

CAPITOLO VI

I TELAI A NODI SPOSTABILI

1. I telai a nodi spostabili caricati soltanto secondo gli assi dei ritti.

In assenza di forze orizzontali (sisma, vento, etc.) si usa riportare ai nodi i carichi agenti sui traversi, considerando a ciò fare i traversi come appoggiati, o meglio nelle reali condizioni di vincolo. Sul telaio indeformato, e caricato dalle sole forze verticali $\lambda_i F$ sui nodi (fig. 6-1),

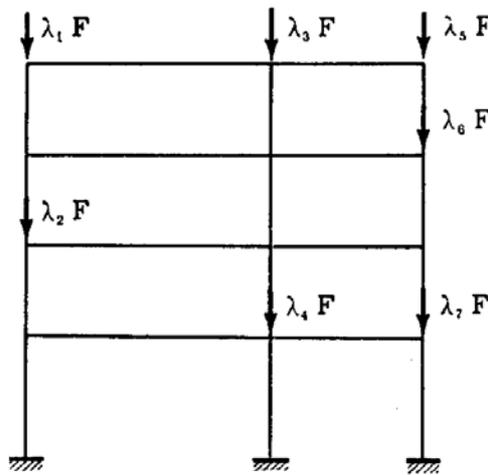


FIG. 6-1

si calcola il carico critico (*); è possibile così operare con variazioni euleriali, anche se lo schema di calcolo è abbastanza diverso da quello reale.

La via maestra è quella di scrivere le n equazioni di equilibrio negli n nodi e le p equazioni di equilibrio per i p piani, tenendo conto della presenza dello sforzo normale nei ritti.

Con riferimento al caso più frequente di telai in cui ogni trave compresa tra due nodi successivi sia di sezione costante ed incastrata agli estremi al suolo o alla rimanente struttura, e con le notazioni del Cap. IV,

(*) E' stato fatto notare dal *Chwalla*, dal *Chilver* e dallo *Sparacio* [23] che, agendo in tal modo, si ottiene un carico critico superiore al vero.

si ha che la φ_i del nodo i generico provoca agli estremi della trave ih coppie di incastro

$$\mathcal{M}_i = \frac{4 EI}{l} \bar{\mathbf{A}} \varphi_i$$

$$\mathcal{M}_h = \frac{4 EI}{l} \bar{\mathbf{A}} \frac{\bar{\mathbf{B}}}{2} \varphi_i ;$$

se un traverso si sposta di δ_i verso destra, e quello superiore di δ_s , agli estremi di tutte le travi (ritti) ih , comprese tra i due traversi, si generano le coppie

$$\mathcal{M}_i = \mathcal{M}_h = \frac{6 EI (\delta_s - \delta_i)}{l^2} \bar{\mathbf{C}} .$$

L'equilibrio alla rotazione del nodo i quindi importa che sia

$$\varphi_i \Sigma' \frac{4 EI}{l} \bar{\mathbf{A}} + \Sigma' \varphi_h \frac{4 EI}{l} \bar{\mathbf{A}} \frac{\bar{\mathbf{B}}}{2} + \Sigma'' \frac{6 EI (\delta_s - \delta_i)}{l^2} \bar{\mathbf{C}} = 0 . \quad (1)$$

Le Σ' sono estese a tutte le aste concorrenti in i (le φ_h sono le rotazioni dei nodi vicini), la Σ'' ai soli due ritti con estremo i . L'equilibrio alla traslazione orizzontale della parte del telaio al disopra di una sezione orizzontale che tagli tutti i ritti di un piano impone poi

$$\Sigma''' \frac{4 EI}{l^2} \bar{\mathbf{A}} \left(1 + \frac{\bar{\mathbf{B}}}{2} \right) \varphi_i + \Sigma^{iv} \frac{12 EI (\delta_s - \delta_i)}{l^3} \bar{\mathbf{C}} + \Sigma^{iv} N \frac{\delta_s - \delta_i}{l} = 0$$

e ancora, poichè

$$\bar{\mathbf{A}} \left(1 + \frac{\bar{\mathbf{B}}}{2} \right) = \frac{3}{2} \bar{\mathbf{C}} ,$$

può scriversi (*)

$$\Sigma''' \frac{6 EI}{l^2} \bar{\mathbf{C}} \varphi_i + \Sigma^{iv} \frac{12 EI (\delta_s - \delta_i)}{l^3} \bar{\mathbf{C}} + \Sigma^{iv} N \frac{\delta_s - \delta_i}{l} = 0 , \quad (2)$$

(*) Le (6-1) e (6-2) sono le (9-33) e (9-34) del Vol. III modificate per effetto degli sforzi assiali. Questi si risentono nella (9-33) attraverso la sola correzione dei coefficienti ρ, t, ξ ; invece nella (9-34) occorre aggiungere ancora un termine,

dove la Σ''' è estesa a tutti i nodi appartenenti ai ritti del piano tagliato, e la Σ'' agli stessi ritti.

Le (1) sono le n equazioni dei nodi, le (2) le p equazioni dei piani. Le incognite sono le n rotazioni φ dei nodi ed i p spostamenti δ dei traversi; il verso positivo delle φ e delle coppie è quello antiorario, il verso positivo dei δ verso destra. Il sistema (1) (2) è omogeneo, ed i coefficienti contengono la F attraverso $\bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{B}}$ e $\bar{\mathbf{C}}$; la condizione

$$\Delta_{n+p} = 0, \quad (3)$$

equazione in F , definisce il valore critico F_c di F nella sua più bassa radice.

Nelle strutture a nodi fissi le (1) sono le sole equazioni da scrivere, ed in esse la terza sommatoria scompare; attraverso queste equazioni si può operare per le travature reticolari.

Se qualche estremo di trave è vincolato a cerniera invece che con incastro, i corrispondenti termini delle (6-1) e (6-2) vanno modificati in modo ovvio.

Un interessante procedimento proposto dal *Raithel* per i telai a nodi spostabili è il seguente.

I valori F_{as} di F per cui accanto alla configurazione a ritti rettilinei ne

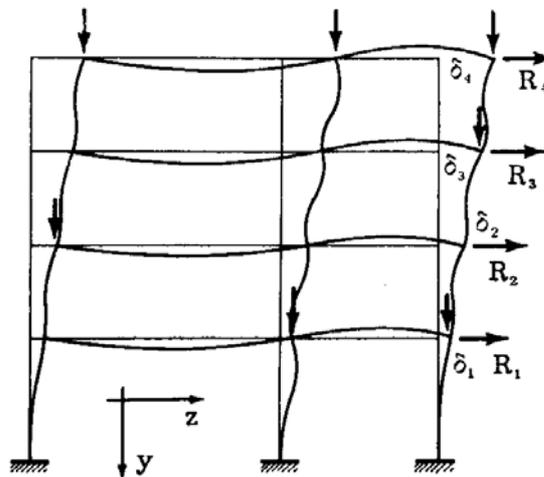


FIG. 6-2

compare un'altra a ritti inflessi e a nodi spostati sono determinabili scrivendo particolari equazioni dell'equilibrio variato.

Siano $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_p$ (fig. 6-2) gli spostamenti dei traversi, ed $R_1 R_2 \dots R_p$

dovuto al fatto che il taglio nel ritto generico ih è fornito dalla condizione di equilibrio

$$\mathcal{M}_{ih} + \mathcal{M}_{hi} - T l - N l \phi = 0$$

da cui

$$T = \frac{\mathcal{M}_{ih} + \mathcal{M}_{hi}}{l} - N \phi.$$

le forze orizzontali capaci di produrre tali spostamenti, positive se dirette verso destra. I valori delle R sono ricavabili nella maniera che segue. Si bloccano, con vincoli che impediscono la traslazione, tutti i traversi, ed in corrispondenza dell' i -esimo traverso si imprime un cedimento vincolare Δ_i ; sorgono così sui vincoli reazioni R_{ji} (fig. 6-3). La generica R_{ji} è

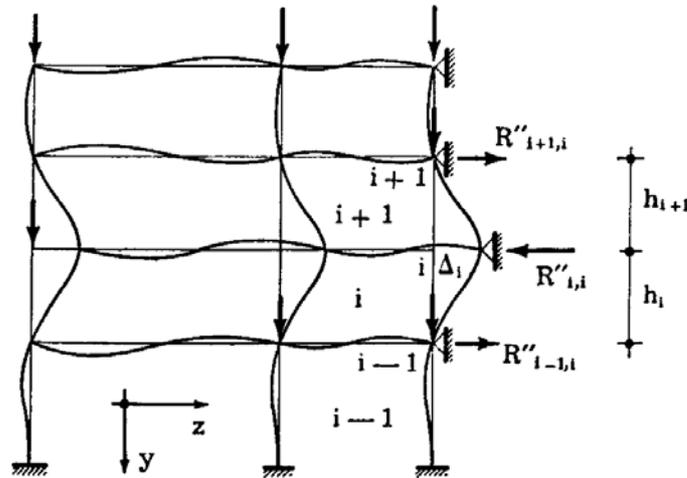


FIG. 6-3

composta di due parti, una R'_{ji} dovuta ai momenti flettenti delle travi che costituiscono il telaio, l'altra R''_{ji} provocata dalle forze assiali $\lambda_i F$. Le R'_{ji} si possono ottenere con una distribuzione alla *Cross* dei momenti di incastro perfetto, tenendo presente che le rigidità ed i coefficienti di trasmissione negli elementi verticali sono calcolati in presenza degli sforzi assiali; ottenuti così i momenti provocati da Δ_i , le condizioni di equilibrio dei singoli traversi forniscono, attraverso i tagli, le R'_{ji} .

Le R''_{ji} interessano soltanto i vincoli $i-1$, i ed $i+1$ e sono fornite da (fig. 6-3)

$$\begin{aligned}
 R''_{i+1,i} &= - \sum N_{i+1} \frac{\Delta_i}{h_{i+1}} \\
 R''_{i,i} &= + \sum N_i \frac{\Delta_i}{h_i} - \sum N_{i+1} \frac{\Delta_i}{h_{i+1}} \\
 R''_{i-1,i} &= - \sum N_i \frac{\Delta_i}{h_i}
 \end{aligned} \tag{4}$$

dove le sommatorie sono estese a tutti i ritti di ordine i , o $i+1$.

Nelle (6-4) gli sforzi normali sono forniti dalla somma delle forze $\lambda_i F$ agenti al disopra del ritto in esame; in essi non intervengono gli sforzi normali dovuti ai momenti flettenti. Lo stesso implicitamente è stato fatto nel calcolo delle R'_{ji} ; l'approssimazione è nell'ordine stesso del procedimento, perchè questo si basa sul principio di sovrapposizione, e quindi è valido per sforzi assiali costanti. Del resto, poichè si procede per variazioni euleriane, è giustificato trascurare, rispetto agli sforzi normali già esistenti sulla configurazione principale, quelli che ad essi si aggiungono sulla configurazione variata. Nel ricavare le (6-4), ottenute scrivendo per ogni ritto di ordine i o $i + 1$ le condizioni di equilibrio alla rotazione intorno al nodo i -esimo, non si sono chiamati in gioco i momenti alle estremità dei ritti stessi; infatti di essi si tiene conto appunto attraverso le R'_{ji} .

Calcolate le R_{ji} , per il principio di sovrapposizione le R_i connesse con i δ_i sono fornite dal sistema (nelle α)

$$\begin{aligned} \alpha_1 R_{11} + \alpha_2 R_{12} + \dots + \alpha_p R_{1p} &= R_1 \\ \alpha_1 R_{21} + \alpha_2 R_{22} + \dots + \alpha_p R_{2p} &= R_2 \\ \dots & \\ \alpha_1 R_{p1} + \alpha_2 R_{p2} + \dots + \alpha_p R_{pp} &= R_p \end{aligned} \quad (5)$$

La soluzione $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p$ del sistema fornisce gli spostamenti $\delta_1 = \alpha_1 \Delta_1$, $\delta_2 = \alpha_2 \Delta_2$, ..., $\delta_p = \alpha_p \Delta_p$ provocati dalle R_i .

La condizione di equilibrio variato è che il sistema (6-5) presenti soluzione non nulla per $R_1 = R_2 = \dots = R_p = 0$; e cioè

$$\Delta_p = 0 \quad (6)$$

La (6-6) è un'equazione in F , che fornisce i valori F_{as} di F per cui una configurazione inflessa equilibrata a nodi spostati si affianca a quella rettilinea; questi valori si sono chiamati F_{as} invece di F_a appunto perchè sono relativi alle sole configurazioni con traversi spostati.

Agli F_{as} si affiancano gli F_{af} relativi alle configurazioni a nodi fissi. Vale anche in questo caso la necessità di verificare, una volta calcolato F_c , se le tensioni corrispondenti sono contenute nell'ambito elastico. In caso contrario, occorre procedere alla *Shanley*, introducendo in ogni sezione il modulo elastico corrispondente alla tensione normale provocata

da F_c in quella sezione; ciò comporta la necessità di procedere per tentativi.

Se la struttura presenta i traversi bloccati da vincoli che ne impediscono la traslazione, si scrivono le sole (6-1) per $\delta_1 = \delta_s = 0$, e il carico critico è il più basso degli F'_{af} soluzioni dell'equazione

$$\Delta_n = 0$$

dove Δ_n è il determinante dei coefficienti delle φ nelle (6-1).

Valgono le seguenti osservazioni. Si chiamino F_{as} i valori di F cui sul telaio reale si associano soluzioni diramate con δ non tutti nulli, F'_{af} i valori di F cui sul telaio reale si associano soluzioni diramate con δ tutti nulli. Gli F_{as} ed F'_{af} esauriscono tutte le soluzioni F_a del $\Delta_{n+p} = 0$.

I valori $F_{s\infty}$ per cui $\Delta_p = \infty$ coincidono con i carichi critici F'_{af} cui si associano reazioni dei vincoli R^* non nulle (e definite a meno di una costante), e cioè agli F'_{af} che non sono F_{af} . Infatti per questi valori di R^* le (6-5) forniscono soluzioni tutte nulle per le α , e quindi è

$$\alpha_i = \frac{\Delta_{ip}}{\Delta_p} = 0, \quad (i = 1, 2 \dots p)$$

dove Δ_{ip} è il Δ_p in cui alla i -esima colonna si è sostituita quella delle R^* . Poichè non può essere $\Delta_{ip} = 0$ per tutte le i (le R^* non possono essere combinazioni lineari delle altre $p-1$ colonne, per tutte le colonne), è $\Delta_p = \infty$.

Si tenga pure presente che tutti gli F_{af} si ritrovano negli F'_{af} , ma degli F'_{af} sono F_{af} quelli e solo quelli cui corrispondono reazioni nulle sui traversi. È importante alla fine osservare che il più basso degli F_{as} può a volte non essere il carico critico reale F_c .

Infatti se fosse $F_{af\ min} < F_{as\ min}$, sarebbe $F_c = F_{af\ min}$; in genere è $F'_{af\ min} < F_{af\ min}$ e quindi sarebbe pure $F'_{af\ min} < F_c$; cioè il carico critico di una struttura più vincolata di quella reale risulterebbe minore di quello della struttura reale e ciò è assurdo. Ma se risulta $F'_{af\ min} = F_{af\ min}$, l'uguaglianza $F'_{af\ min} = F_c$ non è più assurda.

È interessante notare che, ponendo i Δ unitari, il Δ_p coincide con il determinante Δ_p del sistema di p equazioni nelle δ che vien fuori sostituendo nelle (6-2) i valori delle φ calcolate, in funzione dei δ , attraverso le (6-1).

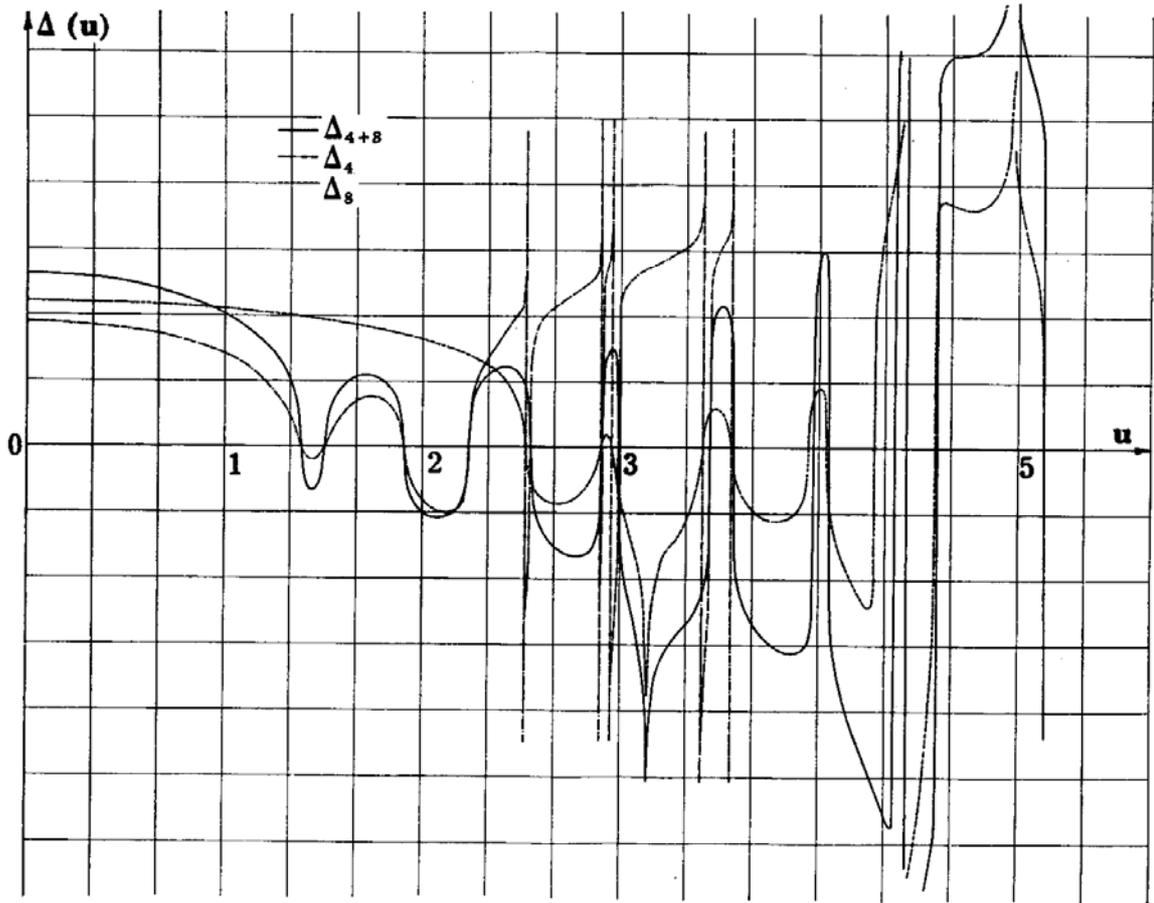
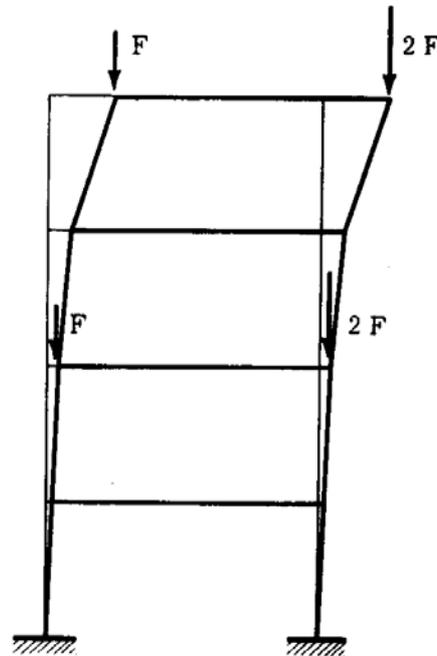
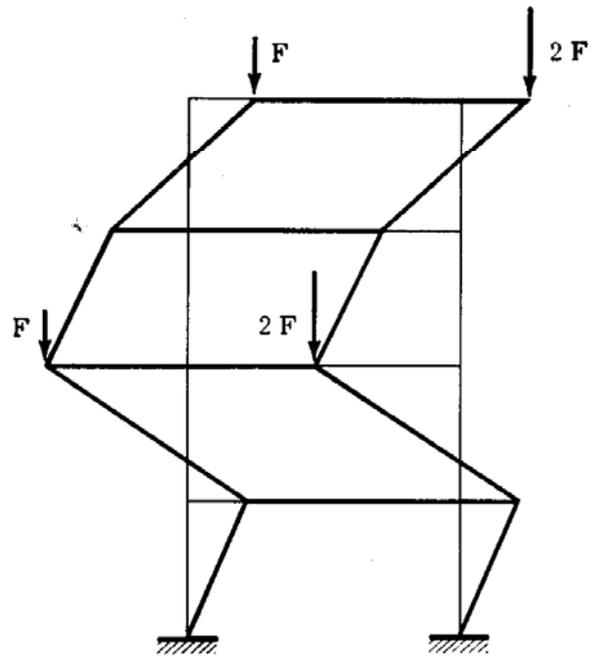


FIG. 6-5



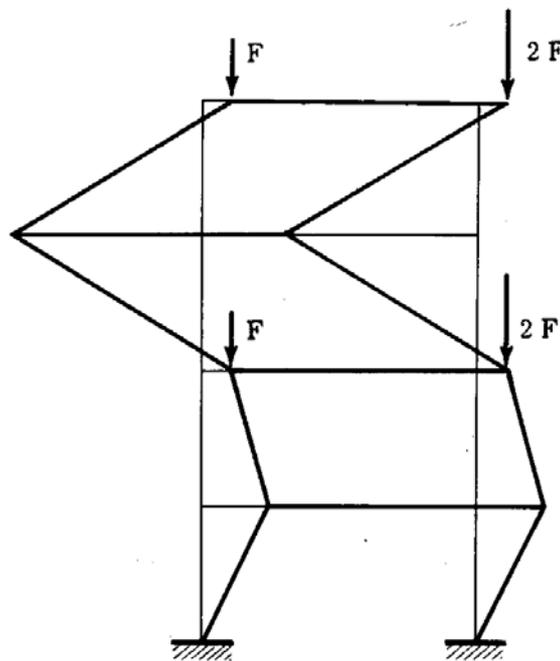
1° $F_{as} \quad u = 1,39100$

FIG. 6-6



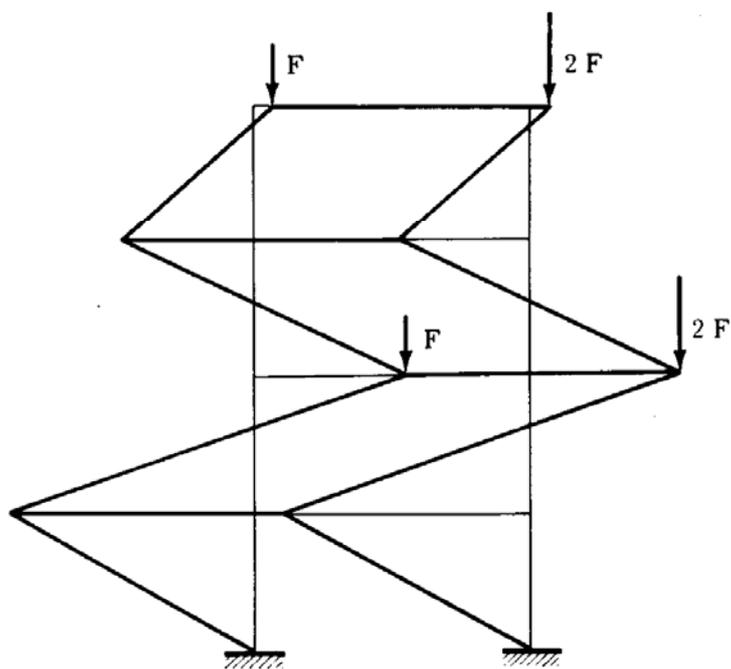
$$2^{\circ} F_{as} \quad u = 1,51100$$

FIG. 6-7



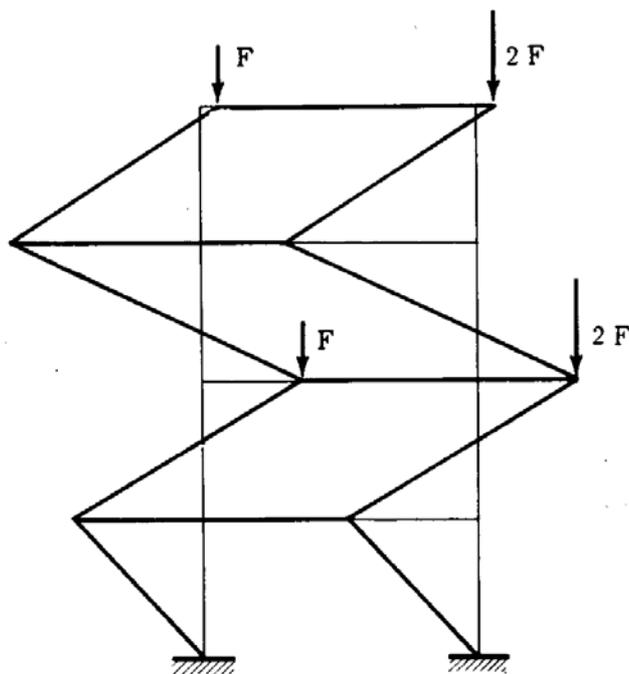
$$3^{\circ} F_{as} \quad u = 1,90900$$

FIG. 6-8



$$4^\circ F_{as} \quad u = 2,23700$$

FIG. 6-9



$$5^\circ F_{as} \quad u = 2,54800$$

FIG. 6-10

per cui il Δ_p è infinito. Il diagramma Δ_1 è stato tracciato, per ragioni grafiche, fino a $u=3,57$. Si possono fare le seguenti osservazioni:

a) Gli $F_{s\infty}$ coincidono con degli F'_{af} ; essi sono quei valori di F'_{af} cui si associano reazioni non nulle sui traversi.

b) Gli F_{as} appartengono alla più ampia classe degli F_a .

c) Degli F'_{af} alcuni (in figura solo per $u=5,14$) coincidono con un F_a , e sono quindi degli F_{af} . Gli altri corrispondono a diramazioni cui si associano reazioni non nulle sui traversi, e devono quindi coincidere con un $F_{s\infty}$.

d) Gli F_a toccano tutti gli F_{as} , e solo quegli F'_{af} che sono pure F_{af} . Gli F_{∞} coincidono con gli $F'_{f\infty}$ ($u=\pi$ nel caso in esame). Nelle figg. 6-6, 6-7, 6-8, 6-9 e 6-10 sono riportate le deformate per i primi cinque F_{as} .

3. I telai a nodi spostabili caricati con forze verticali sui ritzi ed orizzontali sui traversi.

Nel caso che si tratta in questo paragrafo non è più possibile procedere per variazioni euleriane. E' necessario seguire la deformata del telaio fin dal primo agire delle forze, tracciare il diagramma Fc_1 , dove c_1 è una coordinata lagrangiana generica, e determinare l'ordinata F_m del punto di massimo del diagramma.

Si entra così quasi sempre in campo plastico per $F < F_m$; si palesa prezioso il procedimento delle cerniere plastiche (Vol. IV), che permette, seguendo il successivo formarsi delle cerniere stesse in fase di grandi spostamenti, di tracciare l'effettiva curva $F(\delta_1)$.

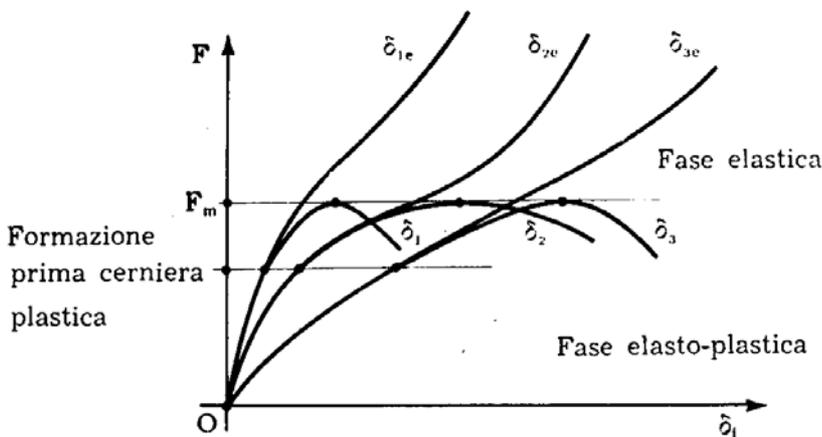


FIG. 6-11

La curva $F(\delta_1)$ in fase elastica è generalmente sempre crescente (fig. 6-11); se si esce fuori dal campo elastico, al formarsi della prima

cerniera plastica la curva reale si stacca da quella elastica; successivamente si formano le altre cerniere plastiche, e la curva flette sempre più verso l'asse dei δ_1 , presenta un massimo, e poi decresce. Variando la scelta del traverso di riferimento il massimo F_m non varia.

Il procedimento consente pure di seguire il comportamento della struttura se i carichi sono ripetuti, e di calcolare in tal caso il carico di collasso da carichi ripetuti.

Il procedimento studia la deformazione della struttura per i successivi incrementi ΔF del carico; gli effetti dell'incremento ΔF si calcolano operando sulla struttura già deformata, con le rigidità corrette per effetto delle forze assiali già presenti in quello stadio, ma con i metodi validi nelle ipotesi di piccoli spostamenti, poichè tali si possono considerare quelli connessi con le ΔF . Il telaio nello stadio generico è quello della fig. 6-12; in esso non si sono segnate le forze già agenti, ma solo gli incrementi $\lambda_1 \Delta F$.

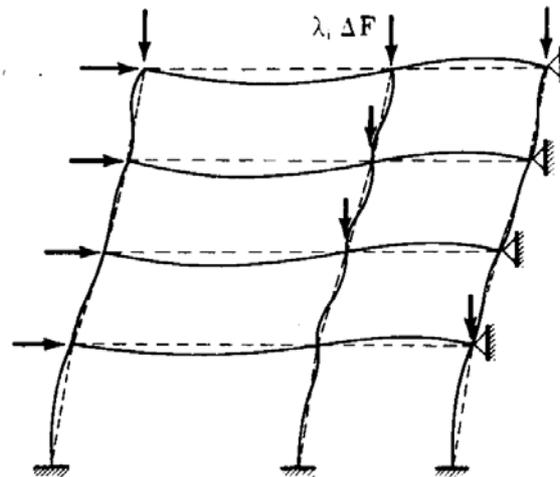


FIG. 6-12

Se ci si limita a studiare il campo degli spostamenti (abbastanza grande, e senz'altro non superato prima della F_m dai telai ordinari; comunque tale da non poter essere impunemente valicato per molte ragioni che esulano dal campo stesso della statica) per cui si può supporre che la congiungente i nodi di un traverso si abbassi, ma resti orizzontale, il procedimento di calcolo è ancora abbastanza semplice.

Si vincolano i traversi ad un estremo con appoggi a piano di scorrimento verticale. Le reazioni R_1 provocate su di questi dalle forze $\lambda_1 \Delta F$ si calcolano nell'ipotesi di cerniere nei nodi (la struttura risulta così isostatica); i tagli provocati da ΔF agli estremi di ogni asta si suppongono nulli, e cioè si trascurano i momenti flettenti (e le relative deformazioni) provocati dalle $\lambda_1 \Delta F$ che agiscono in presenza di travi ad asse non più

rettilineo. Nella stessa ipotesi di nodi cerniere, si imprime un cedimento Δ_1 al generico vincolo, e si calcolano attraverso il metodo delle catene cinematiche le rotazioni ψ delle aste, gli spostamenti relativi ϕl tra gli estremi, ed i momenti di incastro perfetto (corretti per la presenza delle forze preesistenti). Tali momenti si distribuiscono alla *Cross* (con rigidità e coefficienti di trasporto corretti), e da essi si risale alle reazioni R_{ji} . Anche in questo caso, le R_{ji} sono somma delle R''_{ji} generate dalle forze assiali per effetto degli spostamenti connessi con Δ_1 , e delle R'_{ji} dovute ai momenti flettenti. Le prime si ottengono ricercando, sempre attraverso il procedimento delle catene cinematiche, la nuova configurazione indotta da Δ_1 ; su di questa si calcolano le R''_{ji} così come si sono prima calcolate le R_i provocate dalle $\lambda_i \Delta F$, operando però sulle $\lambda_i F$ invece che sulle $\lambda_i \Delta F$.

Alle seconde si perviene diffondendo i momenti di incastro perfetto, calcolando i tagli, e considerando i successivi equilibri nei nodi fino a giungere sugli appoggi. In possesso delle R_i e delle R_{ji} , il principio di sovrapposizione — valido perchè si è supposto che gli sforzi assiali non siano variati dalle $\lambda_i \Delta F$ — permette di calcolare l'ennupla di cedimenti δ_i degli appoggi tali che le reazioni da esse indotte siano uguali alle reazioni R_i cambiate di segno. Questa ennupla definisce gli spostamenti dei traversi provocati dalle $\lambda_i \Delta F$, perchè la somma della situazione con appoggi fissi, e di quella connessa con i δ_i , è equilibrata e congruente.

Il sistema risolvente è

$$\begin{aligned} \alpha_1 R_{11} + \alpha_2 R_{12} + \dots + \alpha_p R_{1p} &= - R_1 \\ \alpha_1 R_{21} + \alpha_2 R_{22} + \dots + \alpha_p R_{2p} &= - R_2 \\ \dots & \\ \alpha_1 R_{p1} + \alpha_2 R_{p2} + \dots + \alpha_p R_{pp} &= - R_p \end{aligned}$$

e gli spostamenti sono forniti da

$$\delta_i = \alpha_i \Delta_1 .$$

4. I metodi di Merchant e Wood.

Il metodo del paragrafo precedente è piuttosto lungo anche se concettualmente immediato, anzi spontaneo. Un metodo più rapido, ma meno esatto, è quello del *Merchant*. Fatta aumentare F fino al valore F_s di rottura, ci si trova in presenza di un meccanismo ad un grado di libertà. E' facile costruire il diagramma $F' \delta_i$, che lega F allo spostamento

δ_1 di un traverso durante il moto del meccanismo a rottura avvenuta.
Si consideri per esempio il portale della fig. 6-13.

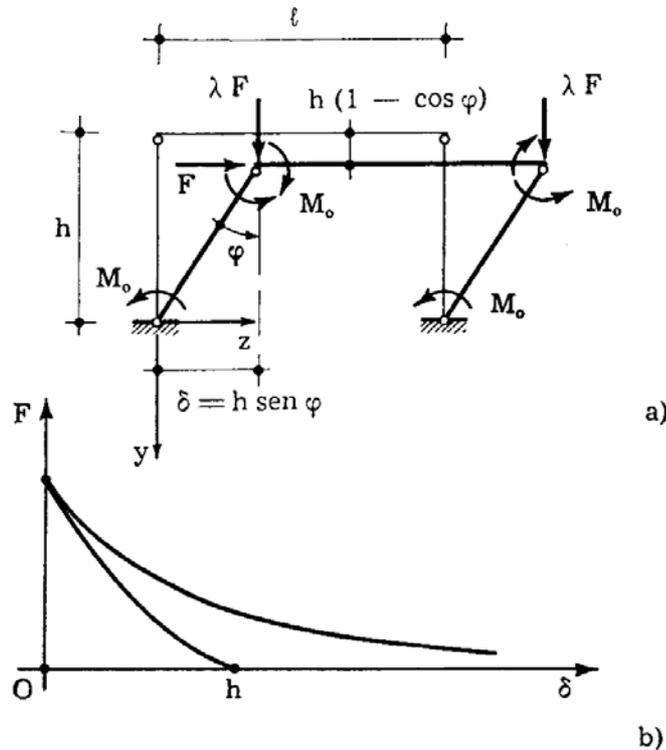


FIG. 6-13

Per esso risulta

$$F_s = \frac{4 M_o}{h} .$$

L'equazione dei lavori virtuali in corrispondenza di un φ generico si scrive

$$F d (h \sin \varphi) + 2 \lambda F d [h (1 - \cos \varphi)] = 4 M_o d \varphi$$

da cui

$$F = \frac{4 M_o}{h (\cos \varphi + 2 \lambda \sin \varphi)} .$$

Questa formula e l'altra

$$\delta = h \sin \varphi$$

costituiscono il legame parametrico tra F e δ .

Esplicitando si ha

$$F = \frac{4 M_0}{\sqrt{h^2 - \delta^2} + 2 \lambda \delta} ;$$

si ha così $F=0$ per $\delta=h$.

Limitandosi ai termini del secondo ordine l'equazione di equilibrio si scrive

$$F(h\varphi) + 2\lambda F\left(h\frac{\varphi^2}{2}\right) = 4M_0\varphi$$

da cui, essendo $\delta=h\varphi$, si trae

$$F = \frac{4M_0}{h + \lambda\delta} ;$$

per $\delta=\infty$ è $F=0$.

Per un telaio qualunque, scelta come variabile lagrangiana l'angolo φ di rotazione di un qualsiasi elemento è facile determinare, specie se ci si limita ai termini del secondo ordine, il legame tra F e φ e quello tra δ_1 e φ , e quindi il legame tra F e δ_1 .

D'altro canto si può determinare anche il diagramma $F''\delta_1$ che lega in fase elastica lo spostamento δ_1 al carico F ; il procedimento è quello del paragrafo precedente, che risulta inoltre molto semplificato se ci si limita ai piccoli spostamenti, trascurando cioè la variazione di quota dei traversi. In questa ipotesi semplificativa, la curva $F''\delta_1$ è asintotica

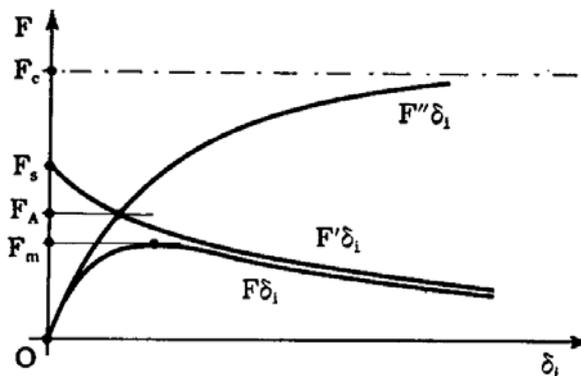


FIG. 6-14

alla retta orizzontale per F_c , dove F_c è il valore critico di F in assenza di carichi trasversali; più in generale, essa tende per $F \rightarrow \infty$ a confondersi con la curva $F''\delta_1$ tracciata in assenza di carichi trasversali. Secondo *Merchant*, la curva effettiva $F\delta_1$ in fase elasto-plastica è (fig. 6-

14) al disotto di ambedue le curve $F' \delta_i$ ed $F'' \delta_i$, e si confonde con la prima a sinistra, con la seconda a destra; il valore F_m è perciò minore del valore F_A corrispondente al punto di incontro delle due curve $F' \delta_i$ ed $F'' \delta_i$, di una percentuale che deve il progettista sentire.

Convieni, per meglio valutare tale percentuale, costruire le curve $F' \delta_i$ ed $F'' \delta_i$ per tutti i traversi, onde avere più valori di F_A .

Secondo Wood convieni calcolare il carico critico F_c dovuto alle $\lambda_i F$ assiali per ogni telaio, più indebolito del precedente, che risulta dalla formazione di una generica cerniera plastica. Se il carico di rottura si ricerca con procedimento *step by step*, si costruisce la curva $F \delta_i$, in fase di piccoli spostamenti, costituita da tanti segmenti di retta, ognuno relativo alla formazione di due cerniere plastiche successive, e la spezzata dei carichi critici F_c , costituita dalla congiungente i valori F_c per

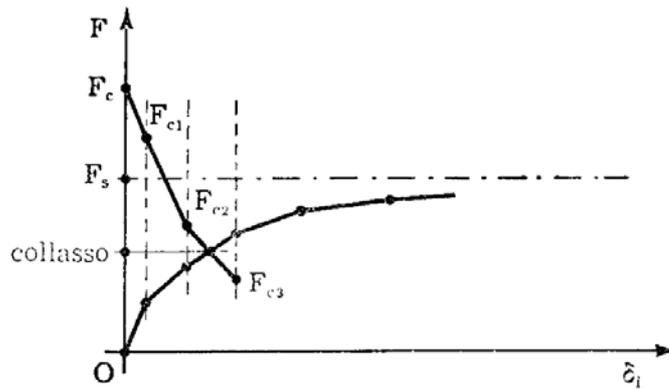


FIG. 6-15

ognuno dei telai che successivamente si presentano (fig. 6-15); l'intersezione delle due spezzate fornisce il valore di collasso.

5. Un esempio numerico secondo il metodo di Merchant.

Il telaio studiato (*Maceri*), è quello di fig. 6-16, e le sue caratteristiche sono riportate nella seguente tabella I.

I momenti limite che vi figurano sono calcolati con la relazione

$$M_o = \sigma_o [b t_2 (h - t_2) + \frac{1}{4} t_1 (h - 2 t_2)^2]$$

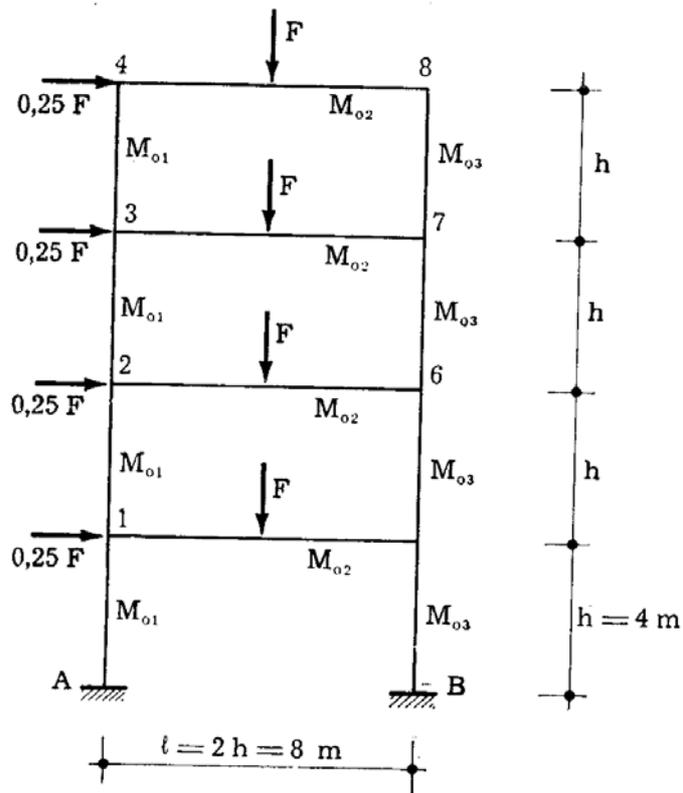


FIG. 6-16

TABELLA I

Asta	Lunghezza (cm)	Profilato	Momento d'inerzia (cm ⁴)	Momento limite (tm)
A-1	4	HE 500 B	107176	140,383
1-2	4	HE 500 B	107176	140,383
2-3	4	HE 500 B	107176	140,383
3-4	4	HE 500 B	107176	140,383
1-5	8	IPE 600	92080	101,283
2-6	8	IPE 600	92080	101,283
3-7	8	IPE 600	92080	101,283
4-8	8	IPE 600	92080	101,283
B-5	4	HE 320 A	22928	46,337
5-6	4	HE 320 A	22928	46,337
6-7	4	HE 320 A	22928	46,337
7-8	4	HE 320 A	22928	46,337

(S.d.C., Vol. IV, pag. 54), nella quale i simboli hanno il significato di

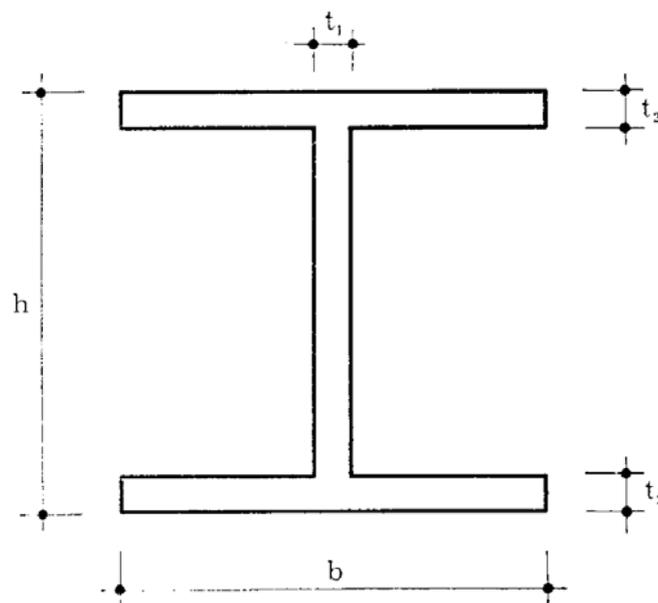


FIG. 6-17

fig. 6-17, e dove si è posto

$$\sigma_0 = 3000 \text{ Kg/cm}^2 .$$

La tabella II riassume le caratteristiche geometriche dei profilati adoperati.

TABELLA II

Profilato	b (cm)	h (cm)	t ₁ (cm)	t ₂ (cm)
HE 500 B	30,00	50,00	1,45	2,80
IPE 600	22,00	60,00	1,20	1,90
HE 320 A	30,00	31,00	0,90	1,55

Il moltiplicatore di collasso relativo allo schema di carico (proporzionale) di fig. 6-16 si ottiene dall'equazione dei lavori virtuali che, per il meccanismo rappresentato in fig. 6-18, si scrive:

$$0,25 \gamma F (h + 2h + 3h + 4h) \varphi + 4 \gamma F \frac{l}{2} \varphi =$$

$$= M_{01} \varphi + 4 M_{02} \cdot 2 \varphi + 15 M_{03} \varphi$$

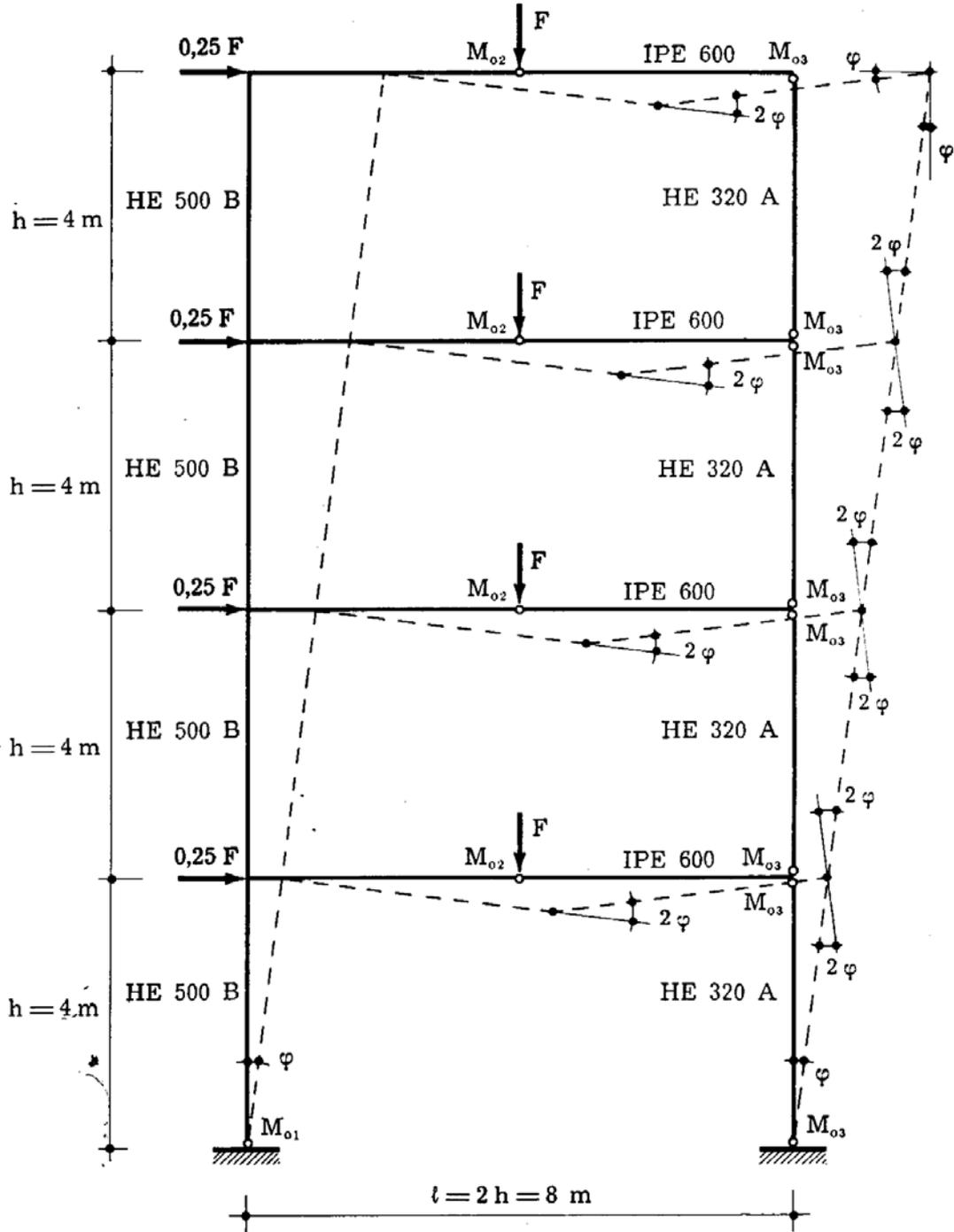


FIG. 6-18

donde

$$\begin{aligned} \gamma F &= \frac{M_{o1} + 8 M_{o2} + 15 M_{o3}}{2,5 h + 2 \ell} = \\ &= \frac{140,383 + 8 \cdot 101,283 + 15 \cdot 46,337}{26} = 63,296 \text{ t} . \end{aligned}$$

E' pure

$${}_s F = F_s = 63,296 \text{ t}$$

in quanto come appare dal diagramma dei momenti di fig. 6-19, corrispondente a $\gamma F = 63,296 \text{ t}$, è $\rho = 1$, $\psi = \gamma$.

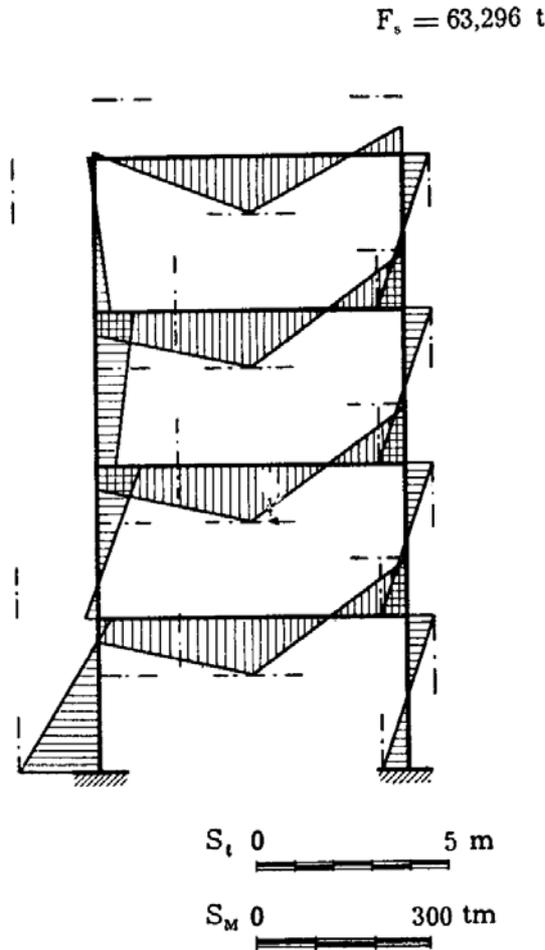


FIG. 6-19

L'equazione della curva corrispondente al meccanismo di collasso, in coordinate $F-\delta$, si ottiene, nel campo dei piccoli spostamenti, facendo

sistema tra l'equazione di equilibrio dei lavori virtuali, scritta tenendo conto dei termini del secondo ordine

$$0,25 F (h + 2 h + 3 h + 4 h) \varphi + F [h + 2 h + 3 h + 4 h] \frac{\varphi^2}{2} + \\ + 4 F \frac{l}{2} \varphi = M_{o_1} \varphi + 8 M_{o_2} + 15 M_{o_3} \varphi ,$$

che porge

$$F = \frac{63,296}{1 + \frac{10}{13} \varphi} ,$$

e tra le quattro relazioni che definiscono lo spostamento dei traversi in funzione di φ

$$\delta_1 = h \varphi = 4 \varphi$$

$$\delta_2 = 2 h \varphi = 8 \varphi$$

$$\delta_3 = 3 h \varphi = 12 \varphi$$

$$\delta_4 = 4 h \varphi = 16 \varphi .$$

Sostituendo, si ha:

$$F = \left\{ \begin{array}{l} \frac{63,296}{1 + 0,192 \delta_1} \\ \frac{63,296}{1 + 0,096 \delta_2} \\ \frac{63,296}{1 + 0,064 \delta_3} \\ \frac{63,296}{1 + 0,048 \delta_4} \end{array} \right.$$

che sono le equazioni cercate, riportate in fig. 6-20 con linea tratteggiata: si tratta di quattro iperboli equilateri, aventi uno degli asintoti coincidente con l'asse delle ascisse e centro rispettivamente nei punti

$$P_1 (-5,2 \ 0) \quad P_2 (-10,4 \ 0) \quad P_3 (-15,6 \ 0) \quad P_4 (-20,8 \ 0) .$$

Del tutto analogo è il tracciamento delle stesse curve nel campo dei grandi spostamenti.

L'equazione dei lavori virtuali, scritta a partire da una configura-

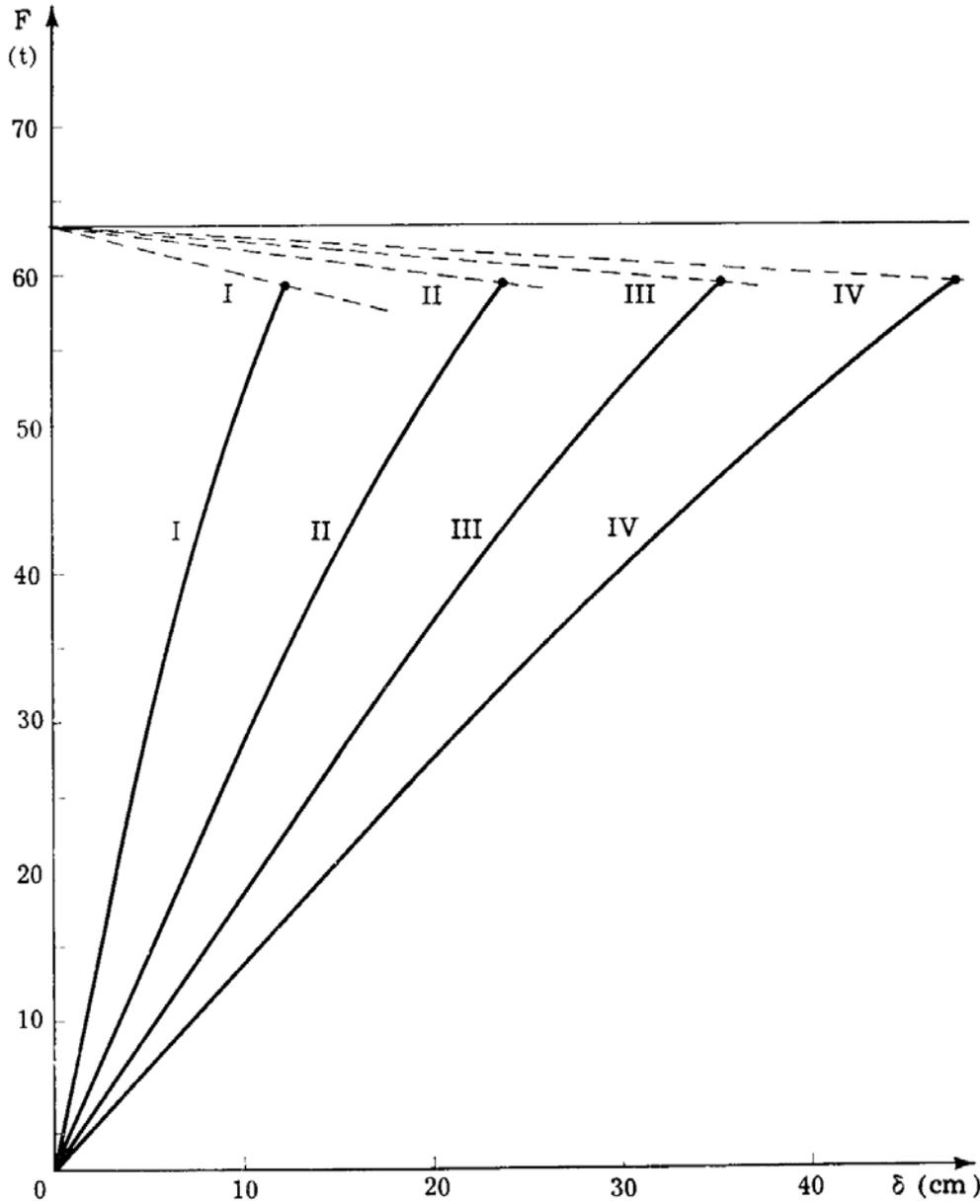


FIG. 6-20

zione di equilibrio caratterizzata da una n -upla congruente di valori φ_i (fig. 6-21) porge:

$$\begin{aligned}
 &0,25 F d [h \operatorname{sen} \varphi_1 + 2 h \operatorname{sen} \varphi_1 + 3 h \operatorname{sen} \varphi_1 + 4 h \operatorname{sen} \varphi_1] + \\
 &+ 4 F d [h \operatorname{sen} \varphi_1] + F d [(h + 2 h + 3 h + 4 h) (1 - \cos \varphi_1)] = \\
 &= M_{o1} d \varphi_1 + M_{o2} [d (\varphi_1 + \varphi_2) + d (\varphi_1 + \varphi_4) + d (\varphi_1 + \varphi_6) +
 \end{aligned}$$

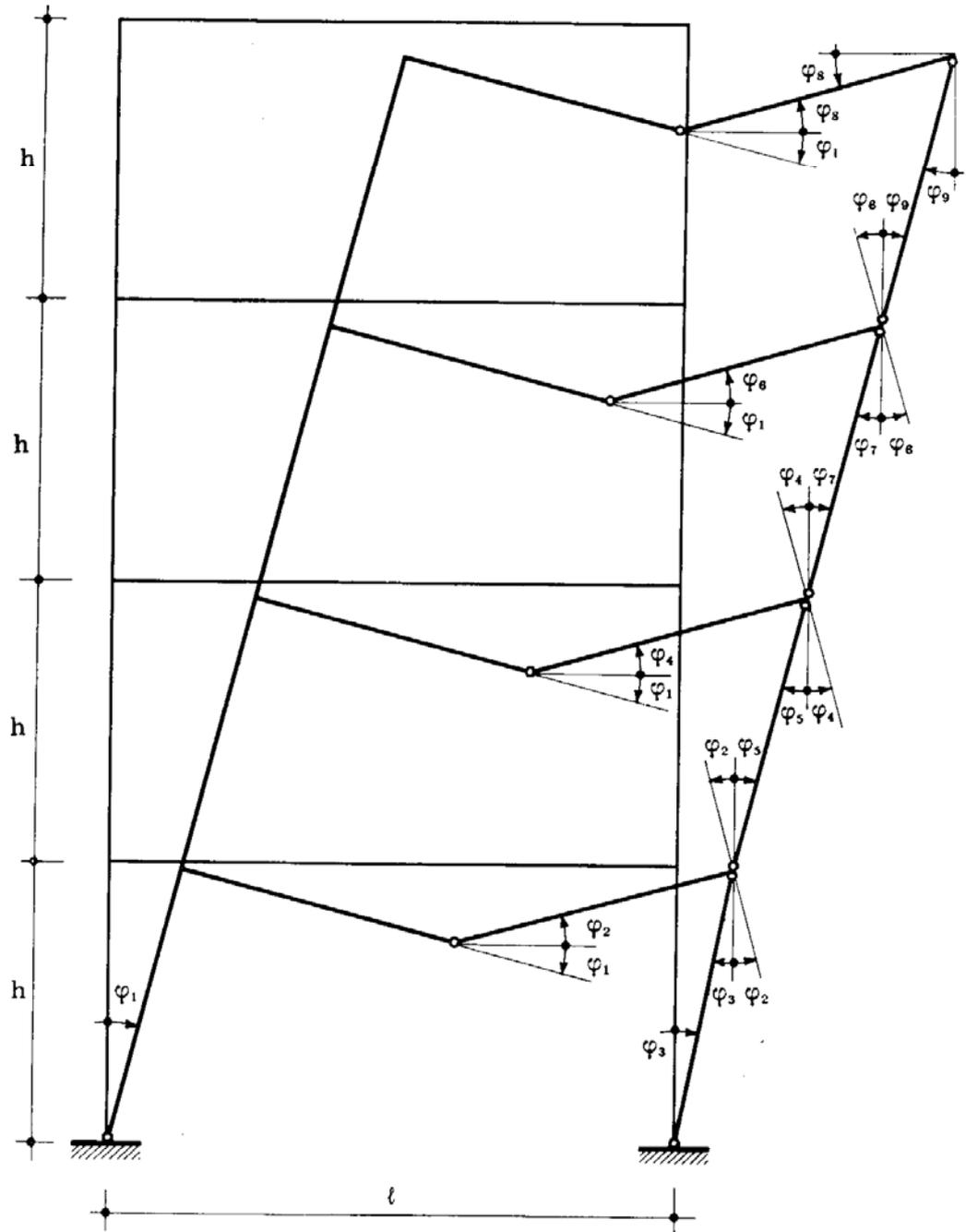


FIG. 6-21

$$+ d(\varphi_1 + \varphi_8)] + M_{o3} [d(\varphi_8 + \varphi_9) + d(\varphi_9 + \varphi_6) + d(\varphi_6 + \varphi_7) + d(\varphi_7 + \varphi_4) + d(\varphi_4 + \varphi_5) + d(\varphi_5 + \varphi_2) + d(\varphi_2 + \varphi_3) + d\varphi_3]$$

da cui

$$2,5 F h \cos \varphi_1 d\varphi_1 + 10 F h \sin \varphi_1 d\varphi_1 + 4 F h \cos \varphi_1 d\varphi_1 = M_{o1} d\varphi_1 +$$

$$+ M_{o2} \left(4 + \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} + \frac{d\varphi_4}{d\varphi_1} + \frac{d\varphi_6}{d\varphi_1} + \frac{d\varphi_8}{d\varphi_1} \right) d\varphi_1 +$$

$$\begin{aligned}
 & + M_{03} \left[2 \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} + \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} + \frac{d\varphi_4}{d\varphi_1} + \frac{d\varphi_5}{d\varphi_1} + \frac{d\varphi_6}{d\varphi_1} + \frac{d\varphi_7}{d\varphi_1} + \frac{d\varphi_9}{d\varphi_1} \right) + \frac{d\varphi_8}{d\varphi_1} \right] \\
 F = & \frac{2}{13 h \cos \varphi_1 + 20 h \operatorname{sen} \varphi_1} \left[M_{01} + 4 M_{02} + \right. \\
 & + (M_{02} + 2 M_{03}) \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} + \frac{d\varphi_4}{d\varphi_1} + \frac{d\varphi_6}{d\varphi_1} \right) + (M_{02} + M_{03}) \frac{d\varphi_8}{d\varphi_1} + \\
 & \left. + 2 M_{03} \left(\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} + \frac{d\varphi_5}{d\varphi_1} + \frac{d\varphi_7}{d\varphi_1} + \frac{d\varphi_9}{d\varphi_1} \right) \right]. \tag{a}
 \end{aligned}$$

La (a) risolve il problema proposto unitamente alle otto equazioni di congruenza seguenti, ottenute uguagliando le proiezioni orizzontali e verticali delle spezzate costituenti ciascun piano (un trasverso e due ritti) a quelle omologhe dei lati di chiusura, e tali da definire univocamente le otto funzioni $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_9$ del parametro della deformazione φ_1 .

$$\begin{aligned}
 h \operatorname{sen} \varphi_1 + \frac{l}{2} \cos \varphi_1 + \frac{l}{2} \cos \varphi_2 - h \operatorname{sen} \varphi_3 &= l \\
 h \cos \varphi_1 - \frac{l}{2} \operatorname{sen} \varphi_1 + \frac{l}{2} \operatorname{sen} \varphi_2 - h \cos \varphi_3 &= 0 \\
 h \operatorname{sen} \varphi_1 + \frac{l}{2} \cos \varphi_1 + \frac{l}{2} \cos \varphi_4 - h \operatorname{sen} \varphi_5 &= \frac{l}{2} \cos \varphi_1 + \frac{l}{2} \cos \varphi_2 \\
 h \cos \varphi_1 - \frac{l}{2} \operatorname{sen} \varphi_1 + \frac{l}{2} \operatorname{sen} \varphi_4 - h \cos \varphi_5 &= -\frac{l}{2} \operatorname{sen} \varphi_1 + \frac{l}{2} \operatorname{sen} \varphi_2 \\
 h \operatorname{sen} \varphi_1 + \frac{l}{2} \cos \varphi_1 + \frac{l}{2} \cos \varphi_6 - h \operatorname{sen} \varphi_7 &= \frac{l}{2} \cos \varphi_1 + \frac{l}{2} \cos \varphi_4 \\
 h \cos \varphi_1 - \frac{l}{2} \operatorname{sen} \varphi_1 + \frac{l}{2} \operatorname{sen} \varphi_6 - h \cos \varphi_7 &= -\frac{l}{2} \operatorname{sen} \varphi_1 + \frac{l}{2} \operatorname{sen} \varphi_4 \\
 h \operatorname{sen} \varphi_1 + \frac{l}{2} \cos \varphi_1 + \frac{l}{2} \cos \varphi_8 - h \operatorname{sen} \varphi_9 &= \frac{l}{2} \cos \varphi_1 + \frac{l}{2} \cos \varphi_6 \\
 h \cos \varphi_1 - \frac{l}{2} \operatorname{sen} \varphi_1 + \frac{l}{2} \operatorname{sen} \varphi_8 - h \cos \varphi_9 &= -\frac{l}{2} \operatorname{sen} \varphi_1 + \frac{l}{2} \operatorname{sen} \varphi_6.
 \end{aligned} \tag{b}$$

Un metodo rapido per la risoluzione del sistema trascendente costituito dalle (a) e (b) è il seguente. Data una configurazione equilibrata e congruente della struttura, caratterizzata dai valori $F, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, si assegna una variazione $\delta\varphi_1$ a φ_1 ; poichè può scriversi, per il generico φ_i

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_i + \delta\varphi_i) &\approx \cos \varphi_i - \delta\varphi_i \sin \varphi_i \\ \text{sen}(\varphi_i + \delta\varphi_i) &\approx \text{sen} \varphi_i + \delta\varphi_i \cos \varphi_i, \end{aligned} \quad (c)$$

le (b), linearizzate con l'impiego delle (c), sono in grado di fornire i $\delta\varphi_1$ congruenti con il $\delta\varphi_1$ impresso; dalla (a) quindi si trae il nuovo valore di F capace di equilibrare la configurazione. Come configurazione di partenza basta scegliere quella indeformata ($\varphi_i = 0$), equilibrata dal valore F_s di F . Le curve così determinate risultano, per il caso in esame, praticamente coincidenti con quelle già riportate in fig. 6-20, e ciò era da attendersi attesa l'esiguità degli spostamenti in gioco.

Il moltiplicatore critico in fase elastica F_c del telaio dato viene cal-

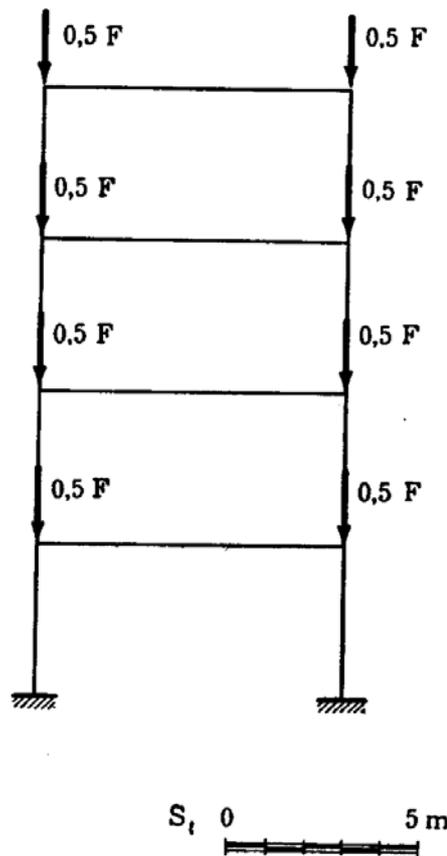


FIG. 6-22

colato riportando le forze ai nodi secondo lo schema di fig. 6-22: le forze orizzontali non vengono considerate.

Si calcolano i due determinanti Δ_4 e Δ_{8+4} , la cui più bassa radice comune fornisce F_c ; le funzioni $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}}$, vanno valutate in corrispondenza degli sforzi normali, e quindi del parametro F , che si traggono dalla seguente tabella.

TABELLA III

Asta	A-1	1-2	2-3	3-4	1-5	2-6
N	2 F	1,5 F	F	0,5 F	0	0
Asta	3-7	4-8	B-5	5-6	6-7	7-8
N	0	0	2 F	1,5 F	F	0,5 F

Risulta dal calcolo

$$F_c = F_{as \min} = 150,5 \text{ t.}$$

Le curve di equilibrio in fase elastica del telaio, corrispondenti allo schema di carico di fig. 6-16, si sono determinate (per poter utilizzare il calcolatore elettronico) invece che col metodo illustrato nel precedente § 3, scrivendo le equazioni di equilibrio dei nodi e dei piani nell'intorno di una configurazione deformata già equilibrata da un insieme di $\lambda_i F$, e determinando gli incrementi delle rotazioni di nodo e di piano corrispondenti ad un incremento dF del parametro delle forze.

L'equazione (6-1)

$$\varphi_i \Sigma' \frac{4 EI}{l} \bar{\mathbf{A}} + \Sigma' \varphi_h \frac{4 EI}{l} \bar{\mathbf{A}} \frac{\bar{\mathbf{B}}}{2} - \Sigma'' \frac{6 EI}{l} \psi \bar{\mathbf{C}} = 0, \quad (1')$$

ove si è posto, per il caso di piccoli spostamenti,

$$\psi = - \frac{\delta_s - \delta_i}{l},$$

in seguito ad un incremento $\lambda_i dF$ delle forze $\lambda_i F$, si scrive

$$(\varphi_i + d\varphi_i) \Sigma' \frac{4 EI}{l} (\bar{\mathbf{A}} + d\bar{\mathbf{A}}) + \Sigma' (\varphi_h + d\varphi_h) \frac{4 EI}{l} \frac{\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} + d(\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}})}{2} + \\ - \Sigma'' \frac{6 EI}{l} (\psi + d\psi) (\bar{\mathbf{C}} + d\bar{\mathbf{C}}) = 0$$

da cui, tenendo conto della (6-1) e trascurando i prodotti delle variazioni:

$$\begin{aligned} d\varphi_1 \Sigma' \frac{4EI}{l} \bar{A} + \Sigma' d\varphi_h \frac{4EI}{l} \bar{A} \frac{\bar{B}}{2} - \Sigma'' \frac{6EI}{l} \bar{C} d\psi = \\ = - \varphi_1 \Sigma' \frac{4EI}{l} d\bar{A} - \Sigma' \varphi_h \frac{4EI}{l} \frac{d(\bar{A}\bar{B})}{2} + \Sigma'' \frac{6EI}{l} \psi d\bar{C}. \end{aligned}$$

Si noti che le quantità $d\bar{A}$, $d(\bar{A}\bar{B})$, $d\bar{C}$ che figurano al secondo membro non sono note, in quanto legate all'incremento di sforzo normale nell'asta ij , non proporzionale a dF .

L'equazione scritta è perciò non lineare, ed il relativo sistema dovrà essere risolto per iterazione.

Per stabilire l'equazione analoga alla (6-2), è necessario calcolare il

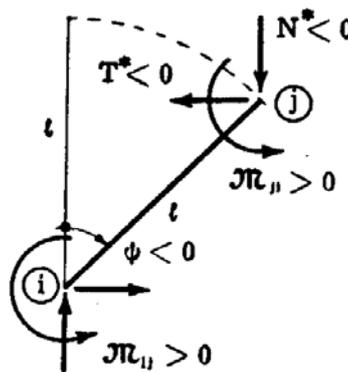


FIG. 6-23

taglio, o meglio la sua variazione, per un generico elemento che si sposti da una configurazione già inflessa; si ha (*) (fig. 6-23):

$$- T^* l \cos \psi - N^* l \sin \psi + M_{ij} + M_{ji} = 0 \quad (d)$$

e dopo l'incremento $d\psi$ di ψ :

$$\begin{aligned} - (T^* + dT^*) l \cos (\psi + d\psi) - (N^* + dN^*) l \sin (\psi + d\psi) + \\ + M_{ij} + dM_{ij} + M_{ji} + dM_{ji} = 0 \end{aligned}$$

(*) Si indicano con T^* ed N^* le componenti orizzontali e verticali delle forze agenti sul ritto.

da cui, sviluppando e tenendo presente le (c)

$$\begin{aligned} & - N^* \ell \operatorname{sen} \psi - T^* \ell \operatorname{cos} \psi + M_{ij} + M_{ji} - N^* \ell d\psi \operatorname{cos} \psi + \\ & + T^* \ell d\psi \operatorname{sen} \psi - dN^* \ell \operatorname{sen} \psi - dT^* \ell \operatorname{cos} \psi - dN^* \ell d\psi \operatorname{cos} \psi + \\ & + dT^* \ell d\psi \operatorname{sen} \psi + dM_{ij} + dM_{ji} = 0 ; \end{aligned}$$

infine, sfruttando la (d) e trascurando i prodotti delle variazioni, si ha

$$\begin{aligned} \frac{dM_{ij} + dM_{ji}}{\ell} &= (N^* \operatorname{cos} \psi - T^* \operatorname{sen} \psi) d\psi + dN^* \operatorname{sen} \psi + dT^* \operatorname{cos} \psi \\ dT^* &= \frac{1}{\operatorname{cos} \psi} \left[-dN^* \operatorname{sen} \psi + (T^* \operatorname{sen} \psi - N^* \operatorname{cos} \psi) d\psi + \frac{dM_{ij} + dM_{ji}}{\ell} \right] = \\ &= -dN^* \operatorname{tg} \psi + T^* \operatorname{tg} \psi d\psi - N^* d\psi + \frac{dM_{ij} + dM_{ji}}{\ell \operatorname{cos} \psi} \end{aligned} \quad (e)$$

Per il calcolo delle quantità dM_{ij} , dM_{ji} si tenga presente che:

$$M_{ij} = \frac{4 EI}{\ell} \left(\varphi_i \bar{\mathbf{A}} + \varphi_j \bar{\mathbf{A}} \frac{\bar{\mathbf{B}}}{2} \right) - \frac{6 EI}{\ell} \psi \bar{\mathbf{C}}$$

e quindi

$$\begin{aligned} dM_{ij} &= \frac{4 EI}{\ell} \left(\varphi_i d\bar{\mathbf{A}} + \varphi_j \frac{d(\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}})}{2} \right) - \frac{6 EI}{\ell} \psi d\bar{\mathbf{C}} + \\ &+ \frac{4 EI}{\ell} \left(d\varphi_i \bar{\mathbf{A}} + d\varphi_j \bar{\mathbf{A}} \frac{\bar{\mathbf{B}}}{2} \right) - \frac{6 EI}{\ell} d\psi \bar{\mathbf{C}} \end{aligned}$$

avendo, al solito, trascurato i prodotti delle variazioni; pertanto, ricordando che è

$$\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}} \frac{\bar{\mathbf{B}}}{2} = \frac{3}{2} \bar{\mathbf{C}},$$

si ha

$$\frac{dM_{ij} + dM_{ji}}{\ell} = \frac{4 EI}{\ell^2} \frac{3}{2} [d\bar{\mathbf{C}} (\varphi_i + \varphi_j - 2\psi) + \bar{\mathbf{C}} (d\varphi_i + d\varphi_j - 2d\psi)]$$

e quindi

$$dT^* = T^* \operatorname{tg} \psi d\psi - dN^* \operatorname{tg} \psi - N^* d\psi + \quad (e')$$

$$+ \frac{6 EI}{l^2 \cos \psi} [d\bar{C} (\varphi_i + \varphi_j - 2\psi) + \bar{C} (d\varphi_i + d\varphi_j - 2d\psi)] .$$

Resta da determinare, per la completa conoscenza di dT^* , l'espres-

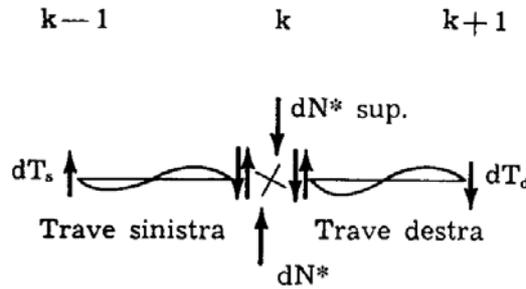


FIG. 6-24

sione della variazione dN^* . A questo scopo, basta scrivere (fig. 6-24) l'equazione di equilibrio

$$dT_s + dN^* = dT_d + dN^*_{sup}$$

da cui

$$dN^* = dN^*_{sup} + dT_d - dT_s =$$

$$= dN^*_{sup} + \frac{dM_k + dM_{k+1}}{l_d} - \frac{dM_{k-1} + dM_k}{l_s} =$$

$$= dN^*_{sup} + \frac{6 EI}{l_d^2} (d\varphi_k + d\varphi_{k+1}) - \frac{6 EI}{l_s^2} (d\varphi_{k-1} + d\varphi_k) .$$

In corrispondenza dell'ultimo piano (p) del telaio, è, nel nodo k

$$dN^*_{sup} = \lambda_{k,p} dF$$

e quindi

$$dN^*_p = \lambda_{k,p} dF + \frac{6 EI}{l_d^2} (d\varphi_{k,p} + d\varphi_{k+1,p}) - \frac{6 EI}{l_s^2} (d\varphi_{k-1,p} + d\varphi_{k,p}) .$$

Per il generico piano g , si ha pertanto:

$$\begin{aligned}
 dN^*_g = & dN^*_{g+1} + \lambda_{k,g} dF + \frac{6 EI}{l_d^2} (d\varphi_{k,g} + d\varphi_{k+1,g}) + \\
 & - \frac{6 EI}{l_s^2} (d\varphi_{k-1,g} + d\varphi_{k,g}) = dF \sum_g^p \lambda_{k,h} + \\
 & + \sum_h^p \left[\frac{6 EI}{l_d^2} (d\varphi_{k,h} + d\varphi_{k+1,h}) - \frac{6 EI}{l_s^2} (d\varphi_{k-1,h} + d\varphi_{k,h}) \right].
 \end{aligned} \tag{f}$$

Con la sostituzione della (f), la (e) è messa in forma esplicita; l'equazione di equilibrio, dette H le forze orizzontali, si scrive

$$- \Sigma''' dT^* + \Sigma^v dH = 0$$

ove la Σ''' è estesa a tutti i ritti del piano g , e la Σ^v a tutte le forze agenti nei nodi al di sopra del piano g stesso. Può anche scriversi

$$\Sigma''' dT^* = dF \Sigma^v \lambda_o .$$

Anche queste equazioni, in numero pari a p , sono di tipo trascendente; anche a secondo membro delle (e'), infatti, figurano le variazioni $d\bar{A}$, $d(\bar{AB})$, $d\bar{C}$ incognite. Il sistema completo nelle $n + p$ equazioni si risolve allora per iterazione, assumendo in un primo momento nulle tali variazioni e calcolando dei $d\varphi$, $d\psi$ di prima approssimazione. Da questi, tramite le espressioni innanzi scritte, si calcolano dT^* , dN^* e quindi, per semplice somma degli incrementi ai valori precedenti, i nuovi valori

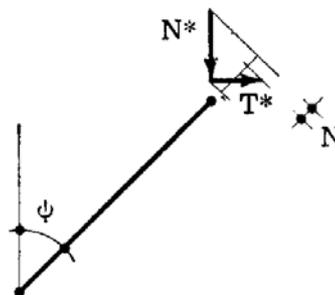


FIG. 6-25

(provvisori) delle forze T^* ed N^* , oltre alle φ e ψ da cui si ottengono (fig. 6-25) gli sforzi normali nelle aste

$$P = N^* \cos \psi - T^* \sin \psi ;$$

in base a questi ultimi, è possibile valutare i $d\bar{A}$, etc, e conseguentemente i termini noti delle (e), inizialmente posti uguali a zero. Un secondo calcolo con i valori precedenti di F e con i nuovi termini noti, fornisce un nuovo insieme di $d\varphi$; questo viene accettato se la differenza con i primi valori è modesta, altrimenti si itera il procedimento. Naturalmente, la mole di lavoro richiesta è non indifferente, e comunque tale da scoraggiare il calcolo manuale; si è perciò fatto ricorso al calcolatore elettronico per l'analisi numerica del problema, ottenendo in tal modo il diagramma di fig. 6-20.

Si mette in rilievo che le ipotesi di calcolo sono quelle citate, e cioè traversi orizzontali per tutto il campo delle deformazioni da esplorare e trascurabilità degli sforzi normali in essi.

Si rileva infine che la curva elastica «biforcata», che si diparte da F_c , è quasi orizzontale nel campo degli spostamenti richiesti, sì che conviene ometterne la costruzione. Qualora la si desideri, è bene però non procedere per incrementi dF della forza, perchè all'origine, essendo

$$\left(\frac{dF}{d\psi}\right)_{\psi=0} = 0$$

a incrementi anche piccolissimi di F corrispondono $d\psi$ troppo elevati, e cadono in difetto le (c); è bene allora imprimere un $d\psi$ noto a un piano, e risolvere $n + p - 1$ equazioni per ottenere gli altri; l'ultima equazione fornisce allora il dF necessario a produrre il $d\psi$ impresso.