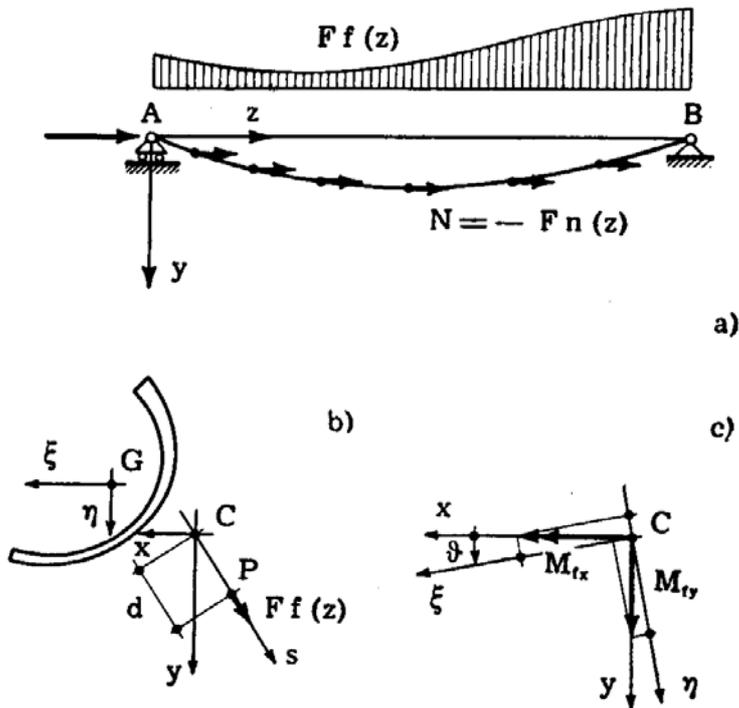


CAPITOLO VIII

INSTABILITA' TORSIO-FLESSIONALE DELLE TRAVI INFLESSE

1. Equazioni generali del problema.

Si consideri ancora una trave AB (fig. 8-1 a) a sezione retta sottile comunque variabile, in cui però i baricentri G ed i centri di taglio C siano situati lungo due rette parallele. La trave sia caricata con forze



$$M_{t\xi} = M_{tx} \cos \vartheta + M_{ty} \sin \vartheta$$

$$M_{t\eta} = M_{ty} \cos \vartheta - M_{tx} \sin \vartheta$$

FIG. 8-1

$Ff(z)$ agenti secondo un asse s normale all'asse z dei centri di taglio e passanti per esso, e da forze parallele all'asse z agenti lungo la retta dei baricentri e tali che nella sezione all'ascissa z generica sia $-Fn(z)$ lo sforzo normale.

Sia d (fig. 1-8 b) la distanza dal centro C del punto P di applicazione delle forze $F f(z)$; l'asse s e la distanza d siano invariabili con z .

Gli assi principali ξ ed η siano sulla trave indeformata di direzione invariabile con z ; gli assi $x y$, invariabili con la deformazione e paralleli agli assi ξ ed η della trave indeformata, abbiano per origine il centro C .

Se T_x e T_y sono i tagli all'ascissa generica z , calcolati sulla trave indeformata, si ha

$$\begin{aligned} (EI_\eta u'')' &= -F n u' - T_x \\ (EI_\xi v'')' &= -F n v' - T_y ; \end{aligned} \tag{a}$$

si ricordi infatti che il momento M_y è positivo se nel verso $z \rightarrow x$, e quindi, procedendo da z a $z + dz$, si ha

$$\begin{aligned} dM_y &= N du - T_x dz = -F n du - T_x dz \\ dM_x &= -N dv + T_y dz = F n dv + T_y dz \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{dM_y}{dz} &= -F n \frac{du}{dz} - T_x \\ \frac{dM_x}{dz} &= F n \frac{dv}{dz} + T_y ; \end{aligned} \tag{b}$$

valgono inoltre le relazioni

$$\begin{aligned} M_y &= EI_\eta u'' \\ M_x &= -EI_\xi v'' . \end{aligned} \tag{c}$$

Se si chiamano M_{fx} ed M_{fy} i momenti dovuti alle forze trasversali, le (b) si scrivono

$$\begin{aligned} (EI_\eta u'')' + F n u' - M'_{fy} &= 0 \\ (EI_\xi v'')' + F n v' + M'_{fx} &= 0 . \end{aligned} \tag{1}$$

Se la trave (e con essa ξ ed η) presenta le rotazioni ϑ intorno all'asse z , le flessioni provocate da M_x ed M_y sono deviate, e non valgono più le (8-1); se però le ϑ sono piccole, gli spostamenti u e v secondo

x e y possono confondersi con quelli secondo gli assi ξ ed η , e le (8-1) continuano a valere, purchè al posto di M_{fx} ed M_{fy} si pongano $M_{f\xi}$ ed $M_{f\eta}$ (fig. 8-1 c). Tenendo conto anche del fatto che C non coincide con G (7-22) si ha

$$(EI_{\eta} u'')' + F n u' - F y_G n \vartheta' - (M_{fy} \cos \vartheta - M_{fx} \sin \vartheta)' = 0$$

$$(EI_{\xi} v'')' + F n v' + F x_G n \vartheta' + (M_{fx} \cos \vartheta + M_{fy} \sin \vartheta)' = 0 .$$

Queste, per ϑ piccolo, si scrivono

$$(EI_{\eta} u'')' + F n u' - F y_G n \vartheta' - (M_{fy} - M_{fx} \vartheta)' = 0$$

$$(EI_{\xi} v'')' + F n v' + F x_G n \vartheta' + (M_{fx} + M_{fy} \vartheta)' = 0 .$$

(2)

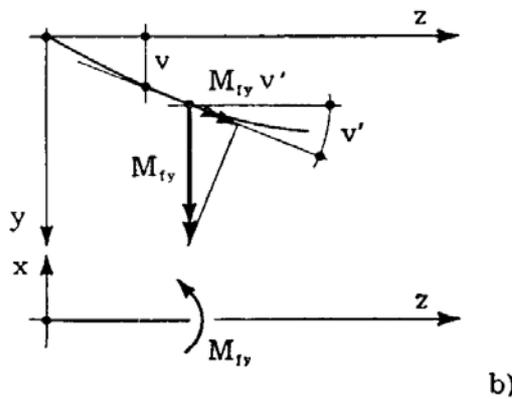
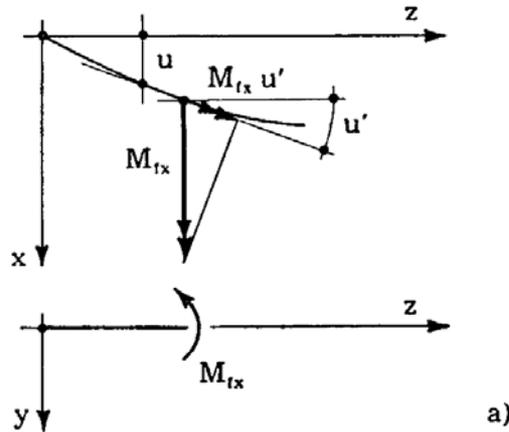


FIG. 8-2

La presenza delle u e v induce un momento torcente pari (fig. 8-2) a

$$M_t = M_{fx} u' + M_{fy} v' . \quad (d)$$

Inoltre, nel passaggio dall'ascissa z all'ascissa $z + dz$ il momento torcente si incrementa di

$$\frac{dM_t}{dz} dz = -T_y \frac{du}{dz} dz + T_x \frac{dv}{dz} dz ; \quad (d')$$

d'altro canto, per effetto della rotazione ϑ della sezione la retta d'azione della forza non passa più per C (fig. 8-3), ma a distanza ϑd da quest'ultimo;

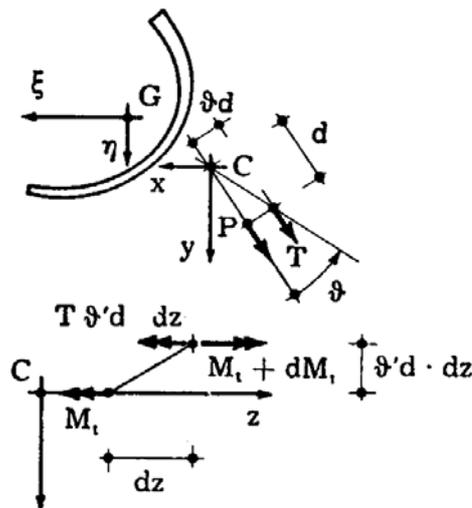


FIG. 8-3

quindi l'equilibrio alla rotazione intorno all'asse z del tronco dz si esprime nel modo seguente:

$$-M_t + M_t + dM_t - T d \vartheta' dz = 0$$

da cui

$$\frac{dM_t}{dz} = T \vartheta' d . \quad (d'')$$

Dalle (d), (d') e (d'') si trae

$$M'_t = (M_x u')' + (M_y v')' - T_y u' + T_x v' + T \vartheta' d .$$

Le (ϑ) sono perciò rette dall'equazione (vedi 7-2 e 7-22)

$$C_2 \vartheta^{iv} + C'_2 \vartheta''' - \left(C_1 - F n \frac{I_c}{A} \right) \vartheta'' - \left(C_1 - F n \frac{I_c}{A} \right)' \vartheta' - \quad (d''')$$

$$- F (n u')' y_G + F (n v')' x_G = - (M_{ix} u')' - (M_{iy} v')' +$$

$$+ T_y u' - T_x v' - T \vartheta' d .$$

Dalle relazioni

$$M'_{fx} = T_y$$

$$M'_{fy} = -T_x$$

si trae

$$-(M_{fx} u')' + T_y u' = -M_{fx} u'' - T_y u' + T_y u' = -M_{fx} u''$$

$$-(M_{fy} v')' - T_x v' = -M_{fy} v'' + T_x v' - T_x v' = -M_{fy} v''$$

e quindi si ottiene

$$\begin{aligned} C_2 \vartheta^{iv} + C'_2 \vartheta^{iii} - \left(C_1 - F n \frac{I_C}{A} \right) \vartheta'' - \left(C_1 - F n \frac{I_C}{A} \right)' \vartheta' - \\ - F (n u')' y_G - F (n v')' x_G + M_{fx} u'' + \\ + M_{fy} v'' + T \vartheta' d = 0 . \end{aligned} \quad (3)$$

Dalle (8-2) ed (8-3) si trae che nel caso generale non esiste possibilità di punti di diramazione per variazioni euleriane, perchè le u , v e ϑ sono tutte diverse da zero fin dall'inizio; questo, beninteso, non significa che non si debba temere una instabilità di specie diversa (*).

Se però la flessione non è deviata ($M_y = 0$, $u = 0$), risulta nullo il momento torcente (d) da flessione; se inoltre il centro C è ubicato sull'asse principale coincidente con l'asse di sollecitazione, è pure $x_G = 0$, e le (8-2) e (8-3) si riducono alle due

$$(EI_x v'')' + F n v' = -M'_{fx} \quad (e)$$

$$C_2 \vartheta^{iv} + C'_2 \vartheta^{iii} - \left(C_1 - F n \frac{I_C}{A} \right) \vartheta'' - \left(C_1 - F n \frac{I_C}{A} \right)' \vartheta' + T \vartheta' d = 0 .$$

La seconda delle (e) ammette la soluzione $\vartheta = 0$, e perciò è diversa da zero la sola v ; ciò implica la possibilità di una instabilità per variazioni euleriane relativa alle altre due componenti u e ϑ .

(*) E' interessante notare dalla (d) come la flessione deviata si accompagni sempre a torsione, anche se le caratteristiche di quest'ultima sono funzioni degli spostamenti flessionali, e quindi trascurabili nello spirito delle ipotesi su cui si basa la teoria del *De Saint-Venant*.

Se C non è ubicato sull'asse principale corrispondente alla sollecitazione, ma $n=0$, si ha

$$EI_{\xi} v'' = - M_{fx} \quad (f)$$

$$C_2 \vartheta^{iv} + C'_2 \vartheta''' - C_1 \vartheta'' - C'_1 \vartheta' + T \vartheta' d = 0$$

e quindi ancora la possibilità di instabilità per variazioni euleriane.

2. La trave soggetta a momento flettente costante.

Si consideri una trave AB di sezione sottile costante (fig. 8-4) soggetta alle estremità a due coppie \mathcal{M} agenti secondo un asse principale d'inertia. Se y è l'asse di sollecitazione ed x l'asse neutro, esiste un valore

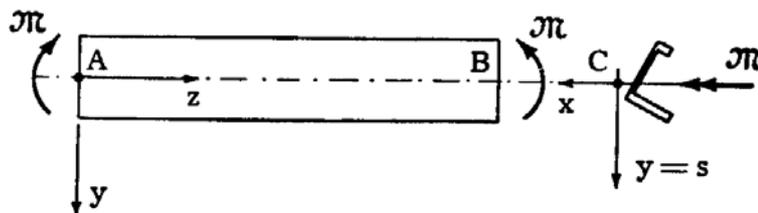


FIG. 8-4

critico \mathcal{M}_c tale che, per $\mathcal{M} < \mathcal{M}_c$, risulta $v \neq 0$ ed $u = \vartheta = 0$, per $\mathcal{M} \geq \mathcal{M}_c$ invece può essere pure $u \neq 0$, $\vartheta \neq 0$.

Per $\mathcal{M} = \mathcal{M}_c$ una delle equazioni che forniscono u e ϑ è la prima delle (8-2), ove $M_{fy} = 0$, $M_{fx} = \mathcal{M}$, $n = 0$; essa equivale all'altra

$$EI_{\eta} u'' + \mathcal{M} \vartheta = 0 \quad (g)$$

D'altro canto la (8-3) si scrive

$$C_2 \vartheta^{iv} - C_1 \vartheta'' + \mathcal{M} u'' = 0 \quad (h)$$

Dalle (g) ed (h) si ha

$$C_2 \vartheta^{iv} - C_1 \vartheta'' - \frac{\mathcal{M}^2}{EI_{\eta}} \vartheta = 0$$

che può anche scriversi

$$\vartheta^{iv} - 2\alpha \vartheta'' - \beta \vartheta = 0 \quad (4)$$

con le posizioni

$$\alpha = \frac{C_1}{2 C_2} \quad (5)$$

$$\beta = \frac{\pi^2}{EI_\eta C_2}$$

L'integrale generale della (8-4) è

$$\vartheta = A \operatorname{sen} mz + B \operatorname{cos} mz + C e^{nz} + D e^{-nz} \quad (i)$$

dove è

$$m = \sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta}} \quad (l)$$

$$n = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta}} .$$

Se ai due estremi le sezioni sono vincolate con appoggi torsionali, si hanno le condizioni ai limiti

$$\begin{aligned} z=0 & \quad \vartheta = \vartheta'' = 0 \\ z=l & \quad \vartheta = \vartheta'' = 0 ; \end{aligned} \quad (m)$$

le prime due delle (m) si scrivono

$$0 = B + C + D$$

$$0 = -Bm^2 + Cn^2 + Dn^2$$

la cui soluzione è

$$B = 0$$

$$C = -D .$$

La (i) si scrive perciò

$$\vartheta = A \operatorname{sen} mz - 2D \operatorname{senh} nz . \quad (n)$$

Dalla (n) e dalle ultime due delle (m) si trae il sistema

$$A \operatorname{sen} ml - 2D \operatorname{senh} nl = 0 \quad (o)$$

$$A m^2 \operatorname{sen} ml + 2D n^2 \operatorname{senh} nl = 0$$

la cui condizione di compatibilità è

$$\operatorname{sen} m\ell \operatorname{senh} n\ell (n^2 + m^2) = 0$$

da cui si trae

$$\operatorname{sen} m\ell = 0 \quad (p)$$

e dalle (o)

$$D = 0 .$$

Per i valori di m che soddisfano la (p) la \mathfrak{F} è perciò diversa da zero, e si scrive (n)

$$\mathfrak{F} = A \operatorname{sen} mz .$$

Il più piccolo valore di m che soddisfa la (p) è

$$m = \frac{\pi}{\ell}$$

che si traduce, per la prima delle (l), nell'altra

$$-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta} = \frac{\pi^2}{\ell^2} ;$$

questa, per le (8-5), fornisce

$$\mathfrak{M}_C = \gamma \frac{\sqrt{EI_\eta C_1}}{\ell} \quad (6)$$

con

$$\gamma = \pi \sqrt{1 + \frac{C_2}{C_1} \frac{\pi^2}{\ell^2}} . \quad (7)$$

Se C_2 è trascurabile rispetto a $C_1 \ell^2$, come nelle sezioni rettangolari, si ha $\gamma = \pi$, e si ottiene

$$\mathfrak{M}_C = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{EI_\eta C_1} . \quad (8)$$

Se $C_1 l^2$ è invece trascurabile rispetto a C_2 , si ha

$$\mathfrak{K}_C = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{EI_\eta C_2} . \quad (9)$$

3. La trave a mensola soggetta ad una forza all'estremo.

Si studi una trave AB a mensola, di sezione costante, soggetta in B ad una forza F ortogonale all'asse parallela ad un asse principale d'inerzia,

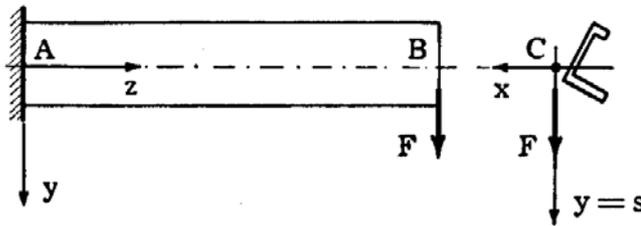


FIG. 8-5

e applicata nel centro di taglio (fig. 8-5). Dalle (8-2) e (8-3) si trae

$$EI_\eta u'' + M_{ix} \vartheta = 0 \quad (q)$$

$$C_2 \vartheta^{iv} - C_1 \vartheta'' + M_{ix} u'' = 0 .$$

Nel caso in esame è

$$M_{ix} = - F (l - z) ;$$

la seconda delle (q) si scrive perciò, tenuto conto della prima,

$$C_2 \vartheta^{iv} - C_1 \vartheta'' - \frac{F^2}{EI_\eta} (l - z)^2 \vartheta = 0 . \quad (10)$$

La (8-10) è stata risolta dal *Timoshenko*, che è pervenuto al valore F_c fornito da

$$F_c = \gamma \frac{\sqrt{EI_\eta C_1}}{l^2} . \quad (11)$$

Nelle tabelle (8-1) ed (8-2) sono riportati dal *Timoshenko* (che li ha ricavati per profili a I) i valori di γ , per diversi valori del rapporto $l^2 \frac{C_1}{C_2}$, nel caso della flessione pura (8-6) ed in quello della forza all'estremo (8-11); esse sono però utilizzabili, per essere identica la struttura delle equazioni, per qualsiasi tipo di profilato.

TABELLA 8-1
FLESSIONE PURA

$l^2 \frac{C_1}{C_2}$	0	0,1	1	2	4	6	8	10	12
γ	∞	31,4	10,4	7,66	5,85	5,11	4,70	4,43	4,24
$l^2 \frac{C_1}{C_2}$	16	20	24	28	32	36	40	100	∞
γ	4,00	3,83	3,73	3,66	3,59	3,55	3,51	3,29	π

TABELLA 8-2
FORZA ALL'ESTREMO

$l^2 \frac{C_1}{C_2}$	0,1	1	2	3	4	6	8
γ	44,3	15,7	12,2	10,7	9,76	8,69	8,03
$l^2 \frac{C_1}{C_2}$	10	12	14	16	24	32	40
γ	7,58	7,20	6,96	6,73	6,19	5,87	5,64

Per una sezione rettangolare allungata la (8-10) si scrive

$$C_1 \vartheta'' + \frac{F^2}{EI_y} (l - z)^2 \vartheta = 0$$

che, con le posizioni

$$\beta = \sqrt{\frac{F^2}{EI_y C_1}}$$

$$s = (\ell - z) ,$$

diviene

$$\frac{d^2 \vartheta}{ds^2} + \beta^2 s^2 \vartheta = 0 . \quad (r)$$

La soluzione generale della (r) è

$$\vartheta = \sqrt{s} \left[A J_{1/4} \left(\frac{\beta}{2} s^2 \right) + B J_{-1/4} \left(\frac{\beta}{2} s^2 \right) \right]$$

in cui $J_{1/4}$ e $J_{-1/4}$ sono le funzioni di *Bessel* del primo tipo di ordine $1/4$ e $-1/4$.

Le condizioni ai limiti sono

$$s = \ell \quad \vartheta = 0$$

$$s = 0 \quad \frac{d\vartheta}{ds} = 0$$

da cui

$$A = 0$$

$$J_{-1/4} \left(\frac{\beta}{2} \ell^2 \right) = 0 . \quad (s)$$

La più piccola radice della (s) è (*Timoshenko*)

$$\frac{\beta}{2} \ell^2 = 2,0063$$

da cui

$$F_c = \frac{4,013}{\ell^2} \sqrt{EI_y C_1} . \quad (12)$$

Se la forza F è applicata alla distanza d dal centro di taglio, il valore di F_c varia.

Per una sezione rettangolare allungata, il *Timoshenko* fornisce la seguente formula approssimata

$$F_c = \frac{4,013}{\ell^2} \sqrt{EI_y C_1} \left(1 + \frac{d}{\ell} \sqrt{\frac{EI_y}{C_1}} \right) \quad (13)$$

dove d è positiva se la forza è applicata al disotto del centro di taglio; in questo caso la (8-13) fornisce un valore più elevato della (8-12).

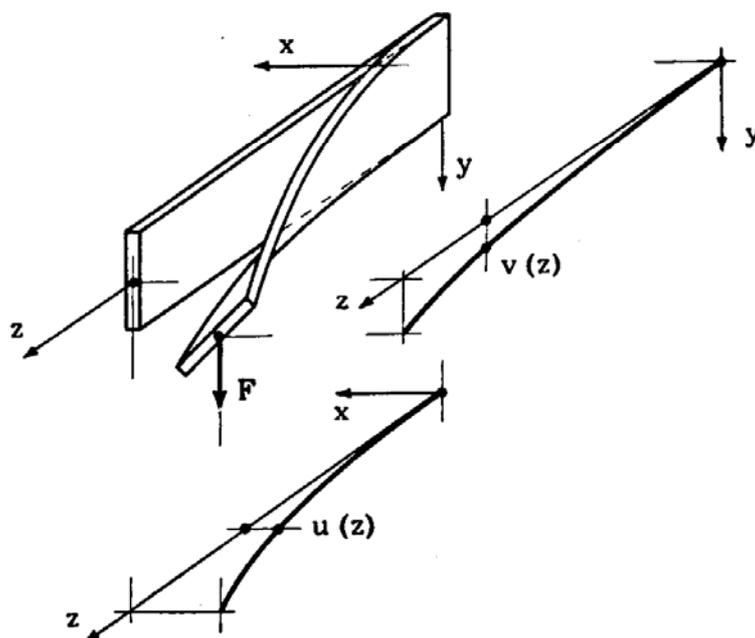


FIG. 8-6

Sempre per una trave a sezione rettangolare allungata, soggetta ad un carico q distribuito uniformemente, il *Timoshenko* fornisce il valore critico:

$$(ql)_c = \frac{12,85}{l^2} \sqrt{EI_y C_1}, \quad (14)$$

pressochè triplo del valore (8-12).

4. La trave appoggiata agli estremi soggetta ad una forza concentrata in mezzeria.

Nel caso in esame (fig. 8-7) risulta

$$M_{ix} = \frac{F}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right)$$

$$M_{iy} = 0$$

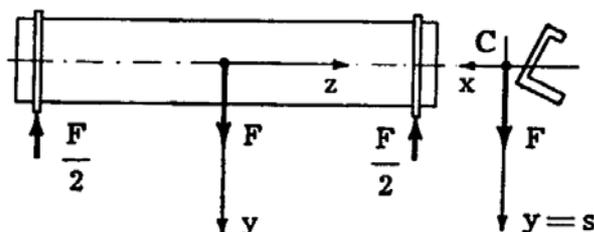


FIG 8-7

e quindi la prima delle (8-2) e la (8-3) si scrivono

$$EI_{\eta} u'' + \frac{F}{2} \left(\frac{\ell}{2} - z \right) \vartheta = 0$$

$$C_2 \vartheta^{iv} - C_1 \vartheta'' + \frac{F}{2} \left(\frac{\ell}{2} - z \right) u'' = 0 ;$$

da esse si ricava

$$C_2 \vartheta^{iv} - C_1 \vartheta'' - \frac{F^2}{4 EI_{\eta}} \left(\frac{\ell}{2} - z \right)^2 \vartheta = 0 . \quad (t)$$

Se la forza è applicata a distanza d dal centro di taglio, si ha invece

$$C_2 \vartheta^{iv} - C_1 \vartheta'' + \frac{F}{2} \vartheta' d - \frac{F^2}{4 EI_{\eta}} \left(\frac{\ell}{2} - z \right)^2 \vartheta = 0 . \quad (u)$$

La soluzione delle (t) e (u) è sempre esprimibile nella forma

$$F_c = \gamma \frac{\sqrt{EI_{\eta} C_1}}{\ell^2} ;$$

i valori di γ , per una trave a I simmetrica, forniti dal *Timoshenko*, sono riportati nella tabella 8-3;

TABELLA 8-3

TRAVE A I SIMMETRICA SEMPLICEMENTE APPOGGIATA
E CON FORZA CONCENTRATA IN MEZZERIA

$\frac{C_1}{\ell^2} - \frac{C_2}{C_2}$	0,4	4	8	16	24	32	48
sopra . .	51,5	20,1	16,9	15,4	15,0	14,9	14,8
centro . .	86,4	31,9	25,6	21,8	20,3	19,6	18,8
sotto . .	147	50,0	38,2	30,3	27,2	25,4	23,5
$\frac{C_1}{\ell^2} - \frac{C_2}{C_2}$	64	80	96	160	240	320	400
sopra . .	15,0	15,0	15,1	15,3	15,5	15,6	15,8
centro . .	18,3	18,1	17,9	17,5	17,4	17,2	17,2
sotto . .	22,4	21,7	21,1	20,0	19,3	19,0	18,7

i valori intermedi (forze nel centro di taglio) sono sfruttabili per qualsiasi tipo di sezione.

Per una trave a I simmetrica caricata da un carico uniformemente distribuito q si ha ancora

$$(q\ell)_c = \gamma \frac{\sqrt{EI_y C_1}}{\ell^2}$$

dove i valori di γ , sempre forniti dal *Timoshenko*, sono riportati nella tabella 8-4;

TABELLA 8-4

TRAVE A I SIMMETRICA SEMPLICEMENTE APPOGGIATA
E CON CARICO UNIFORME

$\ell^2 \frac{C_1}{C_2}$	0,4	4	8	16	24	32	48
sopra . .	92,9	36,3	30,4	27,5	26,6	26,1	25,9
centro . .	143	53,0	42,6	36,3	33,8	32,6	31,5
sotto . .	223	77,4	59,6	48,0	43,6	40,5	37,8

$\ell^2 \frac{C_1}{C_2}$	64	80	128	200	280	360	400
sopra . .	25,9	25,8	26,0	26,4	26,5	26,6	26,7
centro . .	30,5	30,1	29,4	29,0	28,8	28,6	28,6
sotto . .	36,4	35,1	33,3	32,1	31,3	31,0	30,7

anche in questo caso i valori intermedi sono utilizzabili per qualsiasi tipo di sezione.

Per una sezione rettangolare allungata caricata nel baricentro si ha

$$F_c = \frac{16,94}{\ell^2} \sqrt{EI_y C_1} \quad (15)$$

$$(q\ell)_c = \frac{28,30}{\ell^2} \sqrt{EI_y C_1} \quad (16)$$

5. Il metodo energetico.

Si è osservato nei paragrafi precedenti come già in casi estremamente semplici sia difficile pervenire al valore esatto del carico critico da flessio-

torsione; in presenza di travi a sezione variabile e di carichi qualsiasi, è indispensabile risolvere le equazioni dell'equilibrio variato con metodi approssimati. Tanto vale perciò adottare in tali casi il metodo energetico, utilizzando l'algoritmo del *Ritz*, che si presta egregiamente anche in presenza di forze aventi punto di applicazione variabile con la configurazione, e di escursioni in campo inelastico. A tale proposito si fa notare come sia ben raro che un carico critico da flesso-torsione possa essere contenuto nel periodo elastico.

Con riferimento al tronco elementare di lunghezza dz , l'energia di deformazione dovuta alla torsione è fornita da

$$dL = \frac{1}{2} M_t \vartheta' dz ;$$

dalla relazione

$$M_t = C_1 \vartheta' - C_2 \vartheta'''$$

si trae

$$dL = \frac{1}{2} (C_1 \vartheta'^2 - C_2 \vartheta' \vartheta''') .$$

La parte W del $\delta_2 E$ a partire dalla configurazione $\vartheta = u = 0$ è fornita perciò da

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l EI_\eta u''^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^l C_1 \vartheta'^2 dz - \frac{1}{2} \int_0^l C_2 \vartheta' \vartheta''' dz . \quad (17)$$

La terna $\delta u \delta v \delta w$ rispetto alla quale si calcola il $\delta_2 E$ è definita dagli spostamenti $u_c v_c$ del centro di taglio e dalle rotazioni ϑ intorno ad esso;

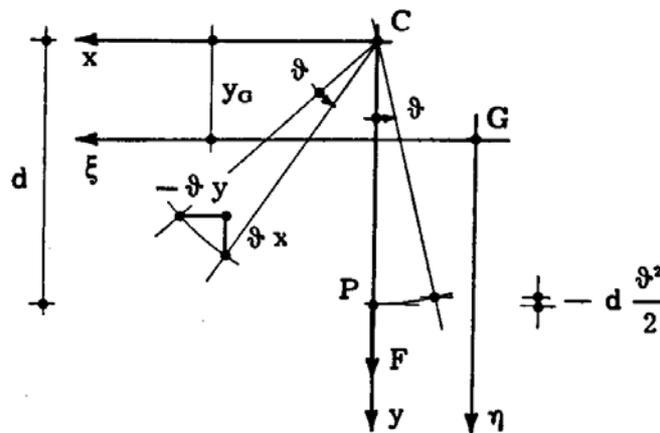


FIG. 8-8

posto $v_c = 0$, poichè la terna è euleriana, si ha (fig. 8-8)

$$\delta u = u_C - \vartheta y$$

$$\delta v = \vartheta x$$

$$\delta w = 0 .$$

Risulta, se la forza F è di direzione invariabile ed applicata a distanza d al disotto di C ,

$$L_2 = - F \frac{\vartheta^2}{2} d ; \quad (18)$$

se F è applicata in C , risulta $L_2 = 0$.

D'altro canto si ha

$$\delta \varepsilon_z^{(2)} = \frac{(\delta u)^2}{2} + \frac{(\delta v)^2}{2} = \frac{u'_C{}^2}{2} + \frac{y^2 \vartheta'^2}{2} - u'_C \vartheta' y + \frac{x^2 \vartheta'^2}{2}$$

$$\sigma_z = \frac{M_\xi}{I_\xi} (y - y_G)$$

e quindi

$$\begin{aligned} L_2^* &= \int_V \sigma_z \delta \varepsilon_z^{(2)} dV = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_\xi}{I_\xi} u'_C{}^2 \int_A (y - y_G) dA dz + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_\xi}{I_\xi} \vartheta'^2 \int_A (y - y_G) y^2 dA dz - \int_0^l \frac{M_\xi}{I_\xi} u'_C \vartheta' \int_A (y - y_G) y dA dz + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_\xi}{I_\xi} \vartheta'^2 \int_A (y - y_G) x^2 dA dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_\xi}{I_\xi} \left(\int_A y^3 dA - y_G I_x \right) \vartheta'^2 dz - \\ &- \int_0^l \frac{M_\xi}{I_\xi} (I_x - y_G S_x) \vartheta' u'_C dz + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_\xi}{I_\xi} \left(\int_A y x^2 dA - y_G I_y \right) \vartheta'^2 dz . \end{aligned} \quad (19)$$

Se C giace sull'asse ξ , e se in particolare si ha simmetria della sezio-

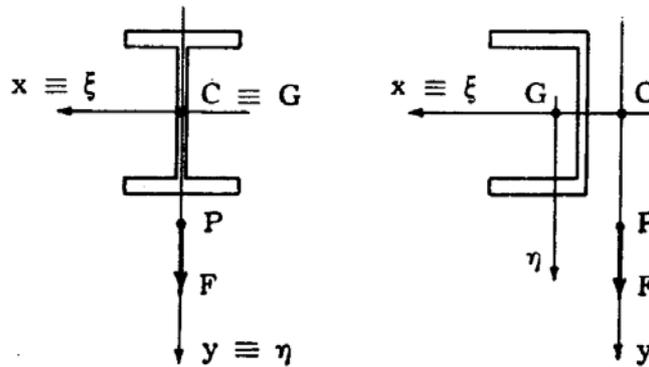


FIG. 8-9

ne rispetto all'asse ξ (fig. 8-9), si ha

$$I_x = I_\xi \quad ; \quad S_x = 0 \quad ; \quad \int_A y^3 dA = 0 \quad ;$$

$$\int_A y x^2 dA = 0 \quad ; \quad y_G = 0 \quad ,$$

e la (8-19) si scrive

$$L_2^* = - \int_0^l M_\xi \vartheta' u'_C dz \quad . \quad (20)$$

Si ponga

$$u_C = \sum_1^m u_n \operatorname{sen} \frac{n \pi z}{l} \quad (21)$$

$$\vartheta = \sum_1^m \vartheta_n \operatorname{sen} \frac{n \pi z}{l} \quad ;$$

si ponga inoltre

$$M_\xi = F M_{1\xi} \quad .$$

Dalle (8-17), (8-18) ed (8-19) si calcola $\delta_2 E$ come funzione quadratica delle $2m$ incognite u_n e ϑ_n ; i coefficienti delle incognite contengono F alla prima potenza. La condizione $\Delta = 0$ è un'equazione di grado $2m$ in F che risolve il problema.

Se si esce dal campo elastico, occorre procedere al solito per tentativi, poichè nella (8-17) vanno inseriti i moduli tangenti corrispondenti all'effettivo valore della tensione. Ciò è reso possibile dal fatto che in genere (per es. sezioni a I, \square , a Γ) la σ attinge un valore costante in buona parte della sezione (ali) che è poi quella che regola quasi tutto il momento di inerzia ed il bimomento. La rigidità torsionale si può calcolare, prudenzialmente, come se la relazione $G(E)$ rimanesse invariata (modulo di *Poisson* invariato) anche al di là del periodo elastico.