

CAPITOLO II

**LE TRAVI AD ASSE RETTILINEO DI UNA SOLA CAMPATA
IN REGIME ELASTICO**

1. Generalità.

Si consideri la trave della fig. 2-1 a, con asse AB rettilineo, di sezione e di materiale comunque variabili con l'ascissa z ; all'asse della trave siano consentiti spostamenti solo nel piano yz .

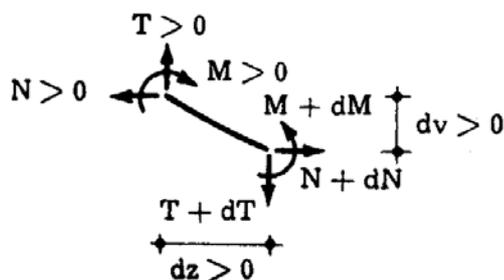
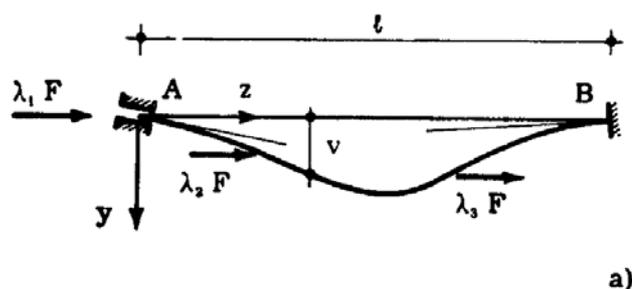


FIG. 2-1

Dei due vincoli in A e B uno soltanto, B, possa dar luogo ad una componente della reazione diretta secondo l'asse; il vincolo A permette quindi gli spostamenti lungo z .

Agiscano esclusivamente forze assiali, applicate all'asse; per il riferimento assunto, lo sforzo normale N in una generica sezione S all'ascissa z è fornito dall'integrale esteso fra 0 e z delle forze esterne, di compressione se l'integrale è positivo.

Se le forze sono concentrate e fornite da $\lambda_1 F$, è quindi

$$N_z = - F \sum_0 \lambda_1 = - F n(z), \quad (a)$$

dove $n(z)$ è una funzione costante a tratti.

Se le forze sono distribuite con continuità e fornite da $F f(z)$, è invece

$$N_z = - F \int_0^z f(z) dz = - F n(z), \quad (b)$$

dove $n(z)$ è una funzione continua.

Interessa conoscere il più basso valore F_c di F (*carico critico*) per cui la trave presenta una configurazione di equilibrio diversa dalla rettilinea.

Seguendo il metodo geometrico, occorre perciò scrivere l'equazione dell'equilibrio variato, o attraverso l'energia potenziale totale (1-11), oppure — ed è quello che si farà di seguito — in termini di spostamenti, unitamente alle condizioni ai limiti.

Procedendo da z a $z + dz$, è (fig. 2-1 b)

$$dM = - N dv + T dz = - N v' dz + T dz ;$$

si può quindi scrivere

$$M' = - N v' + T$$

$$M'' = (- N v')' + T' = F (n v')' - q ,$$

e poichè il carico trasversale q è nullo,

$$M'' = F (n v')' .$$

Dalla

$$EI v'' = - M$$

si trae perciò

$$(EI v'')'' + F (n v')' = 0 . \quad (1)$$

Le *condizioni ai limiti* sono quattro, due in ogni estremo, di equilibrio o di congruenza. Esse si riportano qui appresso:

| | appoggio | incastro | bipendolo | estremo libero | incastro elasticamente cedevole |
|--------|---------------------|----------------------|----------------------|----------------------------------|--|
| v | $v = 0$ (congr.) | $v = 0$ (congr.) | | | $v = c_v [\mp (EI v'')' - F v']$ (congr.) |
| v' | | $v' = 0$ (congr.) | $v' = 0$ (congr.) | | $v' = \pm c EI v''$ (congr.) |
| v'' | $v'' = 0$ (eq.) | | | $v'' = 0$ (eq.) | |
| v''' | | | $v''' = 0$ (eq.) | $(EI v''')' = \mp F v'$ (eq.) | |

(2)

Si osservi che la quantità $M' = (-EI v'')$ è il taglio.

In realtà la derivata di M , per ottenere il taglio, andrebbe eseguita secondo la tangente alla linea elastica; ma, poichè la configurazione variata parte da valori nulli degli spostamenti che la caratterizzano, l'ipotesi di piccoli spostamenti cade solo nel senso che non si trascurano le caratteristiche che sorgono per effetto degli spostamenti stessi; può sempre operarsi però con equazioni lineari negli spostamenti, perchè sono sempre piccole rispetto all'unità le loro derivate prime. Ciò autorizza a dire che la derivata di M rispetto a z fornisce il taglio.

Il taglio T in un estremo è fornito dalla componente F_h secondo la normale alla linea elastica della forza F eventualmente agente all'estremo, cambiata o meno di segno secondo che ci si trovi in A o in B (fig. 2-2 a)

$$T = (-EI v'')' = \mp F_h .$$

Se F , come nel caso in esame, è assiale, T è fornito (fig. 2-2 b) da

$$T = \pm F v'$$

secondo che si trovi in A o in B ; può perciò porsi

$$(-EI v'')' = \pm F v' . \quad (c)$$

Se il vincolo presenta cedimenti angolari elastici, si ottiene

$$\begin{aligned} \varphi_A &= -v' = -c \mathcal{N}_A = c M_A = -c EI v'' \\ \varphi_B &= -v' = -c \mathcal{N}_B = -c M_B = c EI v'' ; \end{aligned}$$

può porsi cioè

$$v' = \pm c EI v'' . \quad (d)$$

Se il vincolo presenta cedimenti verticali elastici, si ha (fig. 2-3)

$$v_A = -c_v R_A = c_v (T_A - F_A v') = c_v [(-EI v'')' - F_A v']$$

$$v_B = -c_v R_B = c_v (-T_B - F_B v') = c_v [(EI v'')' - F_B v'] ;$$

si può quindi scrivere

$$v = c_v [\mp (EI v'')' - F v'] . \quad (e)$$

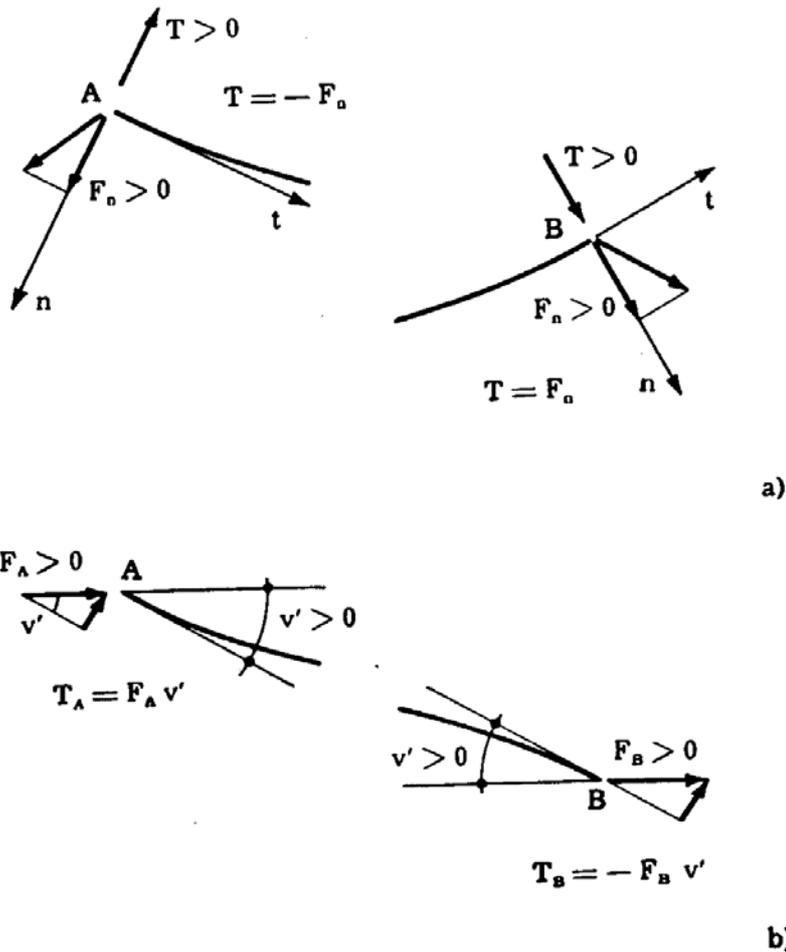


FIG. 2-2

L'equazione (2-1) è differenziale alle derivate totali, lineare, omogenea, a coefficienti variabili, del 4° ordine; le condizioni ai limiti (2-2) sono anch'esse omogenee.

Le (2-1) e (2-2) costituiscono assieme un sistema omogeneo, che ammette anzitutto la soluzione $v=0$. L'analisi matematica assicura però che, in un sistema di tal tipo, possono esistere soluzioni non nulle (*autofunzioni*) per particolari valori di F (*autovalori*).

In generale, si chiama sistema di *Sturm-Liouville* nell'incognita funzione $v(z)$ un'equazione lineare di ordine n del tipo (*autoaggiunta*)

$$[a_n(z) v^{(n)}]^{(n)} + [a_{n-1}(z) v^{(n-1)}]^{(n-1)} + \dots + [a_1(F, z) v^{(1)}]^{(1)} = 0 \quad (3)$$

dove h può arrivare da $n-1$ a zero, associata ad n condizioni omogenee (*accessorie*) del tipo

$$c_0 v + c_1 v' + \dots + c_n v^{(n)} = 0 \quad (4)$$

in due punti distinti $z=0$ e $z=l$, dove c_0, c_1, \dots sono costanti note (si ricordi che

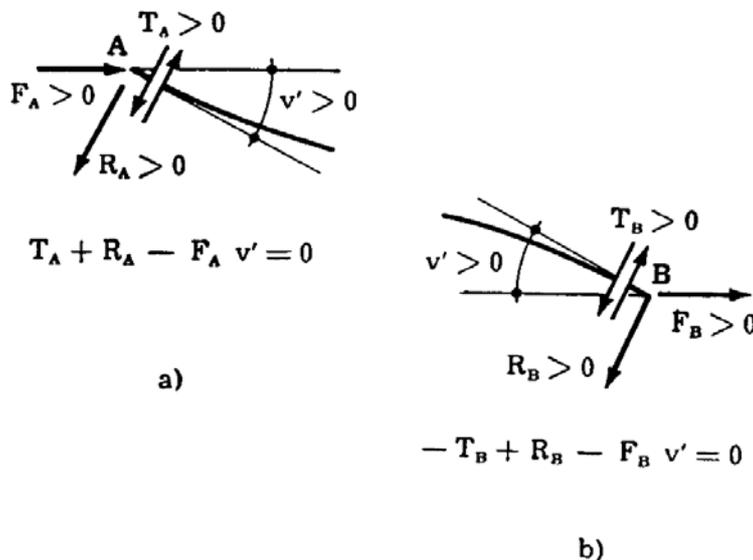


FIG. 2-3

se le condizioni accessorie sono assegnate in un sol punto, si parla di *condizioni iniziali*, se in due punti di *condizioni ai limiti*).

Se $a_h(F, z)$ è funzione continua e crescente di F nell'intervallo $F_a \leq F \leq F_b$, tale che si verifichi

$$\lim_{F \rightarrow F_a} a_h(F, z) = -\infty$$

$$\lim_{F \rightarrow F_b} a_h(F, z) = \infty,$$

esiste una successione crescente e numerabile di infiniti valori di F

$$F_1, F_2, F_3, \dots$$

tutti appartenenti all'intervallo $F_a \leq F \leq F_b$, e detti *autovalori*, per i quali, e solo per i quali, il sistema di Sturm-Liouville ammette soluzioni diverse dalla banale. Queste soluzioni (*autofunzioni*) sono determinate ciascuna a meno di una costante arbitraria, e si annullano $n-1$ volte all'interno dell'intervallo $0 < z < l$, se n è il posto del corrispondente autovalore nella successione numerabile degli autovalori.

Si ha che ogni problema non omogeneo corrispondente alla (2-3), e precisamente non omogeneo per non essere tale o l'equazione (2-3) o le condizioni ai limiti (2-4), presenta soluzione finita solo se F non è un autovalore del sistema omogeneo; in quest'ultimo caso la soluzione è infinitamente grande.

Si può dimostrare che

- ad ogni autovalore corrisponde una sola autofunzione;
- se è

$$a_h(F, z) = q(z) + F r(z).$$

con $r(z)$ sempre positiva, e $v_h(z)$ e $v_k(z)$ sono due qualsiasi distinte autofunzioni, vale la *relazione di ortogonalità*

$$\int_0^l r(z) v_h(z) v_k(z) dz = 0 ; \quad (5)$$

- c) se la $q(z)$ aumenta, gli autovalori diminuiscono;
- d) se la $r(z)$ aumenta, gli autovalori positivi diminuiscono, e quelli negativi aumentano;
- e) la serie

$$\sum \frac{1}{F_n}$$

è sempre convergente.

Si noti che l'ordinaria equazione delle travi con solo carico trasversale $q(z)$

$$(EI v'')'' = q(z) ,$$

con condizioni ai limiti omogenee, non costituisce — se resa omogenea — un sistema di Sturm-Liouville, perchè contiene un solo termine in v ; essa quindi ha sempre soluzioni finite e l'omogenea associata dà sempre soluzioni nulle. Invece l'equazione (2-1) con le condizioni ai limiti (2-2), valevole per la trave con solo carico assiale, è un sistema di Sturm-Liouville; e l'equazione della trave con carico assiale e trasversale

$$(EI v'')'' + F (n v')' = q(z)$$

connessa con condizioni ai limiti omogenee, se resa omogenea, è un sistema di Sturm-Liouville.

Così pure l'equazione

$$(EI v'')'' = 0 ,$$

con condizioni ai limiti non omogenee, corrisponde alla trave libera lungo l'asse e soggetta agli estremi a forze, coppie o distorsioni; essa, se le condizioni ai limiti divengono omogenee, non dà luogo ad un sistema di Sturm-Liouville.

2. La trave di sezione costante caricata in un estremo.

Se la trave è caricata solo nell'estremo A (fig. 2-1 a) da una forza F di compressione risulta $n(z) = 1$; se è pure $EI = \text{cost}$, la (2-1) si scrive

$$EI v^{IV} + F v'' = 0 . \quad (6)$$

Ponendo

$$\frac{F}{EI} = k^2 \quad (7)$$

la (2-6) si scrive

$$v^{IV} + k^2 v'' = 0 \quad (8)$$

che ammette come integrali particolari

$$v = \text{sen } kz$$

$$v = \text{cos } kz$$

$$v = a z$$

$$v = b$$

e quindi l'integrale generale

$$v = A \text{sen } kz + B \text{cos } kz + C z + D ; \quad (9)$$

la v è perciò in ogni caso una senoide, la cui lunghezza d'onda è pari a $2\pi/k$ (a meno di una funzione lineare in z).

a) *Trave appoggiata ai due estremi.*

Se la trave è appoggiata in A e B (fig. 2-4) le condizioni ai limiti por-

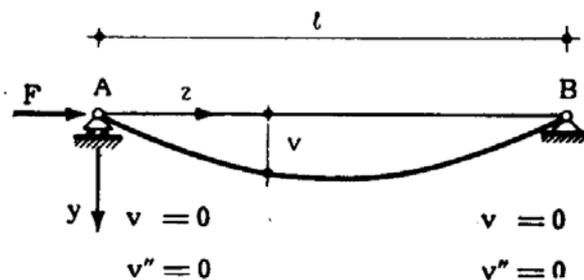


FIG. 2-4

gono il sistema algebrico lineare omogeneo nelle A B C D

$$v(0) = A \text{sen } 0 + B \text{cos } 0 + C \cdot 0 + D = 0$$

$$v(l) = A \text{sen } kl + B \text{cos } kl + C l + D = 0$$

$$v''(0) = -A k^2 \text{sen } 0 - B k^2 \text{cos } 0 = 0$$

$$v''(l) = -A k^2 \text{sen } kl - B k^2 \text{cos } kl = 0$$

La condizione perchè tale sistema ammetta soluzioni non nulle è

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \text{sen } k\ell & \cos k\ell & \ell & 1 \\ 0 & k^2 & 0 & 0 \\ -k^2 \text{sen } k\ell & -k^2 \cos k\ell & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

che si scrive

$$-k^4 \text{sen } k\ell = 0$$

e ancora

$$\text{sen } k\ell = 0 . \quad (f)$$

Dalla (f) si trae la soluzione

$$k\ell = n\pi \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

da cui

$$F_a = \frac{n^2 \pi^2 EI}{\ell^2} ; \quad (10)$$

alla generica F_a corrisponde $B = C = D = 0$, A indeterminato, e quindi (2-9)

$$v = A_n \text{sen } \frac{n\pi}{\ell} z . \quad (11)$$

I valori (2-10) sono tutti possibili F_a . Le deformate corrispondenti agli F_a sono riportate nella fig. 2-5; si osserva che esse si annullano, nell'interno dell'intervallo $0 \leq z \leq \ell$, rispettivamente 0, 1, 2... n volte, ed esauriscono lo spettro delle autofunzioni, così come gli F_a esauriscono quello degli autovalori.

Il più piccolo valore (2-10) corrisponde al carico critico F_c :

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} ; \quad (12)$$

ad esso si associa la deformata

$$v = A_1 \text{sen } \frac{\pi z}{\ell} \quad (13)$$

sinusoide di semilunghezza pari ad l .

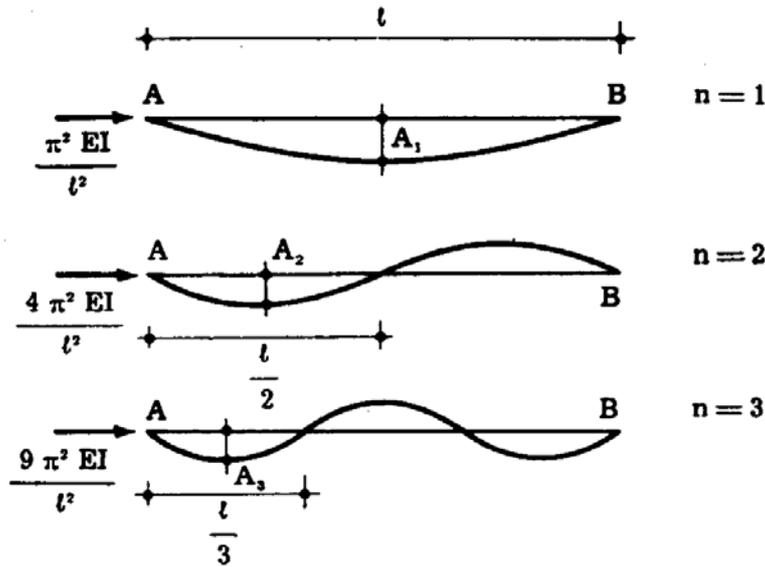


FIG. 2-5

Se si segue il metodo energetico invece di quello geometrico (§ 1-11) si ha

$$\delta_2 E = - \frac{F}{2} \int_0^l v'^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^l EI v''^2 dz ;$$

posto, con rispetto della congruenza,

$$v = \sum v_n \text{sen} \frac{n \pi z}{l} \tag{g}$$

si trae

$$\delta_2 E = - F \frac{\pi^2}{4 l} \sum v_n^2 n^2 + EI \frac{\pi^4}{4 l^3} \sum v_n^2 n^4 .$$

La condizione

$$\frac{\partial \delta_2 E}{\partial v_n} = 0$$

porge

$$F_a = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} .$$

La soluzione è esatta perchè lo sviluppo (g) è anch'esso esatto.

Il diagramma Fv , ove v è lo spostamento di un punto generico (del primo ordine nelle coordinate lagrangiane A_i) si presenta come nella

fig. 2-6, perchè le A_i sono indeterminate. Se il punto è a distanza l/m da un estremo, non compaiono le rette orizzontali corrispondenti ad F_m ed a F_{km} ($k=2, 3, 4 \dots$).

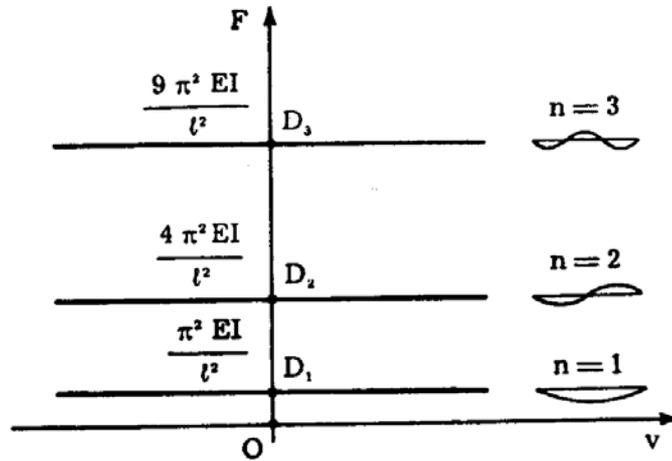


FIG. 2-6

Il coefficiente di sicurezza è fornito da

$$s = \frac{F_c}{F};$$

si ha perciò

$$s = \frac{|\sigma''_o| A}{F} \frac{F_c}{|\sigma''_o| A} = \frac{|\sigma''_o| A}{c F} \quad (h)$$

dove si è posto

$$c = \frac{|\sigma''_o| A}{F_c}.$$

La (h) è un artificio, che permette di calcolare il coefficiente di sicurezza con la stessa espressione valida per il carico assiale ordinario. Si tenga però presente che in genere il minimo valore tollerabile di s nei confronti dell'intervento dell'instabilità ($s_{i \min}$) è superiore agli ordinari minimi ($s_{t \min}$) dei coefficienti di sicurezza, forniti nei confronti della plasticizzazione; se perciò è σ_a la tensione ammissibile in regime monoassiale nei riguardi della plasticizzazione, si ha dalla (h)

$$s = \frac{|\sigma''_o| A}{c F} \geq s_{i \min}$$

$$F \leq \frac{|\sigma''_o| A}{c S_{I \min}}$$

$$F \leq \frac{|\sigma''_o| A}{c S_{t \min}} \frac{S_{t \min}}{S_{I \min}}$$

e ancora

$$F \leq \frac{|\sigma''_a| A}{c} \frac{S_{t \min}}{S_{I \min}} \quad (i)$$

Ponendo

$$\omega = c \frac{S_{I \min}}{S_{t \min}} = \frac{|\sigma''_o| A}{F_c} \frac{S_{I \min}}{S_{t \min}} \quad (l)$$

la (i) si scrive

$$F \leq \frac{|\sigma''_o| A}{\omega} \quad (14)$$

Chiamando *tensione critica* σ_c il rapporto

$$\sigma_c = \frac{F_c}{A} \quad (15)$$

la (l) si scrive

$$\omega = \frac{|\sigma''_o|}{\sigma_c} \frac{S_{I \min}}{S_{t \min}} \quad (16)$$

Poichè è $\sigma_c < |\sigma''_o|$ e $S_{I \min} > S_{t \min}$, è sempre $\omega > 1$. Dalla (2-12) risulta

$$\sigma_c = \frac{\pi^2}{l^2} \frac{EI}{A} = \frac{\pi^2}{l^2} E \rho^2, \quad (m)$$

dove ρ è il raggio dell'ellisse d'inerzia relativo al piano di flessione yz. Se si chiama *snellezza* λ il rapporto

$$\lambda = \frac{l}{\rho} \quad (17)$$

la (m) si scrive

$$\sigma_c = \frac{\pi^2}{\lambda^2} E; \quad (18)$$

e cioè la tensione critica è funzione del materiale attraverso il solo modulo E , e della geometria attraverso la sola snellezza. I coefficienti ω sono perciò tabellabili in funzione del materiale e della snellezza, fissando anche per ogni materiale il rapporto $s_{l \text{ min}}/s_{t \text{ min}}$. Tutto ciò è valido per trave dello stesso materiale, di sezione costante, appoggiata agli estremi; è inoltre limitato dall'ipotesi di elasticità lineare, sotto cui valgono le equazioni dell'equilibrio variato così come scritte, e cioè vale nel campo

$$\sigma_c \leq |\sigma''_p|$$

dove σ''_p è la tensione di proporzionalità. Si mostrerà tra poco, però, che il procedimento è estensibile, con una certa approssimazione, al di fuori del campo suddetto, ed alle travi comunque vincolate purchè di sezione costante; i valori tabellati di ω , che si riporteranno in seguito, possono perciò usarsi sotto questa sola riserva.

b) *Trave incastrata in un estremo e libera all'altro.*

Con riferimento alla struttura reale (fig. 2-7 a), le condizioni ai limiti non sono del tipo di Sturm, perchè contengono il parametro F ; ciò invalida

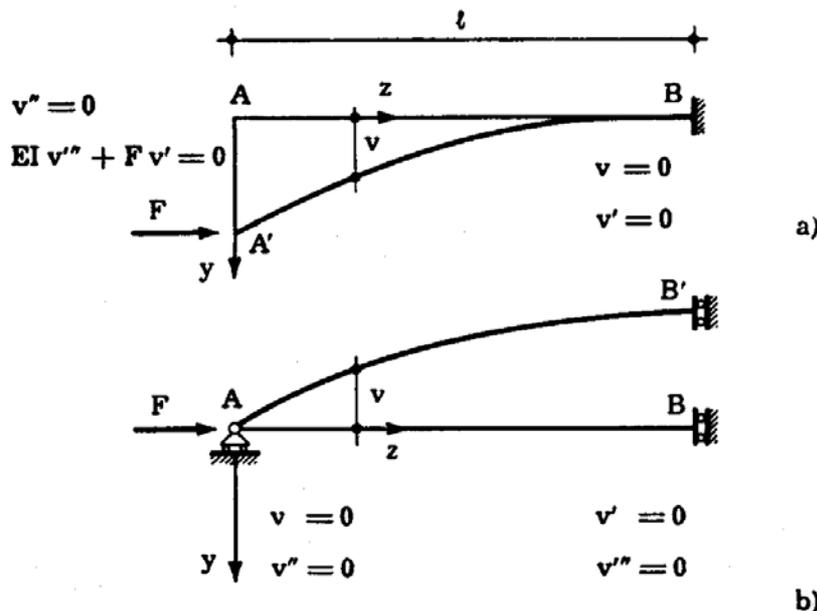


FIG. 2-7

tutti i teoremi che si connettono ai sistemi di Sturm-Liouville, in particolare l'autofunzione di ordine n non si annulla $n - 1$ volte nell'intervallo $0 \leq z \leq l$. Si opera perciò sulla struttura della fig. 2-7 b, ove in A esiste un appoggio, ed in B un bispendolo; in essa le caratteristiche della sollecitazione sono le stesse che nella struttura reale.

Le condizioni ai limiti si esprimono così alla maniera di Sturm, ma restano fisicamente identiche; infatti in B il taglio è nullo, e così pure quindi la reazione in A. D'altro canto tra A e B è consentito lo spostamento relativo, ed in A la rotazione, mentre in B la rotazione è nulla.

Le condizioni ai limiti porgono

$$\begin{aligned} v(0) &= B + D = 0 \\ v''(0) &= B k^2 = 0 \\ v'(l) &= A k \cos kl - B k \sin kl + C = 0 \\ v'''(l) &= A k^3 \cos kl - B k^3 \sin kl = 0, \end{aligned}$$

il cui determinante uguagliato a zero fornisce

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k^2 & 0 & 0 \\ k \cos kl & -k \sin kl & 1 & 0 \\ k^3 \cos kl & -k^3 \sin kl & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

La suddetta equazione si scrive pure

$$k^3 \cos kl = 0$$

e cioè

$$\cos kl = 0$$

da cui

$$kl = (2n - 1) \frac{\pi}{2}; \quad (n = 1, 2 \dots 3) \quad (19)$$

a questa corrisponde $B = C = D = 0$, A indeterminato, e la (2-9) fornisce

$$v = A_n \sin (2n - 1) \frac{\pi}{2l} z. \quad (20)$$

Alla soluzione (2-19) corrisponde

$$F_a = \frac{(2n - 1)^2 \pi^2 EI}{4 l^2} \quad (21)$$

I (2-21) sono tutti gli F_a possibili; il più piccolo è F_c .

Le deformate corrispondenti ai successivi valori di F_a sono rappresentate nella fig. 2-8; anche qui, in ciascuna di esse la funzione si annulla

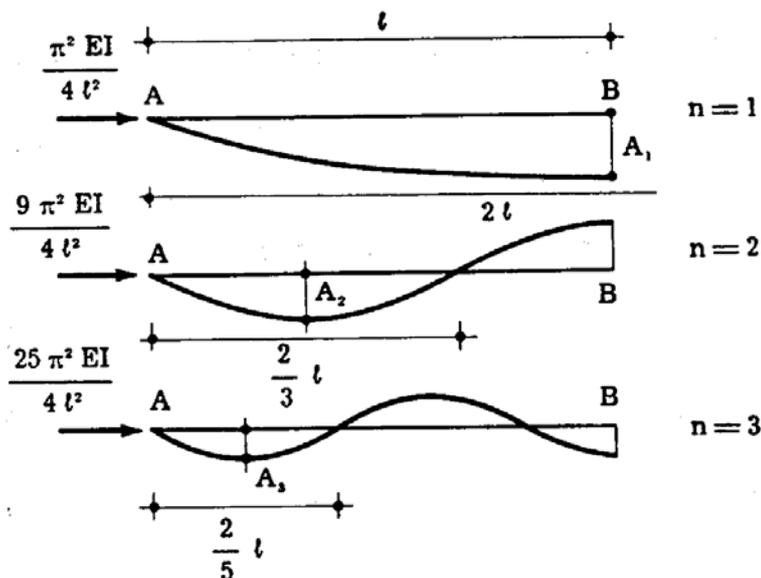


FIG. 2-8

successivamente in 0, 1, 2, 3... punti. I valori (2-21) esauriscono tutti gli autovalori; il più piccolo di essi è, come già detto, il carico critico:

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2} \quad (22)$$

cui corrisponde la deformata variata

$$v = A_1 \operatorname{sen} \frac{\pi z}{2 l} \quad (23)$$

che è una senoide, di semilunghezza d'onda pari a $2 l$.

Secondo il metodo energetico, posta l'espressione congruente

$$v = \sum v_m \operatorname{sen} \frac{m \pi z}{2 l} \quad (m = 1, 3, 5 \dots)$$

si trae

$$\delta_2 E = - F \frac{\pi^2}{16 l} \Sigma v_m^2 m^2 + \frac{EI \pi^4}{4 \cdot 16 l^3} \Sigma v_m^2 m^4,$$

e dalla $\frac{\partial \delta_2 E}{\partial v_m} = 0$ si riottengono le (2-21).

c) *Trave incastrata in un estremo e appoggiata all'altro.*

Con riferimento alla trave della fig. 2-9 si ha

$$v(0) = B + D = 0$$

$$v''(0) = B k^2 = 0$$

$$v(l) = A \operatorname{sen} kl + B \cos kl + Cl + D = 0$$

$$v'(l) = A k \cos kl - B k \operatorname{sen} kl + C = 0$$

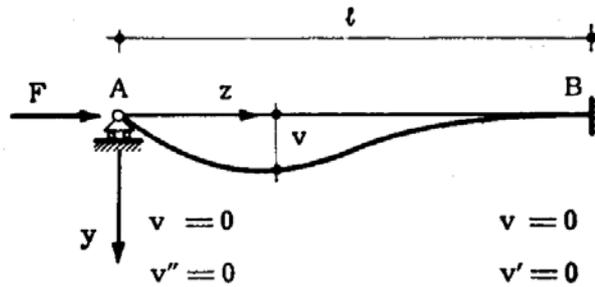


FIG. 2-9

da cui

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k^2 & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} kl & \cos kl & l & 1 \\ k \cos kl & -k \operatorname{sen} kl & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Quest'ultima equazione può scriversi

$$k^2 (\operatorname{sen} kl - kl \cos kl) = 0$$

e cioè

$$\operatorname{tg} kl = kl \quad (n)$$

La più bassa radice della (n) è (fig. 2-10)

$$kl = 4,493 \quad (o)$$

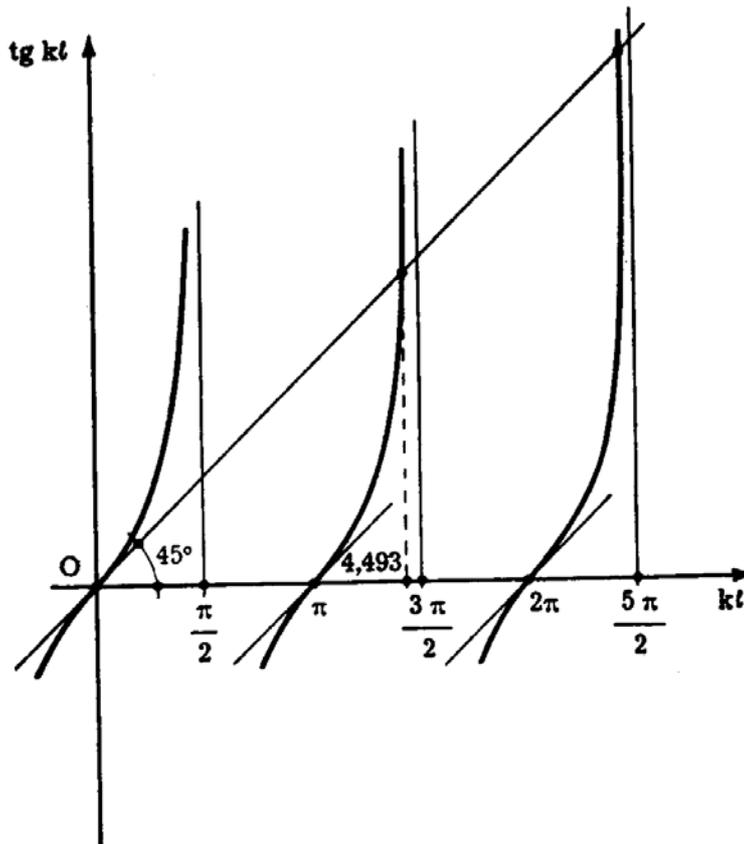


FIG. 2-10

da cui si trae

$$F_c = 20,19 \frac{EI}{l^2} \approx \frac{2 \pi^2 EI}{l^2} \quad (24)$$

Alla (n) corrisponde

$$B = D = 0$$

$$A k \cos kl + C = 0$$

e cioè

$$C = -\frac{A}{l} kl \cos kl = \frac{A}{l} \operatorname{sen} kl ;$$

la deformata variata connessa con la (2-24) è perciò

$$v = A_1 \left(\operatorname{sen} 4,493 \frac{z}{l} + \frac{z}{l} \operatorname{sen} 4,493 \right) \quad (25)$$

e cioè, a meno di una funzione lineare, ancora una senoide, la cui semilunghezza d'onda è molto prossima ad $l/\sqrt{2}$ (fig. 2-11).

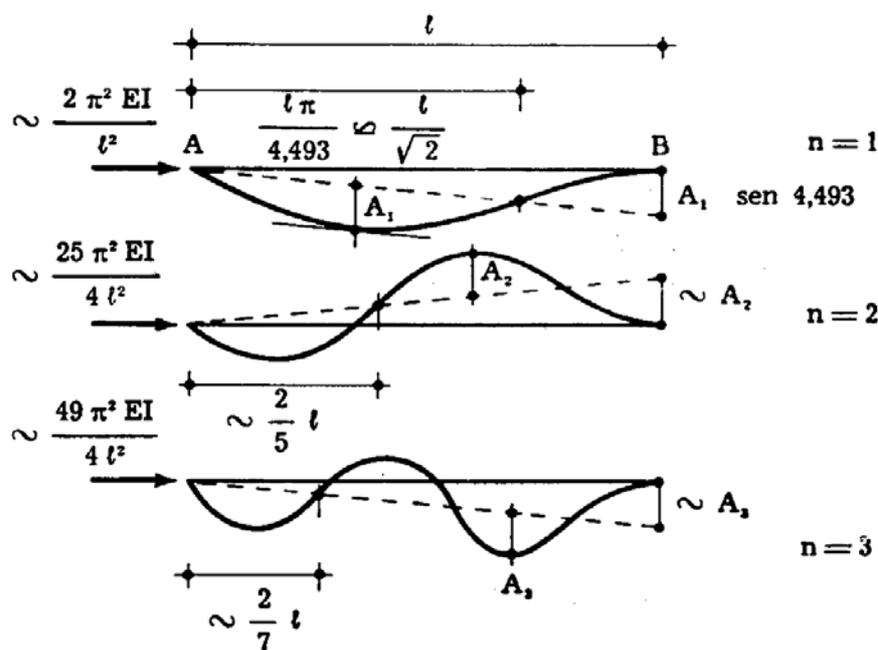


FIG. 2-11

Può porsi con buona approssimazione (fig. 2-10), per le deformate successive alla prima,

$$kl \approx (2n + 1) \frac{\pi}{2} \quad (n = 2, 3 \dots)$$

e quindi

$$F_a \approx \frac{(2n + 1)^2 \pi^2 EI}{4 l^2}$$

$$\begin{aligned} v &= A_n \operatorname{sen} kz + C_n z = A_n \left(\operatorname{sen} kz + \frac{z}{l} \operatorname{sen} kl \right) = \\ &= A_n \left[\operatorname{sen} \frac{(2n + 1) \pi}{2 l} z + \frac{z}{l} \right]. \end{aligned}$$

d) *Trave con due incastri alle estremità.*

Le condizioni ai limiti (fig. 2-12) si scrivono

$$v(0) = B + D = 0$$

$$v'(0) = Ak + C = 0$$

$$v(l) = A \operatorname{sen} kl + B \cos kl + Cl + D = 0$$

$$v'(l) = Ak \cos kl - Bk \operatorname{sen} kl + C = 0$$

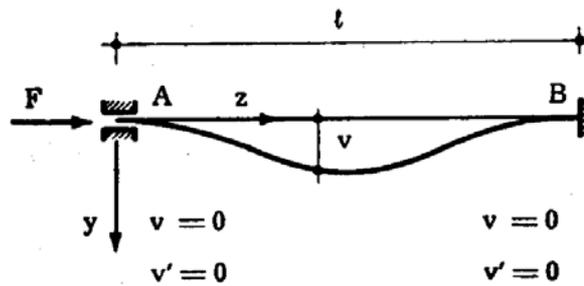


FIG. 2-12

la cui condizione di compatibilità si scrive

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} kl & \cos kl & l & 1 \\ k \cos kl & -k \operatorname{sen} kl & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (p)$$

La (p) si scrive pure

$$2(\cos kl - 1) + kl \operatorname{sen} kl = 0 \quad (q)$$

Per le relazioni

$$\operatorname{sen} kl = 2 \operatorname{sen} \frac{kl}{2} \cos \frac{kl}{2}$$

$$\cos kl = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{kl}{2}$$

la (p) si scrive

$$\operatorname{sen} \frac{k\ell}{2} \left(\frac{k\ell}{2} \cos \frac{k\ell}{2} - \operatorname{sen} \frac{k\ell}{2} \right) = 0. \quad (r)$$

Le soluzioni della (r) sono

$$\operatorname{sen} \frac{k\ell}{2} = 0 \quad (s)$$

e

$$\operatorname{tg} \frac{k\ell}{2} = \frac{k\ell}{2}. \quad (t)$$

La (s) porge

$$\frac{k\ell}{2} = n\pi \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

da cui

$$F_a = \frac{4 n^2 \pi^2 EI}{\ell^2}; \quad (26)$$

le soluzioni della (t) sono fornite dalla fig. 2-10, e la più bassa di esse risulta dalla relazione

$$\frac{k\ell}{2} = 4,493$$

da cui

$$F_a = 4 \frac{20,19 EI}{\ell^2} \approx \frac{8 \pi^2 EI}{\ell^2}. \quad (27)$$

Alla F_a generica (2-26) corrisponde $A = C = 0$, $D = -B$, e quindi

$$v_n = B_n \left(1 - \cos \frac{2 n \pi z}{\ell} \right). \quad (28)$$

Nella fig. 2-13 sono riportate le deformate (2-28) per $n = 1$ ed $n = 2$. Il più basso valore (2-26) è fornito da

$$F_c = \frac{4 \pi^2 EI}{\ell^2}; \quad (29)$$

poichè esso è inferiore anche al (2-27), può dirsi che è il carico critico. La deformata corrispondente è una senoide di semionda $l/2$. Il carico

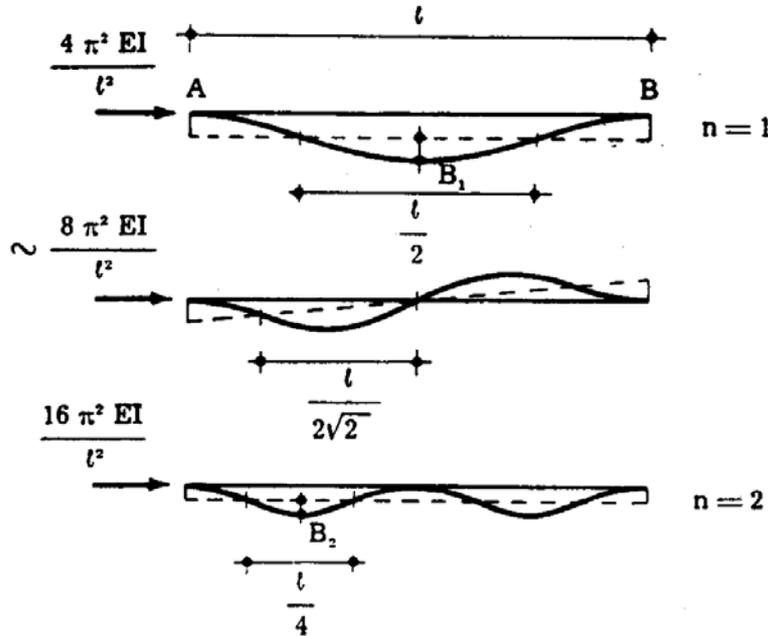


FIG. 2-13

(2-27), e la corrispondente deformata (fig. 2-13), sono critici per la trave appoggiata e incastrata di luce $l/2$, il carico (2-26), preso $n=2$, è invece il carico critico per la trave a due incastri di luce $l/2$.

3. La lunghezza libera di inflessione.

Dagli esempi trattati al § 2-2 si trae che il carico critico per una trave di sezione costante può essere sempre fornito da una formula analoga alla (2-12), detta *formula di Eulero*:

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2} \quad (30)$$

Nella (2-30), l_0 , che prende nome di *lunghezza libera di inflessione*, è fornita, per i casi esaminati, dalla fig. 2-14. Si nota che l_0 corrisponde in tutti i quattro casi alla distanza tra due punti di flesso successivi della deformata, che è sempre, a meno di una costante o di una funzione lineare in z , una senoide. Altre situazioni sono quelle delle travi della fig. 2-15; le deformate sono anche qui delle sinusoidi, e le lunghezze li-

bere risultano pari nei due casi alla luce della trave o al suo doppio. L'utilità dello schema è rivelato, per esempio, dai due portali della fig. 2-15.

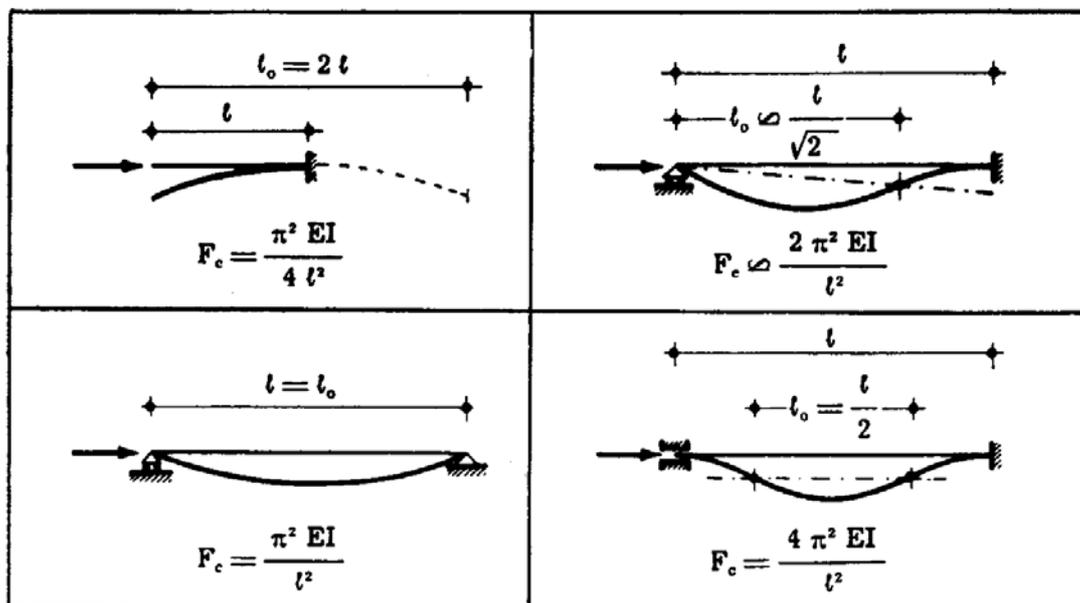


FIG. 2-14

La possibilità, per le travi di sezione costante, comunque vincolate, di esprimere il carico critico con la stessa formula della trave su due ap-

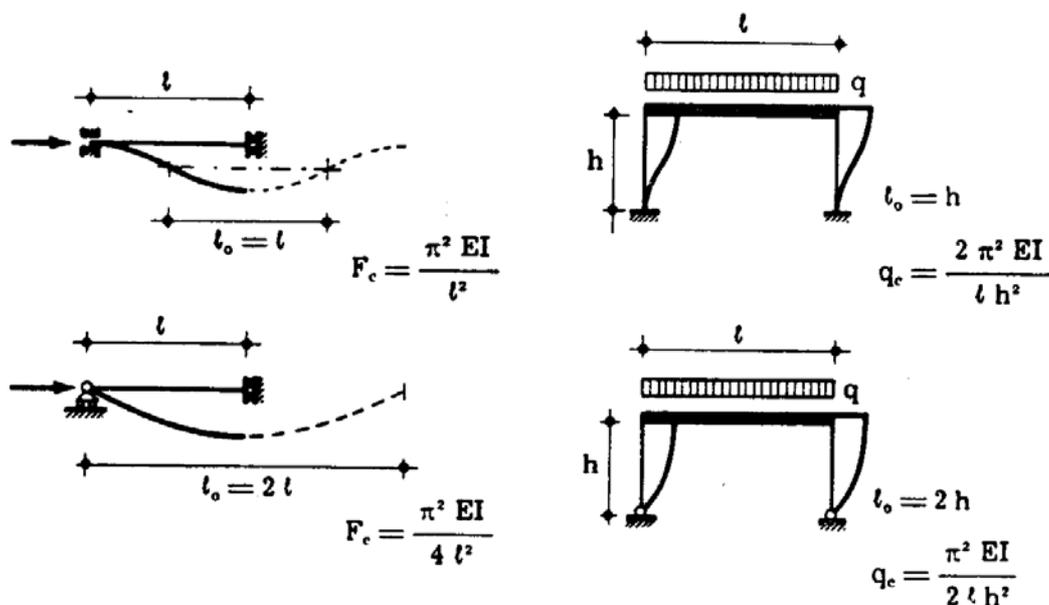


FIG. 2-15

poggi, equivale all'altra di ottenere il carico critico attraverso le tabelle dei coefficienti ω , purchè nel calcolo della snellezza si introduca la lun-

ghezza libera l_0 invece di quella effettiva l . A tale proposito è da notare anche che, se la trave per particolari ragioni costruttive può assumere la sua configurazione variata solo secondo spostamenti costretti in un piano, il momento d'inerzia che entra nella formula di Eulero è quello relativo a tale piano, mentre se la trave può inflettersi secondo più piani, in particolare secondo un piano qualunque, il carico critico è quello relativo al piano di minima rigidità flessionale, e quindi il momento d'inerzia da introdurre nella (1-30) è il minimo tra quelli relativi ai suddetti piani. In tal caso la snellezza è fornita da

$$\lambda = \frac{l_0}{\rho_{\min}}$$

Per il suddetto motivo, soluzione buona per le aste sottili compresse è quella per cui l'ellisse di inerzia della sezione ha il rapporto tra i dia-

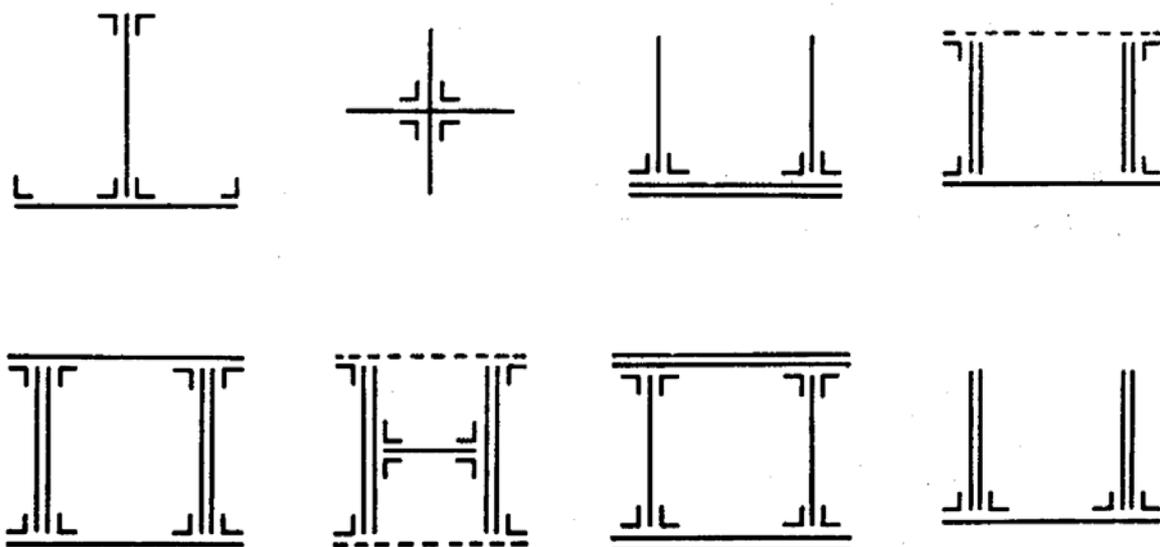


FIG. 2-16

metri quanto più prossimo all'unità; soluzione ideale si ha se l'ellisse è un cerchio. Nella fig. 2-16 si riportano alcune sezioni di elementi metallici compressi.

4. La trave su mezzo elastico continuo.

Si consideri la trave AB della fig. 2-17, di sezione costante, appoggiata ai due estremi, e caricata su un letto elastico, tale da generare una reazione diretta secondo l'asse y e proporzionale allo spostamento v :

$$q(z) = -c v(z) . \quad (u)$$

La trave sia soggetta alla forza F assiale di compressione.

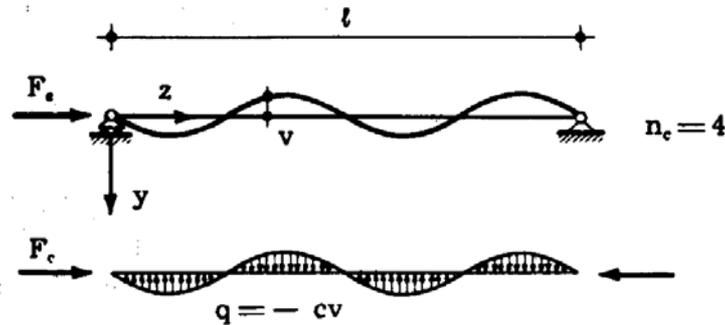


FIG. 2-17

L'equazione di equilibrio variato è

$$EI v^{IV} + F v'' = q = -c v$$

e dividendo per EI

$$v^{IV} + k^2 v'' + \frac{c}{EI} v = 0 . \quad (v)$$

La (v) è un'equazione differenziale lineare del quarto ordine a coefficienti costanti; essa non è del tipo di Sturm, perchè il parametro è contenuto nel penultimo termine.

La sua equazione caratteristica

$$\lambda^4 + k^2 \lambda^2 + \frac{c}{EI} = 0 \quad (z)$$

ammette le quattro radici

$$\lambda = \pm \sqrt{-\frac{k^2}{2} \pm \sqrt{\frac{k^4}{4} - \frac{c}{EI}}} \quad (a')$$

Se è

$$\frac{k^4}{4} - \frac{c}{EI} < 0 ,$$

e cioè

$$F < 2 \sqrt{c EI} , \quad (31)$$

le quattro radici (a') risultano a due a due complesse coniugate con parte reale non nulla $\pm (\alpha' + i \alpha'')$, $\pm (\alpha' - i \alpha'')$ e l'integrale generale della (v) si scrive

$$v = A e^{\alpha' z} \cos \alpha'' z + B e^{\alpha' z} \sin \alpha'' z + C e^{-\alpha' z} \cos \alpha'' z + D e^{-\alpha' z} \sin \alpha'' z . \quad (b')$$

Le condizioni ai limiti forniscono un sistema di quattro equazioni omogenee in A B C D il cui determinante non può mai annullarsi, e perciò l'unica soluzione che soddisfi tali condizioni è $A = B = C = D = 0$.

Se invece è

$$\frac{k^4}{4} - \frac{c}{EI} > 0 ,$$

e cioè

$$F > 2 \sqrt{c EI} ,$$

le soluzioni (a') sono a due a due immaginarie pure coniugate

$$\pm i \beta = \pm i \sqrt{\frac{k^2}{2} + \sqrt{\frac{k^4}{4} - \frac{c}{EI}}} , \quad (c')$$

$$\pm i \delta = \pm i \sqrt{+\frac{k^2}{2} - \sqrt{\frac{k^4}{4} - \frac{c}{EI}}} .$$

L'integrale generale della (e') e perciò

$$v = A \cos \beta z + B \sin \beta z + C \cos \delta z + D \sin \delta z ; \quad (d')$$

le condizioni ai limiti porgono

$$v(0) = A + C = 0$$

$$v(l) = A \cos \beta l + B \sin \beta l + C \cos \delta l + D \sin \delta l = 0$$

$$v''(0) = -A \beta^2 - C \delta^2 = 0$$

$$v''(l) = -A \beta^2 \cos \beta l - B \beta^2 \sin \beta l - C \delta^2 \cos \delta l - D \delta^2 \sin \delta l = 0$$

(e')

L'equazione

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cos \beta l & \operatorname{sen} \beta l & \cos \delta l & \operatorname{sen} \delta l \\ -\beta^2 & 0 & -\delta^2 & 0 \\ -\beta^2 \cos \beta l & -\beta^2 \operatorname{sen} \beta l & -\delta^2 \cos \delta l & \delta^2 \operatorname{sen} \delta l \end{vmatrix} = 0$$

ammette la soluzione

$$\operatorname{sen} \beta l = 0 \quad (f')$$

cui si associa la soluzione delle (e') $A = C = D = 0$, $B \neq 0$ (*). La (i') perciò porge

$$v = B \operatorname{sen} \beta z. \quad (g')$$

Dalla (f') si trae

$$\beta = \frac{n \pi}{l}$$

e dalle (c')

$$\frac{n^2 \pi^2}{l^2} = \frac{k^2}{2} + \sqrt{\frac{k^4}{4} - \frac{c}{EI}}$$

$$\left(\frac{n^2 \pi^2}{l^2} - \frac{k^2}{2} \right)^2 = \frac{k^4}{4} - \frac{c}{EI}$$

da cui

$$F_a = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left(n^2 + \frac{c l^4}{EI \pi^4 n^2} \right). \quad (32)$$

Il carico critico è il più basso dei valori F_a . Per ottenerlo si osservi che, fissato n , e le quantità E, I, c , la relazione tra F_a ed l è rappresentata da una curva che presenta un minimo per

$$\frac{d F_a}{d l} = - \frac{2 \pi^2 n^2 EI}{l^3} + \frac{2 c l}{\pi^2 n^2} = 0$$

(*) Altra soluzione, che porta però agli stessi risultati, è $\operatorname{sen} \delta l = 0$, cui si associa $A = B = C = 0$, $D \neq 0$, e la stessa serie di carichi critici.

cui corrisponde

$$l^2 = \pi^2 n^2 \sqrt{\frac{EI}{c}}$$

$$F_a = 2 \sqrt{c EI}$$

$$\frac{d^2 F_a}{dl^2} = \frac{8c}{\pi^2 n^2} > 0.$$

Disegnate tali curve (fig. 2-18), si osserva che esse presentano il minimo nella stessa parallela all'asse delle l . Condotta per il valore assegnato

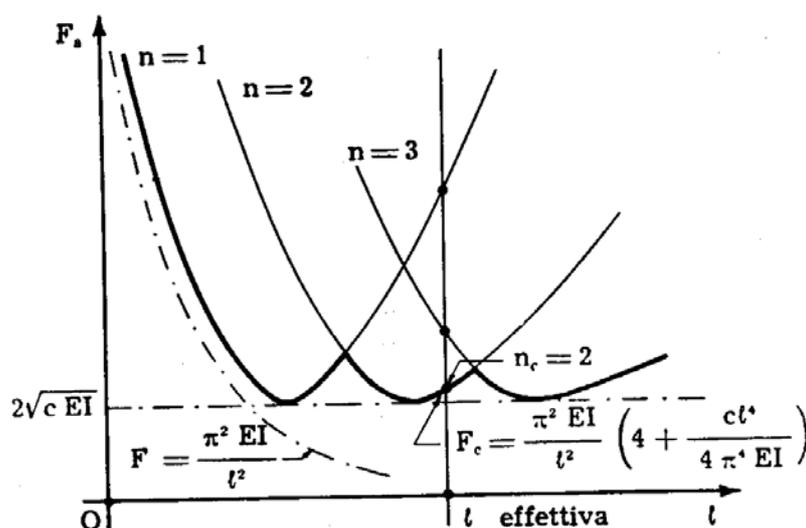


FIG. 2-18

di l la parallela all'asse delle F_a , per ogni n si ottiene il corrispondente valore F_a nell'intersezione di tale retta con la curva relativa ad n ; il valore n_c di n cui corrisponde F_a minimo, e cioè F_c , è così immediatamente determinabile. Dalla stessa fig. 2-18 si osserva che una buona approssimazione si consegue assumendo per F_c il più grande tra i due valori $\pi^2 EI/l^2$, carico critico in assenza di vincolo elastico continuo, e $2\sqrt{EIc}$. Così facendo ci si pone anche in condizioni di sicurezza migliori delle reali; basta per riconoscere ciò osservare che in fig. 2-18 la linea di spessore maggiore è sempre più alta di quella tratteggiata.

La lunghezza libera, una volta ottenuto n_c , è fornita da

$$l_o = \frac{l}{n_c^2 + \sqrt{\frac{cl^4}{EI \pi^4 n_c^2}}} \quad (33)$$

La tabella che segue (*Timoshenko*) fornisce il rapporto l_0/l per vari valori del rapporto $cl^4/16 EI$.

TABELLA 2-1

| $\frac{cl^4}{16 EI}$ | $\frac{l_0}{l}$ | $\frac{cl^4}{16 EI}$ | $\frac{l_0}{l}$ |
|----------------------|-----------------|----------------------|-----------------|
| 0 | 1 | 200 | 0,286 |
| 1 | 0,927 | 300 | 0,263 |
| 3 | 0,819 | 500 | 0,235 |
| 5 | 0,741 | 700 | 0,214 |
| 10 | 0,615 | 1000 | 0,195 |
| 15 | 0,537 | 1500 | 0,179 |
| 20 | 0,483 | 2000 | 0,165 |
| 30 | 0,437 | 3000 | 0,149 |
| 40 | 0,421 | 4000 | 0,140 |
| 50 | 0,406 | 5000 | 0,132 |
| 75 | 0,376 | 8000 | 0,117 |
| 100 | 0,351 | 10000 | 0,110 |

Si osservi che, se il rapporto cl^4/EI è molto basso, la sinusoide corrispondente ad F_c presenta una sola onda, ed il carico critico è poco più alto di quello dell'asta senza vincolo elastico continuo; se invece cl^4/EI è elevato, n_c risulta anch'esso elevato.

Un caso molto interessante è quello delle rotaie, in cui un aumento di temperatura può provocare forze assiali di compressione così elevate da indurre fenomeni di svergolamento se la rigidità del collegamento con il suolo non è sufficiente. Altro esempio è quello dei lunghi pali di fondazione portanti di punta.

Seguendo il metodo energetico, alla $\delta_2 E$ della formula (1-22) occorre aggiungere il termine relativo all'energia di deformazione del suolo, che è fornito da

$$W_s = \frac{1}{2} \int_0^l p v \, dz = \frac{c}{2} \int_0^l v^2 \, dz ;$$

è perciò

$$\delta_2 E = - \frac{F}{2} \int_0^l v'^2 \, dz + \frac{1}{2} \int_0^l EI v''^2 \, dz + \frac{c}{2} \int_0^l v^2 \, dz . \quad (h')$$

Posto

$$v = \sum v_n \operatorname{sen} \frac{n \pi z}{l}$$

risulta

$$W_s = \frac{c l}{4} \sum v_n^2$$

e quindi (1-30)

$$\delta_2 E = - \frac{F \pi^2}{4 l} \sum v_n^2 n^2 + \frac{EI \pi^4}{4 l^3} \sum v_n^2 n^4 + \frac{c l}{4} \sum v_n^2 .$$

La condizione

$$\frac{\partial \delta_2 E}{\partial v_n} = 0$$

si scrive

$$- \frac{F \pi^2}{2 l} v_n n^2 + \frac{EI \pi^4}{2 l^3} v_n n^4 + \frac{c l}{2} v_n = 0$$

da cui

$$F_a = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left(n^2 + \frac{c l^4}{n^2 \pi^4 EI} \right)$$

espressione coincidente con la 2-32.

5. Il metodo di Vianello.

Se la trave è di sezione variabile, o è caricata da forze assiali non solo agli estremi, ma anche lungo il suo asse, i procedimenti analitici di ricerca del carico critico risultano molto ardui se non sono accompagnati dall'uso del calcolatore elettronico; di essi si daranno in seguito brevi cenni. Può risultare utile in tal caso un procedimento di successive approssimazioni, eseguibile per via analitica, numerica o grafica, che risale al *Vianello* (1898); della sua convergenza hanno fornito assicurazione il *Trefftz* (1923) e lo *Schleusner* (1938). Esso si basa sulla considerazione che, in corrispondenza del carico critico, esiste una configurazione variata di equilibrio.

Assegnata (fig. 2-19) una qualsiasi deformata $v_1(z)$ che rispetti le condizioni di congruenza $v=0$ in $z=0$ ed in $z=l$, ed un valore qualsiasi

F_1 alla forza F , si costruisce il diagramma dei momenti $M_1(z)$ generati dalle forze $\lambda_1 F_1$ (*). Si passa poi dal diagramma M_1 a quello delle curva-

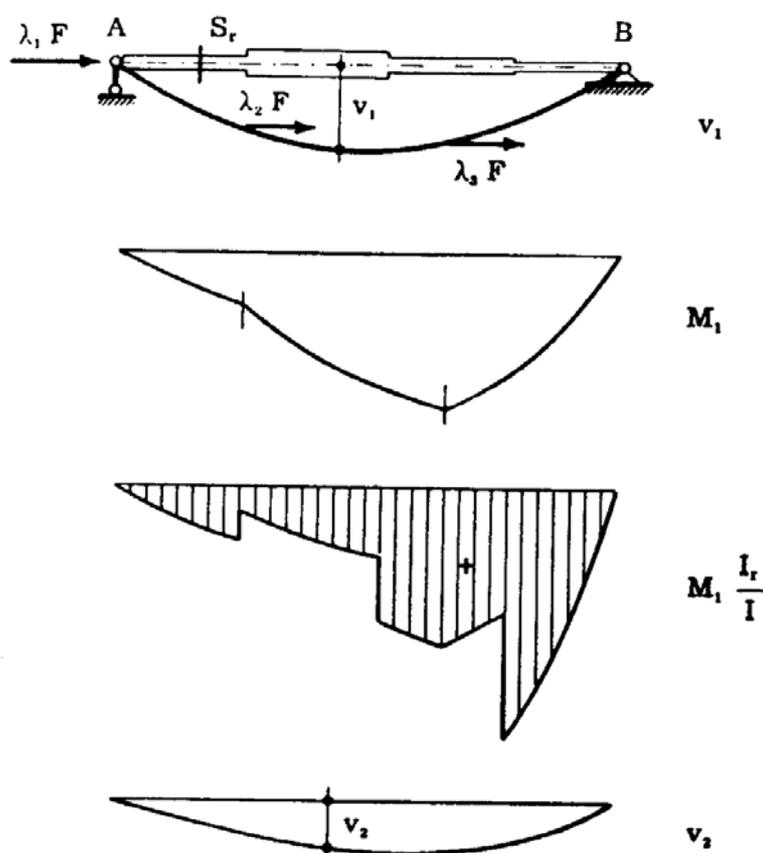


FIG. 2-19

ture $1/r_1 = M_1/EI$; scelta una qualsiasi sezione S_r di riferimento, della quale sia I_r il momento d'inerzia, si ha

$$\frac{1}{r_1} = \frac{M_1}{EI_r} \frac{I_r}{I}$$

dove I è il momento corrente. Dal diagramma $1/r_1$ si passa con doppia integrazione, o con un poligono funicolare, alla deformata $v_2(z)$ connessa con i momenti M_1 ; conviene operare su una trave di sezione costante con momento d'inerzia I_r , soggetta ai momenti $M_1 \frac{I_r}{I}$. Si noti che, quale che sia la sezione S_r , la forma del diagramma $M_1 \frac{I_r}{I}$ è la stessa; esso

(*) Poichè (§ 2-1) l'autofunzione di ordine n si annulla $n-1$ volte nell'intervallo $a < z < b$, e la F critica corrisponde all'autofunzione di ordine 1 (la successione degli autovalori è crescente) la deformata $v_1(z)$ deve non annullarsi in tutti i punti dell'intervallo stesso.

coincide con M_1 nelle zone dove la sezione è identica a quella di riferimento.

Se F è il carico critico, $v_1(z)$ la deformata variata corrispondente, $v_2(z)$ coincide con $v_1(z)$. Poichè non si verifica nessuna delle due condizioni suddette, si itera il procedimento partendo dalla deformata $v_2(z)$, calcolando i relativi momenti $M_2(z)$ e la nuova deformata $v_3(z)$ che ne consegue; tutto ciò con il precedente valore della F o con un qualsiasi altro valore F_2 di comodo.

Si procede in tal modo finchè l'ultima deformata $v_{i+1}(z)$ risulta affine alla precedente $v_i(z)$, e cioè fino a raggiungere l'indipendenza dall'ascissa z del rapporto v_{i+1}/v_i . Se ρ è questo rapporto

$$\rho = \frac{v_{i+1}}{v_i}$$

si ha il valore critico di F

$$F_c = \frac{F_1}{\rho}$$

Infatti, se si opera sulla deformata v_i con la forza F_1/ρ invece che con la F_1 , i momenti M_i si riducono nel rapporto ρ , e così pure la deformata v_{i+1} , che viene perciò a coincidere con la v_i .

Tutto quanto sopra è valido, sia per il procedimento di calcolo della deformata che per la relazione di proporzionalità in base alla quale si calcola F_c , se e solo se, sotto la F_c , il comportamento del materiale è elastico lineare.

Qualche osservazione supplementare è necessaria se la trave è iperstatica.

Si consideri per esempio la trave con incastro e cerniera; assegnata la deformata (fig. 2-20 a) è dato anche il punto C di flesso, e cioè una cerniera, che rende la struttura isostatica. Ciò fa divenire immediata la costruzione del diagramma del momento e di quello delle curvature; però la trave ausiliaria è labile (fig. 2-20 b), e questo impone che il diagramma

$M \frac{I_r}{I}$ soddisfi particolari condizioni di equilibrio. Nel caso in esame, il

momento del diagramma $M \frac{I_r}{I}$ rispetto al punto A deve essere nullo.

Perciò, prima di passare dalla v_1 alla v_2 , occorre soddisfare questa condizione, spostando opportunamente il punto di flesso della deformata v_1 ; in caso contrario la v_2 non sarà congruente.

Per spostare il punto di flesso basta (fig. 2-20 a) far ruotare la fondamentale AC intorno al punto A, senza preoccuparsi di variare la forma

della v_1 nei dintorni di C; l'errore che si commette è piccolo, e si corregge nei successivi tentativi.

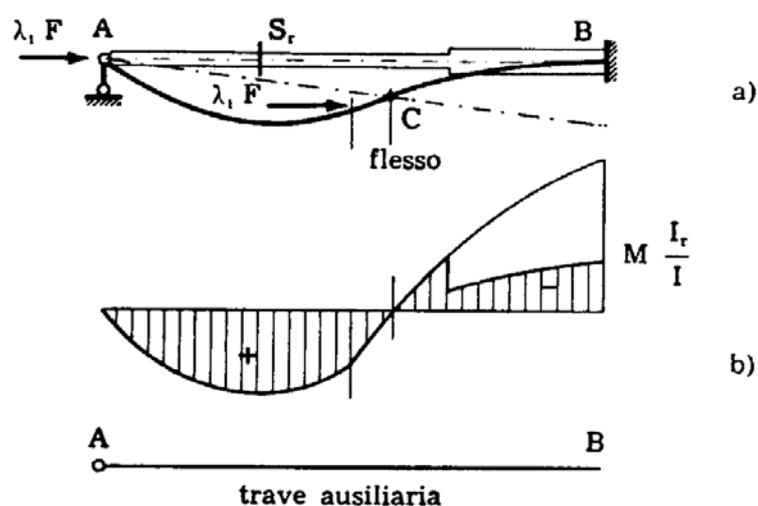


FIG. 2-20

Quanto detto per il passaggio da v_1 a v_2 vale per qualsiasi altro passaggio v_1 a v_{i+1} .

Se si è in presenza di un altro tipo di trave iperstatica, nulla cambia di quanto detto precedentemente. Nella trave a due incastri (fig. 2-21) i

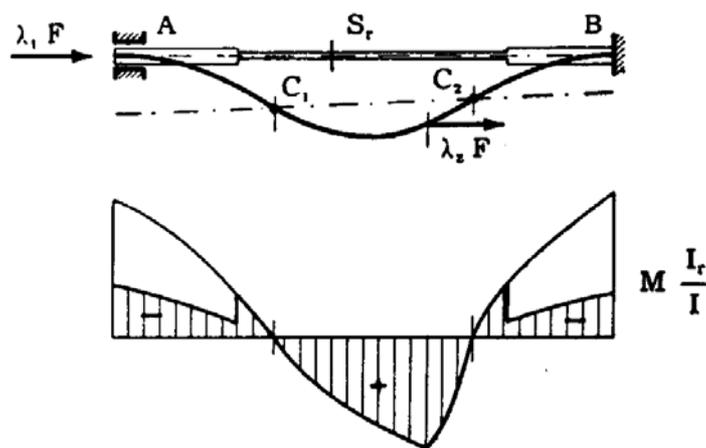


FIG. 2-21

flessi, e quindi le cerniere che rendono isostatica la struttura per il calcolo di M , sono due; condizione di equilibrio è che il diagramma $M \frac{I_r}{I}$ sia di area nulla e presenti momento nullo rispetto ad un punto, per esempio A.

Nella trave continua a due campate il flesso è unico (fig. 2-22); inoltre condizione necessaria è che sia in equilibrio la struttura labile della

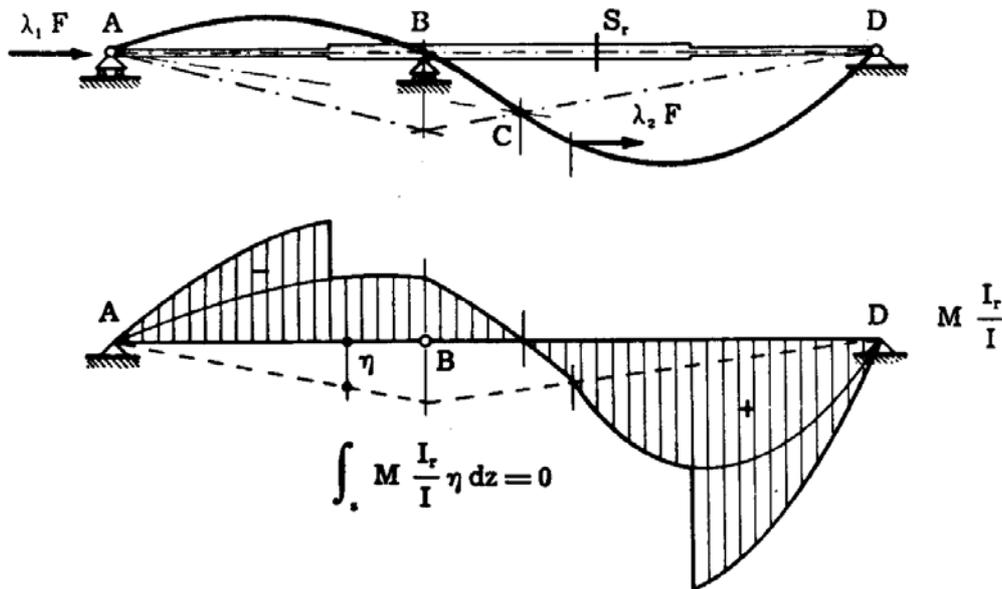


FIG. 2-22

fig. 2-22, e questo può essere controllato attraverso il procedimento delle catene cinematiche.

Nella fig. 2-23 è riportato il calcolo del carico critico secondo *Vianello* per una mensola di sezione variabile.

Esso (§ 1-13) è compreso nell'intervallo

$$\frac{\pi^2 EI_1}{4 \ell^2} < F_c < \frac{\pi^2 EI_4}{4 \ell^2}$$

e cioè

$$884 \text{ Kg} < F_c < 7580 \text{ Kg} .$$

Si parte da una deformata congruente arbitraria v_1 , senza preoccuparsi della scala effettiva S_{v_1} . Si fissa un I di riferimento, nel caso in esame I_4 , e si traccia il diagramma $v_1 \frac{I_4}{I_1}$; sia $\frac{b}{a}$ il rapporto tra le scale dei due diagrammi v_1 e $v_1 \frac{I_4}{I_1}$.

$I_1 = 1460 \text{ cm}^4$ $I_2 = 897 \text{ cm}^4$ $I_3 = 473 \text{ cm}^4$ $I_4 = 170 \text{ cm}^4$

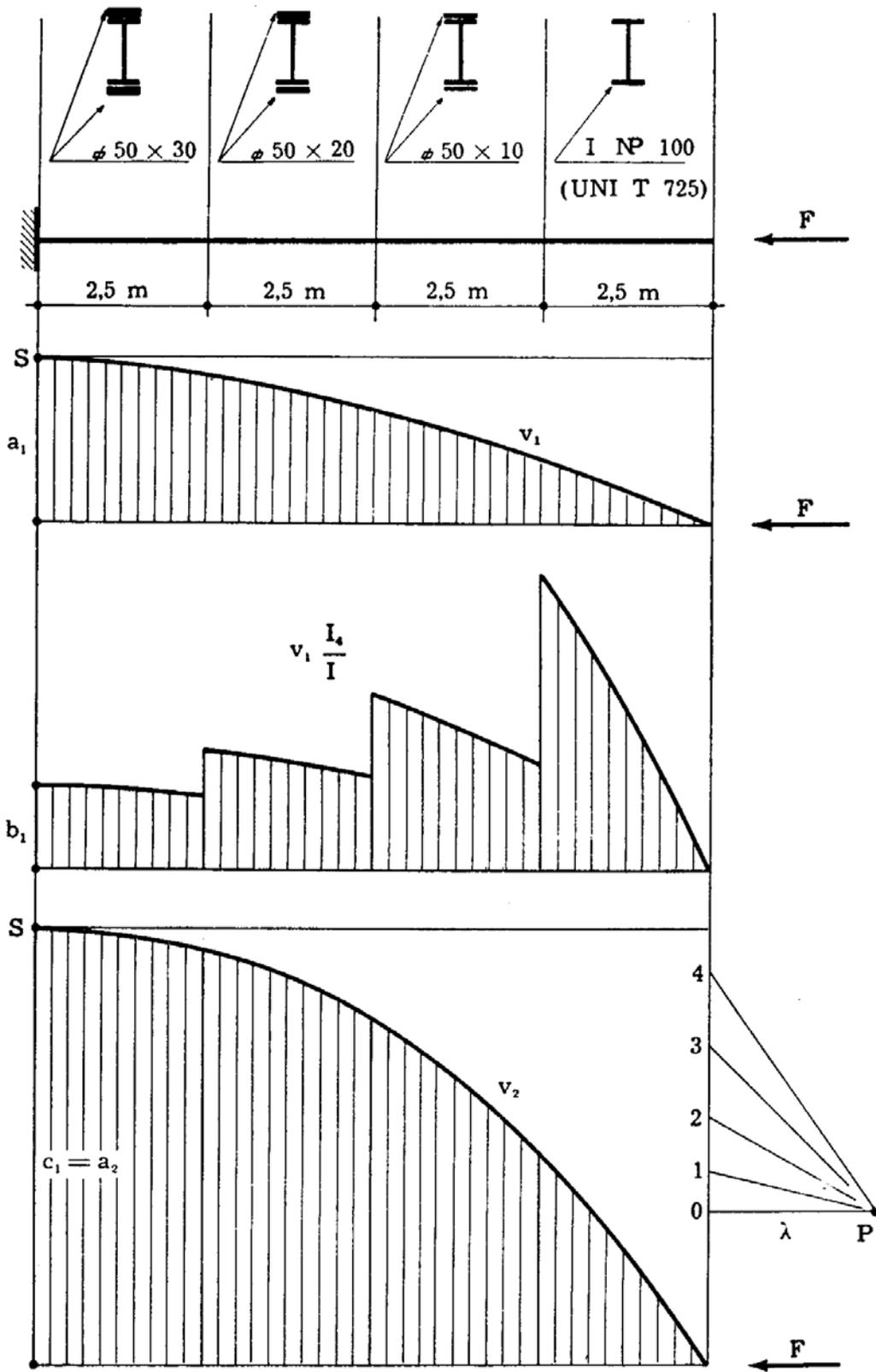
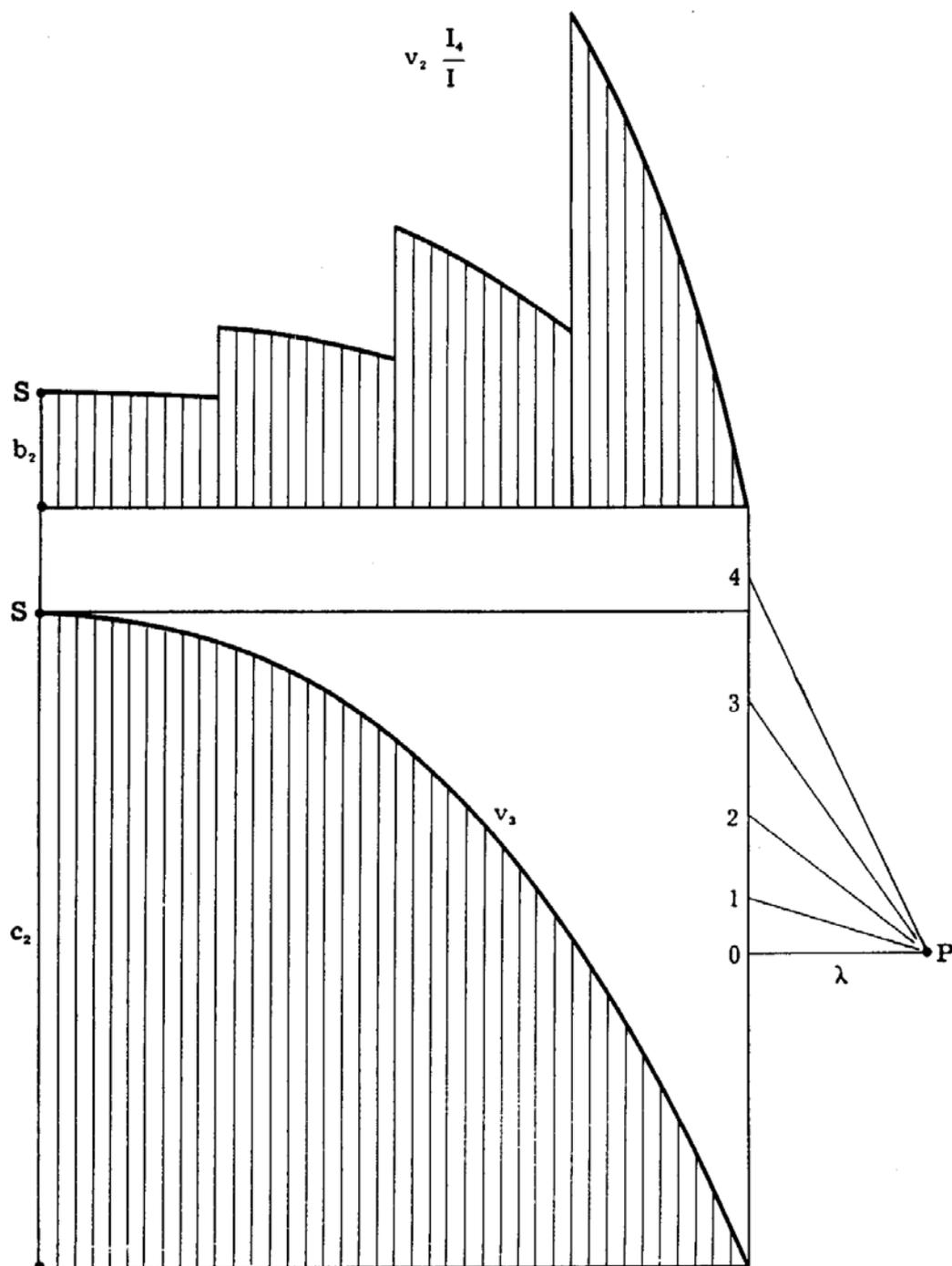


FIG. 2-23 a



$$\begin{aligned}
 S_i &= 125 \\
 \bar{\lambda} &= 2 \text{ cm} \\
 r &= 4 \text{ cm} \\
 \bar{b} &= 1,32 \text{ cm} \\
 \bar{c} &= 7,52 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

$$F_c = \frac{EI_o}{r \cdot \bar{\lambda} \cdot S_i^2 \frac{\bar{c}}{\bar{b}}} = 4300 \text{ Kg}$$

$$\sigma_{e \max} = 406 \text{ Kg/cm}^2 < \sigma_p$$

FIG. 2-23 b

Il diagramma $v_1 \frac{I_4}{I_1}$ è, nella scala

$$S_c = \frac{F}{EI_4} S_{v_1} \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \text{ cm}^{-2} ,$$

il diagramma delle curvature (*); \bar{a} e \bar{b} sono i valori letti sul disegno, nei due diagrammi v_1 e $v_1 \frac{I_4}{I_1}$, in corrispondenza di una stessa sezione S del tronco di riferimento I_4 .

Sia r il rapporto di riduzione delle aree curvature secondo cui si disegna il poligono di tali aree; e cioè il rapporto tra la misura in cm^2 delle aree del diagramma $v_1 \frac{I_4}{I_1}$ lette sul disegno, e la misura in cm dei segmenti che le rappresentano.

La scala in cui vanno letti tali segmenti è

$$S_a = \frac{r F}{EI_4} \frac{\bar{a}}{\bar{b}} S_t S_{v_1} \text{ cm}^{-1} .$$

Se λ è la base con cui si connettono le aree curvature, e $\bar{\lambda}$ la sua misura letta sul disegno, è

$$S_{v_2} = \bar{\lambda} S_t S_a$$

da cui

$$S_{v_2} = \frac{\bar{\lambda} r F}{EI_4} \frac{\bar{a}}{\bar{b}} S_t^2 S_{v_1} .$$

Se F è il carico critico F_c , esso deve essere tale da fornire $v_2 = v_1$; e cioè, se \bar{c} è l'ordinata di v_2 in S, $\bar{c} S_{v_2} = \bar{a} S_{v_1}$.

(*) Se esistono più forze assiali $\lambda_i F$, con sforzo assiale $n F$, è

$$S_c = \frac{n_4 F}{EI_4} S_{v_1} \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \text{ cm}^{-2} ,$$

ed il diagramma che in tale scala fornisce le curvature è

$$v_1 \frac{I_4}{I_1} \frac{n_1}{n_4} .$$

Si ha quindi

$$S_{v_1} = S_{v_2} \frac{\bar{c}}{\bar{a}} = \frac{\bar{\lambda} r F_c}{EI_4} \frac{\bar{a}}{\bar{b}} S_t^2 S_{v_1} \frac{\bar{c}}{\bar{a}}$$

da cui

$$F_c = \frac{EI_4}{\bar{\lambda} r \frac{\bar{c}}{\bar{b}} S_t^2}$$

Per avere un valore bene approssimato del carico critico è opportuno disegnare più deformate consecutive, e calcolare F_c con i dati relativi alla penultima ed all'ultima. Nel caso in esame si ha, confrontando v_2 con v_1 ,

$$F_c = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 1460}{2 \cdot 4 \cdot \frac{5,28}{1} (125)^2} = 4650 \text{ Kg},$$

e confrontando v_3 con v_2

$$F_c = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 1460}{2 \cdot 4 \cdot \frac{7,52}{1,32} (125)^2} = 4300 \text{ Kg}.$$

Si ha pure

$$\sigma_{c \max} = \frac{4300}{10,6} = 406 \text{ Kg/cm}^2$$

e quindi F_c è l'effettivo carico critico.

Nella fig. 2-24 si può seguire il calcolo del carico critico secondo *Vianello* per una trave continua simmetrica a tre campate; le luci sono 5-4-5 m; la sezione è costante, circolare, di diametro 8 cm; il materiale è acciaio. Calcolando i carichi critici per le travi appoggiate di m 5, si ha

$$F_c > \frac{\pi^2 EI}{5^2};$$

infatti rispetto alla trave reale quella con cerniera sui tre appoggi ha un carico critico $\pi^2 EI/5^2$ minore di F_c .

Si ha perciò

$$F_c > 16.600 \text{ Kg}.$$

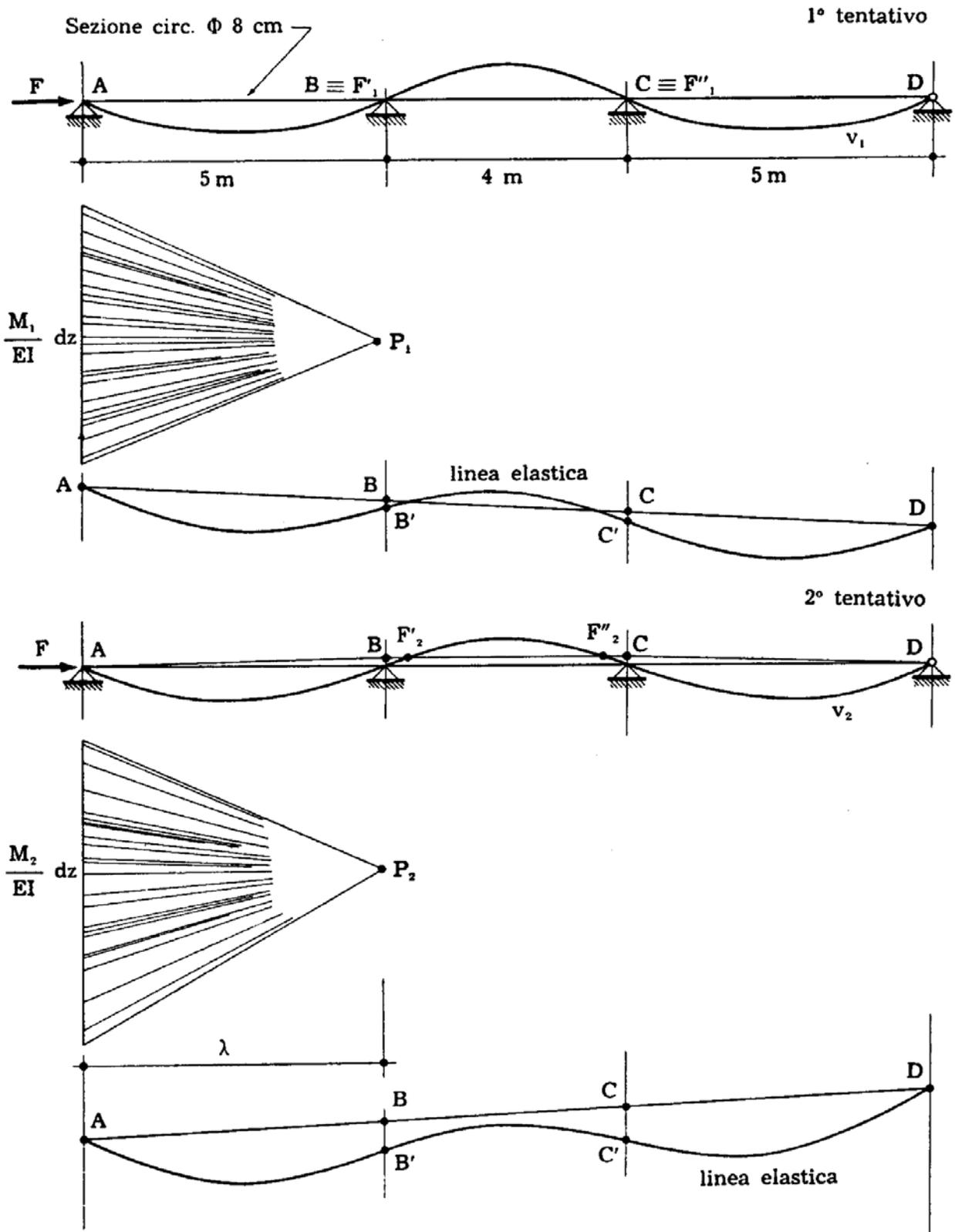
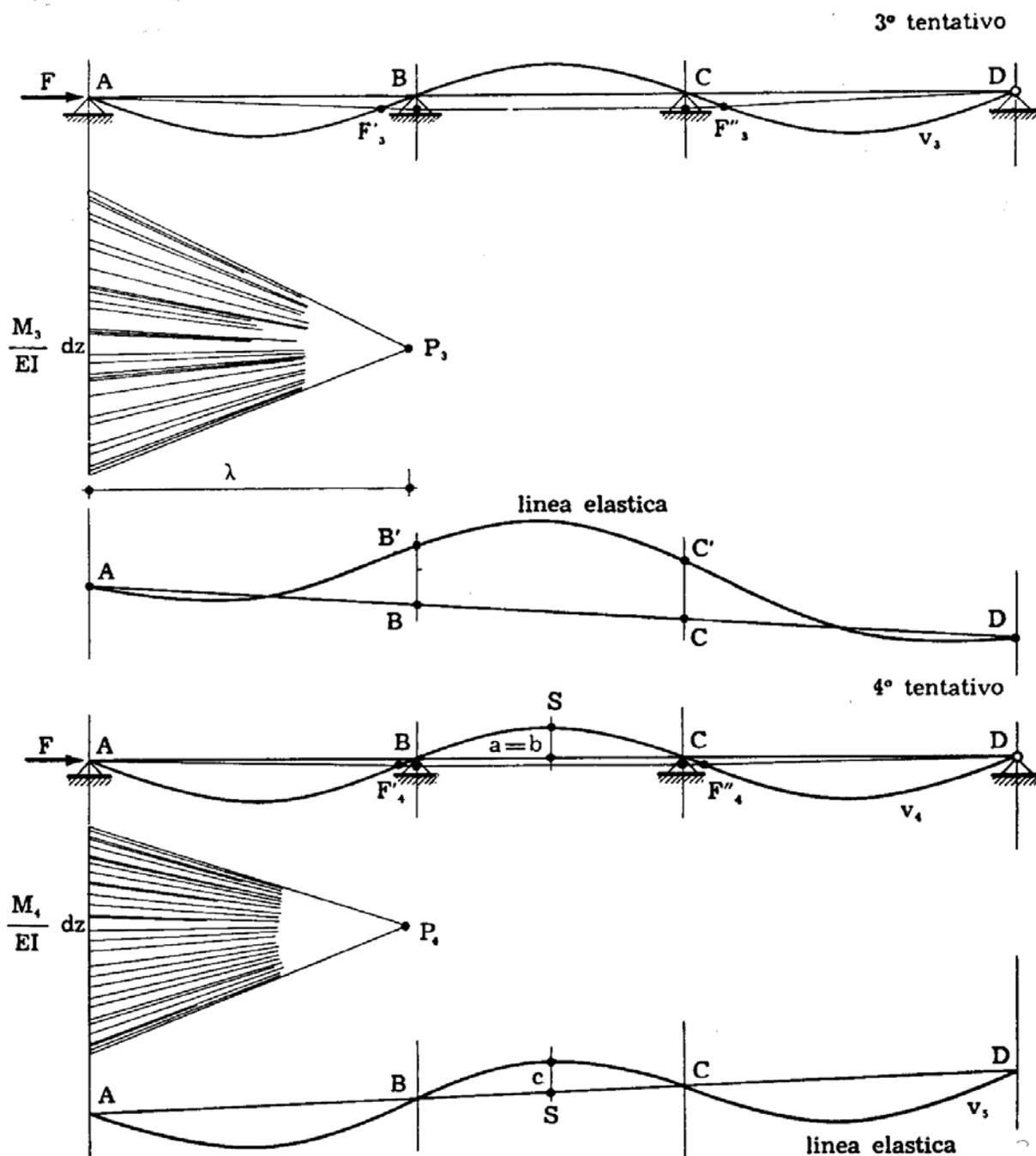


FIG. 2-24 a



$I = 200 \text{ cm}^4$
 $S_t = 125$
 $\bar{\lambda} = 3,84 \text{ cm}$
 $r = 0,4$
 $\bar{b} = 0,360 \text{ cm}$
 $\bar{c} = 0,334 \text{ cm}$

$$F_c = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 200}{0,4 \cdot 3,84 \cdot (125)^2 \frac{0,334}{0,360}} = 18.900 \text{ Kg}$$

$$\sigma_c = \frac{18.900}{50,24} = 376 \text{ Kg/cm}^2 < \sigma_p$$

FIG. 2-24 b

Partendo nel primo tentativo da una deformata congruente con flessi sugli appoggi intermedi, si ottiene una deformata che passa al disotto degli appoggi. Si spostano i flessi nella trave centrale, e l'errore si esalta. Spostando i flessi nelle travi laterali, l'errore cambia di segno. Diminuendo la distanza dei flessi dagli appoggi (flessi sempre presi nelle travi laterali) si annullano le incongruenze sugli appoggi. Il diagramma curvature dovuto agli spostamenti v_4 fornisce $v_5 = v_4$; la scala è

$$S_c = \frac{F}{EI} S_{v_4}$$

poichè \bar{a} coincide con \bar{b} , non essendosi riportati i v_4 in altro diagramma di scala ridotta. Il diagramma v_4 va letto, per ottenere le curvature, a partire dalle fondamentali congiungenti i punti di flesso. Si ha perciò ancora

$$F_c = \frac{EI}{\bar{\lambda} r \frac{c}{b} S_t^2} = 18.900 \text{ Kg} .$$

6. La ricerca del carico critico attraverso la teoria delle equazioni integrali.

La rotazione $\varphi(z_s)$ in una sezione S di una trave soggetta a coppie

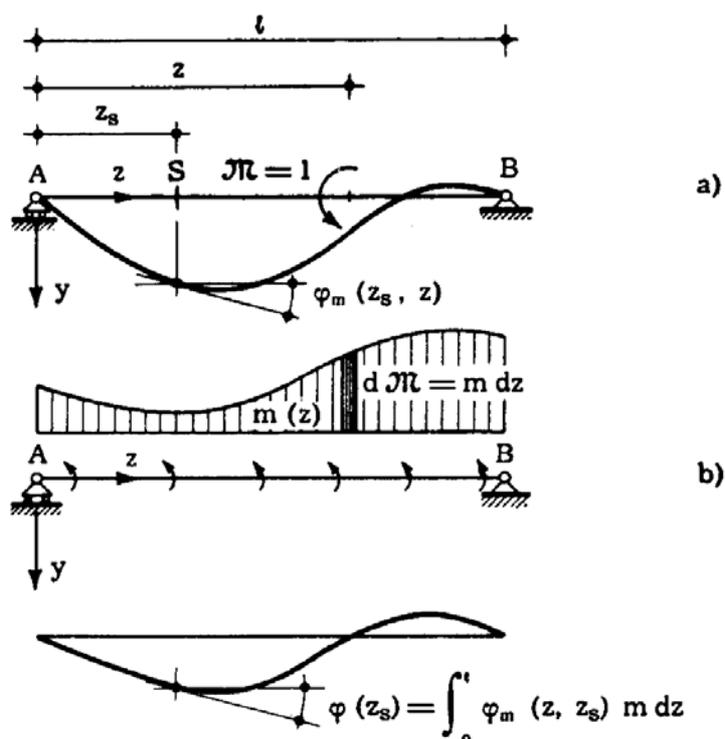


FIG. 2-25

distribuite $m(z)$ (fig. 2-25 b) può ottenersi attraverso la *funzione di Green*

$\varphi_m(z_s, z)$ rappresentante, come già noto, la rotazione in z_s per effetto della coppia unitaria agente alla generica ascissa z (fig. 2-25 a):

$$\varphi(z_s) = \int_0^l \varphi_m(z_s, z) m(z) dz . \quad (i')$$

In una trave caricata assialmente, con riferimento ad una deformata variata ed al relativo carico assiale F , la variazione dM di momento flettente è fornita (§ 1-1) da

$$dM = - N v' dz = F n(z) v' dz = - F n(z) \varphi(z) dz$$

e quindi, se la deformazione si fa dipendere dal solo effetto flettente, la deformata è identica a quella di una trave soggetta a coppie distribuite $m(z)$ fornite dall'eguaglianza dei dM ($dM = m dz$, $dM = - F n dz$)

$$- F n(z) \varphi(z) dz = - m dz . \quad (l')$$

E' perciò

$$m(z) = F n(z) \varphi(z)$$

e quindi

$$\varphi(z_s) = F \int_0^l n(z) \varphi_m(z_s, z) \varphi(z) dz . \quad (34)$$

La (2-34) è un'equazione integrale omogenea di Fredholm di seconda specie, nell'incognita funzione $\varphi(z)$; per il teorema di Maxwell si ha

$$\varphi_m(z_s, z) = \varphi_m(z, z_s) . \quad (35)$$

Si dice *equazione integrale* un'equazione dove la funzione incognita $\varphi(z)$ compare anche sotto segno di integrale. Se l'integrale ha per un estremo la variabile indipendente, si tratta di equazioni integrali di *Volterra*. Se invece i due estremi sono fissi, l'equazione si dice di *Fredholm*; essa è di *prima specie* se del tipo

$$F \int_0^l K(z_s, z) \varphi(z) dz = f(z_s) \quad (36)$$

e di *seconda specie* (molto più facilmente risolvibile) se del tipo

$$\varphi(z_s) - F \int_0^l K(z_s, z) \varphi(z) dz = f(z_s) . \quad (37)$$

Se $f(z_s) = 0$, le equazioni sono *omogenee*. Le condizioni ai limiti sono implicite nella funzione $K(z, z_s)$, che si chiama *nucleo* dell'equazione.

Se il nucleo $K(z_s, z)$ può porsi nella forma

$$K(z_s, z) = n(z) \varphi_m(z_s, z) \quad (38)$$

con

$$\varphi_m(z_s, z) = \varphi_m(z, z_s) \quad (39)$$

(in questo caso anche il nucleo $K(z_s, z)$ è simmetrizzabile) e se si verifica, per qualunque funzione $g(z)$ non nulla

$$\int_0^a \int_0^a \varphi_m(z_s, z) g(z_s) g(z) dz_s dz > 0 \quad (40)$$

(*nucleo definitivo positivo*) si ha che

a) Esiste un insieme di infiniti valori $F_1 F_2 F_3 \dots$ di F , reali, positivi, e ordinabili in serie crescente (*autovalori*) per cui l'equazione di Fredholm omogenea di seconda specie ammette soluzioni $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \dots$ non nulle (*autofunzioni*). Queste sono ovviamente definite a meno di una costante ciascuna.

b) Le autofunzioni sono tra loro *ortogonali*, e cioè vale la proprietà, se φ_h e φ_k sono due autofunzioni *distinte*,

$$\int_0^a n(z) \varphi_h(z) \varphi_k(z) dz = 0. \quad (41)$$

c) Se una funzione qualsiasi $f(z_s)$ è esprimibile nella forma

$$f(z_s) = \int_0^a \varphi_m(z_s, z) g(z) dz, \quad (42)$$

ove $g(z)$ è una funzione arbitraria a quadrato integrabile (*condizione di Hilbert*), essa è pure sviluppabile in serie di autofunzioni, e si ha

$$f(z_s) = \sum_1^{\infty} c_h \varphi_h(z_s). \quad (43)$$

Risulta dalle (2-43), e per la proprietà di ortogonalità (2-41),

$$\int_0^a n(z) f(z) \varphi_h(z) dz = c_h \int_0^a n(z) \varphi_h^2(z) dz$$

da cui

$$c_h = \frac{\int_0^l n(z) f(z) \varphi_h(z) dz}{\int_0^l n(z) \varphi_h^2(z) dz} . \quad (44)$$

Le autofunzioni sono definite a meno di una costante; possono quindi *normalizzarsi*, e cioè far sì che risulti, per ciascuna di esse,

$$\int_0^l n(z) \bar{\varphi}_h^2(z) dz = 1 . \quad (45)$$

In tal caso è

$$c_h = \int_0^l n(z) f(z) \bar{\varphi}_h(z) dz . \quad (46)$$

d) La funzione di Green $\varphi_m(z_s, z)$ soddisfa, per la (i') la (2-42); può quindi porsi

$$\varphi_m(z_s, z) = \sum_1^{\infty} b_h \varphi_h(z) ;$$

per autofunzioni normalizzate $\bar{\varphi}_h$ vale la (2-46), e quindi

$$b_h = \int_0^l n(z) \varphi_m(z_s, z) \bar{\varphi}_h(z) dz$$

e per la (2-34),

$$b_h = \frac{\bar{\varphi}_h(z_s)}{F_h} .$$

Perciò può scriversi

$$\varphi_m(z_s, z) = \sum_1^{\infty} \frac{\bar{\varphi}_h(z) \bar{\varphi}_h(z_s)}{F_h} , \quad (47)$$

da cui si trae, per la (2-45),

$$\int_0^l n(z) \bar{\varphi}_m(z, z) dz = \sum_1^{\infty} \frac{1}{F_h} . \quad (48)$$

Nel caso in esame la (2-40) è verificata; infatti l'energia di deformazione per una arbitraria distribuzione $g(z)$ di coppie è

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \int_0^l g(z) \varphi(z) dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l g(z) \int_0^l g(z_s) \varphi_m(z, z_s) dz_s dz, \end{aligned}$$

ed essa è sempre > 0 .

La condizione (c) di *Hilbert* (2-42) è pur essa soddisfatta se la $f(z_s)$ è la funzione $\varphi(z_s)$ derivante da un insieme $g(z_s)$ di coppie applicate arbitrarie. Infatti in tal caso la rotazione $\varphi(z_s)$ è fornita proprio dalla (2-42); deve solo verificarsi che

$$\int_0^l g^2 dz$$

sia finito. Quindi perchè una $f(z)$ possa essere sviluppata in serie di autofunzioni della (2-34) basta che essa soddisfi le condizioni ai limiti della $\varphi_m(z, z_s)$, e cioè le condizioni ai limiti della trave cui la (2-34) si riferisce.

Un metodo approssimato (*Krall*) per la ricerca degli autovalori è il seguente. Si ponga l'incognita autofunzione sotto la forma

$$\varphi(z) = \sum_1^n A_i u_i(z) \quad (49)$$

dove le u_i sono funzioni note, soddisfacenti le condizioni ai limiti, per esempio funzioni trigonometriche. Sostituendo le (2-49) nella (2-34) si ha

$$\sum_1^n A_i u_i(z_s) = F \sum_1^n A_i \int_0^l n(z) \varphi_m(z_s, z_s) u_i(z) dz. \quad (m')$$

Imponendo che in $z_1 z_2 \dots z_n$ punti la (m') sia soddisfatta, si ottiene il sistema di equazioni algebriche lineari omogenee nelle incognite A_i :

$$\sum_1^n A_i u_i(z_j) = F \sum_1^n A_i \int_0^l n(z) \varphi_m(z_j, z) u_i(z) dz \quad (j = 1, 2 \dots n). \quad (n')$$

Si osservi che il generico coefficiente del sistema (n')

$$\int_0^l n(z) \varphi_m(z_j, z) u_i(z) dz$$

è la rotazione in z_j provocata dalle coppie $m(z) = n(z) u_1(z)$ sulla trave di cui $\varphi_m(z_s, z)$ è la funzione di Green.

La condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema (n') presenti soluzione non banale è

$$\Delta = 0 ;$$

questa è un'equazione algebrica di grado n in F che fornisce n autovalori; il più piccolo si assume come carico critico F_c . L'analogia con il procedimento del *Ritz*, usato nel metodo energetico, è evidente.

Dalla (2-48) si trae, per il primo autovalore F_c ,

$$\frac{1}{F_c} + \sum_2^{\infty} \frac{1}{F_h} = \int_0^l n(z) \bar{\varphi}_m(z, z) dz$$

da cui

$$F_c = \frac{1}{\int_0^l n(z) \bar{\varphi}_m(z, z) dz - \sum_2^{\infty} \frac{1}{F_h}} ; \quad (o')$$

poichè gli autovalori sono positivi, dalla (o') si trae

$$F_c > \frac{1}{\int_0^l n(z) \bar{\varphi}_m(z, z) dz} . \quad (50)$$

La (2-50) è molto importante (*Krall*), perchè fornisce una *limitazione inferiore* del carico critico, mentre il procedimento energetico, per quanto già detto, porta sempre a valori superiori al vero.

Se poi $n^*(z)$ e $\varphi_m^*(z_s, z)$ sono due funzioni tali da verificare ovunque

$$n^*(z) \leq n(z)$$

$$\varphi_m^*(z_s, z) \leq \varphi_m(z_s, z)$$

e tali da consentire un rapido calcolo del primo autovalore F_1 , si ha l'altra limitazione inferiore (*Krall*) più aderente al vero della (1-50),

$$F_c \geq \frac{1}{\int_0^l n(z) \bar{\varphi}_m(z, z) dz - \left(\int_0^l n^*(z) \varphi_m^*(z, z) dz - \frac{1}{F_1^*} \right)} . \quad (51)$$

La soluzione $\varphi(z)$ dell'equazione non omogenea (2-37) è sviluppabile in serie di autofunzioni dell'omogenea associata. Operando sulle autofunzioni normalizzate $\bar{\varphi}_h(z)$, si ponga

$$\varphi(z) = \sum_1^{\infty} a_h \bar{\varphi}_h(z) . \quad (52)$$

La (2-37) si scrive allora, per la (2-47)

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} a_h \bar{\varphi}_h(z_s) &= F \sum_1^{\infty} a_h \int_0^l n(z) \varphi_m(z_s, z) \bar{\varphi}_h(z) dz + f(z_s) = \\ &= F \sum_1^{\infty} a_h \int_0^l n(z) \sum_1^{\infty} \frac{\bar{\varphi}_k(z) \bar{\varphi}_k(z_s)}{F_k} \bar{\varphi}_h(z) dz + f(z_s) = \\ &= F \sum_1^{\infty} a_h \frac{\bar{\varphi}_h(z_s)}{F_h} + f(z_s) . \end{aligned} \quad (p')$$

Moltiplicando ambedue i due membri della (p') per $n(z_s) \bar{\varphi}_h(z_s) dz_s$, ed integrando tra 0 ed l , si ha

$$a_h = F \frac{a_h}{F_h} + \int_0^l f(z_s) n(z_s) \bar{\varphi}_h(z_s) dz_s$$

e quindi

$$a_h = \frac{f_h}{1 - \frac{F}{F_h}} \quad (53)$$

dove

$$f_h = \int_0^l f(z_s) n(z_s) \bar{\varphi}_h(z_s) dz_s . \quad (54)$$

Dalla (2-53) si osserva che la soluzione è finita se e solo se F non coincide con alcun autovalore; per $F = F_h$ la soluzione dell'equazione non omogenea non è finita, a meno che f non risulti ortogonale alla φ_h corrispondente ad F_h .

Fisicamente ciò trova immediata spiegazione. Se una trave è caricata da una distribuzione di forze assiali $F n(z)$ e da forze trasversali tali da fornire, in assenza di forze assiali, rotazioni $f(z)$, l'equazione che regola il comportamento della trave stessa è la (2-37).

Se F è diverso da qualsiasi autovalore, la soluzione $\varphi(z)$ è finita; se invece F è un autovalore F_h , e cioè un F_a , la $\varphi(z)$ è in genere infinitamente grande, perchè lo è il termine a_h , salvo il caso in cui $f(z)$ è ortogonale a $\varphi_h(z)$. In tal caso la soluzione $\varphi(z)$ è indeterminata, perchè tutti gli altri termini dello sviluppo (2-53) sono finiti e determinati, mentre il termine a_h è indeterminato.

7. Le configurazioni di equilibrio al di là del carico critico.

Si prenda in esame la trave a mensola della fig. 2-26, soggetta all'estremo libero A ad una forza F assiale di compressione, di valore più alto del carico critico F_c .

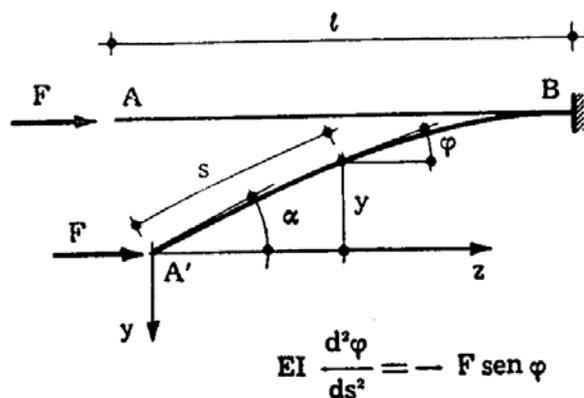


FIG. 2-26

Si rimuova l'ipotesi di piccoli spostamenti, sia pure limitata all'espressione $EI v'' = -M$ che ha consentito di trarre la (2-1); dall'espressione esatta della curvatura

$$\frac{1}{r} = - \frac{d\varphi}{ds} \quad (q')$$

e dalle altre due

$$\frac{1}{r} = - \frac{M}{EI}$$

$$M = F y$$

si trae

$$EI \frac{d\varphi}{ds} = F y \quad (r')$$

Il segno è giustificato perchè ad y negativo corrisponde una diminuzione di φ all'aumentare di s , e quindi una $d\varphi/ds$ negativa.

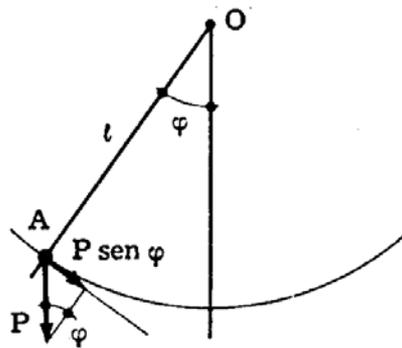
Poichè risulta

$$\frac{dy}{ds} = - \operatorname{sen} \varphi$$

dalla (r') si trae

$$EI \frac{d^2\varphi}{ds^2} = - F \operatorname{sen} \varphi . \quad (55)$$

Si osservi che la (2-55) è valida in rigore, pur avendo utilizzato l'espressione del *Navier* che lega la curvatura al momento flettente, valida solo nell'ipotesi di piccoli spostamenti. Infatti per il tronco di lunghezza elementare ds la suddetta ipotesi è ancora verificata, pure in fase di grandi spostamenti, poichè le deformazioni sono piccole, in particolare contenute in fase elastica. Come si è già detto nel Cap. I della Teoria dell'Elasticità (§ 1-2, pag. 7), le relazioni per così dire locali, e cioè inerenti al tronco elementare, sono ancora valide, non così quelle globali, che legano caratteristiche della sollecitazione e della deformazione alla terna $u v w$ di spostamenti presa con riferimento ad una terna di assi fissi. E' utile considerare che, dei due gruppi in cui si possono scomporre gli spostamenti con riferimento ad un intorno elementare, a traslazione avvenuta, la rotazione rigida non è piccola, mentre lo è la deformazione pura.



$$m \frac{d^2s}{dt^2} = - P \operatorname{sen} \varphi$$

$$m l^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = - Pl \operatorname{sen} \varphi$$

FIG. 2-27

Il *Kirchhoff* ha rilevato (1859) l'analogia tra la (2-55) e l'equazione del moto del pendolo (fig. 2-27). Per risolvere la (2-55) si moltiplicano i due

membri per $d\varphi$ e si integra:

$$\int \frac{d^2\varphi}{ds^2} \frac{d\varphi}{ds} ds = -k^2 \int \operatorname{sen} \varphi d\varphi$$

dove al solito si è posto $k^2 = F/EI$.

La precedente relazione si può anche scrivere

$$\frac{1}{2} \int \frac{d}{ds} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 ds = -k^2 \int \operatorname{sen} \varphi d\varphi$$

da cui

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = k^2 \cos \varphi + C.$$

Per $z=0$ è $d\varphi/ds=0$, poichè $M=0$; se si chiama α il valore di φ in A' , si ottiene

$$\left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 2k^2 (\cos \varphi - \cos \alpha) \quad (s')$$

da cui

$$\frac{d\varphi}{ds} = \pm k \sqrt{2} \sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}.$$

Con riferimento alla deformata del tipo indicato nella fig. 2-26, priva cioè di punti di flesso, $d\varphi/ds$ è sempre dello stesso segno, in particolare negativa; può quindi scriversi

$$ds = - \frac{d\varphi}{k \sqrt{2} \sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}}$$

e, trascurando l'accorciamento da sforzo assiale,

$$l = \int_{\alpha}^{\circ} ds = \int_{\circ}^{\alpha} \frac{d\varphi}{k \sqrt{2} \sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}}.$$

Poichè è

$$\cos \varphi = \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2}$$

si può scrivere

$$l = \frac{1}{2k} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2}}} \quad (t')$$

Si faccia la posizione

$$p = \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$$

$$\operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} = p \operatorname{sen} \vartheta = \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \vartheta ;$$

se φ varia da 0 ad α , $\operatorname{sen} \vartheta$ varia da 0 ad 1, e ϑ quindi da 0 a $\pi/2$. Così pure si ha

$$d\varphi = \frac{2p \cos \vartheta d\vartheta}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{2p \cos \vartheta d\vartheta}{\sqrt{1 - p^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}},$$

e ancora

$$\sqrt{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2}} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \vartheta} = \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \vartheta = p \cos \vartheta \quad (u')$$

La (t') si scrive perciò

$$l = \frac{1}{k} \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - p^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}} = \frac{1}{k} K(p) \quad (56)$$

L'espressione $K(p)$ è un *integrale ellittico completo di prima specie*, ed è tabellato, in funzione di p , in svariati testi; è così possibile, dato un valore di F , calcolare k , e quindi $K(p)$, p ed α . Si osserva subito che, per piccoli spostamenti, $p^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta$ può essere trascurato nei confronti dell'unità, e la (2-56) porge

$$l = \frac{1}{k} \int_0^{\pi/2} d\vartheta = \frac{\pi}{2k}$$

da cui si trae l'espressione del carico critico.

Dalla relazione

$$dy = - \operatorname{sen} \varphi \, ds = \frac{\operatorname{sen} \varphi \, d\varphi}{k \sqrt{2} \sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}}$$

si trae l'espressione dello spostamento v_A di A lungo y

$$\begin{aligned} v_A &= - \int_0^\alpha \frac{dy}{ds} \, ds = - \int_\alpha^0 \frac{dy}{d\varphi} \, d\varphi = \\ &= \frac{1}{2k} \int_0^\alpha \frac{\operatorname{sen} \varphi \, d\varphi}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2}}} \end{aligned} \quad (v')$$

Dalla

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{1 - p^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}$$

e

$$\operatorname{sen} \varphi = 2 \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$$

si trae

$$\operatorname{sen} \varphi = 2 p \operatorname{sen} \vartheta \sqrt{1 - p^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta} ;$$

la (v') si scrive perciò, per la (u'),

$$v_A = \frac{2p}{k} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta = \frac{2p}{k} \quad (57)$$

Da un valore di α , e quindi di p , può perciò risalirsi attraverso la (2-56) a k , e attraverso la (2-57) a v_A .

In maniera analoga si trova la componente w_A dello spostamento di A secondo z:

$$w_A = \frac{2}{k} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - p^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta} \, d\vartheta = \frac{2}{k} E(p) , \quad (58)$$

dove $E(p)$ è un *integrale ellittico completo di seconda specie*, anch'esso tabellato.

TABELLA 2-2

| α | 0° | 20° | 40° | 60° | 80° | 100° | 120° | 140° | 160° | 176° |
|---------------------|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| F/F_c | 1 | 1,015 | 1,063 | 1,152 | 1,293 | 1,518 | 1,884 | 2,541 | 4,029 | 9,116 |
| $1 - \frac{w_A}{l}$ | 1 | 0,970 | 0,881 | 0,741 | 0,560 | 0,349 | 0,123 | -0,107 | -0,340 | -0,577 |
| $\frac{v_A}{l}$ | 0 | 0,220 | 0,422 | 0,593 | 0,719 | 0,792 | 0,803 | 0,750 | 0,625 | 0,421 |

Si osservi che w_A è sempre positivo, mentre v_A è positivo con la deformata della fig. 2-26, negativo con la deformata opposta.

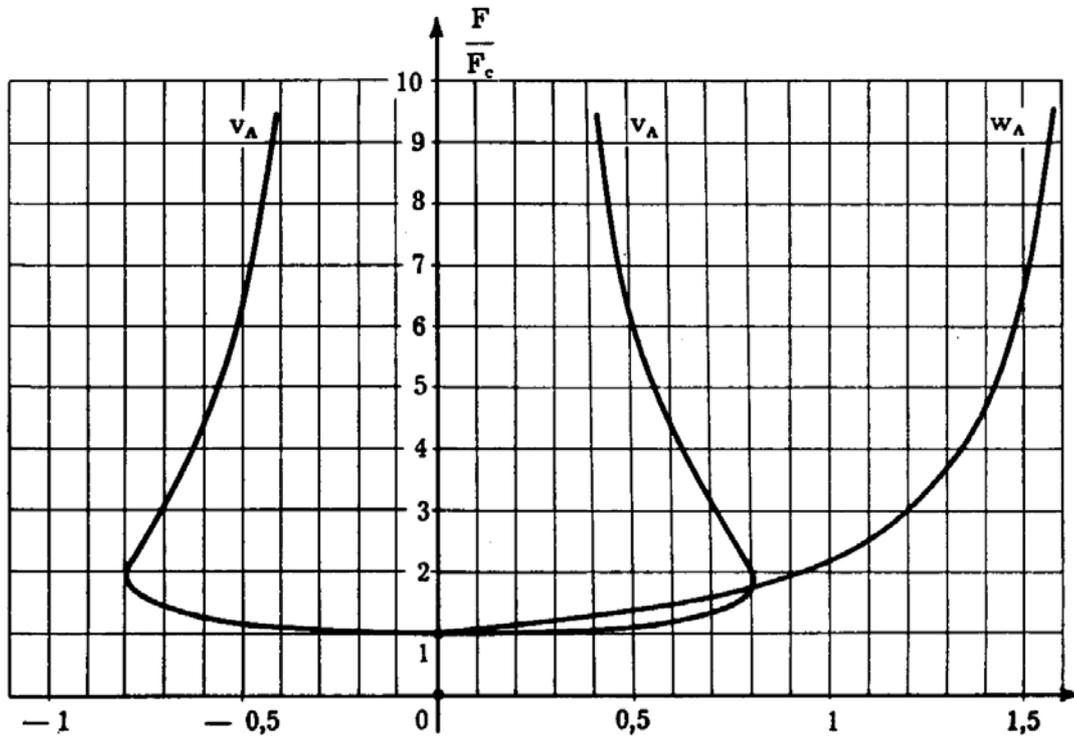


FIG. 2-28

Nella tabella 2-2 sono riportati i valori di F/F_c , $1 - w_A/l$ e v_A/l in funzione di α .

Nella fig. 2-28 sono riportati in grafico i valori della tabella e nella

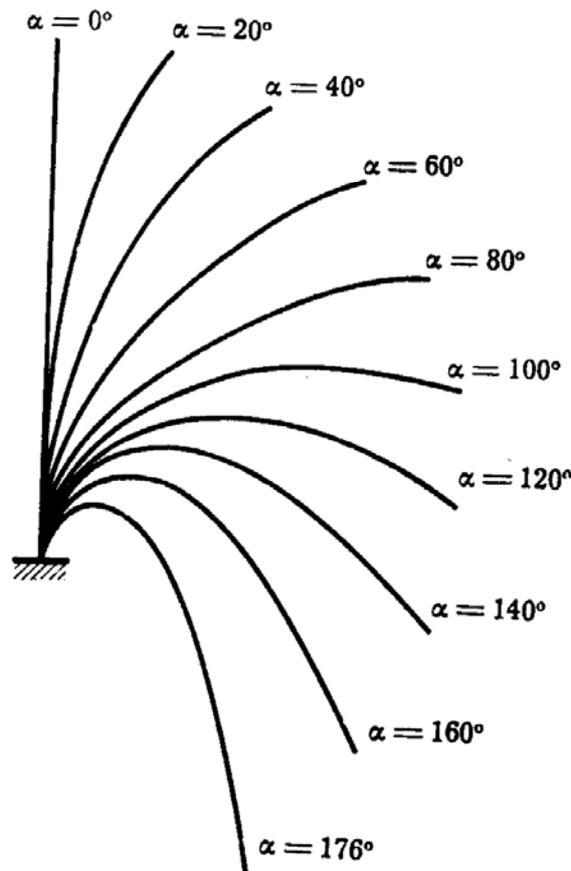


FIG. 2-29

fig. 2-29 le deformate per i successivi valori di α , limitate a quelle di un solo segno.

8. Il caso del carico eccentrico.

Si consideri la stessa trave delle figg. 2-7 e 2-26, in cui però la forza F è applicata con una eccentricità e , piccola in rapporto alla luce l . Si risolva innanzitutto il problema con equazione linearizzata, e cioè tenendo sì conto delle variazioni delle caratteristiche della sollecitazione interna per effetto degli spostamenti, ma utilizzando i legami tra spostamenti e caratteristiche della deformazione (in particolare curvatura) tratti nell'ipotesi di piccoli spostamenti.

In tal caso si ha (fig. 2-30)

$$\begin{aligned} M &= -F(v_A + e - v) \\ EI v'' &= -M = Fv - F(v_A + e) \end{aligned}$$

da cui, con la solita posizione $k^2 = F/EI$,

$$v'' + k^2 v = k^2 (v_A + e) \quad (z')$$

L'integrale dell'omogenea associata alla (z') è

$$v = A \operatorname{sen} kz + B \cos kz$$

mentre un integrale particolare della completa è

$$v = v_A + e .$$

Quindi l'integrale generale della completa è

$$v = A \operatorname{sen} kz + B \cos kz + v_A + e . \quad (a'')$$

Le costanti da determinare sono tre: A, B, e v_A . Le condizioni ai li-

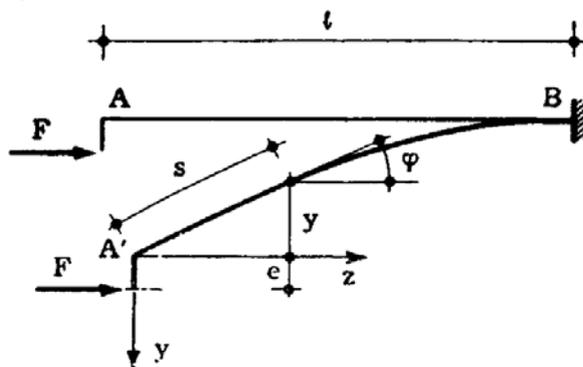


FIG. 2-30

miti sono quattro:

$$\begin{aligned} v(0) &= B + v_A + e = v_A \\ v''(0) &= -B k^2 = \frac{F e}{EI} \\ v(l) &= A \operatorname{sen} kl + B \cos kl + v_A + e = 0 \\ v'(l) &= A k \cos kl - B k \operatorname{sen} kl = 0 \end{aligned} \quad (b'')$$

Il numero delle (b'') è superiore di una unità a quello delle costanti incognite; ma la posizione

$$B = -e \quad (c'')$$

soddisfa le prime due delle (b''), che perciò si riducono a due equazioni nelle sole incognite A e v_A :

$$A \operatorname{sen} kl + v_A = e (\cos kl - 1)$$

$$A \cos kl = -e \operatorname{sen} kl$$

da cui si trae

$$A = -e \operatorname{tg} kl \tag{d''}$$

$$v_A = -e (\operatorname{sen} kl \operatorname{tg} kl + \cos kl - 1) .$$

Per le (c'') e (d''), la (a'') si scrive

$$v = e (\operatorname{tg} kl \operatorname{sen} kl + \cos kl - \operatorname{tg} kl \operatorname{sen} kz - \cos kz) . \tag{e''}$$

Si verificano le seguenti relazioni

$$\frac{dv_A}{dF} = \frac{dv_A}{dk} \frac{dk}{dF} = \frac{dv_A}{dk} \frac{1}{2EI k}$$

$$\frac{dv_A}{dk} = e l [\operatorname{sen} kl (1 + \operatorname{tg}^2 kl) + \operatorname{tg} kl \cos kl - \operatorname{sen} kl] . \tag{f''}$$

Per kl molto piccolo, e quindi per piccoli valori di F , è

$$\frac{dv_A}{dk} = e l kl$$

e quindi

$$\frac{dv_A}{dF} = \frac{e l^2}{2EI} . \tag{g''}$$

La (g'') coincide con il valore di dv_A/dF che si avrebbe trascurando le variazioni del momento flettente dovute agli spostamenti; in tal caso infatti la mensola è soggetta al momento costante $M = Fe$, e si ha

$$v_A = \frac{Fe l^2}{2EI} .$$

La curva $F(v_A)$ parte perciò da $F=0$ con una inclinazione pari a

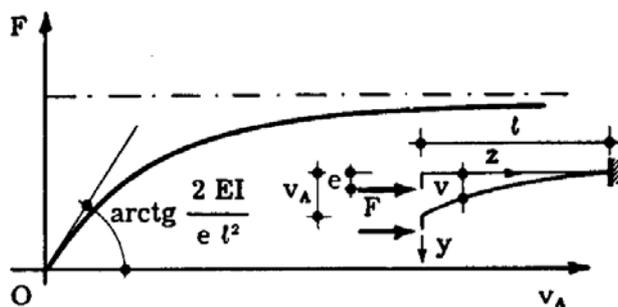


FIG. 2-31

$2EI/e l^2$ (fig. 2-31).

Per

$$\operatorname{tg} kl = \infty$$

e cioè

$$kl = (2n - 1) \frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

cui corrispondono i valori di F

$$F_a = \frac{(2n - 1)^2 \pi^2 EI}{4 l^2},$$

dalla seconda delle (d'') risulta

$$v_A = \infty$$

e dalla (f'')

$$\frac{dF}{dv_A} = 0;$$

ciò significa che le rette $F = F_a$ sono asintoti della curva $F(v_A)$.

Nella fig. 2-32 *a* e *b* sono riportate le prime curve $F(v_A)$ ed $F(\alpha)$ al disopra di F_c , nella fig. 2-33 *a, b, c, d, e*, le deformate per vari valori di kl . Si rimuova adesso del tutto l'ipotesi di piccoli spostamenti; l'intuizione fa prevedere, dal raffronto tra le figure 2-28 e 2-32, che le curve $F(v_A)$ si presenteranno come nella fig. 2-34, in cui i punti di intersezione delle curve per $e=0$ con l'asse delle F coincidono con quelli calcolati in fase lineare e riportati nella fig. 2-32. Infatti, per $e \rightarrow 0$ il diagramma della fig. 2-34 deve tendere a quello della fig. 2-28.

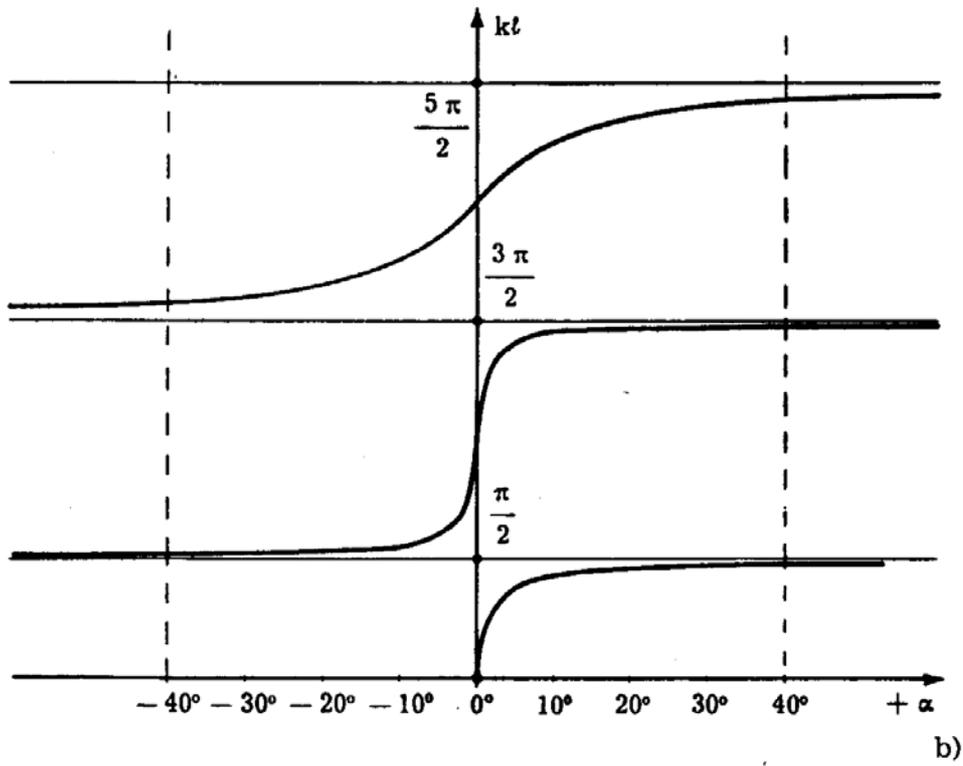
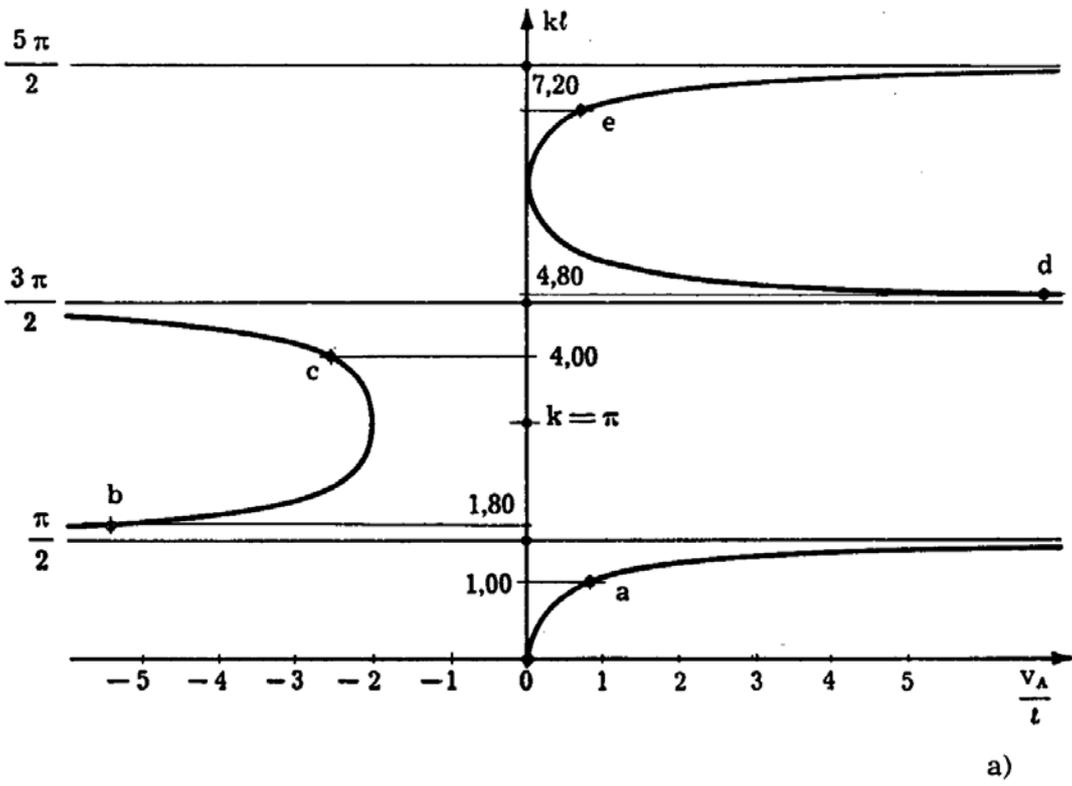


FIG. 2-32

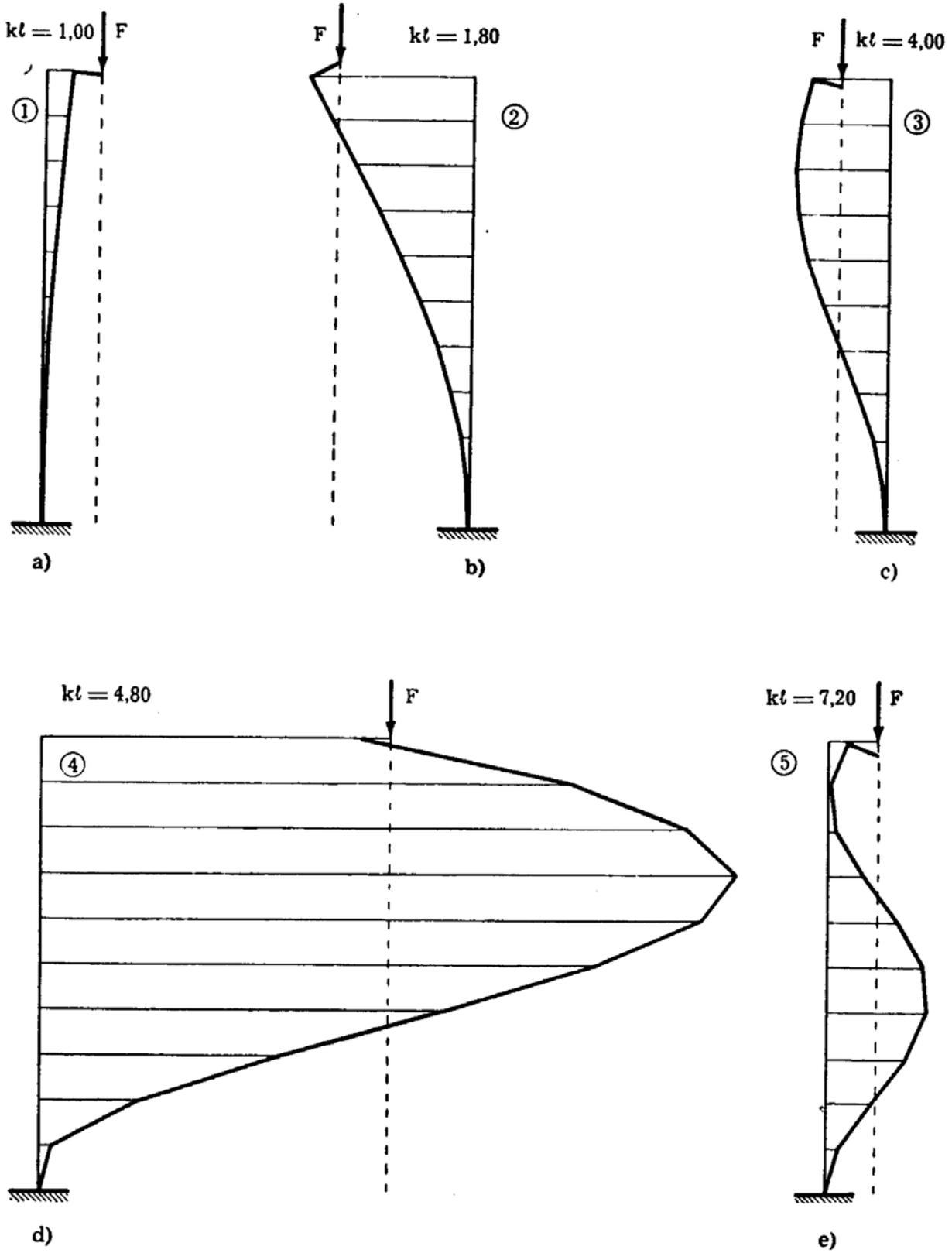


FIG. 2-33

Per $z=0$ non è più $d\varphi/ds=0$, ma

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_{z=0} = \frac{M}{EI} = \frac{F e}{EI} \quad (*) ;$$

si ha quindi

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 &= 2 k^2 \left[\cos \varphi - \cos \alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{F e}{EI k}\right)^2 \right] = \\ &= 2 k^2 \left(\cos \varphi - \cos \alpha + \frac{k^2 e^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (l'')$$

Dalla (l'') si trae, con riferimento sempre alla sola deformata priva di flesso,

$$\frac{d\varphi}{ds} = -k \sqrt{2} \sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha + \frac{k^2 e^2}{2}}$$

e ancora

$$ds = - \frac{d\varphi}{k \sqrt{2} \sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha + \frac{k^2 e^2}{2}}}.$$

Si osservi che, contrariamente a quanto già detto per $e=0$, il $d\varphi/ds$ è positivo e negativo per una deformata di ordine superiore al primo. Limitandosi alla prima deformata si ha

$$\begin{aligned} l &= \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{k \sqrt{2} \sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha + \frac{k^2 e^2}{2}}} = \\ &= \frac{1}{2k} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{k^2 e^2}{2}}}. \end{aligned}$$

(*) Se il braccio e della forza è solidale con l'estremo della trave, l'espressione è valida solo per piccoli spostamenti; se si mantiene orizzontale, è valida comunque.

Posto

$$\frac{k^2 e^2}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = c^2 \quad (m'')$$

risulta

$$l = \frac{1}{2k} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{c^2 - \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2}}} \quad (n'')$$

Posto ancora

$$\operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} = c \operatorname{sen} \vartheta$$

risulta

$$d\varphi = \frac{2c \cos \vartheta d\vartheta}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{2c \cos \vartheta d\vartheta}{\sqrt{1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}}$$

$$\sqrt{c^2 - \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2}} = \sqrt{c^2 - c^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta} = c \cos \vartheta .$$

Inoltre, se φ varia da 0 ad α , ϑ varia da 0 ad $\varepsilon = \operatorname{arcsen} \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{c}$,
e quindi

$$l = \frac{c}{k} \int_0^\varepsilon \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}} = \frac{c}{k} K(c, \varepsilon) \quad (59)$$

L'integrale della (2-59) è ancora ellittico, di prima specie; il suo limite superiore ε non è $\pi/2$, quindi l'integrale non è completo. Nelle tabelle sono riportati i valori $K(c, \varepsilon)$; per iterazione quindi può calcolarsi k in funzione di α .

Dato α , infatti, si assegna un valore arbitrario a k , si calcola c dalla (m''), e dalla (2-59) si ottiene un nuovo valore di $k = cK/l$, da cui si parte per ripetere il procedimento.

Un altro tipo di trattazione, valevole per piccole eccentricità, ma per braccio orizzontale o solidale e spostamenti qualsiasi (D'Agostino)

è il seguente. Dato il numero f dei flessi della deformata, esistono due possibili deformate che soddisfano questa condizione (fig. 2-35), che si

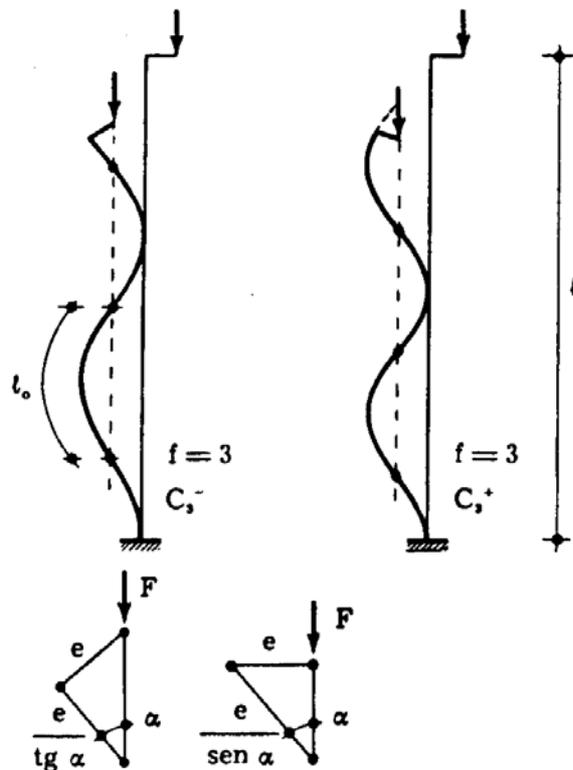


FIG. 2-35

chiameranno c_f^- e c_f^+ ; alla prima corrispondono $2f-1$ quarti d'onda $l_0/2$ completi, alla seconda $2f$.

Se il braccio con cui la forza F è applicata all'estremo si conserva ortogonale alla forza (orizzontale), la sua proiezione sulla tangente all'estremo effettuata secondo la direzione primitiva dell'asse è fornita da

$$e^* = \frac{e}{\text{sen } \alpha} ;$$

se, come è più probabile che accada, il braccio è solidale con l'estremo, la proiezione è

$$e^* = \frac{e}{\text{tg } \alpha} .$$

Se l_0 è la lunghezza di una semionda completa, si può porre

$$\text{per } c_f^- \quad l = (2f-1) \frac{l_0}{2} + e^*$$

$$\text{per } c_f^+ \quad l = (2f+1) \frac{l_0}{2} - e^* .$$

(o'')

Dalla (2-56) si trae

$$\frac{l_0}{2} k = K(p)$$

da cui

$$l_0^2 F = g(\alpha) \quad (p'')$$

Si tracciano le iperboli $F l_0^2$ per diversi valori di α (fig. 2-36). In

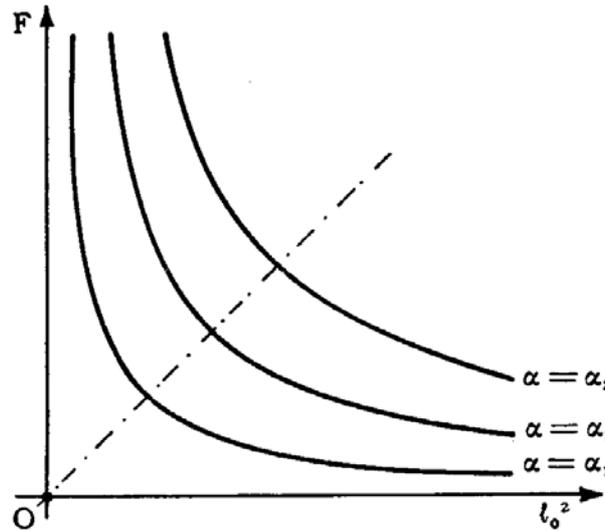


FIG. 2-36

posse di queste, è immediato ricavare, per un dato tipo di deformata, e per i vari valori di α , la curva che lega F ad l ; dato infatti α , per

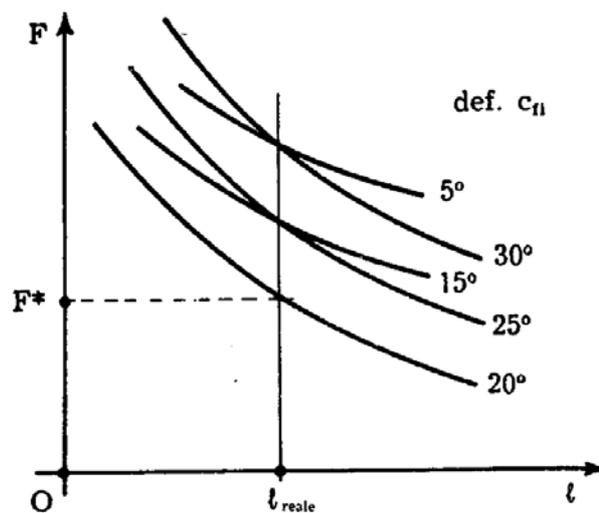


FIG. 2-37

ogni valore di F la (p'') fornisce l_0 e la (o'') fornisce l (fig. 2-37). Ciò fatto,

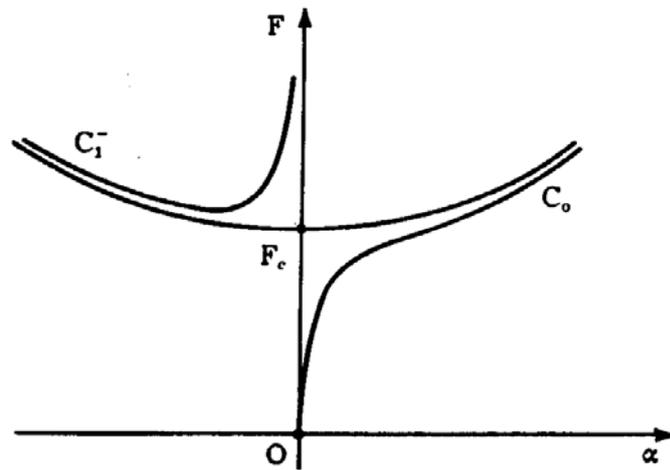


FIG. 2-38

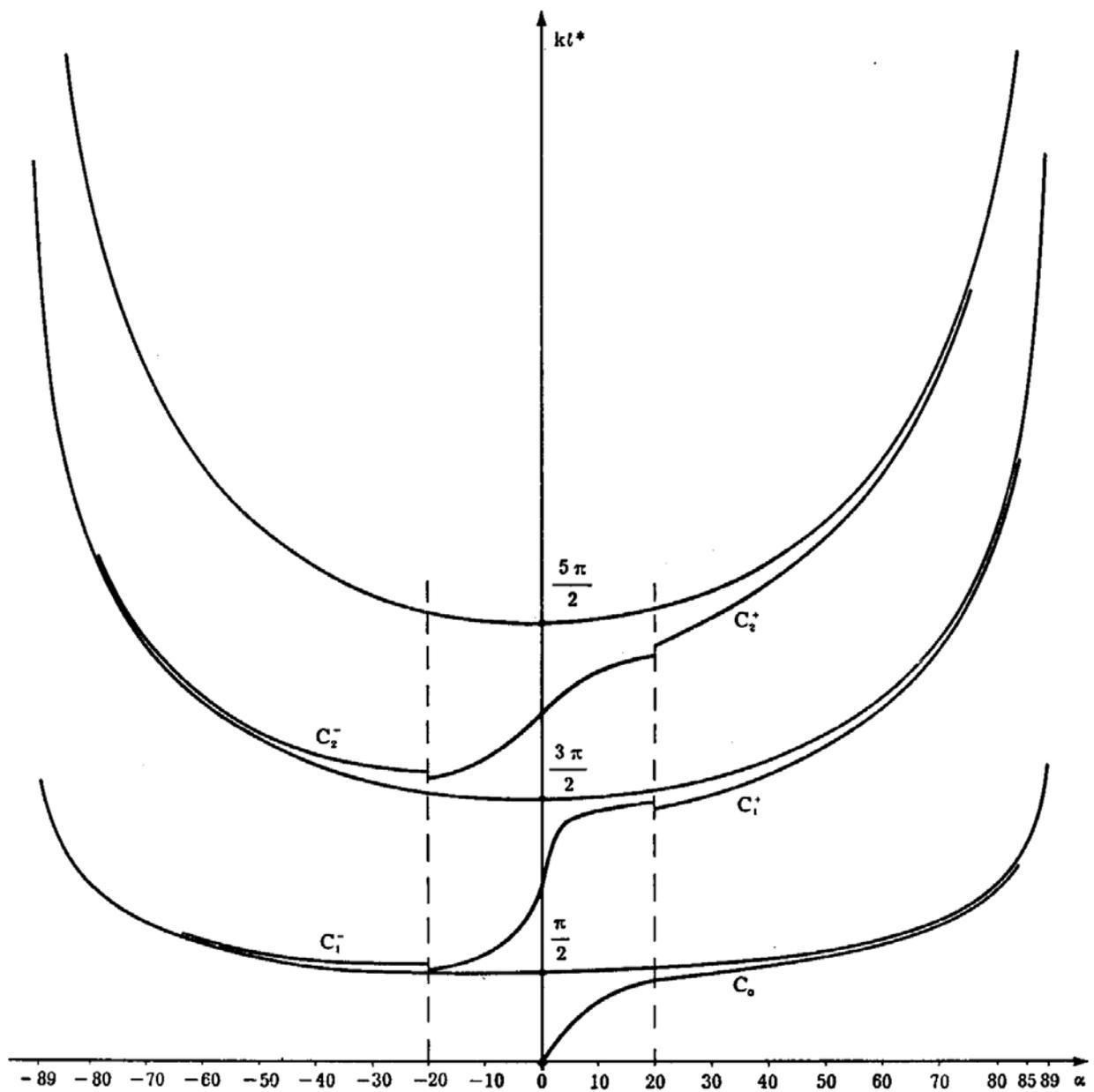


FIG. 2-39

per una assegnata lunghezza l si può tracciare il diagramma $F\alpha$ relativo al considerato tipo di deformata (fig. 2-38).

Nella fig. 2-39, sono riportati i diagrammi $F\alpha$ per braccio solidale e per le configurazioni $c_0, c_1^+, c_1^-, c_2^+, c_2^-$; si osserva come, superato un certo valore di F , si hanno tre configurazioni invece di una. Nel campo

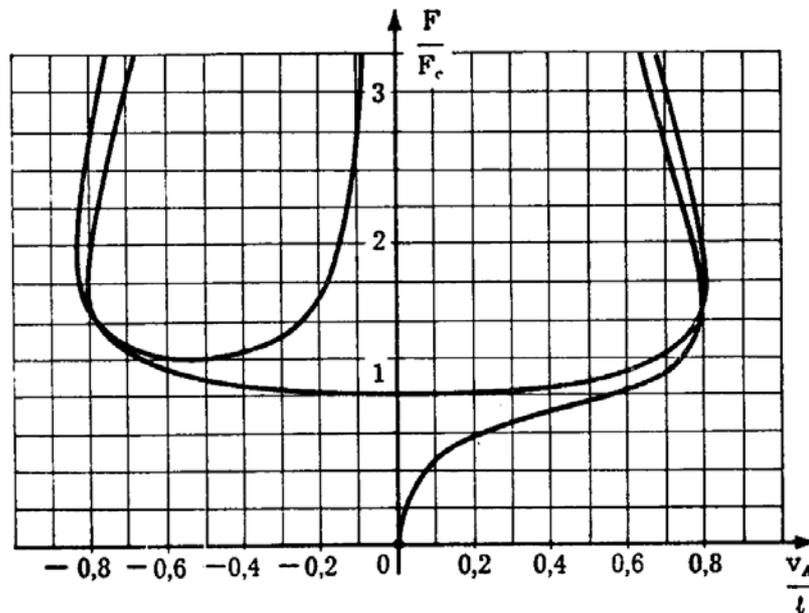


FIG. 2-40

dei piccoli spostamenti, dove il procedimento è affetto da errori più sensibili, si è tracciato il diagramma già ottenuto con equazione linearizzata.

Nella fig. 2-40 si è riportato il diagramma v_A/l in funzione di F/F_c .