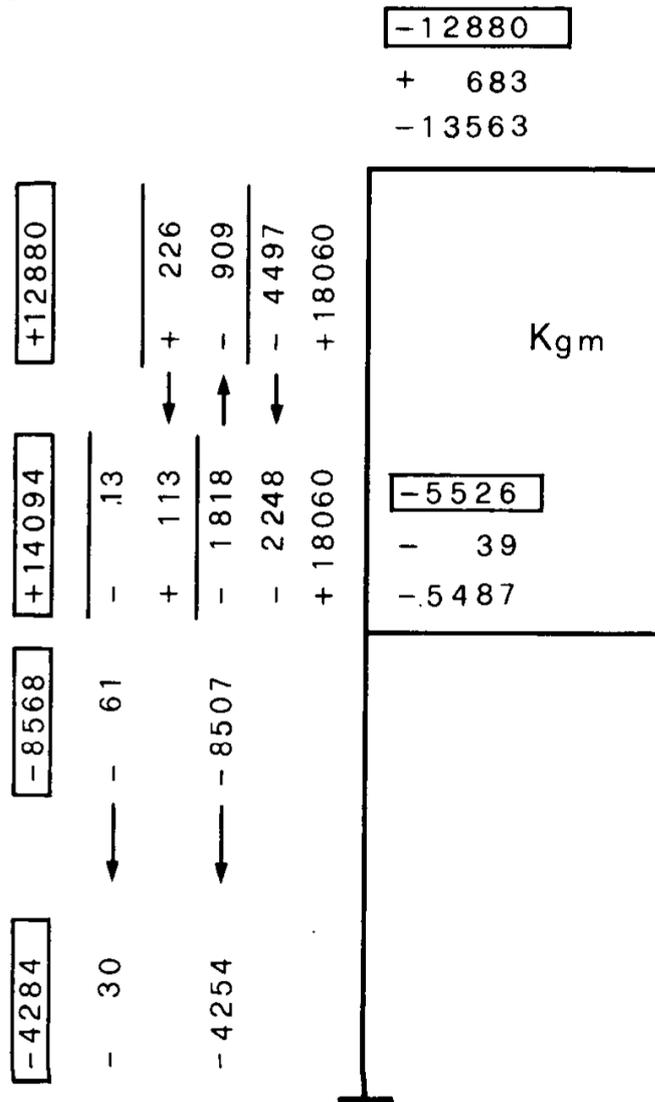
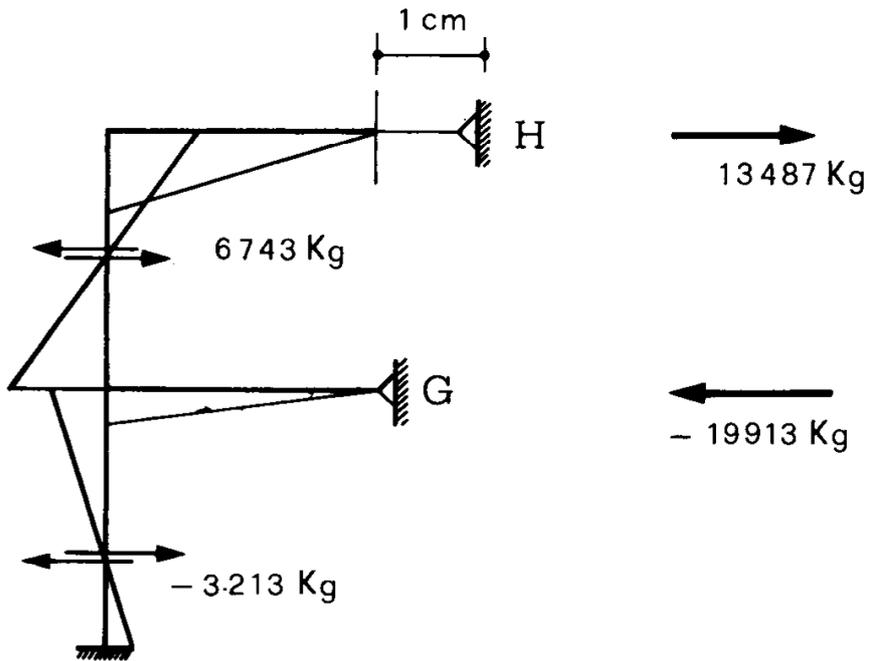


Fig. 8

Si osservi che R_{12} ed R_{21} dovrebbero essere, in rigore, uguali, per ragioni di reciprocità.

Si ha poi

$$N_{CE} = -22500 - 0,8 \frac{16524}{4} + 2,4 \frac{12880}{4} = -18077 \text{ Kg};$$

$$N_{DF} = -22500 + 0,8 \frac{16524}{4} - 2,4 \frac{12880}{4} = -26923 \text{ Kg};$$

$$N_{AC} = N_{CE} - 30000 - 0,8 \frac{23971}{4} + 2,4 \frac{5526}{4} = -49556 \text{ Kg};$$

$$N_{BD} = N_{DF} - 30000 + 0,8 \frac{23971}{4} - 2,4 \frac{5526}{4} = -55444 \text{ Kg}.$$

Posto

$$2u = \ell \sqrt{-\frac{N}{EI}},$$

i coefficienti correttivi A, B e C della rigidità, del coefficiente di trasmissione e delle coppie di incastro perfetto $\frac{6EI\delta}{\ell^2}$ sono rispettivamente

$$A = \frac{3\psi}{4\psi^2 - \varphi^2}$$

$$B = \frac{\varphi}{\psi}$$

$$C = \frac{1}{2\psi - \varphi},$$

dove

$$\varphi = \frac{6}{2u} \left(\frac{1}{\text{sen } 2u} - \frac{1}{2u} \right)$$

$$\psi = \frac{3}{2u} \left(\frac{1}{2u} - \frac{1}{\text{tg } 2u} \right).$$

E' perciò

TABELLA 2

	2 u	A	B	C
AC	0,187694	0,998825	1,001765	0,999413
CE	0,245093	0,997996	1,003013	0,998998
BD	0,198531	0,998686	1,001975	0,999343
DF	0,299109	0,997014	1,004494	0,998508

E' stato lecito perciò trascurare le variazioni indotte dallo sforzo normale nei coefficienti di ripartizione, nei coefficienti di trasmissione e nei valori delle coppie d'incastro perfetto dovute agli spostamenti dei traversi.

La variazione di altezza dei traversi si ottiene considerando che la traslazione relativa $\Delta_i \delta = \delta_i - \delta_{i-1}$ tra i due traversi ed $i - 1$ si associa ad un avvicinamento $\Delta_i \eta$ fornito da (fig. 9)

$$\Delta_i \eta = h_i (1 - \cos \psi_i)$$

dove

$$\text{sen } \psi_i = \frac{\Delta_i \delta}{h_i}.$$

E' quindi

$$\Delta_i \eta = h_i \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta_i \delta}{h_i} \right)^2} \right) \quad (9)$$

Nel primo stadio è perciò (8)

$$\Delta_1 \eta = \eta_1 = 0,001 \text{ cm}$$

$$\Delta_2 \eta = 0,003 \text{ cm},$$

ed è stato quindi lecito trascurare anche gli abbassamenti dei traversi. Nel secondo stadio ($\Delta F = 30 \text{ t}$) si continuano a trascurare tutte le suddette variazioni; in particolare, si potrà ancora operare su metà struttura, e cioè utilizzare i risultati delle fig. 7 ed 8.

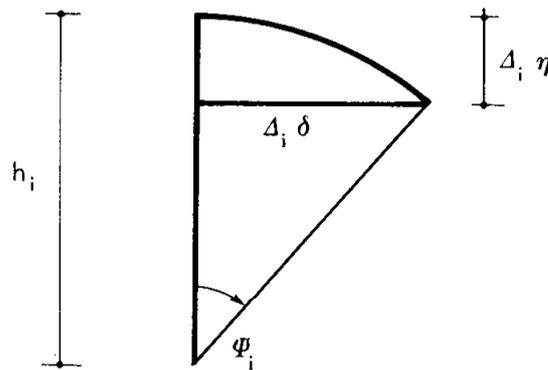


Fig. 9

Le forze agenti nel secondo stadio sono (fig. 10) le $30 \lambda_i$; la differenza, rispetto al primo stadio, è nel fatto che esse agiscono sulla struttura già deformata, e cioè in presenza delle traslazioni (8), e già soggetta alle $60 \lambda_i$. Prima di fare agire le $30 \lambda_i$, si bloccano i traversi

con due appoggi in D ed F, che in tale fase sono perciò scarichi; le reazioni di questi appoggi sono somma di quelle (R'_1 ed R'_2) dovute alle forze orizzontali $30\lambda_1$, uguali e contrarie ad esse, e di quelle

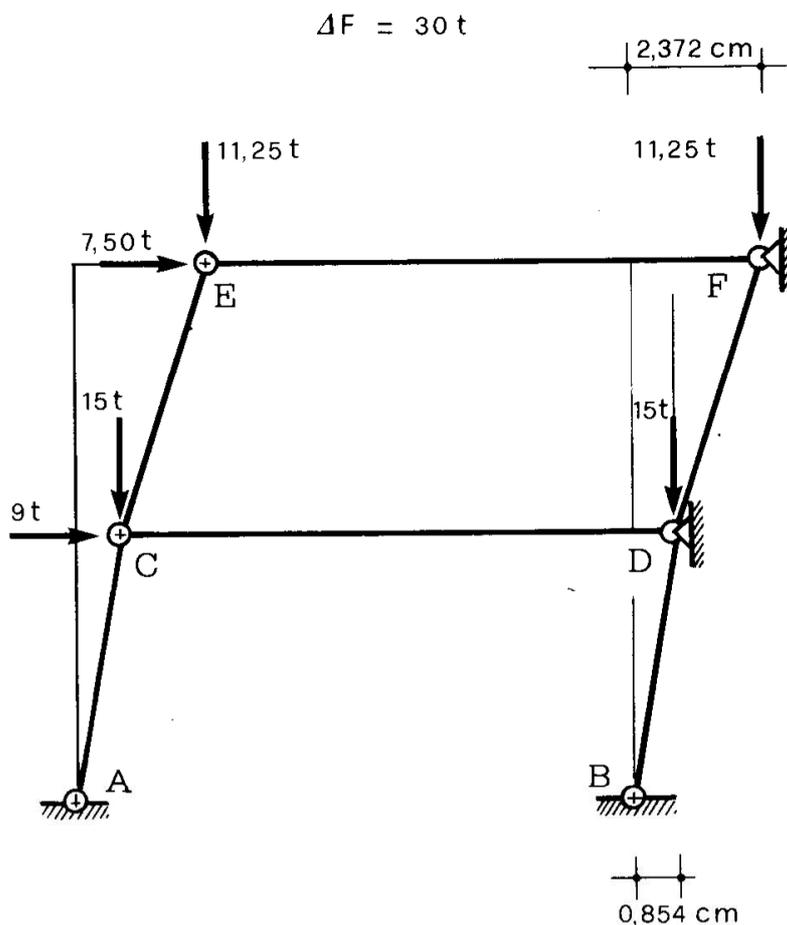


Fig. 10

(R''_1 ed R''_2) dovute alle forze verticali $30\lambda_1$. Queste ultime si calcolano considerando la struttura snodata alle estremità, come nella fig. 10, e resa perciò stesso isostatica. L'errore così commesso è dovuto al fatto che le variazioni di lunghezza degli elementi, per effetto degli sforzi assiali connessi con le $30\lambda_1$, inducono rotazioni relative tra le facce delle cerniere; occorrerebbe perciò calcolare i momenti flettenti atti a ripristinare la congruenza angolare, gli sforzi normali ed i tagli che da essi derivano, e quindi le ulteriori reazioni sugli appoggi. Il problema è identico a quello del calcolo dei momenti in una struttura reticolare a nodi incastro, e si sa che le variazioni di sforzo normale indotte dai momenti sono trascurabili rispetto agli sforzi normali calcolati in regime di nodi cerniera.

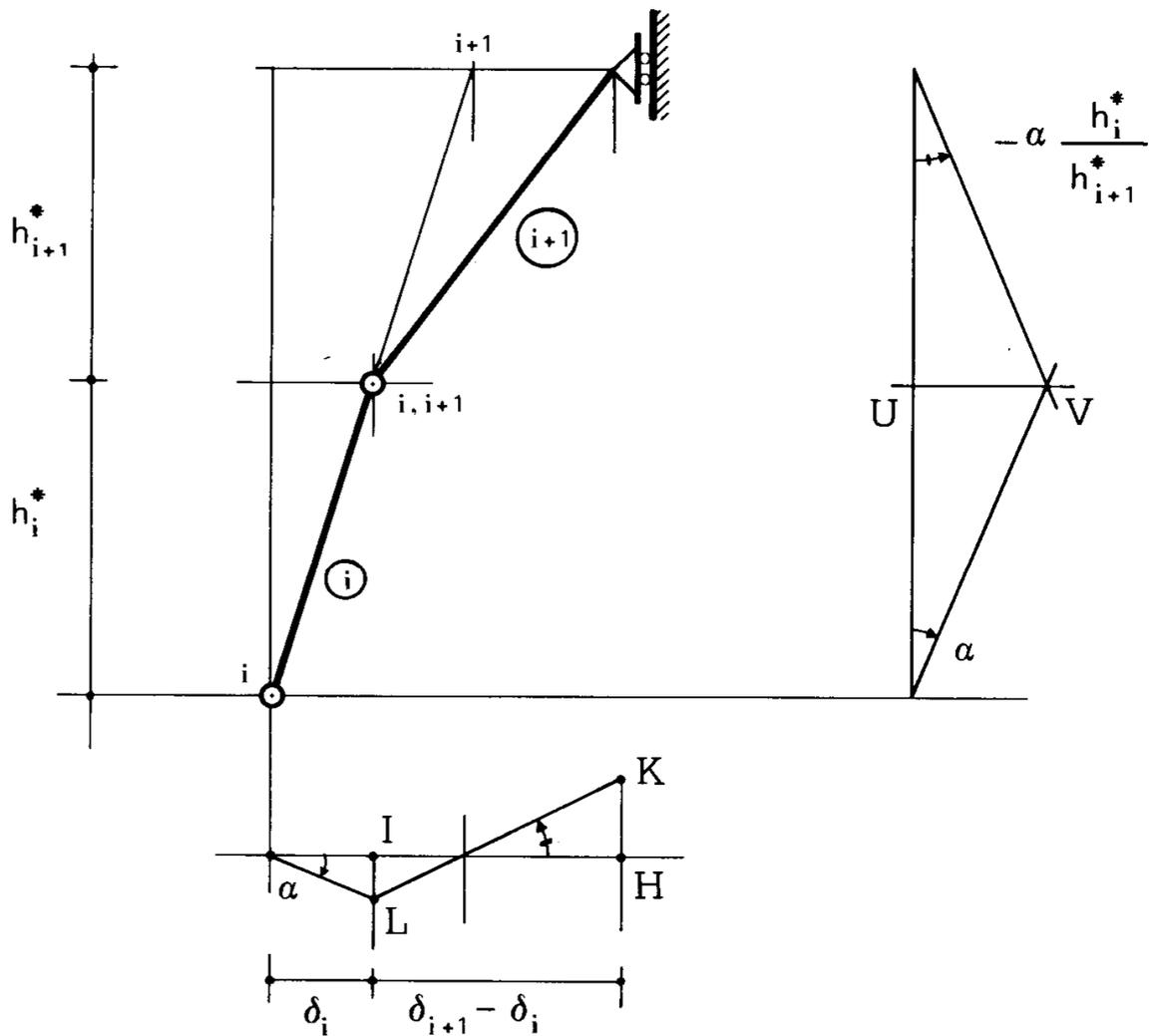


Fig. 11

Il meccanismo della fig. 11 consente di scrivere l'equazione di Lagrange

$$2 \cdot 15 \cdot IL + 2 \cdot 11,25 \cdot HK + R_1'' \cdot UV = 0. \quad (10)$$

Risulta

$$IL = \alpha \delta_i ;$$

$$\begin{aligned} HK &= IL - (\delta_{i+1} - \delta_i) \alpha \frac{h_i^*}{h_{i+1}^*} = \\ &= \alpha \delta_i \frac{h_i^* + h_{i+1}^*}{h_{i+1}^*} - \alpha \delta_{i+1} \frac{h_i^*}{h_{i+1}^*} ; \end{aligned}$$

$$UV = \alpha h_i^*$$

e quindi, essendo $h_i^* = h_i = 4 \text{ m}$, ed $h_{i+1}^* = h_{i+1} = 4 \text{ m}$, si ha

$$30 \cdot 0,854 - 22,50 \cdot 0,664 + 400 R_1'' = 0, \quad (11)$$

da cui

$$R_1'' = -0,0267 \text{ t.} \quad (12)$$

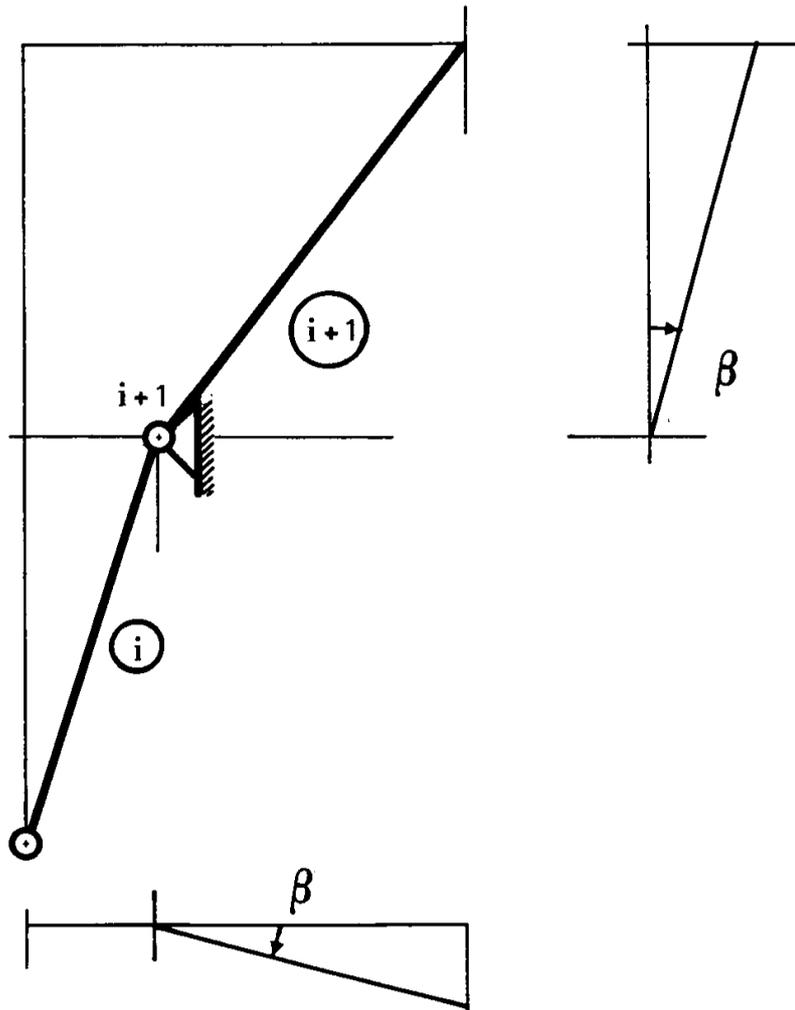


Fig. 12

Dal meccanismo della fig. 12 si ha poi

$$2 \cdot 11,25 (\delta_{i+1} - \delta_i) + R_2'' \cdot h_{i+1}^* = 0 \quad (13)$$

da cui

$$R_2'' = -0,0854 t . \quad (14)$$

E' quindi

$$R_1 = -9,0267 t . \quad (15)$$

$$R_2 = -7,5854 t .$$

Occorre adesso imprimere due cedimenti δ_1^* e δ_2^* tali che le variazioni delle reazioni da essi prodotte siano uguali e contrarie alle (15); i suddetti cedimenti sono gli spostamenti dei traversi nel secondo stadio. A ciò fare, si calcolano innanzitutto le variazioni R_{11} ed R_{21} dovute a $\delta_1^* = 1$ cm. In tale calcolo le R_{j1} sono somma di due parti, R_{j1}'' ed R_{j1}''' . Le R_{j1}'' sono le differenze tra le R_{j1} generate dalle $90 \lambda_i$ sulla struttura snodata nella configurazione $C + \delta_1 C$, e le R_j generate dalle $60 \lambda_i$ sulla struttura snodata nella configurazione C , e già calcolate [(12) e (14)]; il procedimento è identico a quello seguito per ottenere le (12) e (14) (si è chiamata C la configurazione della fig. 10, sotto le (8), e $C + \delta_1 C$ quella variata per $\delta_1^* = 1$ cm).

Le R_{j1}''' sono invece dovute alle incongruenze angolari generate da $\delta_1^* = 1$ cm.

Si osservi che il cedimento $\delta_1^* = 1$ cm è un semplice artificio operativo; lo spostamento reale dovuto alle $\lambda_i \Delta F$ è molto piccolo, tanto piccolo quanto più lo è il passo ΔF . Quindi la configurazione $C + \delta_1 C$ in presenza del cedimento può essere considerata coincidente con quella C di partenza nel passo in esame, e cioè con quella della fig. 10. Ciò significa che le λF_h (chiamando F_h la forza all'inizio del passo h-esimo), in equilibrio sulla C_h , possono essere considerate tali anche sulla $C_h + \delta_1 C_h$. Se ne trae che, nelle equazioni di Lagrange, scritte sulla $C_h + \delta_1 C_h$ per ottenere le R_{j1}'' sotto le $90 \lambda_i$ in regime di nodi cerniera, il lavoro delle $60 \lambda_i$ e dei corrispondenti momenti applicati come coppie uguali e contrarie sulle facce unite dalle cerniere è in complesso nullo. Nelle suddette equazioni perciò deve comparire il lavoro delle sole $30 \lambda_i$. E' anche ovvio che, per effetto dello spostamento virtuale dalla $C_h + \delta_1 C_h$, compiono lavoro la prima delle (15) e la forza applicata di $9 t$, e cioè in definitiva la (12), e in più la variazione di R_1 . Poiché le variazioni di quota dei traversi

possono ancora trascurarsi, le (11) e (13), sulla $C_h + \delta_1 C_h$, si scrivono come segue

$$30 \cdot 1,854 - 22,50 \cdot 1,336 + 400 (R_{11} - 0,0267) = 0$$

$$22,5 \cdot 0,518 + 400 (R_{21} - 0,0854) = 0$$

da cui

$$R''_{11} = -0,03720 \tag{16}$$

$$R''_{21} = 0,05625 .$$

Per $\delta_2^* = 1$ cm si ha invece

$$30 \cdot 0,854 - 22,50 \cdot 1,664 + 400 (R_{12} - 0,0267) = 0$$

$$22,5 \cdot 2,518 + 400 (R_{22} - 0,0854) = 0 ,$$

da cui

$$R''_{12} = 0,05625 \tag{17}$$

$$R''_{22} = -0,05624$$

Le R''_{ij} sono quelle già calcolate nella fig. 7 ed 8.
E' perciò

$$R_{11} = 76420 - 37 = 76383 \text{ Kg}$$

$$R_{21} = -19894 + 56 = -19838 \text{ Kg}$$

$$R_{12} = -19913 + 56 = -19857 \text{ Kg}$$

$$R_{22} = 13487 - 56 = 13431 \text{ Kg} .$$

(18)

Gli spostamenti δ_1'' e δ_2'' nel secondo stadio ($\Delta F = 30$ t) sono perciò forniti (15) dal sistema

$$\begin{aligned} 76383 \delta_1'' - 19857 \delta_2'' &= 9027 \\ -19838 \delta_1'' + 13431 \delta_2'' &= 7585 \quad ; \end{aligned}$$

essi sono

$$\begin{aligned} \delta_1'' &= 0,430 \text{ cm} \\ \delta_2'' &= 1,200 \text{ cm} . \end{aligned} \tag{19}$$

Dal confronto tra le (8) e (19) si osserva come le δ_1 e δ_2 variano più che linearmente con F; infatti

$$\frac{0,430}{0,854} = 0,5035$$

$$\frac{1,200}{2,372} = 0,5059 ,$$

mentre $\frac{\Delta F}{F} = 0,5$.

Però, lo scostamento dalla legge lineare non è che ordine dell'1% ; il diagramma della fig. 13 mostra appunto come tale scostamento sia appena apprezzabile. Per ottenere l'intersezione N tra le due curve c' e c'' si reputa inutile calcolare un terzo stadio della c'' , sembrando sufficiente prolungare il segmento del secondo stadio.

L'equazione della retta cui tale segmento appartiene è

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{30}{0,430} = \frac{y_2 - y}{x_2 - x} = \frac{90 - y}{1,284 - x}$$

e cioè

$$x - 0,0143 y + 0,0060 = 0 .$$

L'equazione della iperbole c'è (4)

$$\frac{xy}{400} = 196,228 - 2,040 y$$

e cioè

$$xy + 816 y - 78491,2 = 0 .$$

Sostituendo si ha l'equazione quadratica in y

$$0,01430 y^2 + 815,994 y - 78491,2 = 0 ,$$

la cui soluzione positiva è

$$y = 96,029 t .$$

La diminuzione rispetto al valore (1) è, in questo caso, di 161 Kg, e cioè dello 0,16% .

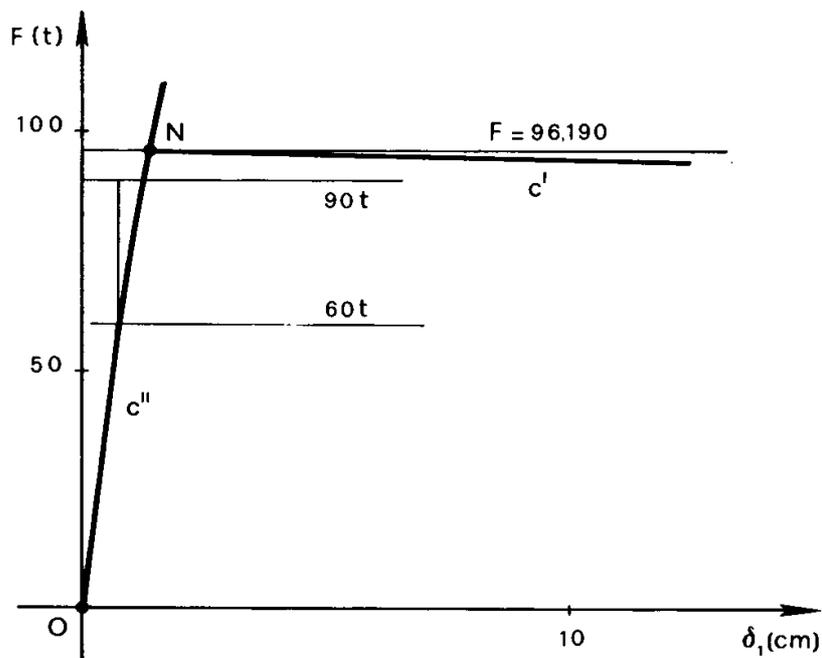


Fig. 13

La modestia di questo risultato non tragga però in inganno; esso si è ottenuto poiché per semplicità di esempio si è operato su una struttura a due piani. Ben diverse possono essere le decurtazioni del carico di rottura per intelaiature metalliche molto alte, e perciò stesso molto deformabili. In tal caso però è necessario procedere utilizzando l'elaboratore di dati; esso è particolarmente utile in qualsiasi calcolo del tipo esaminato, e cioè di natura ripetitiva, poiché permette di stringere quanto si voglia l'intervallo ΔF dello stadio generico, restringendolo man mano che F aumenta, e con esso l'inclinazione del diagramma $\delta \rightarrow F$.