

CAPITOLO X

INSTABILITA' DELLE LASTRE PIANE

1. Equazioni generali del problema in presenza di sole forze trasversali.

Si consideri (fig. 10-1) un solido di materiale omogeneo, la cui forma sia un cilindro retto; sia h l'altezza del cilindro, piccola rispetto alle dimensioni delle basi, ed il riferimento cartesiano $x y z$ (destrorso) sia

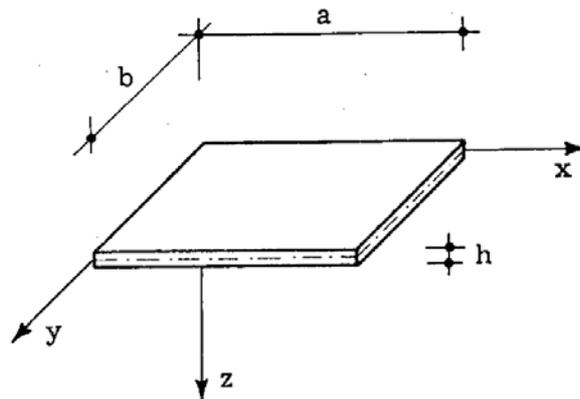


FIG. 10-1

scelto in modo che x ed y giacciono sul piano equidistante dalle basi (*piano medio*).

Tale solido è una *lastra piana sottile*.

Le strutture *monodimensionali* e *bidimensionali* sono quelle in cui una o due dimensioni predominano sulle altre.

Fondamentale per lo studio delle strutture monodimensionali è il *solido di De Saint Venant* o *tronco di trave*, cilindro retto di materiale omogeneo soggetto a forze superficiali solo sulle basi, ed a forze di massa nulle. Da esso si risale alle strutture monodimensionali, come travi a sezione costante o *travi* propriamente dette (solido cilindrico di notevole altezza), travi di sezione variabile ad asse rettilineo o curvilineo, comunque collegate tra loro ed al suolo (archi, telai, etc.).

Fondamentale per lo studio delle strutture bidimensionali piane è la *lastra piana*, o più semplicemente *lastra*, cilindro retto di materiale omogeneo soggetto a forze superficiali solo sulla superficie laterale. Se le forze sono parallele alle basi

e indipendenti dall'altezza, i risultati sono validi in se stessi, per strutture cioè a forma di cilindro retto e così caricate (anche tridimensionali); se le forze sono qualsiasi e variabili con l'altezza (tagli, momenti flettenti e torcenti) i risultati sono utilizzabili per le *piastre piane* (cilindri di piccola altezza comunque caricate sulle basi e sulla superficie laterale, e comunque vincolati, e per lo studio della stabilità delle *lastre piane sottili*.

Si prenda in esame un volume elementare della lastra definito da due piani paralleli ad yz e distanti dx , e da due piani paralleli ad xz e distanti dy (fig. 10-2). Si faccia l'ipotesi che sulle facce parallele a z agi-

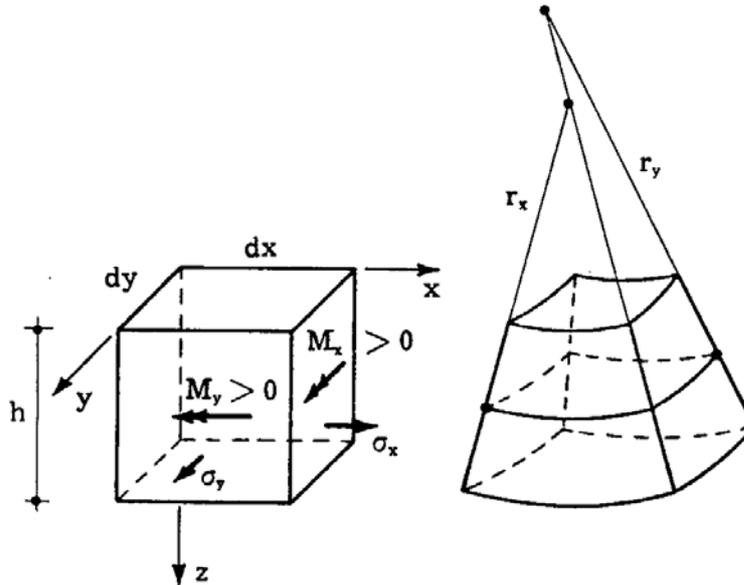


FIG. 10-2

scano solo le caratteristiche $dM_x = M_x \cdot dy$ e $dM_y = M_y \cdot dx$, momenti i cui vettori rappresentativi sono diretti come gli assi y ed x ; dM_x agisce sulle facce di normale x , ed è positivo se, sulla faccia di normale x positiva, è diretto nel verso di y ; dM_y invece agisce sulla faccia di normale y , ed è positivo se, sulla faccia di normale y positiva, è diretto nel verso contrario ad x . M_x ed M_y sono momenti per unità di lunghezza, ed hanno la dimensione $[F]$; se si guarda l'elemento dal disopra della lastra supposta orizzontale, il verso xy è quello orario, ed il verso positivo dei vettori M_x ed M_y è quello che corrisponde ad una rotazione oraria rispetto al centro dell'elemento.

Si suppone che, a deformazione avvenuta, le quattro facce parallele a z restino piane, e che il piano medio presenti ovunque $\varepsilon = 0$; può porsi allora

$$\varepsilon_x = -\frac{z}{r_x}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{z}{r_y}$$
(a)

dove r_x ed r_y sono i raggi di curvatura delle due curve ottenute tagliando la *superficie media* (deformata del piano medio) con i piani xy ed yz rispettivamente. I due raggi sono considerati positivi se giacciono dalla parte delle z positive.

Si ha perciò

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y}{m} \right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left(\sigma_y - \frac{\sigma_x}{m} \right)$$

da cui

$$E \left(\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_y}{m} \right) = \sigma_x \left(1 - \frac{1}{m^2} \right)$$

e quindi

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - 1/m^2} \left(\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_y}{m} \right)$$

e ancora

$$\sigma_x = - \frac{Ez}{1 - 1/m^2} \left(\frac{1}{r_x} + \frac{1}{m r_y} \right) \tag{b}$$

$$\sigma_y = - \frac{Ez}{1 - 1/m^2} \left(\frac{1}{r_y} + \frac{1}{m r_x} \right)$$

Si può scrivere

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \tag{c}$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz ,$$

e quindi si ha dalle (b)

$$M_x = - D \left(\frac{1}{r_x} + \frac{1}{m r_y} \right) \tag{1}$$

$$M_y = - D \left(\frac{1}{r_y} + \frac{1}{m r_x} \right)$$

dove

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - 1/m^2)} = \frac{EI_1}{1 - 1/m^2} \quad (2)$$

Dalle relazioni (w sono gli spostamenti secondo z dei punti del piano medio)

$$\frac{1}{r_x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{r_y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

e dalle (1) si trae

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

Sulle facce hdx ed hdy dell'elemento possono agire, oltre ai momenti

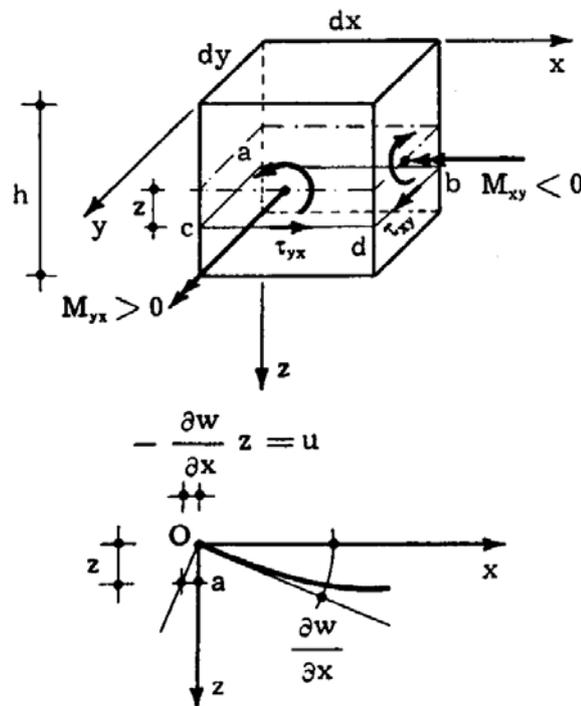


FIG. 10-3

$M_x dy$ ed $M_y dx$, i momenti torcenti $M_{xy} dy$ ed $M_{yx} dx$, i cui vettori sono diretti secondo x ed y (fig. 10-3); essi sono positivi se i vettori relativi sono

diretti nei versi di x e di y , e sono forniti dalle τ_{xy} e τ_{yx} attraverso le formule

$$M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z \, dz$$

$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z \, dz .$$
(d)

Se si considera la sezione $abcd$, a distanza z dal piano medio, si ha

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) .$$

D'altro canto è

$$u = - \frac{\partial w}{\partial x} z$$

$$v = - \frac{\partial w}{\partial y} z .$$

e quindi

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = - 2 G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z .$$

Si ha perciò

$$M_{xy} = - M_{yx} = 2 G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \, dz = 2 G I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

e ancora, dalla (10-2),

$$M_{xy} = - M_{yx} = D \left(1 - \frac{1}{m} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} .$$
(5)

Poichè i momenti M_x , M_y ed M_{xy} sono proporzionali alle $\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}$ alla stessa quota z , il loro legame è lo stesso di quello che intercede tra le tensioni. Quindi, dati M_x , M_y ed M_{xy} su due piani qualsiasi tra loro ortogonali e paralleli a z , è possibile tracciando un *cerchio di Mohr* ottenere M_n , M_t , M_{nt} su due qualsiasi altri piani tra loro ortogonali e paralleli a z . In particolare, esistono due piani di normali ξ e η tali che $M_{\xi\eta} = 0$, ed M_ξ ed M_η sono massimo e minimo (fig. 10-4).

Guardando la lastra dall'alto, come nella figura 10-4, M_n si assume positivo se il vettore è diretto in senso orario rispetto al centro dell'elemento, M_{nt} se diretto verso l'esterno dell'elemento.

Si osservi che mentre nell'analisi dello stato tensionale è $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ secondo la convenzione classica, e $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$ secondo quella di *Mohr*, nel caso in esame è invece $M_{xy} = -M_{yx}$ secondo ambedue le convenzioni; inoltre, se per $z > 0$ è $\tau_{xy} > 0$ nella convenzione classica, risulta $M_{xy} < 0$. Alle σ_x e σ_y positive per $z > 0$

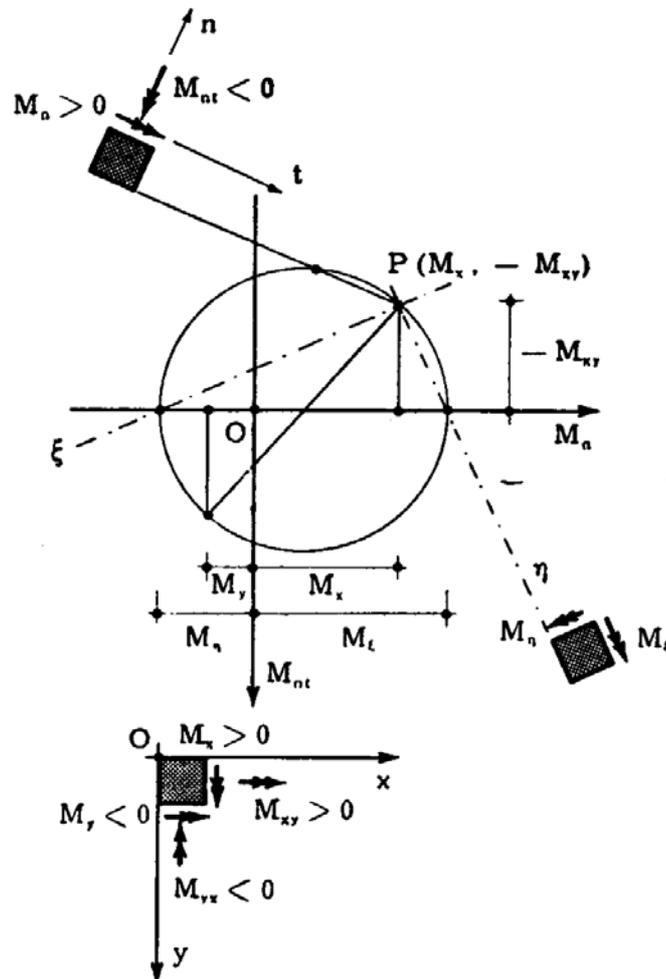


FIG. 10-4

corrispondono invece M_x ed M_y positivi. Disegnati perciò gli assi M_n ed M_{nt} equiversi agli assi x ed y , il polo P del cerchio ha le coordinate $M_x, -M_{xy}$; fissato così il polo, tutta la trattazione dei cerchi di *Mohr* può trasferirsi nel campo dei momenti M_n, M_{nt} .

La lastra sia soggetta a forze $p(xy)$ ortogonali al piano medio, positive se nel verso di z . Sull'elemento già considerato sorgono delle forze taglianti verticali $T_x dy$ (sulle facce di normali x) e $T_y dx$ (sulle facce di normale y); T_x e T_y sono positive se equiverse all'asse z sulle facce le cui normali sono equiverse agli assi x ed y . Si ha

$$T_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz$$

$$T_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz . \quad (e)$$

La condizione di equilibrio dell'elemento alla traslazione secondo z si scrive

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial T_y}{\partial y} dy dx + p dx dy = 0$$

da cui

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + p = 0 . \quad (6)$$

La condizione di equilibrio alla rotazione intorno all'asse y porge

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy dx - T_x dy dx = 0$$

da cui

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - T_x = 0 . \quad (7)$$

La condizione di equilibrio intorno all'asse x fornisce infine

$$- \frac{\partial M_y}{\partial y} dy dx + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + T_y dx dy = 0$$

da cui

$$- \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + T_y = 0 . \quad (8)$$

Dalle (6), (7) e (8) si trae

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = - p . \quad (9)$$

Utilizzando le (10-4) e (10-5), e cioè trascurando l'effetto del taglio sulle curvature, si ha dalla (10-9)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} , \quad (10)$$

e dalle (10-7) e (10-8)

$$T_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (11)$$

$$T_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right).$$

2. Condizioni ai limiti.

Se il bordo lungo x ($y=0$) è appoggiato lungo il piano medio, risulta lungo esso $M_y=0$, e quindi

$$y=0 \quad w=0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (12)$$

Se il bordo è incastrato, è invece

$$y=0 \quad w=0 \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (13)$$

Se il bordo $y=0$ è libero, verrebbe spontaneo imporre $M_y=0$, $M_{yx}=0$, $T_y=0$; tre condizioni sono però eccessive.

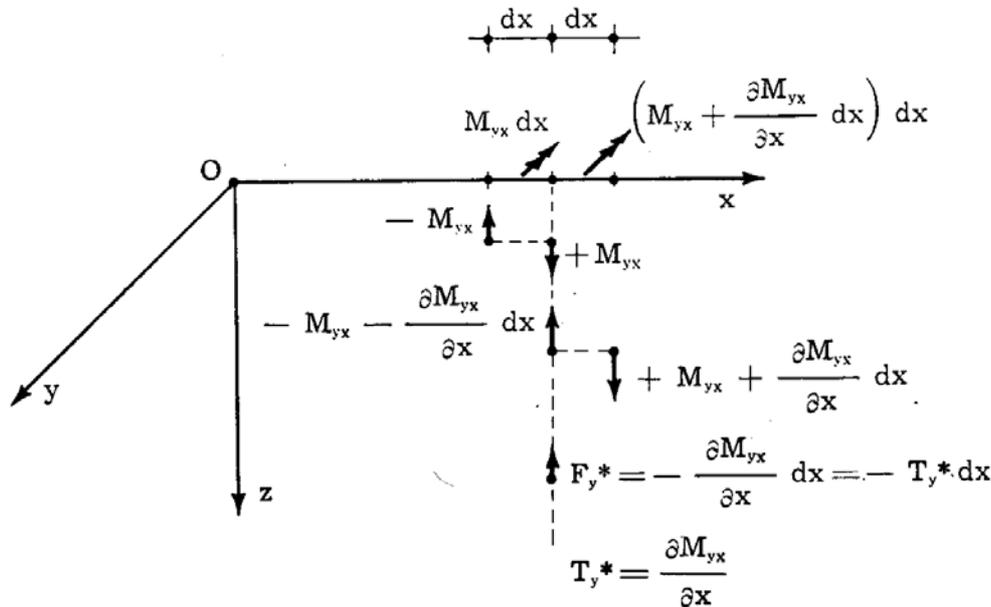


FIG. 10-5

In realtà M_{yx} e T_y sono legate, nel senso che M_{yx} è equivalente ad una distribuzione fittizia T_y^* tale che (fig. 10-5)

$$T_y^* = \frac{\partial M_{yx}}{\partial x};$$

quindi è

$$T_y + T_y^* = T_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (f)$$

da cui, per le (10-5) e (10-11)

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left(2 - \frac{1}{m}\right) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} = 0.$$

Poichè è pure

$$M_y = 0 \quad (g)$$

le condizioni ai limiti si scrivono

$$y=0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left(2 - \frac{1}{m}\right) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} = 0.$$

Si osservi che la riduzione del momento torcente sui lati ad una di-

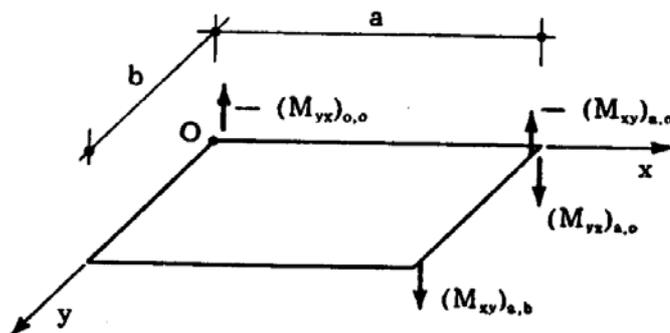


FIG. 10-6

stribuzione di taglio fittizio è comunque lecita, e comporta la presenza (fig. 10-6) di reazioni concentrate agli angoli. In $x=a, y=0$, si ha

$$R = (M_{yx})_{a,0} - (M_{xy})_{a,0}$$

e, per la (10-5),

$$R = -2D \left(1 - \frac{1}{m}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (15)$$

(R è positiva se verso il basso).

3. L'equazione fondamentale in presenza di forze assiali.

Sulla lastra agiscono forze assiali da cui derivino le forze $N_x dy$, $N_{xy} dy$, $N_{yx} dx$, $N_y dx$ sulle facce di normali x ed y dell'elemento prima considerato (fig. 10-7); N_x ed N_y , sforzi normali per unità di lunghezza,

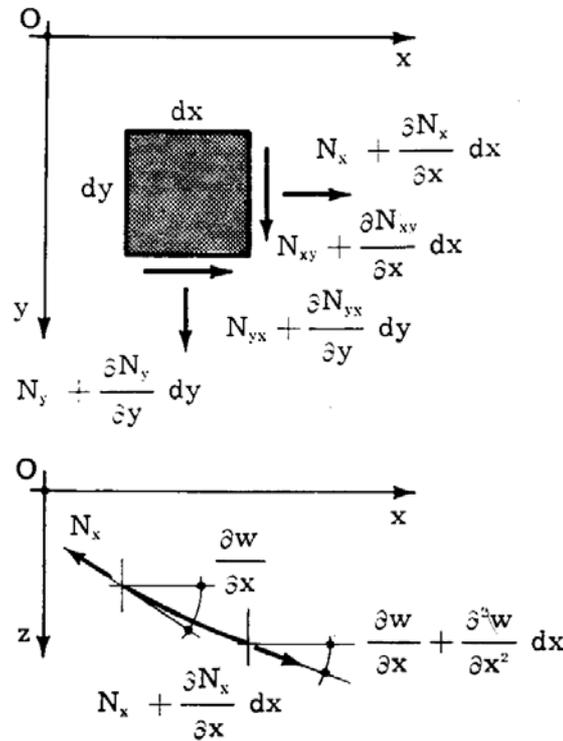


FIG. 10-7

sono positivi se di trazione, N_{xy} , N_{yx} , sforzi taglianti contenuti nel piano xy , sono positivi se diretti come in figura.

Le due equazioni di equilibrio alla traslazione secondo x ed y sono le

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

e risultano indipendenti da quelle già trovate.

L'equazione (10-6) di equilibrio alla traslazione secondo z , e cioè la (10-9), va modificata sommando alla p le proiezioni delle forze N secondo z .

La N_x fornisce la proiezione (fig. 10-7)

$$- N_x \frac{\partial w}{\partial x} dy ;$$

la $N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx$ invece l'altra proiezione

$$\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) dy ,$$

ed in complesso si ha, trascurando i termini di ordine superiore a due in $dx dy$,

$$\left(\frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx dy .$$

La N_y fornisce, analogamente, il termine

$$\left(\frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy .$$

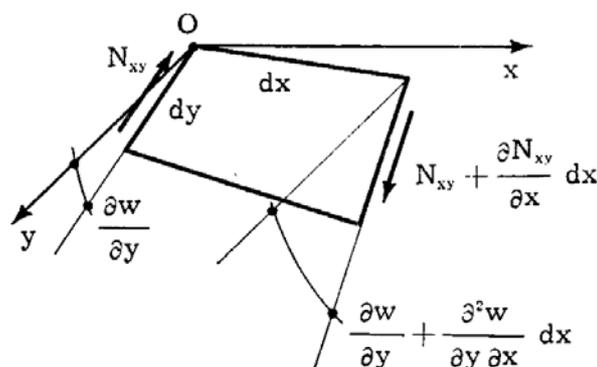


FIG. 10-8

La N_{xy} fornisce la proiezione (fig. 10-8)

$$- N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} dy ,$$

la $N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx$ invece l'altra proiezione

$$\left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx \right) dy ,$$

ed in complesso si ha

$$\left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy .$$

La N_{yx} fornisce, analogamente, il termine

$$\left(\frac{\partial N_{yx}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy .$$

La (10-9) si scrive perciò, per le (10-16),

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = - \left(p + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) ,$$

e per le (10-4) e le (10-5) si ha in definitiva

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(p + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) . \quad (17)$$

E' questa l'equazione fondamentale dell'equilibrio variato, se si pone $p=0$.

4. Energia di deformazione e lavori del secondo ordine.

L'energia di deformazione, limitata alla sola flessione, è quella relativa ai momenti $M_x M_y M_{xy}$, che non forniscono termini di scambio. Il lavoro compiuto da M_x è fornito dalla metà del prodotto di $M_x dy$ per la rotazione relativa tra le due facce di normale x ; questa rotazione è pari a $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$, e per essa M_x compie lavoro positivo se $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} < 0$; quindi l'energia relativa ad M_x è

$$- \frac{1}{2} M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy .$$

Analogamente per M_y si ha

$$- \frac{1}{2} M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy .$$

Dalla fig. 10-8 si osserva che $M_{xy} dy$ lavora per l'angolo $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} dx$ ed il lavoro è positivo se $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} > 0$; così pure $M_{yx} dx$ lavora per l'angolo $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} dy$, ed il lavoro è positivo se $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} < 0$.

Quindi per M_{xy} ed M_{yx} si ha l'energia

$$\frac{1}{2} M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy - \frac{1}{2} M_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy = M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy .$$

Sostituendo i valori (10-4) e (10-5) si ha, per tutta la lastra,

$$W = \frac{D}{2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2 \left(1 - \frac{1}{m} \right) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy . \quad (18)$$

Il lavoro del secondo ordine delle forze interne è

$$L_2^* = \frac{1}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2 N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy , \quad (19)$$

come può facilmente dedursi dalle espressioni delle componenti del secondo ordine della deformazione.

5. La lastra rettangolare appoggiata sui quattro lati e compressa secondo due di essi: metodo geometrico.

L'esempio più semplice è quello di una lastra rettangolare $a \times b$ appoggiata sui quattro lati, compressa da una forza F_x per unità di lun-

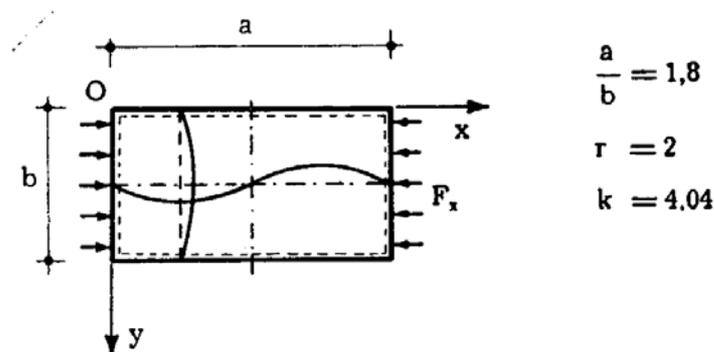


FIG. 10-9

ghezza secondo la direzione a (fig. 10-9). Nel caso in esame è $N_x = -F_x$,

$N_y = N_{xy} = 0$. Seguendo il metodo euleriano, l'equazione di equilibrio variato (w rappresenti la configurazione inflessa diramata) è la (10-17):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \frac{F_x}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad (20)$$

un integrale della (10-20), che soddisfa anche le condizioni ai limiti

$$\begin{array}{ll} y=0, \quad y=b & w=0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ x=0, \quad x=a & w=0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \end{array}$$

è il seguente:

$$w = A_{rs} \operatorname{sen} \frac{r \pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{s \pi y}{b}. \quad (21)$$

Sostituendo la (10-21) nella (10-20) si ha

$$\frac{r^4 \pi^4}{a^4} + 2 \frac{r^2 s^2 \pi^4}{a^2 b^2} + \frac{s^4 \pi^4}{b^4} = \frac{F_x}{D} \frac{r^2 \pi^2}{a^2}$$

da cui

$$F_x = \pi^2 D \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} \right)^2. \quad (h)$$

Il più piccolo degli F_x forniti dalla (h) è da prendersi in considerazione; esso si assume come carico critico F_{xc} accettando che le soluzioni della (10-20) siano da ricercarsi solo nelle (10-21). Il più piccolo valore della (h) si ha tra le soluzioni che si ottengono ponendo $n=1$

$$F_x = \pi^2 \frac{D}{a^2} \left(r + \frac{1}{r} \frac{a^2}{b^2} \right)^2 = \pi^2 \frac{D}{b^2} \left(r \frac{b}{a} + \frac{1}{r} \frac{a}{b} \right)^2. \quad (i)$$

La (i) corrisponde ad una deformata con una sola semionda lungo il lato b , ed r semionde lungo il lato a .

Il prodotto dei due termini della somma non dipende da r , quindi il valore di r che rende minima la somma è quello che rende uguali i due addendi, e cioè

$$r = \frac{a}{b}. \quad (l)$$

Poichè r deve essere intero, la (1) è valida se a/b è intero; in tal caso è

$$F_{xc} = 4 \pi^2 \frac{D}{b^2} . \quad (22)$$

Per $a/b = 1, 2, 3 \dots$ la semionda secondo il lato a è lunga b , quale che sia il valore di a/b ; la lastra si inflette secondo campi quadrati di lato b , in cui successivamente w è positivo e negativo.

Se a/b non è intero, la prima delle (i) fornisce F_x come prodotto del carico euleriano relativo alla lastra lungo i lati a , per un fattore; in questo fattore, per $a < b$, il secondo addendo è sempre minore del primo, ed il suo valore minimo si ha per $m=1$. Per $a/b \rightarrow 0$ il fattore suddetto tende all'unità.

Si faccia riferimento alla seconda delle (i):

$$F_x = \pi^2 \frac{D}{b^2} \left(r \frac{b}{a} + \frac{1}{r} \frac{a}{b} \right)^2 = k \pi^2 \frac{D}{b^2} , \quad (23)$$

dove k è funzione di r e di a/b . Si costruiscano (fig. 10-10) le curve $k(a/b)$ per i successivi valori interi di r . Ognuna di queste presenta il minimo

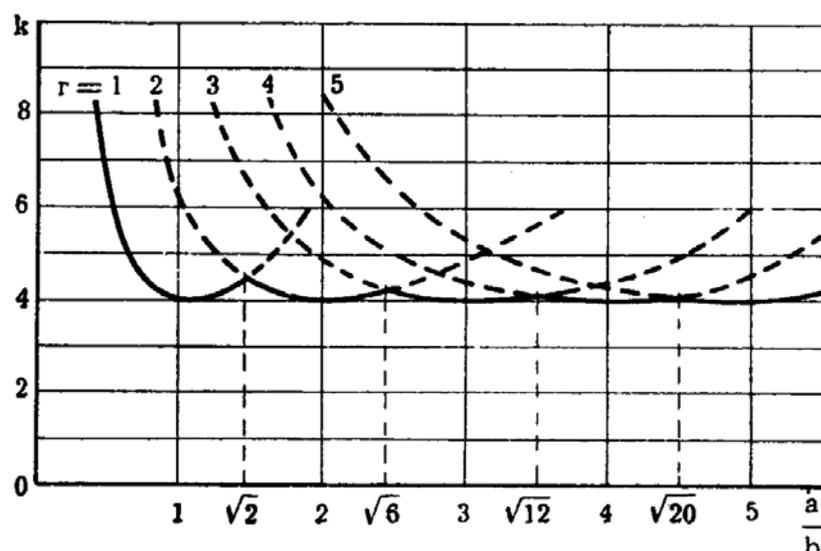


FIG. 10-10

per $a/b = r$, di valore pari a 4, e ciò conformemente alla (1); si osservi inoltre che, tracciata la curva per $r=1$, quella relativa ad r qualsiasi si ottiene dalla prima lasciando le ordinate invariate e moltiplicando le ascisse per r .

L'intersezione tra due curve successive r ed $r+1$ si ha per

$$r \frac{b}{a} + \frac{1}{r} \frac{a}{b} = (r+1) \frac{b}{a} + \frac{1}{r+1} \frac{a}{b}$$

da cui

$$\frac{a}{b} = \sqrt{r(r+1)}.$$

Il passaggio da $r=1$ ad $r=2$ si ha per

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2} = 1,41,$$

da $r=2$ ad $r=3$ per

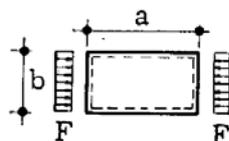
$$\frac{a}{b} = \sqrt{6} = 2,45.$$

Per $a/b \leq 1,41$, il minimo k (e quindi il minimo F_x) si ha per $r=1$; per $1,41 < a/b < 2,45$ si ha per $m=2$. Per $a/b > 2,45$, può porsi con buona approssimazione $k=4$.

Nella tab. 10-1 sono riportati i valori di k in funzione di a/b fino al valore $a/b = 1,41$, e cioè i valori relativi alla curva $r=1$.

TABELLA 10-1

LATI APPOGGIATI.
CARICO NELLA DIREZIONE DEI LATI LUNGI a
(da Timoshenko)



$\frac{a}{b}$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
k	27,0	13,2	8,41	6,25	5,14	4,53	4,20
$\frac{a}{b}$	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,41
k	4,04	4,00	4,04	4,13	4,28	4,47	4,49

La σ_c è fornita (m) da

$$\sigma_c = k \frac{\pi^2 D}{b^2 h} = \frac{k \pi^2 E h^2}{12 b^2 (1 - 1/m^2)} ; \quad (m)$$

la condizione $\sigma_c \leq |\sigma_p''|$ porge

$$\frac{b}{h} \geq \pi \sqrt{\frac{k E}{12 (1 - 1/m^2) |\sigma_p''|}} \quad (n)$$

Se è $\sigma_c > |\sigma_p''|$, deve al solito porsi E_t al posto di E in tutte le formule già scritte. Il fatto che la lastra sia sollecitata in una sola direzione induce alcuni a ridurre il modulo da E ad E_t solo in tale direzione; sembra però più opportuno ridurre tutta la rigidità D nel rapporto E_t/E , sia perchè il fenomeno plastico in un punto riguarda tutto l'intorno, quale che sia il tipo di sollecitazione, sia perchè si opera così in condizioni di maggiore sicurezza.

6. La lastra rettangolare appoggiata sui quattro lati e compressa secondo due di essi: metodo energetico.

Si ponga, sul piano medio, $u = v = 0$, e

$$w = \sum \sum A_{rs} \operatorname{sen} \frac{r \pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{s \pi y}{b} ; \quad (o)$$

dalla (10-18) si ricava

$$\int_0^a \int_0^b \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0$$

e quindi

$$\begin{aligned} W &= \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy = \\ &= \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\sum \sum A_{rs} \left(\frac{r^2 \pi^2}{a^2} + \frac{s^2 \pi^2}{b^2} \right) \operatorname{sen} \frac{r \pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{s \pi y}{b} \right]^2 dx dy . \end{aligned}$$

Solo i quadrati di questa espressione danno integrali non nulli:

$$\int_0^a \int_0^b \operatorname{sen}^2 \frac{r \pi x}{a} \operatorname{sen}^2 \frac{s \pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4} ;$$

si ha perciò

$$W = \frac{ab}{8} D \Sigma \Sigma A_{rs}^2 \left(\frac{r^2 \pi^2}{a^2} + \frac{s^2 \pi^2}{b^2} \right)^2. \quad (p)$$

Dalla (10-19) si ha

$$\begin{aligned} L_2^* &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy = \\ &= - \frac{F_x}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\Sigma \Sigma A_{rs} \frac{r \pi}{a} \cos \frac{r \pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{s \pi y}{b} \right]^2 dx dy \end{aligned}$$

e ancora

$$L_2^* = - \frac{F_x}{2} \Sigma \Sigma A_{rs}^2 \frac{r^2 \pi^2}{a^2} \frac{ab}{4}. \quad (q)$$

Si ha poi $L_2 = 0$.

Quindi è

$$\delta_2 E = \frac{ab}{8} D \Sigma \Sigma A_{rs}^2 \left(\frac{r^2 \pi^2}{a^2} + \frac{s^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 - \frac{F_x}{2} \Sigma \Sigma A_{rs}^2 \frac{r^2 \pi^2}{a^2} \frac{ab}{4}.$$

La condizione

$$\frac{\partial \delta_2 E}{\partial A_{rs}} = 0$$

porge

$$F_x = \pi^2 D \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} \right)^2,$$

coincidente con la (h).

7. La lastra rettangolare appoggiata sui quattro lati e compressa secondo ambedue i lati.

Nel caso in esame (fig. 10-11) l'equazione di equilibrio variato è

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \frac{1}{D} \left(F_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (24)$$

con le stesse condizioni ai limiti del n. 10-5; l'espressione (10-21) è ancora un integrale della (10-24) che soddisfa le condizioni ai limiti.

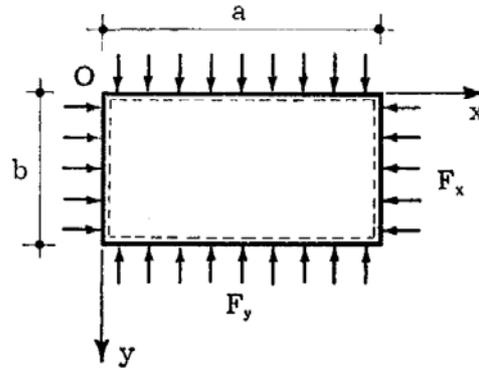


FIG. 10-11

Sostituendo la (10-21) nella (10-24) si ha

$$F_x = \pi^2 D \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} \right)^2 - \frac{s^2 a^2}{r^2 b^2} F_y . \quad (25)$$

Si osserva subito che una F_y di compressione fa diminuire F_x , e viceversa accade se F_y è di trazione.

Pochi tentativi con diversi valori di r ed s portano al valore minimo di F_x .

8. La lastra rettangolare appoggiata su due lati opposti, compressa ortogonalmente a tali lati, e diversamente vincolata sugli altri due lati.

I simboli sono quelli della fig. 10-9; i due lati lunghi a siano comunque vincolati. L'equazione da usare è sempre la (10-20), un suo integrale che soddisfa le condizioni ai limiti sui lati lunghi b è

$$w = f(y) \operatorname{sen} \frac{r \pi x}{a} . \quad (26)$$

Sostituendo la (10-26) nella (10-20) si ha

$$\frac{d^4 f}{dy^4} - 2 \frac{r^2 \pi^2}{a^2} \frac{d^2 f}{dy^2} + \left(\frac{r^4 \pi^4}{a^4} - \frac{F_x}{D} \frac{r^2 \pi^2}{a^2} \right) f = 0 ; \quad (27)$$

la soluzione della (10-27) è

$$f(y) = A e^{-\alpha y} + B e^{\alpha y} + C \cos \beta y + D \operatorname{sen} \beta y$$

dove

$$\alpha^2 = \frac{r^2 \pi^2}{a^2} + \sqrt{\frac{F_x}{D} \frac{r^2 \pi^2}{a^2}}$$

$$\beta^2 = -\frac{r^2 \pi^2}{a^2} + \sqrt{\frac{F_x}{D} \frac{r^2 \pi^2}{a^2}}$$

a) Il lato $y=0$ è appoggiato, il lato $y=b$ è libero.

Dalle condizioni

$$y=0 \quad w=0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

risulta

$$A = -B$$

$$C = 0$$

e quindi

$$f(y) = 2A \operatorname{senh} \alpha y + D \operatorname{sen} \beta y .$$

Le condizioni

$$y=b \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left(2 - \frac{1}{m}\right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0$$

porgono

$$2A \left(\alpha^2 - \frac{1}{m} \frac{r^2 \pi^2}{a^2} \right) \operatorname{senh} \alpha b - D \left(\beta^2 + \frac{1}{m} \frac{r^2 \pi^2}{a^2} \right) \operatorname{sen} \beta b = 0$$

$$2A \alpha \left[\alpha^2 - \left(2 - \frac{1}{m}\right) \frac{r^2 \pi^2}{a^2} \right] \cosh \alpha b - D \beta \left[\beta^2 + \left(2 - \frac{1}{m}\right) \frac{r^2 \pi^2}{a^2} \right] \cos \beta b = 0 .$$

La soluzione $w \neq 0$ corrisponde all'annullarsi del determinante del suddetto sistema in A e D, e cioè a

$$\beta \left(\alpha^2 - \frac{1}{m} \frac{r^2 \pi^2}{a^2} \right)^2 \operatorname{tgh} \alpha b = \alpha \left(\beta^2 + \frac{1}{m} \frac{r^2 \pi^2}{a^2} \right)^2 \operatorname{tg} \beta b . \quad (28)$$

La (10-28) è un'equazione in F_x (attraverso α e β); il suo studio mostra che il valore più basso della soluzione si ha per $r=1$, e può essere

fornito da una formula identica alla (10-23)

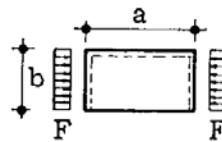
$$F_{xc} = k \pi^2 \frac{D}{b^2} \quad (29)$$

I valori di k in funzione di a/b si leggono nella tabella 10-2; essi sono calcolati per $1/m = 0,25$.

TABELLA 10-2

LATI LUNGI b APPOGGIATI; LATI LUNGI a LIBERO E APPOGGIATO.
CARICO NELLA DIREZIONE DEI LATI LUNGI a

(da *Timoshenko*)



$\frac{a}{b}$	0,5	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
k	4,400	1,440	1,135	0,952	0,835	0,755
$\frac{a}{b}$	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0	
k	0,698	0,610	0,564	0,516	0,506	

Secondo *Timoshenko*, per lastre lunghe può porsi con buona approssimazione

$$k = 0,456 + \frac{b^2}{a^2}$$

b) Il lato $y=0$ è incastrato, il lato $y=b$ è libero.

Dalle condizioni

$$y=0 \quad w=0 \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

si trae

$$A = - \frac{\alpha C - \beta D}{2\alpha}$$

$$B = - \frac{\alpha C + \beta D}{2\alpha}$$

e quindi

$$f(y) = C (\cos \beta y - \cosh \alpha y) + D \left(\sin \beta y - \frac{\beta}{\alpha} \sinh \alpha y \right).$$

Le condizioni

$$y=b \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left(2 - \frac{1}{m} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0$$

porgono

$$2 c d (c^2 + d^2) \cos \beta b \cosh \alpha b = \frac{1}{\alpha \beta} (\alpha^2 c^2 - \beta^2 d^2) \sin \beta b \sinh \alpha b, \quad (30)$$

dove è

$$c = \beta^2 + \frac{1}{m} \frac{r^2 \pi^2}{a^2}$$

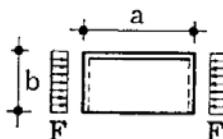
$$d = \alpha^2 - \frac{1}{m} \frac{r^2 \pi^2}{a^2}.$$

La F_{xc} può essere sempre posta nella forma (10-29); i valori di k in funzione di a/b sono consegnati nella tab. 10-3, anch'essi calcolati per $1/m = 0,25$.

TABELLA 10-3

LATI LUNGI b APPOGGIATI; LATI LUNGI a INCASTRATO E LIBERO.
CARICO NELLA DIREZIONE DEI LATI LUNGI a

(da Timoshenko)



$\frac{a}{b}$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
k	1,70	1,56	1,47	1,41	1,36	1,34	1,33
$\frac{a}{b}$	1,7	1,8	1,9	2,0	2,2	2,4	
k	1,33	1,34	1,36	1,38	1,45	1,47	

I valori della tabella sono relativi ad $r=1$; il valore minimo di k è 1,328, e si attinge per $a/b = 1,635$. Nella fig. 10-12 sono riportati i valori

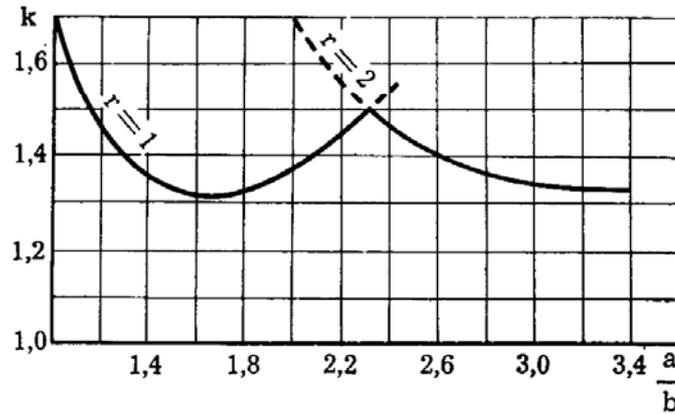


FIG. 10-12

di k in funzione di a/b per $r=1$ ed $r=2$; la seconda curva si ottiene dalla prima come già detto nel caso della lastra appoggiata sui quattro lati. Si osserva che per a/b abbastanza elevato la lastra si inflette secondo due semionde lungo la direzione di compressione, e che, sempre per a/b abbastanza elevato, può con buona approssimazione porsi sempre $k=1,328$.

9. La lastra rettangolare soggetta a flessione e compressione.

Si consideri la lastra rettangolare appoggiata sui quattro lati e caricata (fig. 10-13) sui due lati lunghi b da forze ortogonali ai lati stessi e

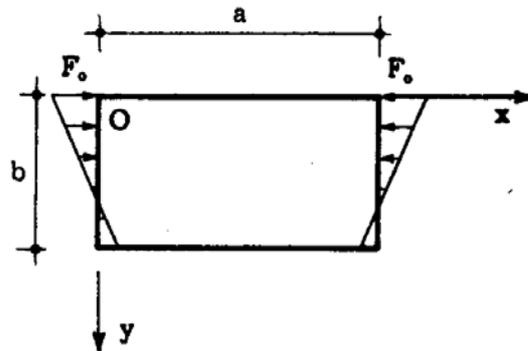


FIG. 10-13

variabili linearmente

$$F_x = F_0 \left(1 - \alpha \frac{y}{b} \right);$$

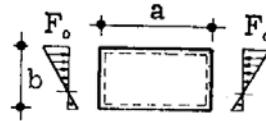
la F_0 , forza agente in $y=0$, è di compressione. Per $\alpha=0$ si ha compressione uniforme, per $\alpha=2$ flessione pura, per $\alpha < 2$ flessione e compressione, per $\alpha > 2$ flessione e trazione. Anche nel caso in esame può porsi

$$F_{oc} = k \pi^2 \frac{D}{b^2};$$

i coefficienti k sono forniti (*Timoshenko*) dalla tab. 10-4.

TABELLA 10-4

LATI APPOGGIATI.

FLESSIONE E COMPRESSIONE NELLA DIREZIONE DEI LATI LUNGI a (da *Timoshenko*)

$\alpha \backslash a/b$	0,4	0,5	0,6	0,667	0,75	0,8	0,9	1,0	1,5
2	29,1	25,6	24,1	23,9	24,1	24,4	25,6	25,6	24,1
$\frac{4}{3}$	18,7	—	12,9	—	11,5	11,2	—	11,0	11,5
1	15,1	—	9,7	—	8,4	8,1	—	7,8	8,4
$\frac{4}{5}$	13,3	—	8,3	—	7,1	6,9	—	6,6	7,1
$\frac{2}{3}$	10,8	—	7,1	—	6,1	6,0	—	5,8	6,1

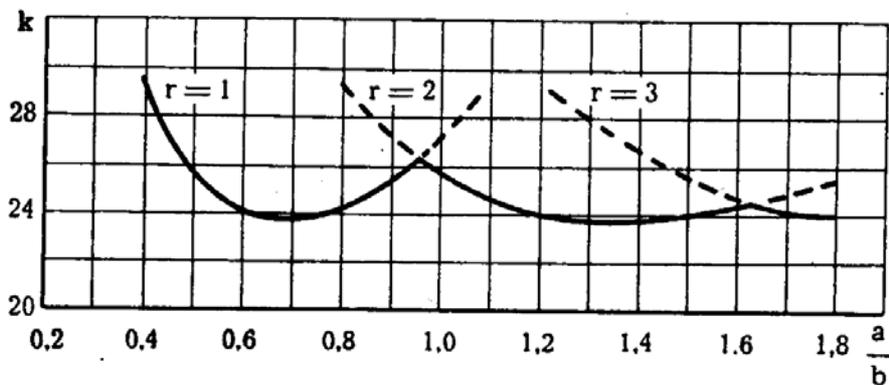


FIG. 10-14

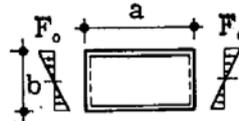
Nella fig. 10-14 sono riportati, per flessione semplice, i valori di k in

funzione di a/b per $r=1, 2, 3$; le curve per $r=2, 3$ etc. sono derivate al solito modo da quella per $r=1$. Si osserva che nella flessione semplice per $a/b > 0,95$ si passa da una a due semionde, e che per a/b abbastanza elevato può essere assunto $k=24$.

Nelle tabelle 10-5, 10-6 e 10-7 sono riportati dal *Timoshenko* i valori di k per flessione pura ($\alpha=2$) con i due lati lunghi a incastrati, per carico triangolare ($\alpha=1$) nelle stesse condizioni di vincolo, per flessione pura con i due lati lunghi a appoggiato e incastrato.

TABELLA 10-5

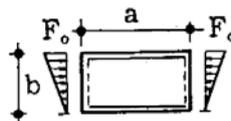
FLESSIONE PURA ($\alpha = 2$) NELLA DIREZIONE DEI LATI LUNGH a .
LATI LUNGH b APPOGGIATI; LATI LUNGH a INCASTRATI

(da *Timoshenko*)

$\frac{a}{b}$	0,30	0,35	0,40	0,45	0,47	0,48	0,50	0,60	0,70
k	47,3	43,0	40,7	39,7	39,6	39,6	39,7	41,8	45,8

TABELLA 10-6

CARICO TRIANGOLARE ($\alpha = 1$) NELLA DIREZIONE DEI LATI LUNGH a .
LATI LUNGH b APPOGGIATI; LATI LUNGH a INCASTRATI

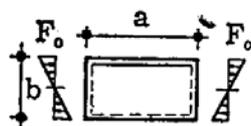
(da *Timoshenko*)

$\frac{a}{b}$	0,40	0,50	0,60	0,64	0,65	0,66	0,67	0,70	0,80	0,90
k	17,7	14,7	13,7	13,57	13,56	13,57	13,58	13,65	14,3	15,4

TABELLA 10-7

FLESSIONE PURA ($\alpha = 2$) NELLA DIREZIONE DEI LATI LUNGI a .
LATI LUNGI b APPOGGIATI;
LATI LUNGI a APPOGGIATO E INCASTRATO

(da Timoshenko)



$\frac{a}{b}$	0,40	0,50	0,60	0,65	0,66	0,67	0,70	0,80	0,90	1,00
k	29,5	26,0	24,65	24,48	24,48	24,48	24,6	25,3	26,6	28,3

10. La lastra rettangolare soggetta a forze taglienti.

Frequente è pure il caso della fig. 10-15, dove la lastra è soggetta a

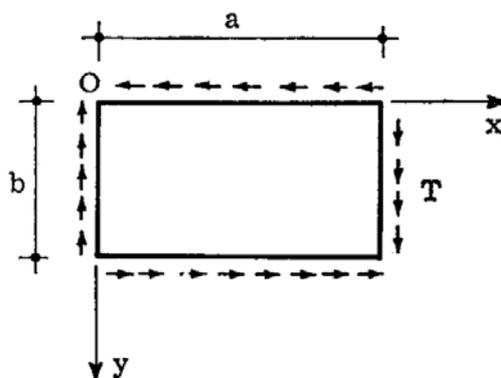


FIG. 10-15

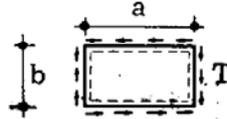
forze taglienti T uniformemente distribuite. La T_c può porsi anche essa sotto la forma

$$T_c = k \pi^2 \frac{D}{b^2}; \quad (31)$$

per lati tutti appoggiati i valori di k sono consegnati nella tab. 10-8.

Per $a/b = 1$ (lastra quadrata) è $k = 9,34$; per $b = \infty$ è $k = 5,35$.

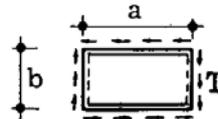
TABELLA 10-8
CARICO TAGLIANTE. LATI TUTTI APPOGGIATI
(da Timoshenko)



$\frac{a}{b}$	1,0	1,2	1,4	1,5	1,6	1,8	2,0	2,5	3	4
k	9,34	8,0	7,3	7,1	7,0	6,8	6,6	6,1	5,9	5,7

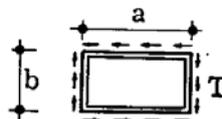
Se i due lati lunghi a sono incastrati, e i due lunghi b sono appoggiati, i valori k sono consegnati nella tab. 10-9.

TABELLA 10-9
CARICO TAGLIANTE.
LATI LUNGH a INCASTRATI; LATI LUNGH b APPOGGIATI
(da Timoshenko)



$\frac{a}{b}$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	∞
k	12,28	11,12	10,21	9,81	9,61	8,99

TABELLA 10-10
CARICO TAGLIANTE. LATI TUTTI INCASTRATI
(da Timoshenko)



$\frac{a}{b}$	1,0	1,5	2,0	2,5	∞
k	14,71	11,50	10,34	10,85	8,99

Se i lati sono tutti incastrati, i valori k sono invece consegnati nella tabella 10-10.