

CAPITOLO V
LE TRAVATURE RETICOLARI

1. Le travature reticolari a nodi cerniera.

Il carico critico F_c di una travatura reticolare a nodi cerniera isostatica (fig. 5-1) coincide con il più basso valore di F per cui si attinge

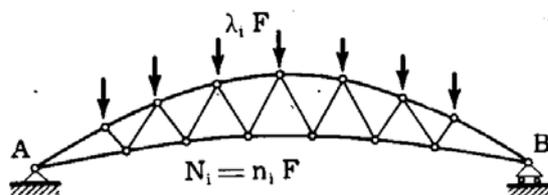


FIG. 5-1

il carico critico $\pi^2 EI/\ell^2$ dello sforzo normale in una delle aste compresse. Se perciò è

$$N_1 = n_1 F$$

il valore dello sforzo normale nella generica asta compressa, ed

$$N_{ic} = \frac{\pi^2 E_1 I_1}{\ell_1^2}$$

il suo valore critico, si considera l'asta m per cui il rapporto

$$\frac{N_{ic}}{N} = \frac{\pi^2 E_1 I_1}{\ell_1^2 n_1 F}$$

ha il valore minimo. Il valore F_c è fornito da

$$F_c = F \left(\frac{N_{ic}}{N} \right)_{\min} = \left(\frac{\pi^2 E_1 I_1}{\ell_1^2 n_1} \right)_{\min} \quad (1)$$

Se si è in presenza di una struttura reticolare a nodi cerniera ad aste sovrabbondanti, ed il valore (5-1) si attinge in un'asta HK (fig. 5-2 b) la cui soppressione non rende labile la struttura, questa non esaurisce in F_c le sue capacità di resistenza.

Il diagramma $N\Delta t$ per l'asta HK ha l'aspetto della fig. 5-3; a vantaggio di statica si può confondere il tratto diramato stabile $D 2 \equiv D 3$

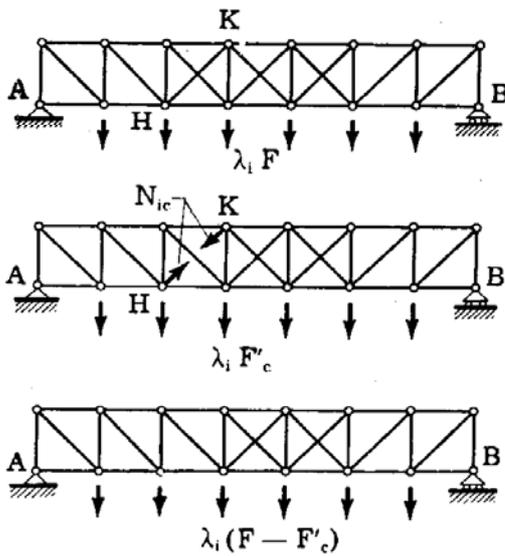


FIG. 5-2

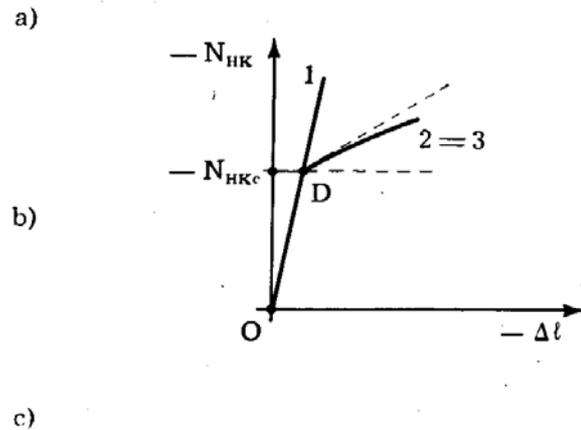


FIG. 5-3

con l'orizzontale per D, ed operare quindi come se si trattasse di un ordinario calcolo a rottura (figg. 5-2 b, 5-2 c) (*).

Struttura ben calcolata sarebbe quella per cui contemporaneamente in tutte le aste compresse si attingesse il valore critico (in fase elastica o elasto-plastica) ed in tutte le aste tese il valore di plasticizzazione; meglio ancora, se i minimi coefficienti di sicurezza tollerabili per l'instabilità e la plasticizzazione sono $s_{i \min}$ ed $s_{t \min}$, dovrebbe raggiungersi per un certo valore F_c della F l'instabilità contemporanea in tutte le aste compresse, e per $F_p = F_c \frac{s_{i \min}}{s_{t \min}}$ la plasticizzazione in tutte le aste tese.

2. Le travature reticolari a nodi incastro.

Il carico critico di una travatura reticolare a nodi incastro è comunque più elevato della corrispondente travatura a nodi cerniera, poichè la prima è più vincolata della seconda.

Il calcolo esatto del carico critico può essere eseguito con l'uno o l'altro dei due metodi già esposti nel capitolo precedente con riferimento alla trave continua, preferibilmente con quello della diffusione dei mo-

(*) Benintesa la necessità di verificare, per elementi tozzi, che l'accorciamento non superi quello corrispondente al carico di collasso (per intervento, inevitabile, di fenomeni plastici: si veda Cap. III).

menti (*). E' necessario, a ciò fare, trascurare le deformazioni flessionali delle aste dovute ai momenti che per continuità sorgono nei nodi. Spesso si adotta, per strutture importanti, una tecnica costruttiva che in rigore annulla i momenti di tale tipo, dovuti al peso proprio. In tal caso la configurazione priva di flessioni diviene, per $F > F_c$, instabile, e per essa la $E(\varphi_i)$ relativa alla F è massima; così pure la $E(\varphi_i)$ relativa alla F ed alla \mathcal{M} è massima per la configurazione, prossima alla rettilinea, in equilibrio (instabile) con una piccola coppia \mathcal{M} applicata in un nodo.

L'ipotesi di piccole deformazioni flessionali è tanto meno lontana dal vero quanto più sono esili le aste; è lecito perciò, nello stesso spirito dell'ipotesi, supporre che le forze assiali nelle aste coincidano con quelle calcolabili nell'ipotesi di nodi cerniera.

Se sotto una forza F il procedimento di diffusione alla Cross converge, è $F < F_c$, se diverge è $F > F_c$; con pochi tentativi si ottiene agevolmente un intervallo, quanto si voglia piccolo, in cui F_c è compreso.

Si avverte che se sotto F_c la tensione in qualche asta è superiore a quella di proporzionalità, occorre procedere alla *Shanley*, considerando per quell'asta il corrispondente modulo tangente; ciò implica un maggior numero di tentativi.

3. Un esempio numerico.

Si riporta un esempio numerico svolto dal *Belli*.

La geometria della travatura reticolare considerata, si rileva dalla

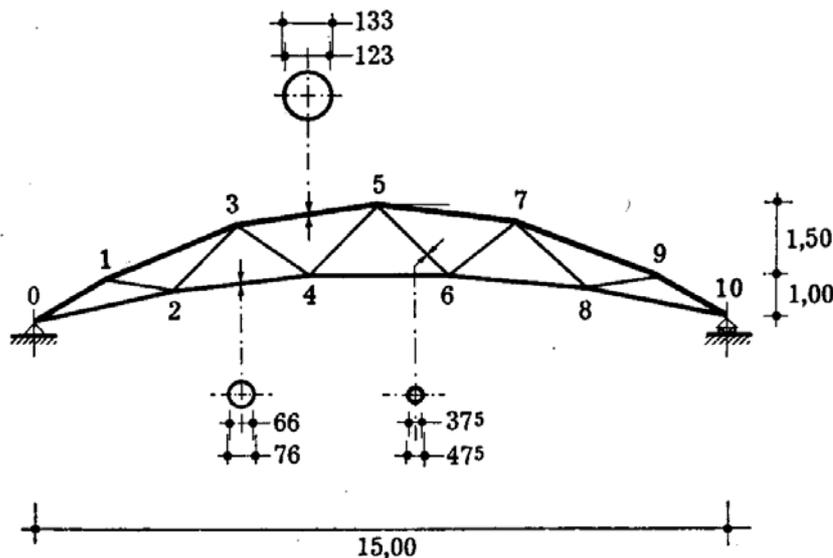


FIG. 5-4

figura 5-4. Le lunghezze delle aste sono riportate nella tabella *a*, le ca-

(*) Il metodo diretto può meglio giovare della scrittura delle equazioni di equilibrio dei nodi (equazioni delle cinque rotazioni), assumendo come incognite le rotazioni invece dei momenti; il numero delle incognite così diminuisce. E' quanto si esporrà più in dettaglio nel capitolo seguente.

ratteristiche geometriche delle sezioni nella tabella b. Nella figura 5-5 è riportato il diagramma $\sigma\epsilon$ dell'acciaio col quale è realizzata la struttura.

TABELLA a

Aste	l (m)
0-1	1,75
1-3	3,25
3-5	3,00
1-2	1,50
2-3	2,10
3-4	1,90
4-5	2,10
0-2	3,05
2-4	3,02
4-6	3,00

TABELLA b

	Φ (mm)	Area (cm ²)	I (cm ⁴)
Corrente superiore .	Φ_e 133	20,11	412,40
	Φ_i 123		
Pareti	Φ_e 47,5	6,67	15,28
	Φ_i 37,5		
Corrente inferiore .	Φ_e 76,00	11,15	70,62
	Φ_i 66,00		

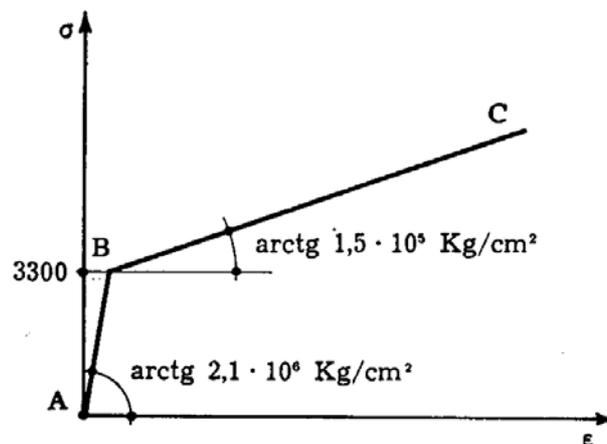


FIG. 5-5

Lo schema statico è rappresentato in figura 5-6. I carichi di esercizio sono costituiti da forze verticali di 2 t concentrate sui nodi del corrente superiore e da forze verticali di 1 t concentrate sui nodi del corrente inferiore ($F = 2$ t in fig. 5-6).

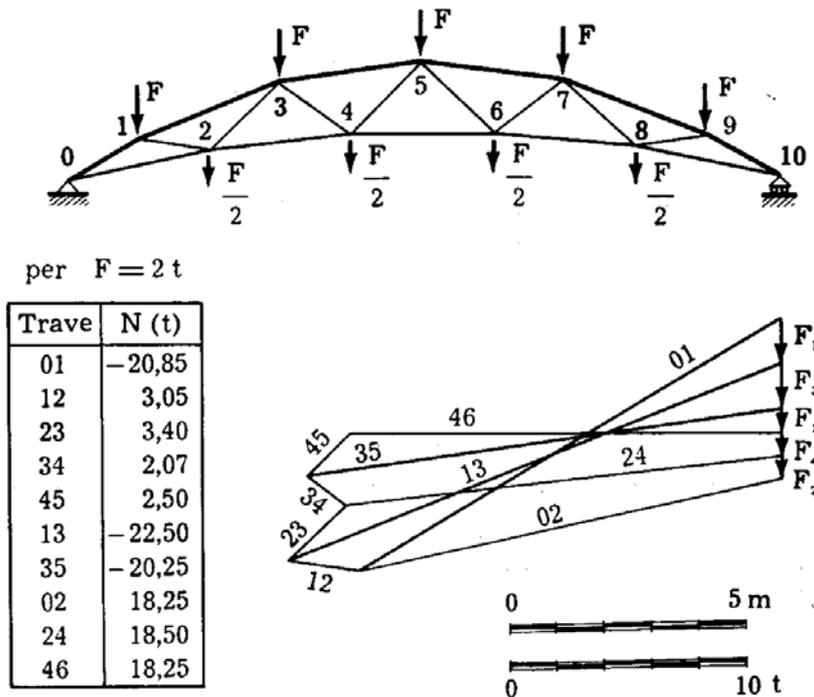


TABELLA c

FIG. 5-6

Gli sforzi assiali N , indotti da $F = 2$ t, nell'ipotesi di nodi cerniera si sono determinati col cremoniano di figura 5-6, i loro valori sono consegnati nella tabella c (stessa figura).

In regime di nodi cerniera la massima tensione si raggiunge nell'asta 2-4 ed è di 1620 Kg/cm², con un coefficiente di sicurezza allo snervamento di 2,03; la F corrispondente allo snervamento in tale asta è 4,06 t.

Assunto $F = 6$ t, si sono calcolate per tutte le aste le rigidità ed i coefficienti di trasmissione.

Nella tabella d sono consegnati i valori di N , di u e delle funzioni \bar{A} , A , \bar{B} , B ; nella tabella e i valori $4EI/l$ e le rigidità modificate.

Da notare che per le aste del corrente inferiore, per le quali le tensioni interne superano lo snervamento, si è assunto il modulo di elasticità E pari a $1,5 \times 10^5$ Kg/cm² (tratto BC della bilatera di fig. 5-5), mentre per tutte le altre aste della struttura $E = 2,1 \times 10^6$ Kg/cm² (tratto AB della bilatera di fig. 5-5).

TABELLA d

F = 6 t.

corrente superiore E = 2,1 10⁶ Kg/cmq EI = 82,48 tm²
 aste di parete E = 2,1 10⁶ Kg/cmq EI = 3,06 tm²
 corrente inferiore E = 1,5 10⁵ Kg/cmq EI = 1,059 tm²

Aste	N	u	A	B
0-1	— 62,54	0,76	0,92	1,13
1-3	— 67,49	1,46	0,67	1,16
3-5	— 60,74	1,29	0,75	1,51
1-2	9,14	1,30	1,21	0,75
2-3	10,20	1,89	1,41	0,59
3-4	6,19	1,33	1,22	0,74
4-5	7,49	1,66	1,32	0,65
0-2	54,74	10,96	5,75	0,09
2-4	55,46	10,98	5,75	0,09
4-6	54,74	5,39	3,00	0,20

TABELLA e

F = 6 t.

Aste	$\frac{4 EI}{l}$ (tm)	ρ
0-1	188,52	173,44
1-3	102,46	68,65
3-5	109,24	81,93
1-2	8,16	9,87
2-3	5,91	8,33
3-4	6,54	7,98
4-5	5,77	7,62
0-2	1,38	7,93
2-4	1,40	8,05
4-6	2,11 (*)	6,33

$$(*) \frac{6 EI}{l}$$

Nella tabella *f* sono riportati i coefficienti di ripartizione τ e di trasporto *t*.

TABELLA *f*

F = 6 t.

Nodo	Aste	τ	<i>t</i>
0	0-1	0,95	0,56
	0-2	0,05	0,04
1	1-0	0,69	0,56
	1-2	0,04	0,37
	1-3	0,27	0,88
2	2-0	0,23	0,04
	2-1	0,29	0,37
	2-3	0,24	0,29
	2-4	0,24	0,04
3	3-1	0,41	0,88
	3-2	0,05	0,29
	3-4	0,05	0,37
	3-5	0,49	0,75
4	4-2	0,27	0,04
	4-3	0,27	0,37
	4-5	0,25	0,32
	4-6	0,21	0,00
5	5-3	0,91	0,75
	5-4	0,09	0,32

Applicata, per evidenti ragioni di emisimmetria, sul nodo 5 una coppia pari a 2 tm, si è operata la sua diffusione alla *Cross* sullo schema semplificato di fig. 5-7. Il procedimento, come può osservarsi sullo schema di figura 5-8 è risultato convergente.

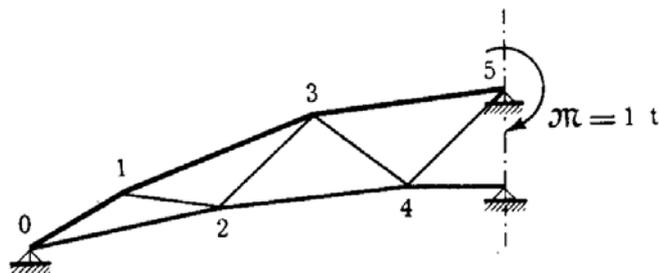


FIG. 5-7

Operando analogamente per $F = 7,5$ t., il procedimento diverge (tabelle *g*, *h*, *i*, fig. 5-9); si può affermare che il moltiplicatore critico è compreso tra 3 e 3,75.

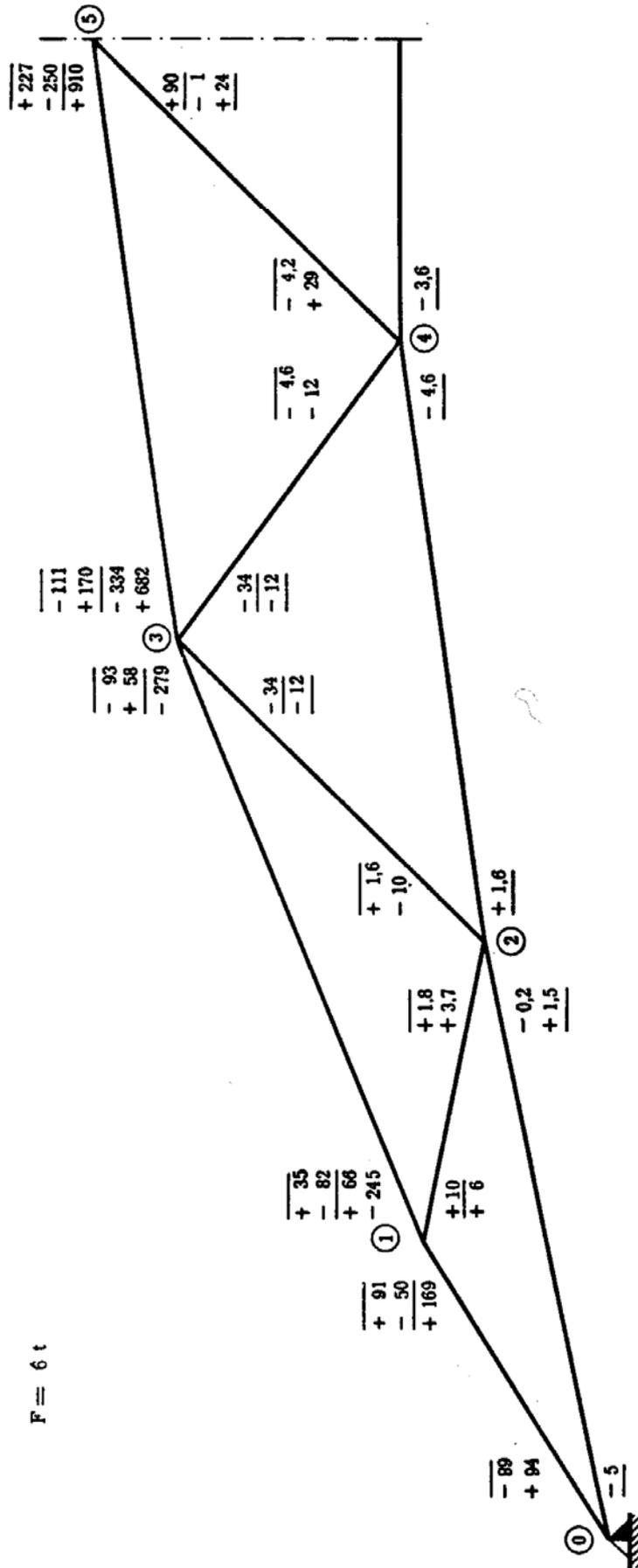


FIG. 5-8

TABELLA g

F = 7,5 t.

corrente superiore	E = 1,5 · 10 ⁵ Kg/cmq	EI = 6,186 tm ²
aste di parete	E = 2,1 · 10 ⁶ Kg/cmq	EI = 3,06 tm ²
corrente inferiore	E = 1,5 · 10 ⁵ Kg/cmq	EI = 1,059 tm ²

Aste	N	u	A	B
0-1	— 78,18	3,03	— 6,67	— 2,05
1-3	— 84,36	5,94	— 3,65	— 2,55
3-5	— 75,93	5,30	0,71	6,85
1-2	11,43	1,41	1,24	0,72
2-3	12,75	2,06	1,47	0,55
3-4	7,74	1,45	1,25	0,71
4-5	9,36	1,81	1,37	0,61
0-2	68,43	12,26	6,39	0,08
2-4	69,33	12,22	6,37	0,08
4-6	68,43	6,03	3,31	0,18

TABELLA h

F = 7,5 t.

Aste	$\frac{4 EI}{l}$ (tm)	ρ
0-1	14,13	— 94,31
1-3	7,68	— 28,05
3-5	8,19	5,82
1-2	8,55	10,61
2-3	6,19	9,11
3-4	6,86	8,58
4-5	6,05	8,29
0-2	1,38	8,87
2-4	1,40	8,94
4-6	2,11 (*)	7,01

$$(*) \frac{6 EI}{l}$$

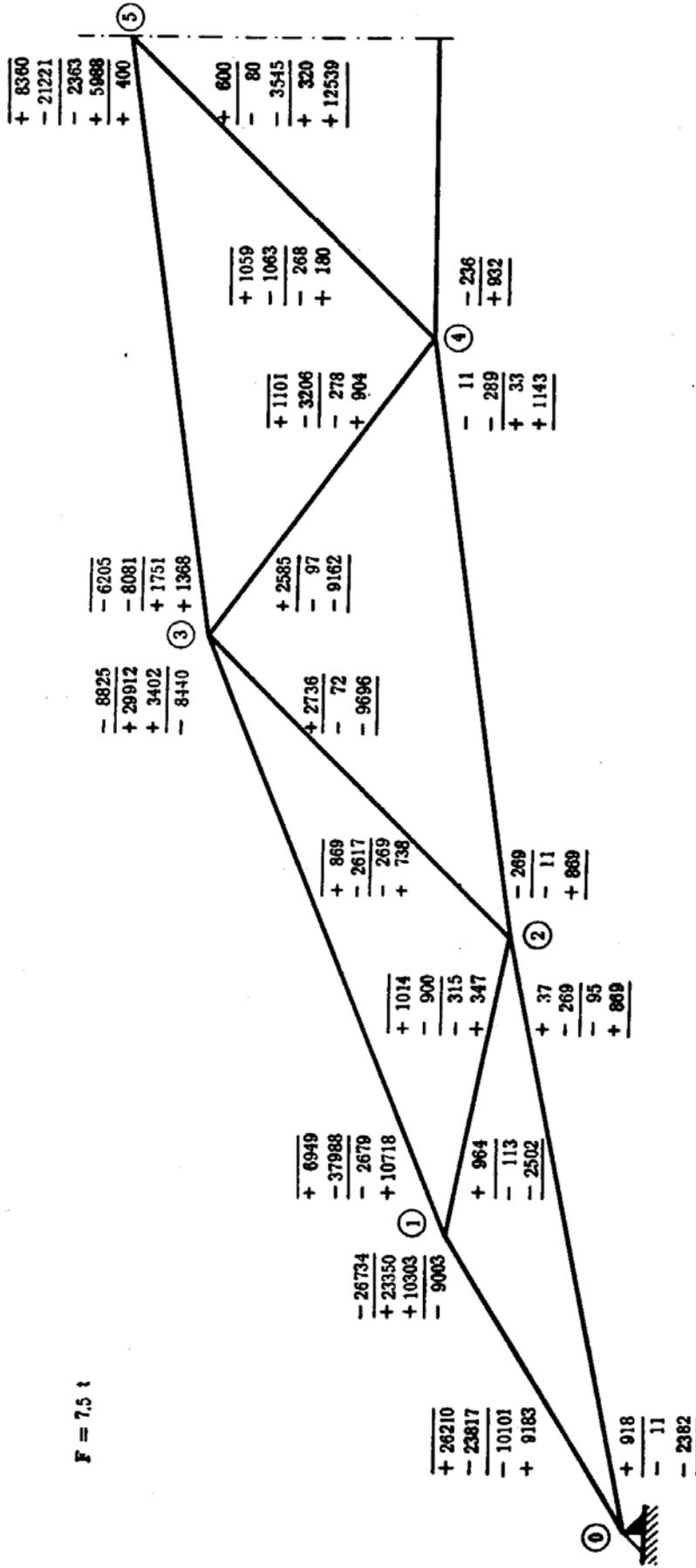


FIG. 5-9

TABELLA i

F = 7,5 t.

Nodo	Aste	τ	t
0	0-1	1,10	— 1,02
	0-2	— 0,10	0,04
1	1-0	0,84	— 1,02
	1-2	— 0,09	0,36
	1-3	0,25	— 1,27
2	2-0	0,24	0,04
	2-1	0,28	0,36
	2-3	0,24	0,27
	2-4	0,24	0,04
3	3-1	6,17	— 1,27
	3-2	— 2,00	0,27
	3-4	— 1,89	0,35
	3-5	— 1,28	3,42
4	4-2	0,27	0,04
	4-3	0,26	0,35
	4-5	0,25	0,30
	4-6	0,22	0,00
5	5-3	0,40	3,42
	5-4	0,60	0,30

L'intervallo ora trovato è stato ristretto operando, sempre in analogia a quanto fatto precedentemente, per $F=7$ t. (tabb. l, m, n, fig. 5-10) ed $F=6,5$ t. (tabb. o, p, q, fig. 5-11).

TABELLA l

F = 7 t.

corrente superiore E = 1,5 10^5 Kg/cm²aste di parete E = 2,1 10^6 Kg/cm²corrente inferiore E = 1,5 10^5 Kg/cm²

Aste	N	α	A	B
0-1	— 72,92	2,93	— 3,26	— 2,18
1-3	— 78,69	5,74	— 1,59	— 3,97
3-5	— 70,82	5,11	1,54	3,39
1-2	10,66	1,36	1,22	0,73
2-3	11,89	1,99	1,44	0,57
3-4	7,22	1,40	1,24	0,72
4-5	8,73	1,75	1,36	0,63
0-2	63,83	11,83	6,19	0,09
2-4	64,67	11,80	6,17	0,09
4-6	63,83	5,82	3,21	0,18

TABELLA m

F = 7 t.

Aste	$\frac{4 EI}{l}$ (tm)	ρ
0-1	14,13	46,09
1-3	7,68	12,22
3-5	8,19	12,62
1-2	8,16	10,44
2-3	5,91	8,93
3-4	6,54	8,51
4-5	5,77	8,23
0-2	1,38	8,59
2-4	1,40	8,66
4-6	2,11 (*)	6,80

$$(*) \frac{6 EI}{l}$$

TABELLA n

F = 7 t.

Nodo	Aste	τ	t
0	0-1	1,23	— 1,09
	0-2	— 0,23	0,04
1	1-0	0,96	— 1,09
	1-2	— 0,22	0,36
	1-3	0,26	— 1,98
2	2-0	0,24	0,04
	2-1	0,28	0,36
	2-3	0,24	0,28
	2-4	0,24	0,04
3	3-1	— 0,685	— 1,98
	3-2	0,500	0,28
	3-4	0,477	0,36
	3-5	0,708	1,69
4	4-2	0,27	0,04
	4-3	0,26	0,36
	4-5	0,25	0,31
	4-6	0,22	0,00
5	5-3	0,60	1,69
	5-4	0,40	0,31

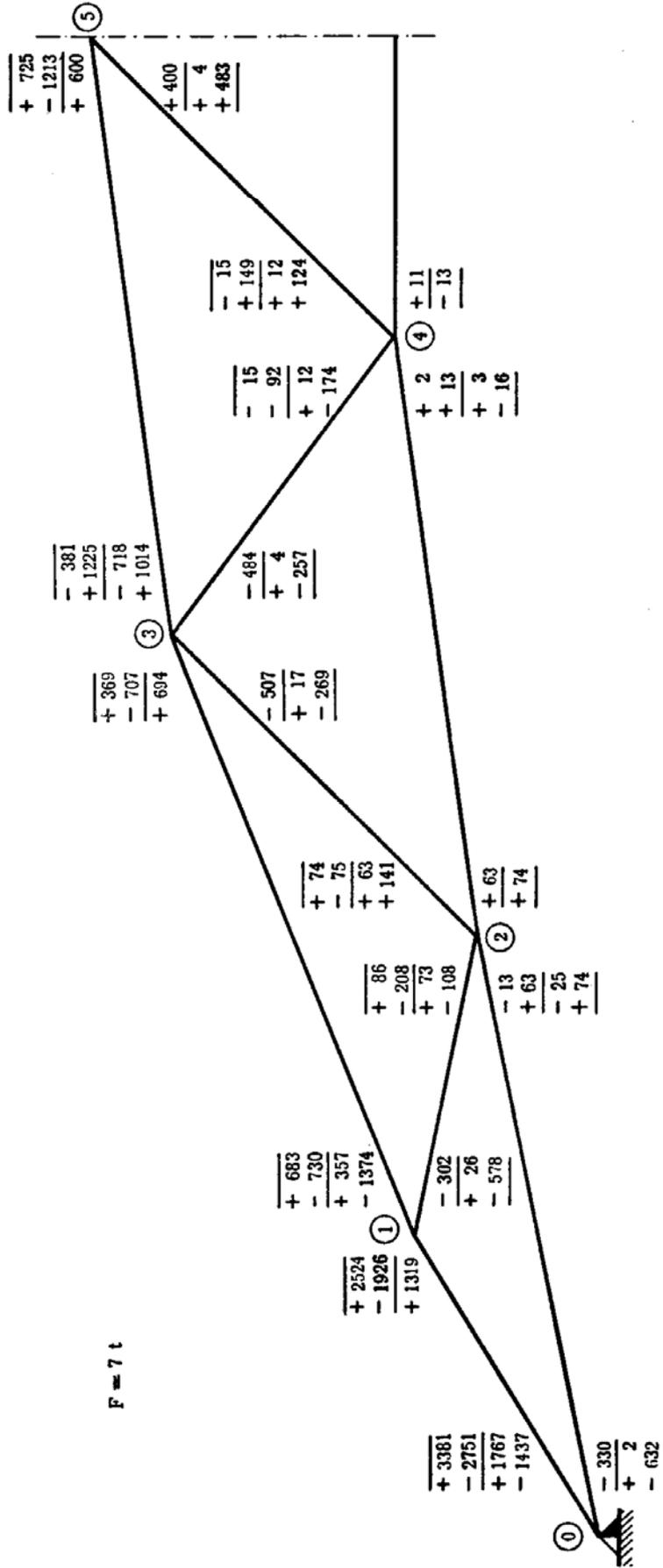


FIG. 5-10

TABELLA q

F = 6,5 t.

Nodi	Aste	τ	t
0	0-1	1,44	— 1,22
	0-2	— 0,44	0,04
1	1-0	1,39	— 1,22
	1-2	— 0,53	0,37
	1-3	0,14	— 7,05
2	2-0	0,23	0,04
	2-1	0,29	0,37
	2-3	0,24	0,29
	2-4	0,24	0,04
3	3-1	— 0,03	— 7,05
	3-2	0,09	0,29
	3-4	0,09	0,36
	3-5	0,85	0,79
4	4-2	0,27	0,04
	4-3	0,27	0,36
	4-5	0,26	0,32
	4-6	0,20	0,09
5	5-3	0,81	0,79
	5-4	0,19	0,32

Per entrambi questi valori la diffusione dei momenti alla Cross è divergente; si è potuto così individuare per F_c l'intervallo:

$$6 < F_c < 6,5 .$$

Si osservi che nell'asta 2-4, ove la σ è più elevata, risulta $\sigma = 6000$ Kg/cm² per $F = 7,5$ t., e 5000 Kg/cm² sotto il carico critico assunto pari a 6,25 t. Poichè il tratto BC della fig. 5-5 può supporre si arresti proprio tra $\sigma = 5000$ Kg/cm² e $\sigma = 6000$ Kg/cm² (σ di rottura), se ne trae che il carico critico coincide con quello di rottura ove si trascuri in questo il contributo flessionale; se si esige lo stesso coefficiente di sicurezza nei riguardi dei due fenomeni, la struttura è ben disegnata.

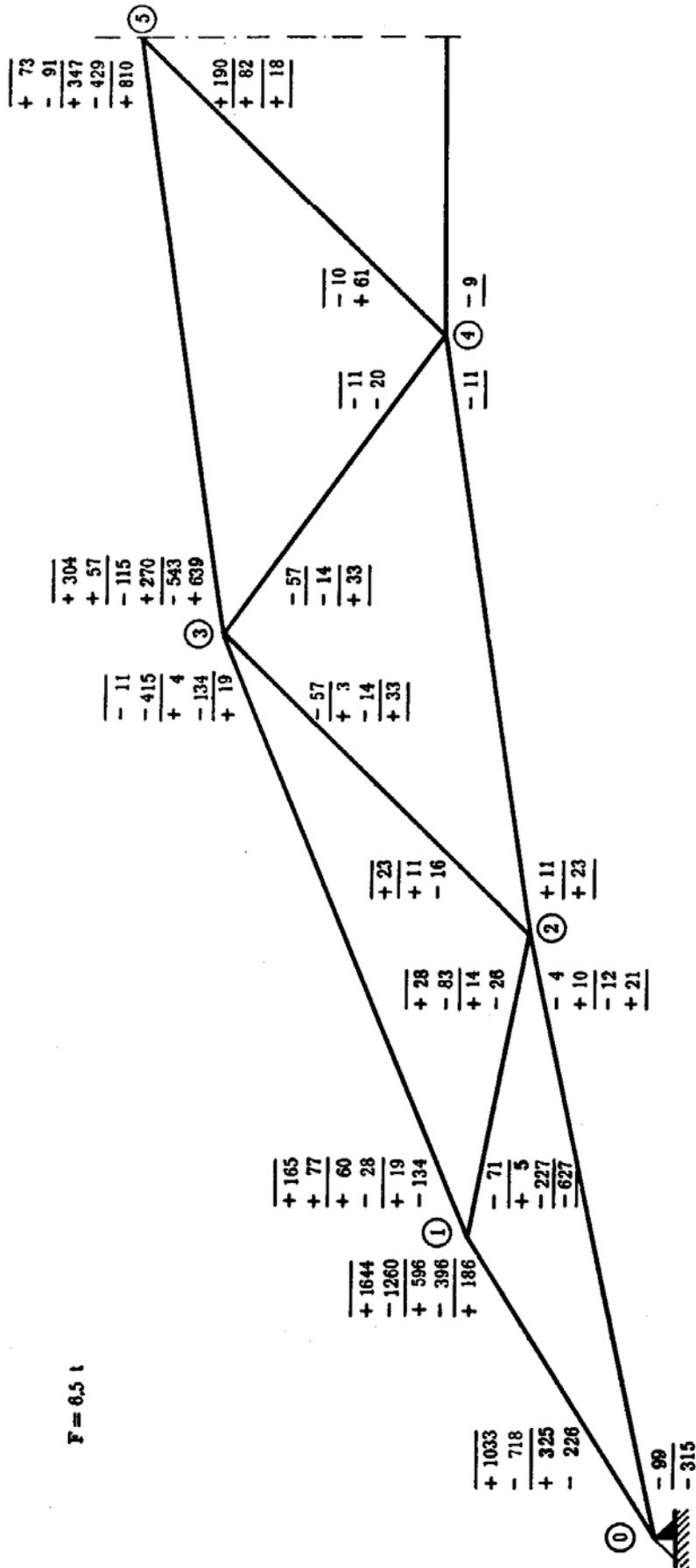


FIG. 5-11

Con l'ausilio del calcolatore elettronico si è tracciato il diagramma di figura 5-12 che rappresenta l'andamento del determinante dei coefficienti del sistema di equazioni di equilibrio dei nodi (vedi cap. seguente) al variare del moltiplicatore dei carichi esterni.

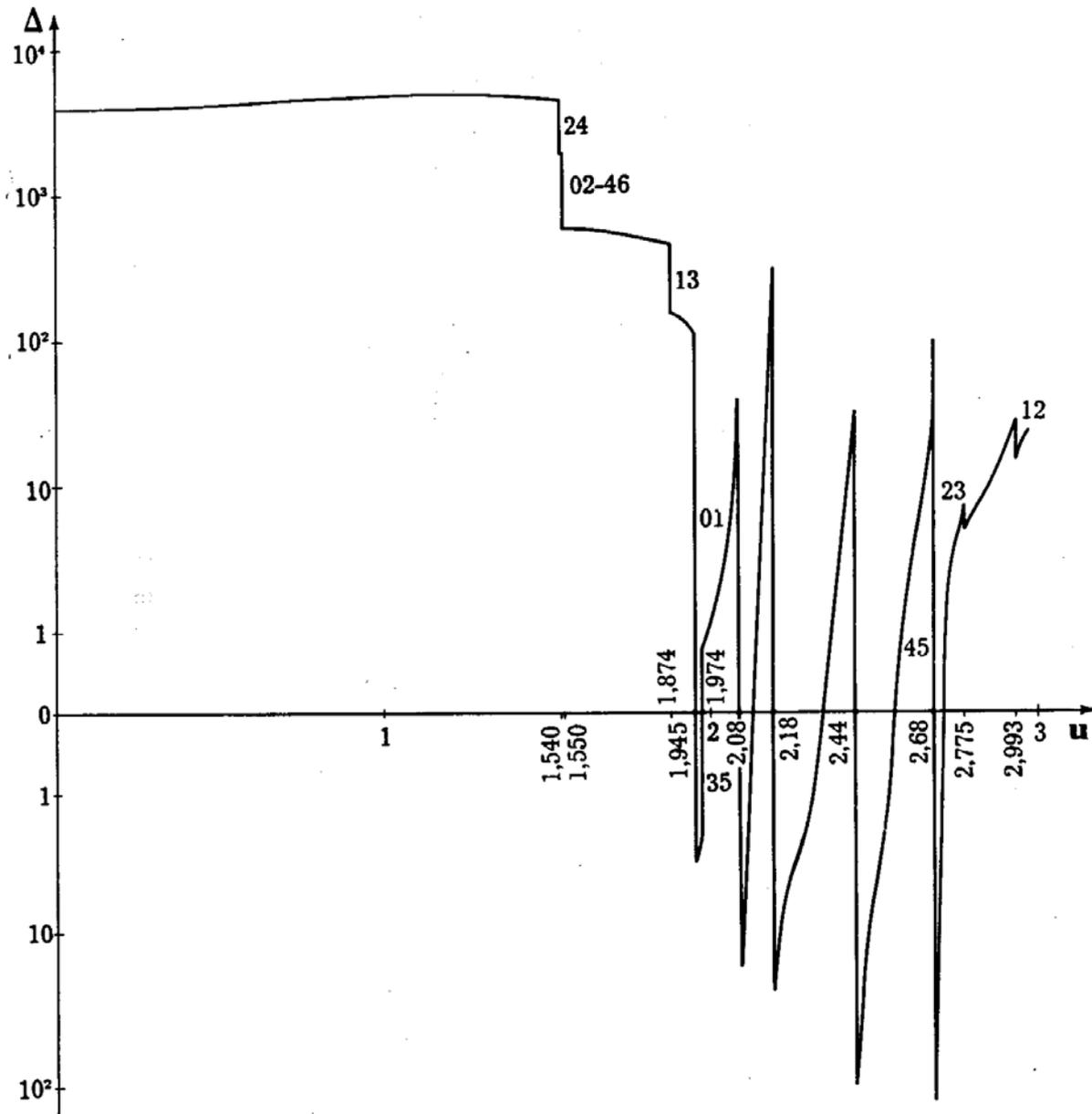


FIG. 5-12

Sulle ordinate sono riportati i valori del determinante Δ in scala logaritmica, sulle ascisse i valori del numero u relativo all'asta 2-3, funzione dello sforzo assiale di quest'asta e quindi del moltiplicatore dei carichi esterni.

I coefficienti del determinante Δ sono riportati in figura 5-13. In esso si

ha $a_{ij} = 2 E_{ij} I_{ij} / l_{ij}$; **A** e **B** sono le note funzioni di u_{ij} relative a sforzi di trazione, $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$ le funzioni di u_{ij} relative a sforzi di compressione.

In funzione di $u_{2-3} = u$ e di a_{2-3} , i valori di a_{ij} e di u_{ij} , per $E = 2,1 \times 10^6$ Kg/cm², sono consegnati nella tabella τ .

Per $E = 1,5 \times 10^5$ Kg/cm², ovvero $N_{ij} > \sigma_s \times \text{area della sezione dell'asta } ij$, u_{ij}/u_{2-3} va moltiplicato per 3,742 ed a_{ij}/a_{2-3} per 0,0714. I valori di u_{ij} limiti e cioè al raggiungimento della σ_s , sono riportati nella tabella s .

TABELLA τ

ij	$\frac{u_{ij}}{u_{2-3}}$	$\frac{a_{ij}}{a_{2-3}}$
0-1	0,403	31,897
1-3	0,770	17,336
3-5	0,686	18,483
1-2	0,686	1,381
2-3	1,000	1,000
3-4	0,703	1,106
4-5	0,877	0,976
0-2	1,588	3,133
2-4	1,584	3,166
4-6	0,781	4,778

TABELLA s

ij	$u_{ij} \text{ lim}$
0-1	0,784
1-3	1,443
3-5	1,354
1-2	2,012
2-3	2,775
3-4	2,506
4-5	2,343
0-2	2,461
2-4	2,439
4-6	1,211

Come risulta dal grafico di figura 5-12, si ha $\Delta = 0$ per $u = 1,945$, cui corrisponde $s = 3,08$ in concordanza con quanto trovato precedentemente.