

un solo grado di libertà) e quelli discendenti instabili; nella fig. 1-25 invece ciò può dirsi solo nell'intervallo  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , dove  $w_B$  cresce al crescere di  $\varphi$ .

**7. Instabilità di prima e seconda specie.**

Si è sempre nell'ipotesi di forze che variano mantenendosi in rapporti costanti (forze conservative).

Si consideri il ramo  $F(c_1)$  che ha origine in  $F=0$  (ramo  $r_1$ ) (fig. 1-27).

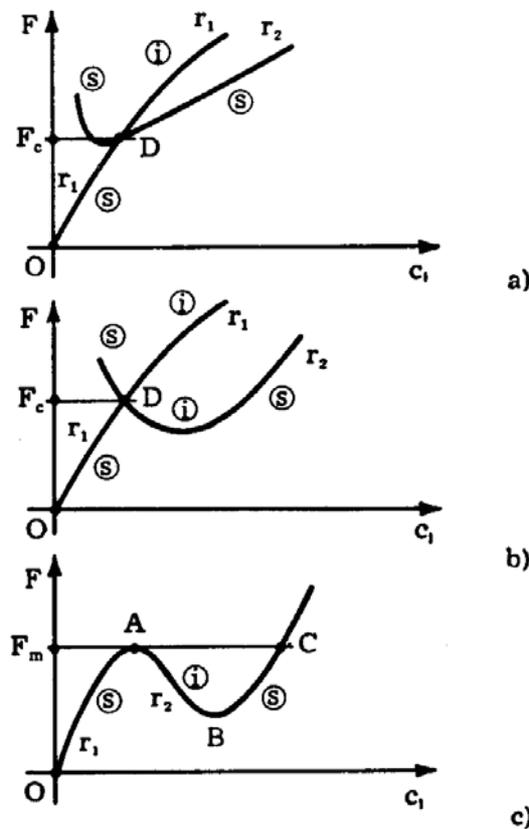


FIG. 1-27

In un punto qualsiasi di tale ramo, una generica variazione  $\delta E$  è eseguita per  $F$  costante, e per un generico insieme di incrementi  $dc_1$  delle coordinate lagrangiane; questo insieme, definito a meno di una costante  $\gamma$ , e quindi dai soli rapporti tra i  $dc_1$ , si indica simbolicamente con  $\delta C$ . La variazione  $\delta_1 E$  è nulla; la  $\delta_2 E$  è fornita (1-3) da

$$\delta_2 E = -L_2 + L_2^* + W \quad (8)$$

e cioè la funzione  $F(w_B)$  è lineare; e così pure, per  $\beta = \pi/2$ , è

$$F = k\ell (1 - \cos \varphi) = k w_B .$$

Nella fig. 1-25 è rappresentato, per  $\beta = \pi/4$ , il diagramma  $F\varphi$  nel caso

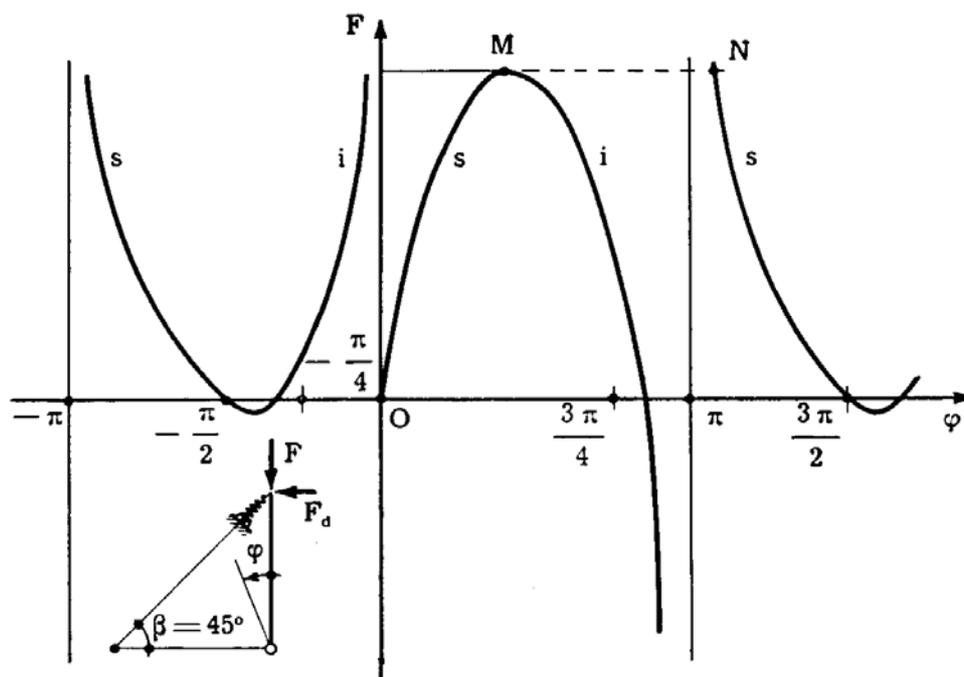


FIG. 1-25

che assieme alla  $F$  agisca una piccola forza  $F_d$  costante, ortogonale all'asse della struttura indeformata; per  $F_d \rightarrow 0$ , il diagramma tende a quello della

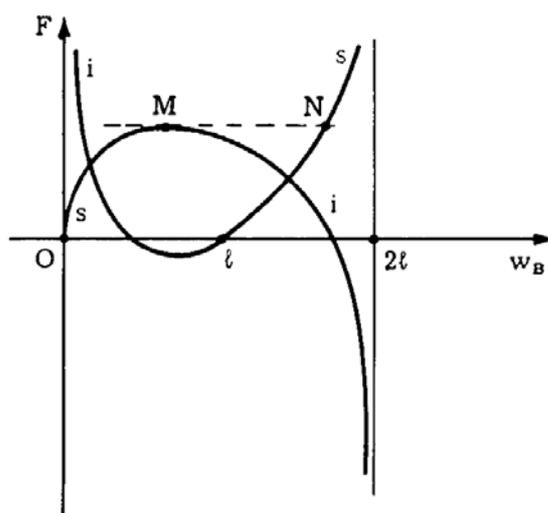


FIG. 1-26

fig. 1-21. Lo stesso diagramma è riportato nel piano  $Fw_B$  (fig. 1-26). Si osservi che nella fig. 1-26 i rami ascendenti sono stabili (il sistema è ad

in questo diagramma

$$\frac{dF}{dw_B} = \frac{dF}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dw_B}$$

e poichè

$$\frac{dw_B}{d\varphi} = l \operatorname{sen} \varphi$$

è pure

$$\frac{dF}{dw_B} = \frac{1}{l} \frac{dF}{d\varphi} \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} .$$

Poichè, per  $\varphi \rightarrow 0$ ,  $dF/d\varphi$  tende, per  $\beta$  diverso da 0 e  $\pi/2$ , ad un valore finito, ed  $1/\operatorname{sen} \varphi$  tende a  $\infty$ , risulta

$$\left( \frac{dF}{dw_B} \right)_{w_B=0} = \infty ,$$

e cioè (fig. 1-24) il ramo  $Fw_B$  parte con tangente verticale dall'asse delle  $w_B$ . Per  $\beta = 0$  e  $\beta = \pi/2$ , invece,  $dF/d\varphi$  tende, per  $\varphi \rightarrow 0$ , ad un valore

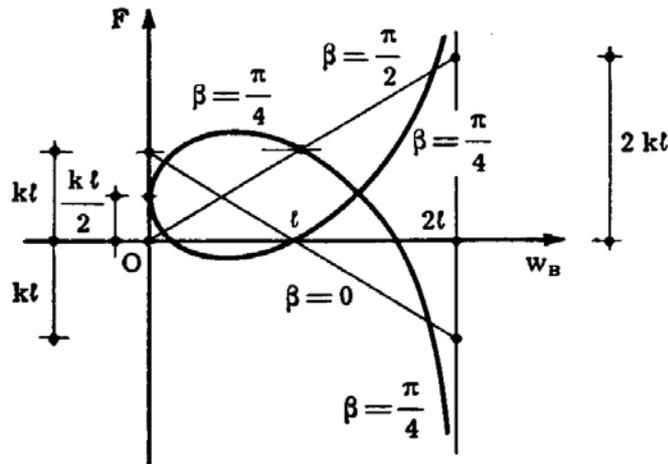


FIG. 1-24

nullo, e quindi la  $dF/dw_B$  può tendere, per  $w_B \rightarrow 0$ , ad un valore diverso da  $\infty$ . Infatti per  $\beta = 0$  è

$$F = kt \cos \varphi = kt \left( 1 - \frac{w_B}{l} \right) ,$$

ascendente che ha per asintoto la retta  $\varphi = -\pi$  tende a questa retta, il

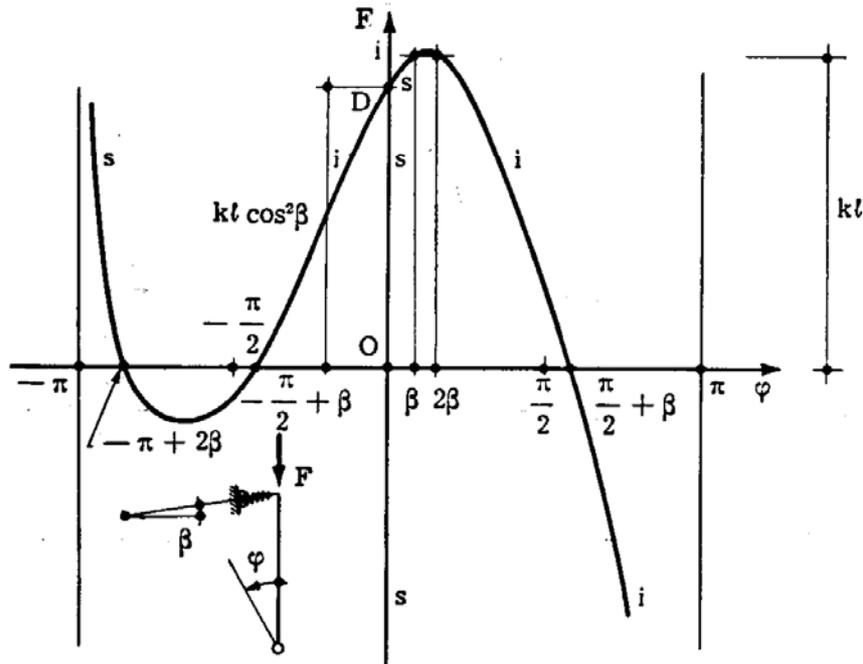


FIG. 1-22

ramo discendente che ha per asintoto la retta  $\varphi = \pi$  tende a quest'ultima.

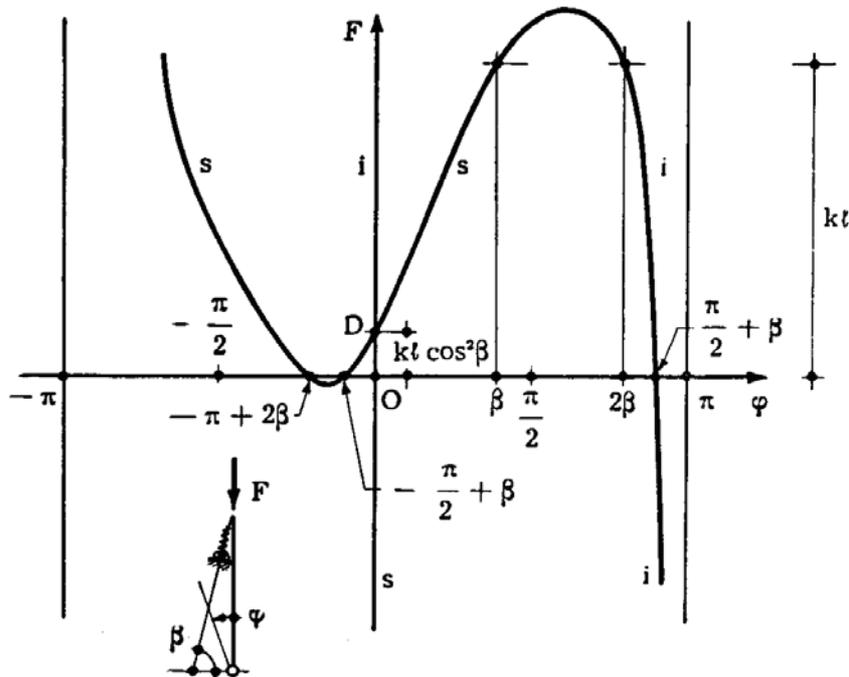


FIG. 1-23

Analogo comportamento si ha se  $\beta$  tende a  $\pi/2$  (figg. 1-23 e 1-20). Il diagramma  $Fw_B$  si ottiene da quello  $F\varphi$  considerando che  $w_B = l(1 - \cos \varphi)$ ; risulta

Risulta poi

$\varphi = 0$	$F = k\ell \cos^2 \beta$	
$\varphi = \beta$	$F = k\ell$	
$\varphi = -\beta$	$F = k\ell (\sin^2 \beta - \cos^2 \beta) (1 - 2 \cos \beta)$	
$\varphi = 2\beta$	$F = k\ell$	
$\varphi = -\pi$	$F = \infty$	$\frac{dF}{d\varphi} = -\infty$
$\varphi = \pi$	$F = -\infty$	$\frac{dF}{d\varphi} = -\infty$

Nella fig. 1-21 è riportato il diagramma  $F\varphi$  per  $\beta = 45^\circ$ , nelle

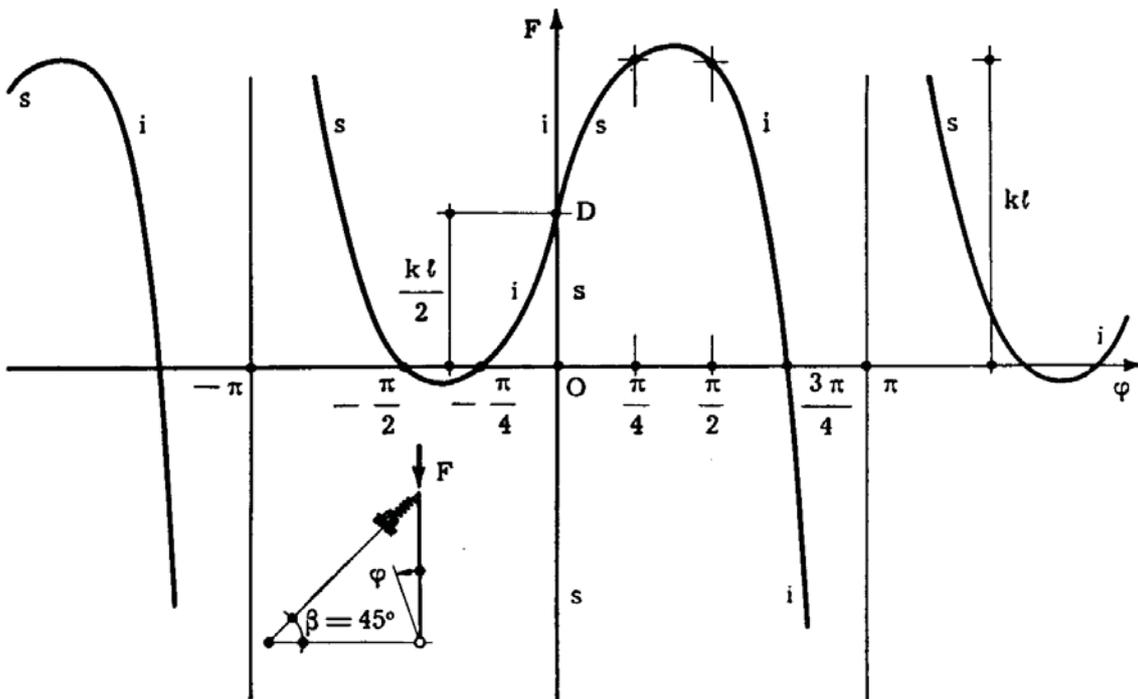


FIG. 1-21

figg. 1-22 e 1-23 il diagramma  $F\varphi$  per due valori di  $\beta$ , prossimi a 0 ed a  $\pi/2$ . Si osserva che, per  $\beta$  diverso da 0 e  $\pi/2$ , la soluzione  $\varphi = \pm \pi$  è possibile solo per  $F = \pm \infty$ ; invece per  $\beta = 0$  e  $\beta = \pi/2$  la soluzione  $\varphi = \pm \pi$  esiste per qualsiasi valore di  $F$ .

Nel diagramma  $F\varphi$  valido per  $\beta$  generico, se  $\beta$  tende a zero (figg. 1-22 ed 1-19) OD tende al valore  $k\ell^2$ , la tangente in D all'orizzontale, il ramo

In  $\varphi = 0$  la  $dF/d\varphi$  è indeterminata; si opera quindi secondo l'Hospital:

$$\begin{aligned} f'(\varphi) &= [\cos^2(\varphi - \beta) - \sin^2(\varphi - \beta) - \sin\beta \sin(\varphi - \beta)] \cos\varphi + \\ &+ [-2\cos(\varphi - \beta)\sin(\varphi - \beta) - 2\sin(\varphi - \beta)\cos(\varphi - \beta) - \\ &\quad - \sin\beta \cos(\varphi - \beta)] \sin\varphi + \\ &+ [\sin\beta \cos(\varphi - \beta) + \sin(\varphi - \beta)\cos(\varphi - \beta)] \sin\varphi - \\ &- [-\sin\beta \sin(\varphi - \beta) + \cos^2(\varphi - \beta) - \sin^2(\varphi - \beta)] \cos\varphi = \\ &= -3 \sin(\varphi - \beta) \cos(\varphi - \beta) \sin\varphi ; \end{aligned}$$

$$g'(\varphi) = 2 \sin\varphi \cos\varphi ;$$

$$\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} = \frac{3}{2} kl \sin\beta \cos\beta . \quad (l')$$

Poichè risulta

$$\frac{d^3E}{d\varphi^3} = F l \sin\varphi - kl^2 [\sin\beta \cos(\varphi - \beta) - 4 \sin(\varphi - \beta) \cos(\varphi - \beta)]$$

in D si ottiene

$$\frac{d^3E}{d\varphi^3} = -3 kl^2 \sin\beta \cos\beta ; \quad (m')$$

in D quindi l'equilibrio è neutro instabile, perchè la  $E(\varphi)$  presenta un flesso, e, se  $\beta > 0$ , la  $E$  aumenta per  $d\varphi > 0$ , diminuisce per  $d\varphi < 0$ .

Dall'espressione di  $F$  si trae che, nell'intervallo  $-\pi < \varphi < \pi$ ,  $F$  è nulla per i seguenti tre valori di  $\varphi$ :

$$\varphi = -\pi + 2\beta$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} + \beta$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \beta .$$

inoltre la  $dE/d\varphi = 0$  porge

$$F \operatorname{sen} \varphi = kl (1 - \cos \varphi) \operatorname{sen} \varphi$$

che offre la soluzione  $\operatorname{sen} \varphi = 0$  ( $\varphi = 0, \varphi = \pm \pi$ ) per qualsiasi valore di  $F$ , oppure il legame tra  $F$  e  $\varphi$

$$F = kl (1 - \cos \varphi) .$$

Dalle relazioni

$$\frac{dF}{d\varphi} = kl \operatorname{sen} \varphi$$

$$\frac{d^2F}{d\varphi^2} = kl \cos \varphi$$

si osserva che in  $\varphi = \pi/2$ , dove  $F = kl$ , la  $F(\varphi)$  ha la massima inclinazione; in  $\varphi = 0$  è  $F = 0$ , e la  $F(\varphi)$  ha tangente orizzontale; in  $\varphi = \pi$  è  $F = 2kl$ , e la  $F(\varphi)$  ha ancora tangente orizzontale. Analogo comportamento si ha in  $\varphi = -\pi/2$  e  $\varphi = -\pi$ .

In  $\varphi = 0$  (fig. 1-20) risulta poi ( $F = 0$ )

$$\frac{d^2E}{d\varphi^2} = -F l \cos \varphi + kl^2 (\cos \varphi - \cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi) = 0$$

$$\frac{d^3E}{d\varphi^3} = F l \operatorname{sen} \varphi + kl^2 (-\operatorname{sen} \varphi + 4 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi) = 0$$

$$\frac{d^4E}{d\varphi^4} = F l \cos \varphi + kl^2 (-\cos \varphi - 4 \operatorname{sen}^2 \varphi + 4 \cos^2 \varphi) = 3 kl^2$$

e cioè l'equilibrio è neutro stabile.

c) Per  $\beta$  qualsiasi (fig. 1-21) risulta

$$\frac{dF}{d\varphi} = \frac{[\cos^2(\varphi - \beta) - \operatorname{sen}^2(\varphi - \beta) - \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen}(\varphi - \beta)] \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi} = \frac{[\operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen}(\varphi - \beta)] \cos(\varphi - \beta) \cos \varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi} = \frac{f(\varphi)}{g(\varphi)} \quad (i')$$

In D (fig. 1-19) è ( $F = kl$ )

$$\frac{dF}{d\varphi} = kl \operatorname{sen} \varphi = 0$$

e ancora

$$\frac{d^2E}{d\varphi^2} = -F l \cos \varphi + kl^2 (\cos^2 \varphi - \operatorname{sen}^2 \varphi) = 0$$

$$\frac{d^3E}{d\varphi^3} = F l \operatorname{sen} \varphi - 4 kl^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi = 0$$

$$\frac{d^4E}{d\varphi^4} = F l \cos \varphi - 4 kl^2 (\cos^2 \varphi - \operatorname{sen}^2 \varphi) = -3 kl^2$$

e cioè l'equilibrio è neutro instabile.

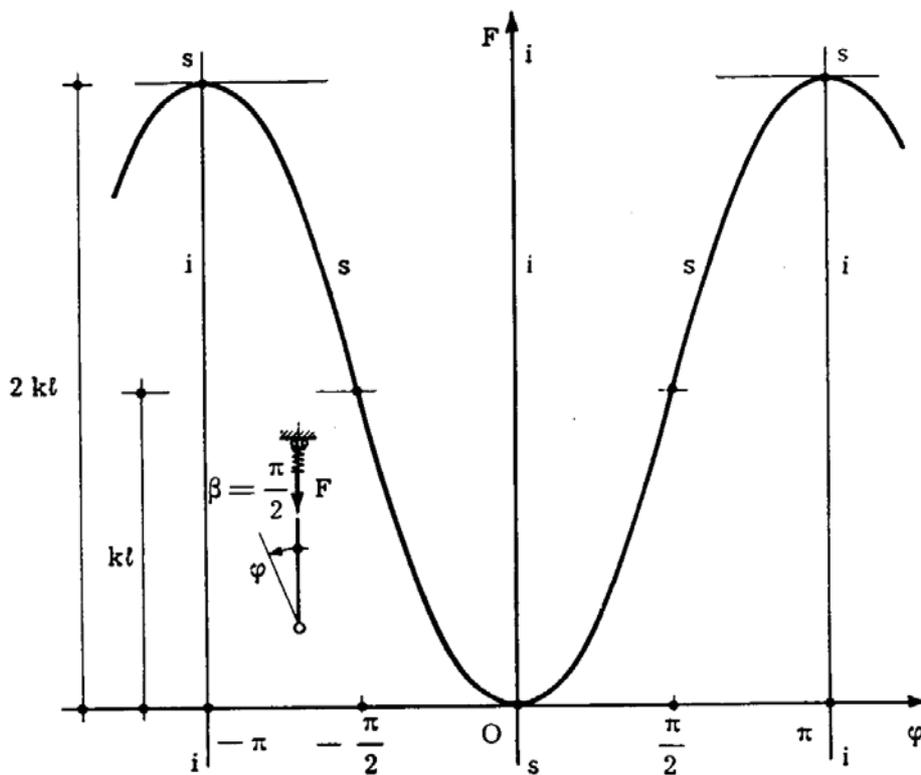


FIG. 1-20

b) Per  $\beta = \pi/2$  (R verticale) è (fig. 1-20)

$$F_c = 0 ;$$

e si ha

$$\frac{d^2E}{d\varphi^2} \cong 0 \quad \text{per} \quad F \cong kl \cos^2 \beta .$$

Quindi, posto

$$F_c = kl \cos^2 \beta , \quad (g')$$

per  $F > F_c$  la soluzione  $\varphi = 0$  è instabile, per  $F < F_c$  è stabile.

a) Per  $\beta = 0$  (R orizzontale) è

$$F_c = kl , \quad (h')$$

ed il diagramma  $F\varphi$  si presenta come nella fig. 1-19; risulta, dalla

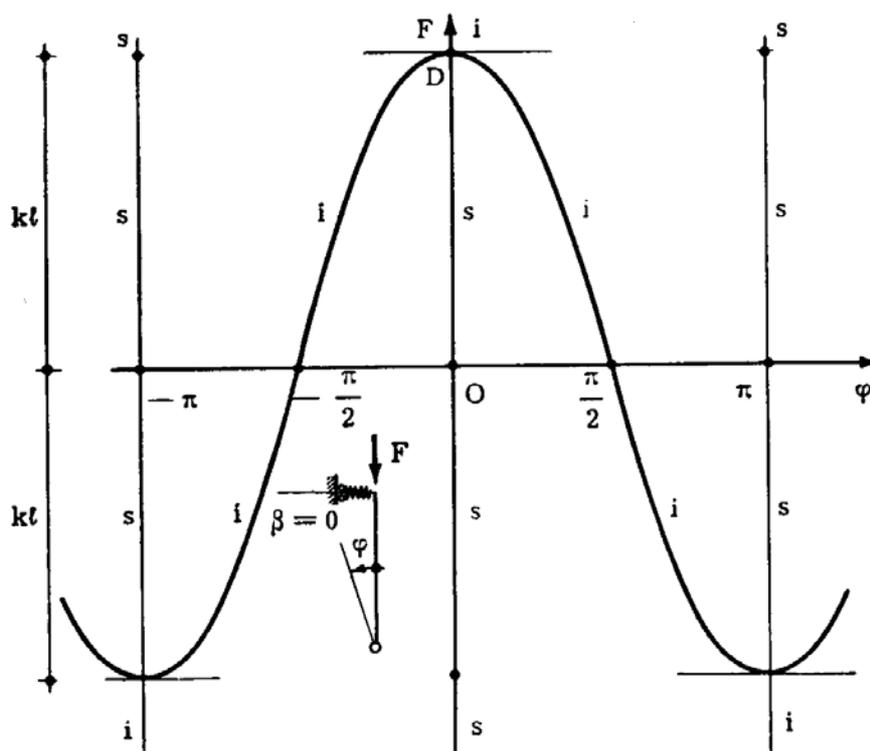


FIG. 1-19

$$dE/d\varphi = 0 ,$$

$$F \sin \varphi = kl \cos \varphi \sin \varphi$$

che offre la soluzione  $\sin \varphi = 0$  ( $\varphi = 0$  e  $\varphi = \pm \pi$ ) per qualsiasi valore di  $F$ , oppure il legame tra  $F$  e  $\varphi$ :

$$F = kl \cos \varphi .$$

elastico che esplica una reazione  $R$  inclinata dell'angolo  $\beta$  costante sull'orizzontale, e proporzionale alla componente  $s_R$  dello spostamento di  $B$  secondo la direzione della reazione stessa. Come coordinata lagrangiana si assume l'angolo  $\varphi$  che l'asta forma con la verticale; la molla del vincolo sia scarica per  $\varphi = 0$ . La struttura, se è caricata da una forza  $F$  verticale in  $B$ , è in genere non simmetrica rispetto alla verticale, ma lo diviene per  $\beta = 0$  e  $\beta = \pi/2$ .

Si ha

$$w_B = BH = l (1 - \cos \varphi)$$

$$\begin{aligned} s_R &= ED + DC = l (1 - \cos \varphi) \operatorname{sen} \beta + l \operatorname{sen} \varphi \cos \beta = \\ &= l [\operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} (\varphi - \beta)] ; \end{aligned}$$

è quindi, se  $k$  è la costante elastica della molla ( $R = ks_R$ ),

$$E = - F l (1 - \cos \varphi) + k \frac{l^2}{2} [\operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} (\varphi - \beta)]^2 .$$

Le posizioni di equilibrio sono fornite da

$$\frac{dE}{d\varphi} = - F l \operatorname{sen} \varphi + k l^2 [\operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} (\varphi - \beta)] \cos (\varphi - \beta) = 0$$

da cui si trae il legame tra  $F$  e  $\varphi$

$$F = k l [\operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} (\varphi - \beta)] \frac{\cos (\varphi - \beta)}{\operatorname{sen} \varphi} .$$

Per  $\varphi = 0$ ,  $F$  può assumere qualunque valore, e cioè la configurazione  $\varphi = 0$  è sempre di equilibrio.

La qualità dell'equilibrio è data dal segno della derivata  $d^2E/d\varphi^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2E}{d\varphi^2} &= - F l \cos \varphi + k l^2 \{ - [\operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} (\varphi - \beta)] \operatorname{sen} (\varphi - \beta) + \\ &\quad + \cos^2 (\varphi - \beta) \} . \end{aligned}$$

In  $\varphi = 0$  è

$$\frac{d^2E}{d\varphi^2} = - F l + k l^2 \cos^2 \beta$$

L'area elementare tra l'orizzontale per  $M$  ed il ramo  $Fc_1$  rappresenta la  $\delta E$  relativa alla  $\pm dc_1$ ; essa infatti è, in prima approssimazione,

$$dA = \frac{1}{2} \frac{dF}{dc_1} (dc_1)^2 = \frac{1}{2} \frac{dF}{d\eta} (d\eta)^2 \frac{dc_1}{d\eta} = \delta E \frac{dc_1}{d\eta}. \quad (f')$$

L'area  $dA$  è, nel caso in esame, del secondo ordine in  $dc_1$ ,  $d\eta/dc_1$  del primo ordine, quindi  $\delta E$  è del terzo ordine in  $dc_1$  (\*); si ha cioè

$$\delta_1 E(c) = \delta_2 E(c) = 0$$

$$\delta_3 E(c) \neq 0$$

La struttura presenta  $\delta E$  di segno opposto per  $\pm dc_1$ ; essa cioè non è simmetrica in  $dc_1$ . Viceversa, se ciò accade, deve verificarsi il comportamento della fig. 1-17 f.

A chiarimento del caso  $dF/d\eta = \infty$ , si espone in dettaglio un esempio relativo ad una struttura ad un solo grado di libertà, già presa in esame dall'*Augusti*.

La struttura della fig. 1-18, ad un solo grado di libertà, è costituita

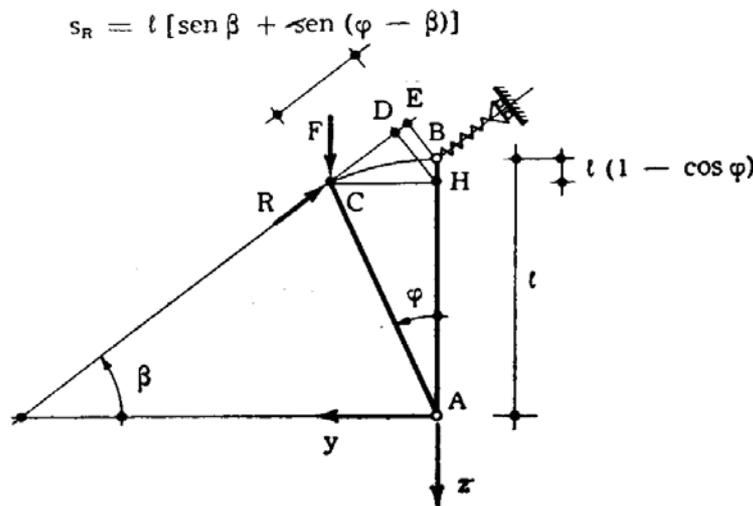


FIG. 1-18

da un'asta rigida  $AB$  vincolata in  $A$  con cerniera, e in  $B$  con un vincolo

(\*) Il segno delle aree  $dA$  nel diagramma  $Fc_1$  può non corrispondere a quello di  $\delta E$ , come invece accade nel diagramma  $F\eta$ . Infatti, se  $d\eta$  è del secondo ordine in  $dc_1$ ,  $dc_1/d\eta = m dc_1$ , dove  $m$  è una costante che ha lo stesso segno del  $d^2c_1/d\eta^2$ ; se  $d^2c_1/d\eta^2 > 0$  il  $dA$  a destra è proporzionale a  $+\delta E$ , quello a sinistra a  $-\delta E$ . Se invece  $d\eta$  è del primo ordine in  $dc_1$  (fig. 1-17 c, d), si ha sempre corrispondenza tra i due segni.

Dove  $dF/dc_1 = 0$  e  $d\eta/dc_1 = 0$ ,  $dF/d\eta$  può essere nullo o finito, come già detto (figg. 1-17 b e 1-17 e); se  $dF/d\eta$  è finito il  $\delta E(\eta)$  è del secondo ordine, il  $\delta E(c_1)$  è del quarto; se  $dF/d\eta$  è nullo il  $\delta E(\eta)$  ed il  $\delta E(c_1)$  sono di ordine più alto, l'uno doppio dell'altro. Se il ramo  $F\eta$  (doppio) è discendente, ambedue i rami  $Fc_1$  corrispondenti sono instabili, se è ascendente i due rami  $Fc_1$  possono essere stabili.

Nel caso della fig. 1-7 il diagramma  $Fc_1$  è quello della fig. 1-8 a ( $c_1 = \varphi$  è l'unica coordinata lagrangiana), il diagramma  $F\eta$  è quello della fig. 1-8 b ( $\eta = w_A$ ). In D si ha  $dF/d\varphi = 0$ ,  $dw_A/d\varphi = 0$ ,  $dF/dw_A > 0$ ; l'equilibrio è stabile sui rami ascendenti perchè la  $\varphi$  è unica coordinata lagrangiana. In D risulta  $d_2E(\eta) > 0$ ,  $d_2E(\varphi) = d_3E(\varphi) = 0$ ,  $d_4E(\varphi) > 0$ .

Nel caso della fig. 1-13 non esiste nessun valore di  $\varphi$  per cui  $d\eta/d\varphi$  possa essere nullo; perciò al diagramma  $Fc_1$  (e cioè  $F\varphi$ , dove  $\varphi$  è unica coordinata lagrangiana) corrisponde un diagramma  $F\eta$  con le stesse inclinazioni, e quindi gli stessi massimi, minimi e flessi; i tratti discendenti del diagramma  $F\varphi$  sono instabili, gli ascendenti stabili, i massimi e minimi neutro instabili, l'eventuale, flesso neutro stabile.

## 6. Il caso di assenza di simmetria.

Come si è già detto, se  $dF/dc_1 \neq 0$ , dalla (d') si trae che è in genere  $d\eta/dc_1 \neq 0$ , e quindi  $dF/d\eta$  finito non nullo; dove, e solo dove  $d\eta/dc_1 = 0$ , risulta  $dF/d\eta = \infty$  (fig. 1-17 f). In questo caso  $d\eta$  è del secondo ordine in

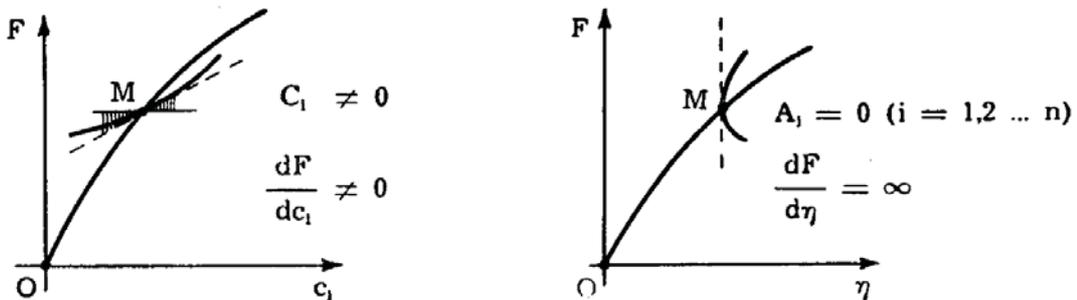


FIG. 1-17 f

$dc_1$ , e deve esserci diramazione, poichè, come già detto, il ramo per cui il  $d\eta$  è del secondo ordine deve stare tutto da una sola parte rispetto alla verticale.

Poichè la tangente è verticale, il ramo non è doppio; e infatti, poichè la tangente in M al ramo  $r_2$  nel diagramma  $Fc_1$  è inclinata, ed i rami  $r_2$  nei due diagrammi  $Fc_1$  ed  $F\eta$  devono corrispondersi, il ramo  $r_2$  è unico, e si sviluppa sopra e sotto l'orizzontale per M. Quello discendente è sicuramente instabile.

Se risulta

$$\frac{d\eta}{dc_1} < 0$$

le considerazioni ora fatte restano valide, ma invertite; e cioè i rami ascendenti

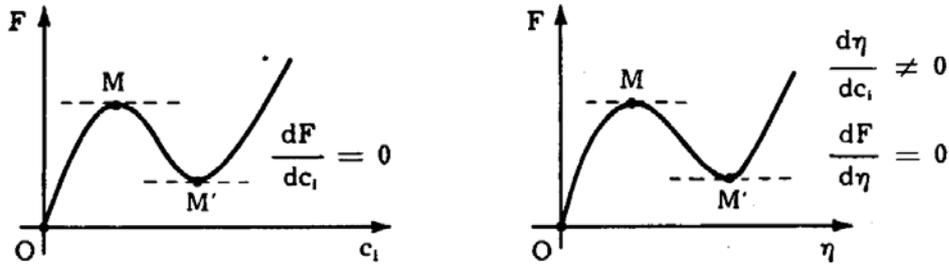


FIG. 1-17 c

del diagramma  $Fc_1$  sono sicuramente instabili, e solo quelli discendenti possono essere stabili (il ramo alla sinistra di  $M$  della fig. 1-17 f è sicuramente instabile).

Dove  $dF/dc_1 = 0$  e  $d\eta/dc_1 \neq 0$ , è pure  $dF/d\eta = 0$ , e si ha nel diagramma  $F\eta$  massimo, minimo o flesso come nel diagramma  $Fc_1$ ; quindi l'equilibrio è neutro instabile o instabile nei primi due casi (fig. 1-17 c), come già visto, mentre nel terzo (fig. 1-17 d) il  $\delta E(\eta)$  come il  $\delta E(c)$  è di

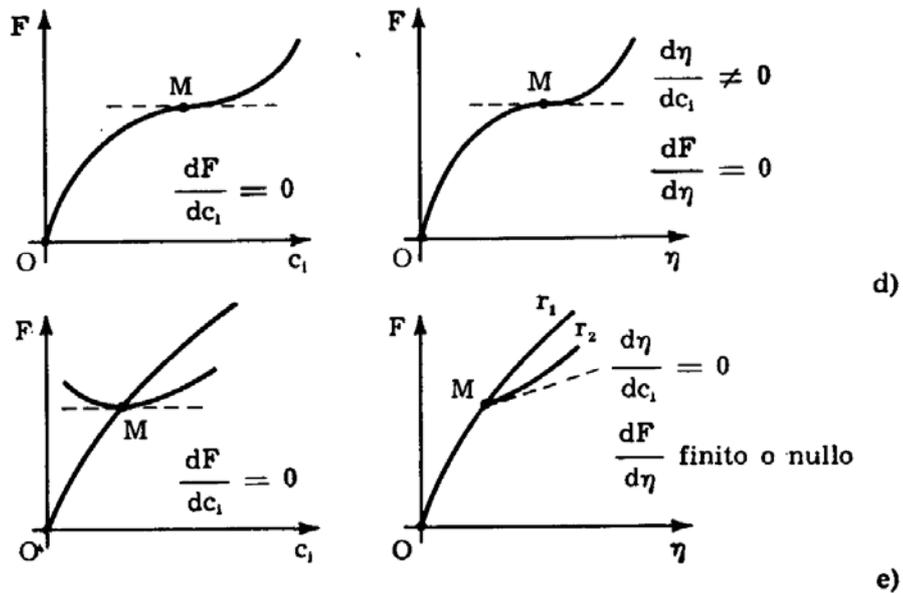


FIG. 1-17 d, e

ordine pari, da quattro in su, positivo o negativo secondo che la  $F(\eta)$  è crescente o decrescente, e l'equilibrio è, per  $F(\eta)$  decrescente, neutro instabile (o instabile).

Per esempio, nel caso della fig. 1 a,  $\eta$  corrisponde a  $w_B$ , ed assegnato tale valore sono possibili per esso un solo valore di  $F$ , ma due configurazioni, simmetriche rispetto all'asse  $z$ ; invece  $v_B$  può essere assunta come coordinata lagrangiana.

Si ha in tal caso, per una variazione  $\delta v$  a partire dalla configurazione rettilinea,

$$\delta v = dv_B \left( 1 - \cos \frac{\pi z}{2h} \right)$$

e ancora, limitandosi ai termini fino a quelli del secondo ordine in

$$dw_B = \frac{1}{2} \int_0^h (\delta v)^2 dz = dv_B^2 \frac{\pi^2}{10h} ;$$

ciò è conferma che a  $\pm dv_B$  corrisponde lo stesso valore di  $dw_B$ .

Si ricordi pure che l'ordine delle variazioni  $\delta E$  si considera sempre con riferimento alle coordinate lagrangiane; in tal senso il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale stabilisce che l'annullarsi della variazione  $\delta_1 E$  del primo ordine è condizione necessaria e sufficiente di equilibrio, il principio dei lavori virtuali assicura che l'uguaglianza dei lavori  $\delta_1 L_e$  e  $-\delta_1 L_i$  del primo ordine è anch'essa condizione necessaria e sufficiente di equilibrio, e nello spirito dei principi di *Dirichlet* e *Ljapunov* si decide della stabilità o meno dell'equilibrio in base all'ordine delle prime variazioni  $\delta E$  non nulle.

Per quanto sopra, si preferisce in genere rappresentare il comportamento delle strutture assumendo per ordinata la  $F$  già definita, e per ascissa una qualsiasi coordinata lagrangiana  $c_1$ .

La  $c_1$  si sceglie, come già detto, in modo che  $dc_1$  definisca la variazione di configurazione (si esclude così  $dF/dc_1 = \infty$ ).

Se

$$\frac{d\eta}{dc_1} \geq 0 \quad (e')$$

le considerazioni fatte sul diagramma  $F \eta$  possono trasferirsi al diagramma  $F c_1$ . Infatti dove  $dF/dc_1 < 0$  (ramo discendente) senza diramazioni è pure  $dF/d\eta < 0$  (fig. 1-17 c) e quindi il ramo è instabile; dove  $dF/dc_1 > 0$  (ramo ascendente) senza diramazioni è pure  $dF/d\eta > 0$ , e può aversi stabilità.

Se c'è diramazione,  $dF/d\eta = \infty$  ed il ramo  $F \eta$ , sia per  $dF/dc_1 > 0$ , che per  $dF/dc_1 < 0$ , è tutto da una parte della verticale, e presenta un ramo ascendente e uno discendente, sicuramente instabile.

invece  $d\eta$  è di ordine due nelle  $dc$ , risulta

$$\delta_2 \mathbf{E}(c) = \delta_3 \mathbf{E}(c) = 0$$

$$\delta_4 \mathbf{E}(c) < 0 .$$

In questo caso l'equilibrio è neutro instabile o instabile, secondo che le altre  $\delta_2 \mathbf{E}$  sono tutte nulle o positive, o ve n'è almeno una negativa. Se si ripete lo stesso ragionamento nel tratto OI (o LN) ascendente (fig. 1-17 a) si osserva che è  $\delta_2 \mathbf{E}(\eta) > 0$ ; questo non consente però di dire che la configurazione è stabile, come nei sistemi ad un sol grado di libertà, perchè la variazione di configurazione è, nel caso in esame, una variazione particolare, per l'ipotesi che vincola  $\eta$ , mentre per la stabilità occorre che sia  $\delta_2 \mathbf{E}(c) > 0$  per tutte le variazioni geometricamente possibili della configurazione.

Nel punto I di massimo è  $\delta \mathbf{E}(\eta) \leq 0$  secondo che  $d\eta \geq 0$ , quindi  $\delta \mathbf{E}(\eta)$  è di ordine dispari in  $d\eta$ ; se ne trae

$$\delta_2 \mathbf{E}(\eta) = 0$$

$$\delta_n \mathbf{E}(\eta) \neq 0$$

per  $n$  dispari (ciò si deduce anche dalla (z)).

Quindi risulta

$$\delta_2 \mathbf{E}(c) = 0$$

$$\delta_n \mathbf{E}(c) \neq 0$$

per  $n$  dispari.

L'equilibrio è neutro instabile se per tutte le altre variazioni risulta  $\delta_2 \mathbf{E}(c) \geq 0$ , se no è instabile.

Analogamente si procede nel punto L di minimo.

In riassunto:

a) i rami  $\mathbf{F}\eta$  discendenti (si esclude il caso  $d\mathbf{F}/d\eta = \infty$ ) sono sicuramente instabili (instabili o neutro instabili nei punti di diramazione);

b) solo i rami  $\mathbf{F}\eta$  ascendenti possono essere stabili;

c) nei punti di massimo o di minimo dei diagrammi  $\mathbf{F}\eta$  si ha neutro instabilità (o instabilità).

La scelta di  $\eta$  come parametro della configurazione è stata una necessità di dimostrazione; in genere però  $\eta$  non corrisponde ad una delle coordinate lagrangiane  $c_i$  prima definite, e non definisce in modo univoco la configurazione, sia pure compatibile.

e la (d') è verificata. In  $F_1$  invece non si può far riferimento al ramo diramato  $F\eta$  che non ha corrispondente in  $Fc_2$ , ma al ramo verticale, per cui si ha

$$C_2 = \infty$$

$$A_2 = \frac{0}{0}$$

$$\frac{1}{k} = \infty$$

e la (d') è ancora verificata.

Se è  $dF/dc_1 = C_1 \neq 0$ , deve essere  $dF/d\eta$  finito dove  $d\eta/dc_1 = A_1 \neq 0$ ,  $dF/d\eta = \infty$  dove  $A_1 = 0$  (fig. 1-17 f). Si farà vedere che se  $A_1 = 0$  il ramo deve diramarsi da un altro. Se perciò sul ramo  $Fc_1$  non vi sono punti di diramazione,  $A_1 \neq 0$ , ed il ramo  $F\eta$ , se  $d\eta/dc_1 > 0$ , è crescente o decrescente come il ramo  $Fc_1$ .

Se in un punto M del diagramma  $Fc_1$  è  $C_1 = 0$ , se cioè in M la tangente al diagramma  $Fc_1$  è orizzontale, sono interessanti due casi.

a) La  $d\eta/dc_1 = 0$ . La  $dF/d\eta$  (fig. 1-17 e) può essere finita o nulla. Il  $d\eta$  è del secondo ordine nelle  $dc$ . Il ramo  $r_2$  delle  $F\eta$  in M, relativo al  $d\eta$  del secondo ordine, è tutto da una parte rispetto alla verticale per M (e, poichè corrisponde ai due rami  $Fc_1$  a destra e a sinistra di M, vale per due) perchè il  $d\eta$  non cambia segno con le  $dc$ , e quindi per le  $dc$  e le  $-dc$  si ha lo stesso  $d\eta$ . Ciò significa che in M il ramo  $r_2$  deve diramarsi da un altro ramo  $r_1$  altrimenti, per continuità, si spezzerebbe. Ciò accade anche nel diagramma  $Fc_1$ .

I due rami  $r_1$  ed  $r_2$ , possono presentare tangente diversa in M; infatti, poichè nel diagramma  $Fc_1$ , in M, il ramo  $r_2$  ha tangente orizzontale, ed il ramo  $r_1$  tangente inclinata, nel passaggio tra  $\eta$  ed  $\eta + d\eta$  la  $\delta E_{r_1}$  e la  $\delta E_{r_2}$  sono di ordine 2 e 4 in  $dc_1$ , e quindi la differenza (f')

$$\delta E_{r_1} - \delta E_{r_2}$$

è di ordine 2 in  $dc_1$ . Le  $\delta E_{r_1}$  e  $\delta E_{r_2}$  sono di ordine 2 in  $d\eta$ , e la loro differenza può essere quindi di ordine 2 o più in  $d\eta$ . Poichè la  $\delta E$  espressa in funzione di  $d\eta$  è fornita da (z), si ha

$$\delta E_{r_1} - \delta E_{r_2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dF}{d\eta} \right)_2 - \left( \frac{dF}{d\eta} \right)_1 \right] (d\eta)^2$$

e i due valori di  $dF/d\eta$  possono tendere a valori uguali o diversi per  $d\eta$  tendente a zero.

b) La  $d\eta/dc_1 \neq 0$ . E' quindi  $dF/d\eta = 0$ .

Sia  $Fc_1$  che  $F\eta$  possono presentare massimo, minimo (fig. 1-17 c) o flesso (fig. 1-17 d).

E' necessario, pur avendo escluso  $dF/d\eta = \infty$ , distinguere i due casi:  $d\eta$  del primo o del secondo ordine in  $dc_1$ , e quindi nelle  $dc$ .

Se  $d\eta$  è del primo ordine nelle  $dc$ ,  $\delta E$  è di ordine due anche nelle  $dc$ ; poichè almeno per la variazione  $CC'$  è  $\delta_2 E(c) < 0$ , la C è instabile. Se

Se  $dc_1$  tende a zero, le altre  $dc$ , se non sono nulle, tendono a zero con  $dc_1$ ; quindi l'ordine di  $d\eta$  nella  $dc_1$  è l'ordine di  $d\eta$  nelle coordinate lagrangiane. E' escluso, per quanto detto, il caso  $dF/dc_1 = \infty$ .

La relazione

$$\frac{dF}{dc_1} = \frac{dF}{d\eta} \frac{d\eta}{dc_1} \tag{d'}$$

che può anche scriversi

$$C_1 = \frac{1}{k} A_1$$

lega i rami  $F(c_1)$  ed  $F(\eta)$  corrispondenti. Per esempio, nel caso della trave di sezione costante della fig. 1-17 b, si vedrà come in  $F_1 = \pi^2 EI/l^2$  esista una prima

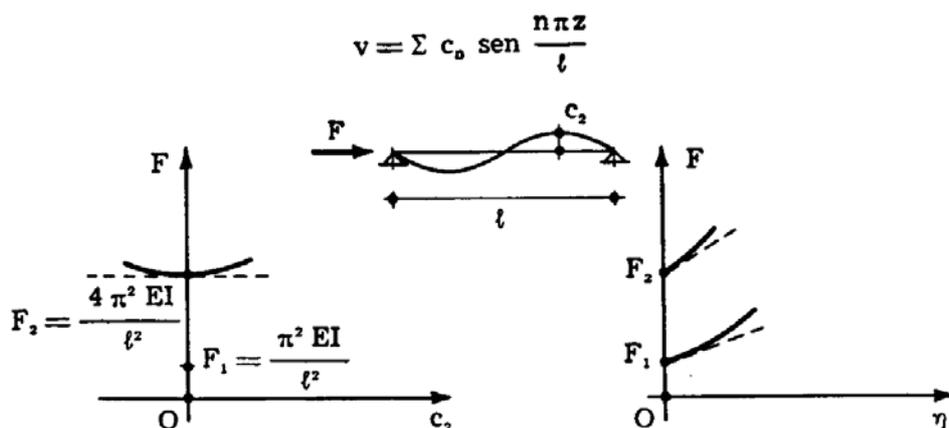


FIG. 1-17 b

diramazione che impegna la sola  $c_1$ , in  $F_2 = 4 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$  una seconda diramazione che impegna solo la  $c_2$ , e così via di seguito. Nel diagramma  $Fc_2$  compare la sola diramazione in  $F_2$ , e qui si ha, per il ramo diramato,

$$C_2 = \frac{dF}{dc_2} = 0$$

$$A_2 = \frac{d\eta}{dc_2} = 0$$

$$\frac{1}{k} = \frac{dF}{d\eta} = \text{finito non nullo}$$

Risulta (per la variazione tra le due configurazioni compatibili  $\eta = OA$  ed  $\eta' = OA'$ )

$$F = F_c + \left( \frac{dF}{d\eta} \right)_c d\eta + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2F}{d\eta^2} \right)_c (d\eta)^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{d^3F}{d\eta^3} \right)_c (d\eta)^3 + \dots$$

e quindi

$$\begin{aligned} \delta E = \text{Area } CC'D' &= \int_0^{d\eta} (F - F_c) dd\eta = \\ &= \frac{1}{2} F'_c (d\eta)^2 + \frac{1}{6} F''_c (d\eta)^3 + \frac{1}{24} F'''_c (d\eta)^4 + \dots \end{aligned} \quad (z)$$

L'ordine di  $\delta E(\eta)$  è quindi  $n+1$ , se la prima derivata non nulla è la  $d^n F/d\eta^n$ .  
Il  $d\eta$  può essere espresso nella forma

$$d\eta = \sum a_i dc_i + \sum b_{ij} dc_i dc_j + \dots$$

dove le  $dc$  sono le variazioni connesse al passaggio tra le configurazioni compatibili  $OA$  ed  $OA'$ .

Le  $dc$  non sono indipendenti, perchè si procede attraverso configurazioni compatibili; basta perciò in genere una  $dc_i$  a fissare la configurazione, e quindi le altre  $dc$ . Può darsi però che una variazione di configurazione, sia pure tra configurazioni compatibili, impegni solo alcune, o una sola, delle coordinate lagrangiane; le altre non possono, in tal caso, definire la variazione. Classico è l'esempio della trave di sezione costante caricata di punta, ove per coordinate lagrangiane si assumano i coefficienti dello sviluppo in serie trigonometrica della deformata.

Preso una  $c_i$  a definire la configurazione, e sostituendo alle altre  $dc$  le loro espressioni in funzione di  $dc_i$ , si ottiene  $d\eta$  in funzione della sola  $dc_i$

$$d\eta = d\eta(dc_i) = A_i dc_i + B_i (dc_i)^2 + \dots \quad (a')$$

Si ponga

$$dc_i = \frac{1}{C_i} dF; \quad (b')$$

dalle (a') e (b') si trae

$$d\eta = k dF + h dF^2 + \dots \quad (c')$$

dove

$$k = \frac{A_i}{C_i} .$$

Se si sceglie un'altra variabile lagrangiana a definire la configurazione, il rapporto  $A_i/C_i$  resta invariato.

La  $c_i$  deve essere scelta in modo da definire la variazione, e perciò non può essere  $dc_i = 0$  durante la variazione stessa.

associato è univocamente definito in forma ed intensità, e quindi sono definiti anche i valori di  $F$  che si associano alla  $\eta$ .

La lunghezza  $\eta$  si può chiamare, sotto il suddetto vincolo, *parametro della configurazione*.

Se, data la forma di carico, in un diagramma si riportano in ascisse i valori di  $\eta$ , e in ordinate i valori di  $F$  (fig. 1-17 a), si può dire che, analo-

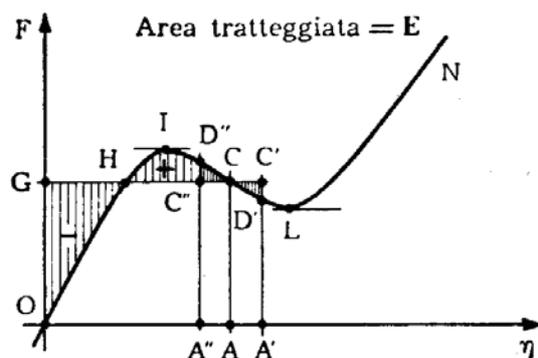


FIG. 1-17 a

gamente a quanto già ricavato alla fine del paragrafo precedente per i sistemi ad un grado di libertà, ai rami discendenti corrisponde equilibrio instabile. Infatti, data la configurazione  $OA$  sotto il carico  $AC$ , si ha

$$L_e = L = \int F d\eta = \text{Area } OICA$$

$$P = \quad \quad \quad - \text{Area } OGCA$$

$$E = \quad \quad \quad - \text{Area } OGH + \text{Area } HIC .$$

Si faccia variare  $\eta$ , sotto  $F$  costante, da  $OA$  ad  $OA'$ .

Il punto  $C'$  rappresenta una situazione di non equilibrio, poichè alla  $\eta = OA'$  non può corrispondere la  $F = A'C'$ ; però  $C'$  non rappresenta una configurazione qualsiasi, ma soltanto una delle possibili configurazioni di equilibrio sotto l'assegnata forma di carico, e precisamente quella corrispondente alla  $F = A'D'$ . La variazione  $dE$  è pari all'area del triangolo curvilineo  $CC'D'$ , ed è negativa. Analogamente si dimostra che  $dE$  è negativo se  $\eta$  varia da  $OA$  ad  $OA''$ .

La tangente in  $C$  è inclinata; se si esclude il caso  $dF/d\eta = \infty$  (tangente verticale) l'area del triangolo  $CC'D'$  è di ordine due in  $d\eta$ . Occorre conoscere il suo ordine nelle  $dc$ .

come somma di  $n$  funzioni  $u_i, v_i, w_i$  note, ciascuna congruente (\*), moltiplicate per  $n$  numeri  $c_i$ ; le  $u_i, v_i, w_i$  devono essere tali da definire univocamente gli spostamenti dei punti del sistema. Questo è così ridotto ad  $n$  libertà, poichè la configurazione è funzione degli  $n$  numeri indipendenti  $c_i$ , che assumono l'aspetto di *coordinate lagrangiane* di un sistema olo-nomo, e la soluzione è tanto meglio approssimata quanto più numerose sono le funzioni approssimanti, e quanto più oculata è la loro scelta. E' questo il procedimento del *Ritz*, già esposto nel secondo volume.

Si supporrà nel seguito, salvo esplicito avviso, che le forze  $F_i$  agenti sulla struttura siano applicate sempre negli stessi punti, e proporzionali, come già detto, secondo i coefficienti  $\lambda_i$  ad una forza  $F$ , e cioè che le  $F_i$  variano conservando inalterati i mutui rapporti (esse cioè rientrano nelle forze conservative); si precisa che le forze  $F_i$  si intendono scomposte secondo le componenti lungo i tre assi, dal che si trae che le forze agenti non possono ruotare; si precisa pure che la  $F$  ha solo funzione di parametro di riferimento, e può anche non essere applicata alla struttura.

La  $F$  si chiama *parametro delle forze*.

Il lavoro delle forze è fornito dalla (1-6); la lunghezza  $\eta$  è funzione della configurazione, e cioè delle  $n$  costanti  $c_i$ . Risulta così

$$E = - F \eta + L .$$

La  $\eta$  è funzione univoca delle  $c_i$ , poichè è

$$\eta = \Sigma \lambda_i s_i \quad (7)$$

e gli spostamenti  $s_i$  sono funzioni univoche delle  $c_i$ ; ma la configurazione, e cioè le  $c_i$ , non sono legate alla  $\eta$  da un'unica relazione. Così pure, data  $F$  sono note le configurazioni e quindi le  $\eta$ ; data  $\eta$ , invece, non sono univocamente fissate le  $s_i$ , e non è nota  $F$ . Se però si considerano solo le configurazioni di equilibrio relative a tutti i valori di  $F$ , e cioè relative solo alla assegnata forma di carico di cui  $F$  è il parametro (*configurazioni compatibili*), si può dire che  $\eta$  definisce la configurazione o le configurazioni; infatti, assegnata  $\eta$ , delle infinite ennuple di valori  $c_i$  soluzioni della (1-7) solo una o un numero finito di esse (un esempio di quest'ultimo caso è l'asta caricata da una forza parallela all'asse) soddisfano l'equilibrio con l'assegnata forma di carico. D'altro canto è noto che, assegnati gli spostamenti dei punti di applicazione delle forze, il sistema di forze cui essi si

---

(\*) Le condizioni di congruenza esterna possono anche essere imposte globalmente a tutte le funzioni  $u_i, v_i, w_i$ ; in tal caso le coordinate lagrangiane, che devono essere indipendenti, sono in numero minore di  $n$ .

anche in questo caso la  $E(\eta)$  presenta un flesso, e l'equilibrio è neutro instabile (\*).

Negli esempi esaminati prima la forza è unica,  $\eta$  è il corrispondente spostamento.

Si osservi che nei punti C delle figg. 1-16 d ed 1-16 e, ove il diagramma

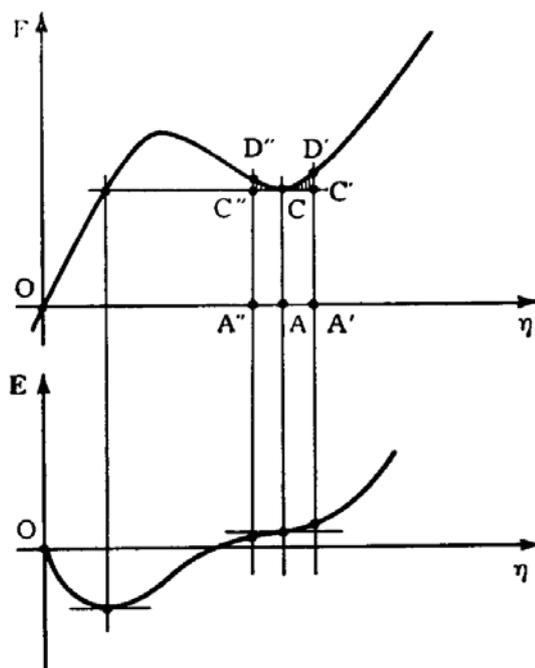


FIG. 1-16 e

$F\varphi$  presenta tangente orizzontale, tutte le configurazioni prossime alla C sono ovviamente di equilibrio; d'altronde in questo caso, poichè la coordinata  $\varphi$  è unica, la condizione  $d_2E=0$  garantisce che l'unica possibile variazione prima di  $E$  nei punti vicini a C è nulla.

### 5. Sistemi a più gradi di libertà: diagrammi $F\eta$ ed $Fc_1$ .

I due esempi del par. 1-3 sono relativi a sistemi ad un sol grado di libertà; le strutture reali però sono quasi tutte dei sistemi elastici continui, che si possono ridurre, con approssimazione, a strutture con un numero di libertà finito, che generalmente però è maggiore di uno.

Basta, a ciò fare, esprimere le componenti  $u v w$  dello spostamento

(\*) Il segno delle aree elementari può ottenersi, oltre che dalle considerazioni già fatte, direttamente dalla formula (z), che si incontrerà tra poco.

In C l'equilibrio è stabile. La  $dE$  infatti è di ordine due in  $d\eta$ , e per la ( $v$ ) è di ordine due anche in  $d\varphi$ .

Il contrario accade (fig. 1-16 c) se la configurazione C è situata sul ramo  $F\eta$  decrescente; in C risulta  $dE = d_2E < 0$ , l'equilibrio è perciò instabile. Dal diagramma  $E(\eta)$  per  $F = \text{cost}$  si osserva che esso attinge due minimi in corrispondenza delle altre due configurazioni di equilibrio, che sono stabili.

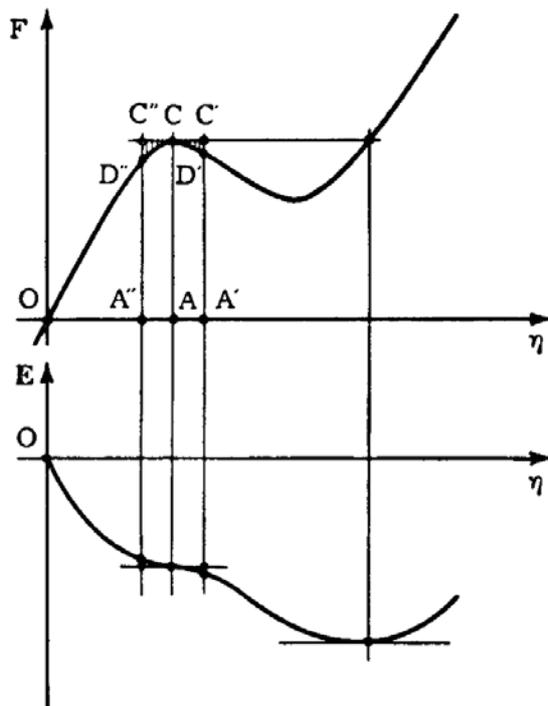


FIG. 1-16 d

Se C è la configurazione di vertice dove  $F(\eta)$  è massima (fig. 1-16 d), risulta

$$dE > 0 \quad \text{per } d\eta < 0$$

$$dE < 0 \quad \text{per } d\eta > 0 .$$

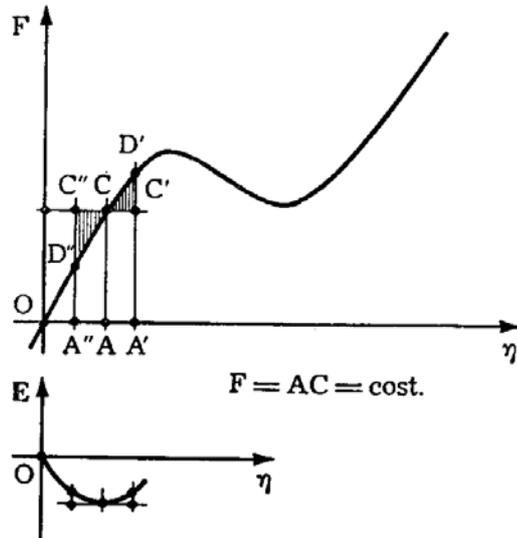
In tal caso  $dE$  è di ordine dispari, dal terzo in poi, ed in C la  $E(\eta)$  presenta un flesso; quindi l'equilibrio è neutro instabile. Se C è la configurazione di vertice dove F è minima (fig. 1-16 e), si ha

$$dE < 0 \quad \text{per } d\eta < 0$$

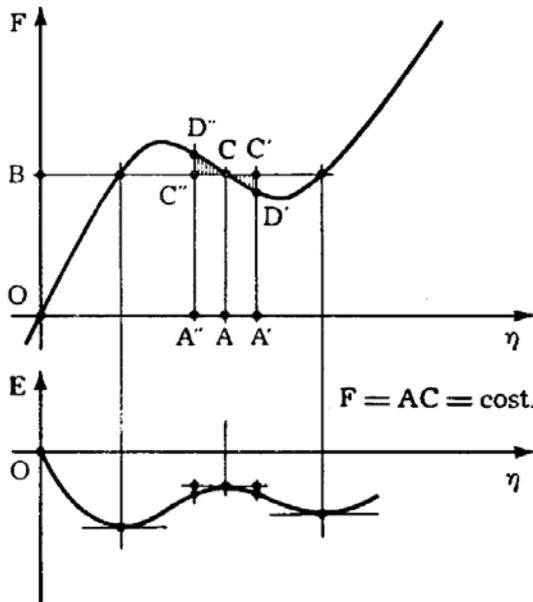
$$dE > 0 \quad \text{per } d\eta > 0 ;$$

aumenta, portandosi da A ad A', si ha

$$\begin{aligned} dL &= \text{Area } A C D' A' \\ dP &= - \text{Area } A C C' A' \\ dE &= \text{Area } C C' D' > 0 ; \end{aligned}$$



b)



c)

FIG. 1-16 b, c

se  $\eta$  diminuisce, portandosi da A ad A'', è

$$\begin{aligned} dL &= - \text{Area } A C D'' A'' \\ dP &= \text{Area } A C C'' A'' \\ dE &= \text{Area } C C'' D'' > 0 . \end{aligned}$$

$s_1$  dei punti di applicazione delle  $F_1$ , e cioè della coordinata lagrangiana  $\varphi$ . Si supponga che  $\eta$  cresca con  $\varphi$ , e cioè

$$\frac{d\eta}{d\varphi} > 0. \quad (v)$$

In questa ipotesi, se il diagramma  $F\varphi$  è crescente lo è pure il diagramma  $F\eta$ , e viceversa, perchè

$$\frac{dF}{d\varphi} = \frac{dF}{d\eta} \frac{d\eta}{d\varphi},$$

e le due derivate  $dF/d\varphi$  e  $dF/d\eta$  hanno lo stesso segno. Ma è facile dimostrare che se il diagramma  $F\eta$  è crescente (si esclude però il caso

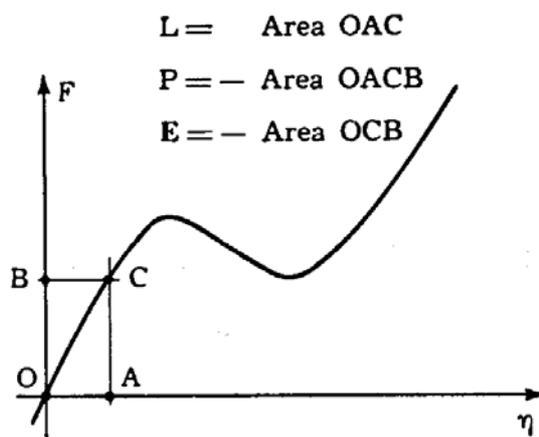


FIG. 1-16 a

$dF/d\eta = \infty$ ) la configurazione è stabile, e viceversa. Infatti, in una configurazione generica C risulta (fig. 1-16 a)

$$L = L_e = F d\eta = \text{Area OAC}$$

$$P = - F \eta = - \text{Area OACB}$$

$$E = P + L = - \text{Area OCB};$$

si è preferito porre  $\eta = 0$  per  $F = 0$ , e valutare da questa quota la P. In corrispondenza di una configurazione C sul ramo  $F\eta$  crescente, (fig. 1-16 b), si faccia variare la configurazione e cioè  $\eta$ , lasciando F inalterato. Se  $\eta$

Se le soluzioni della (u) nel tratto  $0 \leq \varphi \leq \pi$  sono due distinte,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , il diagramma  $F(\varphi)$  si presenta con due tratti crescenti ed uno decrescente (fig. 1-15); nei tratti crescenti la configurazione, poichè vale an-

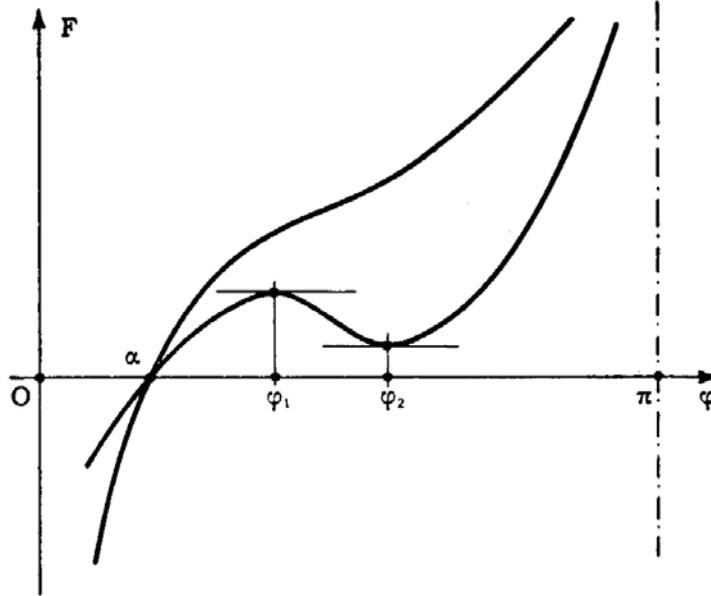


FIG. 1-15

cora la (t), è stabile, nel tratto decrescente è instabile. Se le soluzioni sono coincidenti o non esistono, il diagramma è sempre crescente e la configurazione è sempre stabile. Si ha il primo comportamento quando  $k_n l^2$  predomina su  $k_f$ , e il secondo quando  $k_f$  predomina su  $k_n l^2$ .

#### 4. Stabilità dei rami di equilibrio nei sistemi ad un grado di libertà.

Nel caso dei sistemi ad un sol grado di libertà, come quelli finora esaminati, la stabilità o meno di un ramo di equilibrio può riconoscersi con un ragionamento sintetico molto elegante, che si riporta da *Zanaboni*; questi, inoltre, ha trattato secondo lo stesso criterio le strutture a più gradi di libertà (§ 1-5).

Le forze  $F_i$  agenti siano proporzionali, secondo i coefficienti  $\lambda_i$ , ad ad una forza  $F$ ; esse cioè conservino inalterati i mutui rapporti (e rientrano perciò nelle forze conservative). In tal caso le variazioni delle forze sono definite dalla variazione  $dF$  di  $F$ . Il lavoro è fornito da

$$dL_e = \sum F_i ds_i = F \sum \lambda_i ds_i = F d\eta ; \quad (6)$$

la  $\eta$ , che ha le dimensioni di una lunghezza, è funzione degli spostamenti,

che per  $F=0$  ammette la sola radice  $\varphi = \alpha$ . Dalla (o) si trae

$$\frac{dF}{d\varphi} = 4 \frac{k_r}{l \operatorname{sen} \varphi} \left( 1 - \frac{\varphi - \alpha}{\operatorname{tg} \varphi} \right);$$

La  $dF/d\varphi$  è positiva in tutto l'intervallo  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , e quindi la  $F(\varphi)$  è sempre crescente. Dalla

$$\frac{d^2E}{d\varphi^2} = -F l \cos \varphi + 4 k_r = 4 k_r \left( 1 - \frac{\varphi - \alpha}{\operatorname{tg} \varphi} \right) = l \operatorname{sen} \varphi \frac{dF}{d\varphi},$$

coincidente con la (t), si trae che la configurazione è sempre stabile, cosa del resto ovvia, essendo la configurazione unica.

Nel caso più generale di  $k_r \neq 0$  e  $k_n \neq 0$  contemporaneamente, il comportamento è intermedio tra quelli delle figg. 1-13 ed 1-14.

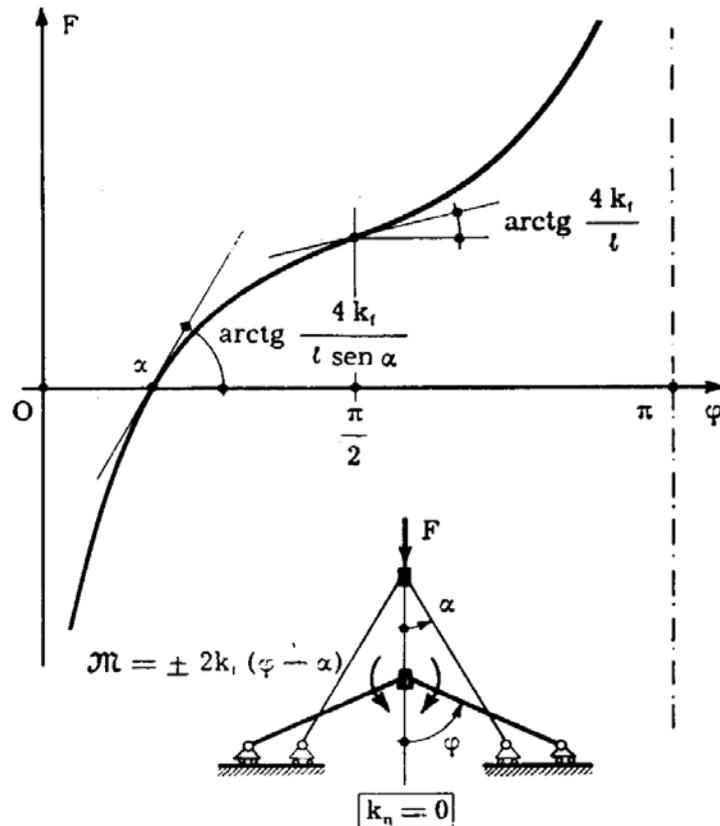


FIG. 1-14

Dalla (o) si hanno attraverso la  $dF/d\varphi = 0$  le posizioni  $\varphi$  per cui la  $F(\varphi)$  presenta tangente orizzontale:

$$2 \frac{k_r}{k_n l^2} \left( 1 - \frac{\varphi - \alpha}{\operatorname{tg} \varphi} \right) = \operatorname{sen}^2 \varphi - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \varphi}. \quad (u)$$

$\varphi_m$  e  $\pi - \varphi_m$ ; quindi la  $dF/d\varphi$  è positiva (e la  $F$  crescente) negli intervalli  $0 \leq \varphi \leq \varphi_m$  e  $\pi - \varphi_m \leq \varphi \leq \pi$ , è negativa (e la  $F$  decrescente) nell'intervallo  $\varphi_m \leq \varphi \leq \pi - \varphi_m$ .

Dalla

$$\frac{d^2E}{d\varphi^2} = -F \ell \cos \varphi + 2 k_n \ell^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + \sin \alpha \sin \varphi)$$

e dalla (p) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d^2E}{d\varphi^2} &= 2 k_n \ell^2 \left( -\cos^2 \varphi + \sin \alpha \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} + \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + \sin \alpha \sin \varphi \right) = \\ &= 2 k_n \ell^2 \sin \varphi \left( \frac{\sin \alpha}{\sin^2 \varphi} - \sin \varphi \right); \end{aligned}$$

per la (q) si può scrivere

$$\frac{d^2E}{d\varphi^2} = \ell \sin \varphi \frac{dF}{d\varphi}. \quad (t)$$

Dalla (t) risulta che il segno di  $d^2E/d\varphi^2$  coincide in tutto l'intervallo  $0 \leq \varphi \leq \pi$  con quello della  $dF/d\varphi$ ; perciò dove la  $F$  è crescente l'equilibrio è stabile, dove  $F$  è decrescente l'equilibrio è instabile. Così pure per la (p) si ottiene

$$\frac{d^3E}{d\varphi^3} = -3 k_n \ell^2 \sin 2\varphi;$$

nei punti  $\varphi_m$  e  $\pi - \varphi_m$  si ha perciò

$$\frac{d^2E}{d\varphi^2} = 0$$

$$\frac{d^3E}{d\varphi^3} \leq 0$$

quindi in essi l'equilibrio è neutro instabile, poichè la  $E$  presenta un flesso.

Si tratta adesso il secondo caso particolare,  $k_n = 0$  (fig. 1-14). La (n) fornisce

$$F = 4 \frac{k_t}{\ell} \frac{\varphi - \alpha}{\sin \varphi}$$

curva risulta emisimmetrica rispetto all'asse  $\varphi = \pi/2$ , perchè sia  $\cos \varphi$  che  $\text{ctg } \varphi$  hanno valori uguali e contrari per  $\varphi$  e  $\pi - \varphi$ .

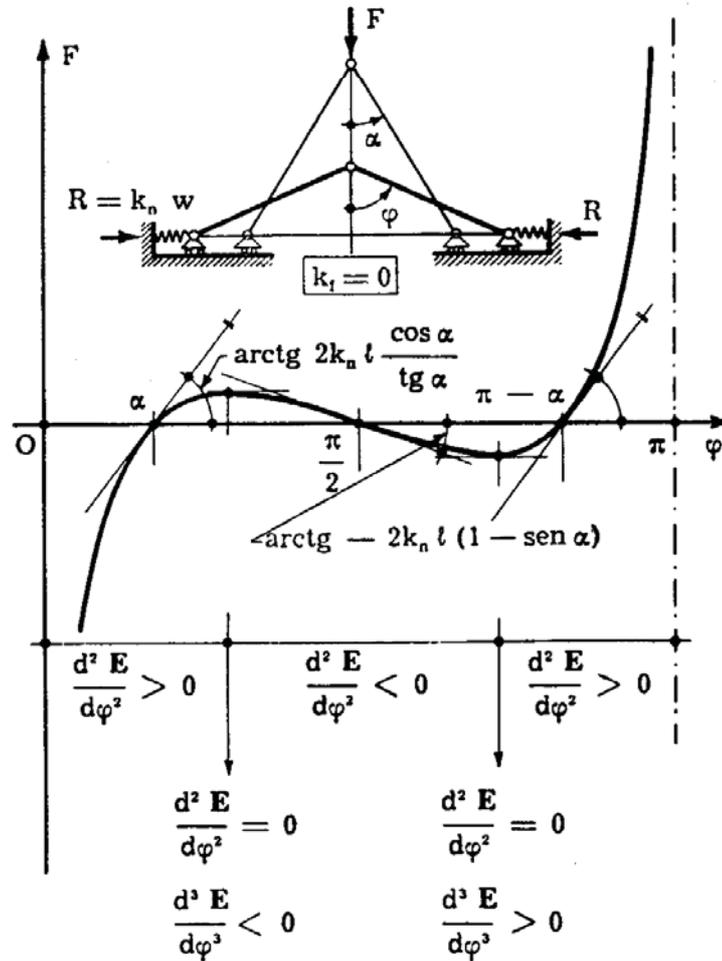


FIG. 1-13

Dalla (o) si ha

$$\frac{dF}{d\varphi} = 2 k_n \ell \left( \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen}^2 \varphi} - \text{sen } \varphi \right); \quad (q)$$

la  $dF/d\varphi = 0$  ammette le due radici  $\varphi_m$  e  $\pi - \varphi_m$  fornite dalla relazione

$$\text{sen } \varphi_m = \sqrt[3]{\text{sen } \alpha} \quad (r)$$

cui corrispondono per  $F$  i due valori uguali e contrari

$$F_m = 2 k_n \ell (1 - \text{sen } \alpha^{2/3})^{3/2}. \quad (s)$$

La  $dF/d\varphi$  ha nell'intervallo  $0 \leq \varphi \leq \pi$  soltanto i due punti di nullo

La condizione  $dE/d\varphi = 0$  fornisce le configurazioni di equilibrio; quindi  $F$  e  $\varphi$  sono legate dalla relazione

$$F = 4 \frac{k_f}{l} \frac{\varphi - \alpha}{\operatorname{sen} \varphi} + 2 k_n l (\cos \varphi - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{ctg} \varphi). \quad (n)$$

La (n) permette, al solito, la costruzione del diagramma  $F(\varphi)$  calcolando i valori di  $F$  per i successivi valori di  $\varphi$ .

Dalla (n) si ha

$$\frac{dF}{d\varphi} = 4 \frac{k_f}{l} \left( \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} - \frac{\varphi - \alpha}{\operatorname{sen} \varphi \operatorname{tg} \varphi} \right) + 2 k_n l \left( \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}^2 \varphi} - \operatorname{sen} \varphi \right). \quad (o)$$

Si trae dalle (n) ed (o)

$\varphi$	$\frac{dF}{d\varphi}$	$F$
0	$\infty$	$-\infty$
$\alpha$	$4 \frac{k_f}{l \operatorname{sen} \alpha} + 2 k_n l \frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$	0
$\frac{\pi}{2}$	$4 \frac{k_f}{l} - 2 k_n l (1 - \operatorname{sen} \alpha)$	$4 \frac{k_f}{l} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$
$\pi - \alpha$	$4 \frac{k_f}{l} \left( \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} + \frac{\pi - 2\alpha}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \alpha} \right) + 2 k_n l \frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$	$4 \frac{k_f}{l} \frac{\pi - 2\alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$
$\pi$	$\infty$	$\infty$

In ogni caso quindi le due rette  $\varphi = 0$  e  $\varphi = \pi$  sono asintoti della curva, che taglia l'asse delle  $\varphi$  in  $\varphi = \alpha$  sotto un angolo positivo.

Si esamini prima il caso  $k_f = 0$  (fig. 1-13).

La (n) si semplifica in

$$F = 2 k_n l (\cos \varphi - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{ctg} \varphi) \quad (p)$$

che, per  $F = 0$ , ammette le tre radici  $\varphi = \alpha$ ,  $\varphi = \pi/2$  e  $\varphi = \pi - \alpha$ . La

da due molle elastiche. Il sistema è ad un grado di libertà, e come coordinata lagrangiana si assume l'angolo  $\varphi$  che l'asta BC forma con la

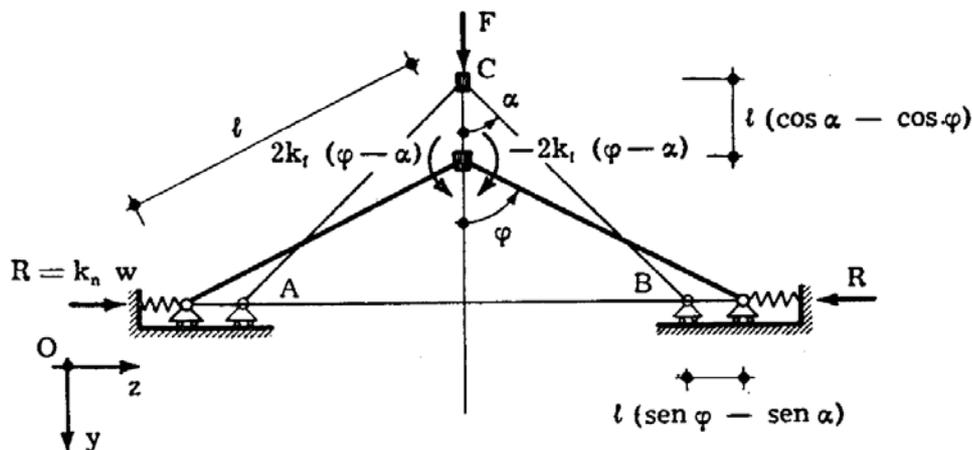


FIG. 1-12

verticale. Per  $\varphi = \alpha$ , il concio sia indeformato; le coppie che esso esercita sulle due aste siano fornite da

$$\mathcal{M} = k_f \Delta\vartheta = \pm 2 k_f (\varphi - \alpha)$$

ove  $\Delta\vartheta$  è la rotazione relativa tra le due aste a partire da  $\varphi = \alpha$ . Ognuna delle molle sia scarica per  $\varphi = \alpha$ , e sviluppi una reazione

$$R = k_n w = k_n l (\sin \varphi - \sin \alpha) .$$

La struttura sia caricata in C da una forza  $F$  verticale, positiva se diretta verso il basso.

L'energia potenziale totale, presa nulla per  $\varphi = \alpha$ , è fornita da

$$E = -F l (\cos \alpha - \cos \varphi) + 2 k_f (\varphi - \alpha)^2 + k_n l^2 (\sin \varphi - \sin \alpha)^2 .$$

Si ha così

$$\frac{dE}{d\varphi} = -F l \sin \varphi + 4 k_f (\varphi - \alpha) + 2 k_n l^2 (\sin \varphi - \sin \alpha) \cos \varphi$$

$$\frac{d^2E}{d\varphi^2} = -F l \cos \varphi + 4 k_f + 2 k_n l^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + \sin \alpha \sin \varphi)$$

$$\frac{d^3E}{d\varphi^3} = F l \sin \varphi + 2 k_n l^2 \cos \varphi (\sin \alpha - 4 \sin \varphi) .$$

$\varphi = 0$ ; il valore di  $\mathbf{E}$  in  $\varphi = \varphi_d$  è invece più elevato di quello della stessa  $\mathbf{E}$  in  $\varphi = 0$ ; il segmento  $AB$ , maggiore di zero, è la variazione di  $\mathbf{E}$  prodotta dalla  $F_d$ , pari al lavoro svolto dalla  $F_d$  (Cap. VIII, Vol. I). Il contrario avviene (fig. 1-11 b) per  $F > F_c$ . Quanto detto per la forza  $F_d$  vale anche se si è in presenza di una eccentricità iniziale; se, cioè, il concio elastico della fig. 1-7 è indeformato quando gli assi delle due aste  $AB$  e  $BC$  presentano già una certa rotazione relativa.

I caratteri della configurazione  $\varphi = 0$ , in presenza della sola forza  $F$  (fig. 1-7) possono essere studiati anche con riferimento ai soli primi termini in  $d\varphi$ . Si ha così dalla (g), sviluppando in serie il coseno,

$$d\mathbf{E} = -F\ell \frac{d\varphi^2}{2} + F\ell \frac{d\varphi^4}{4} + 2k d\varphi^2$$

e cioè

$$d_1\mathbf{E} = 0$$

$$d_2\mathbf{E} = -F\ell \frac{d\varphi^2}{2} + 2k d\varphi^2$$

$$d_3\mathbf{E} = 0$$

$$d_4\mathbf{E} = F\ell \frac{d\varphi^4}{4}.$$

Secondo che  $F \cong 4 \frac{k}{\ell}$ , si ha  $d_2\mathbf{E} \cong 0$ , è cioè equilibrio stabile, neutro stabile, o instabile.

In presenza di  $F_d$ , la (m) porge, per la configurazione generica caratterizzata dall'angolo  $\varphi$ ,

$$d_1\mathbf{E} = \left( -F\ell \sin \varphi + 4k\varphi - F_d \frac{\ell}{2} \cos \varphi \right) d\varphi$$

$$d_2\mathbf{E} = \left( -F \frac{\ell}{2} \cos \varphi + 2k + F_d \frac{\ell}{4} \sin \varphi \right) d\varphi^2.$$

La posizione  $d_1\mathbf{E} = 0$ , coincidente con la (m), porge il valore di  $F$  che è in equilibrio sulla configurazione  $\varphi$ ; la  $d_2\mathbf{E} \cong 0$  per i valori di  $F$  e  $\varphi$  assicura della stabilità o meno della configurazione  $\varphi$ .

b) Si prenda in esame la struttura della fig. 1-12, costituita da due aste rigide  $AC$  e  $BC$  di uguale lunghezza, collegate in  $C$  da un concio elastico, e vincolate in  $A$  e  $B$  con carrelli contrastati in senso orizzontale

Per  $F_d \rightarrow 0$ ,  $F_{cd}$  tende ad  $F_c$ , e i due rami tendono ai tre della fig. 1-8.

I rami si tracciano al solito, data la  $F_d$ , attraverso la (m), assegnando a  $\varphi$  valori successivi, e calcolando  $F$ .

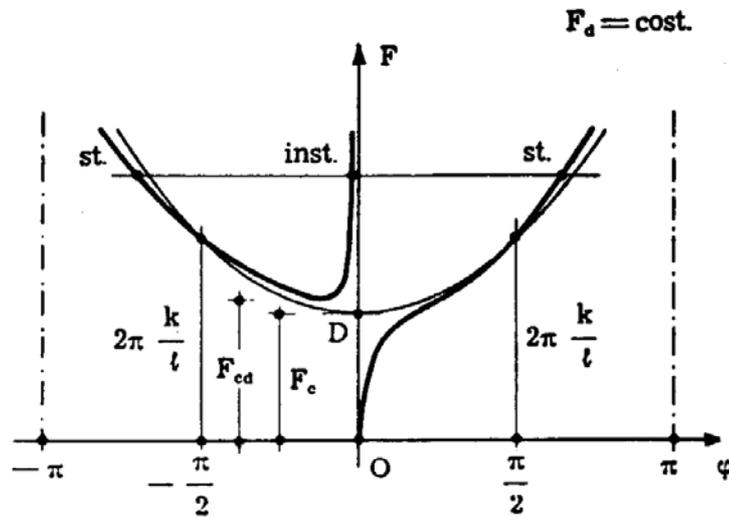


FIG. 1-10

Nel tratto  $F < F_c$ , per  $F_d$  piccola (e quindi  $F_{cd} \ll F_c$ ) le funzioni  $E(\varphi)$  ed  $E_d(\varphi)$ , per  $F$  (ed  $F_d$ ) costanti, nell'intorno di  $\varphi = 0$  sono rappresentate

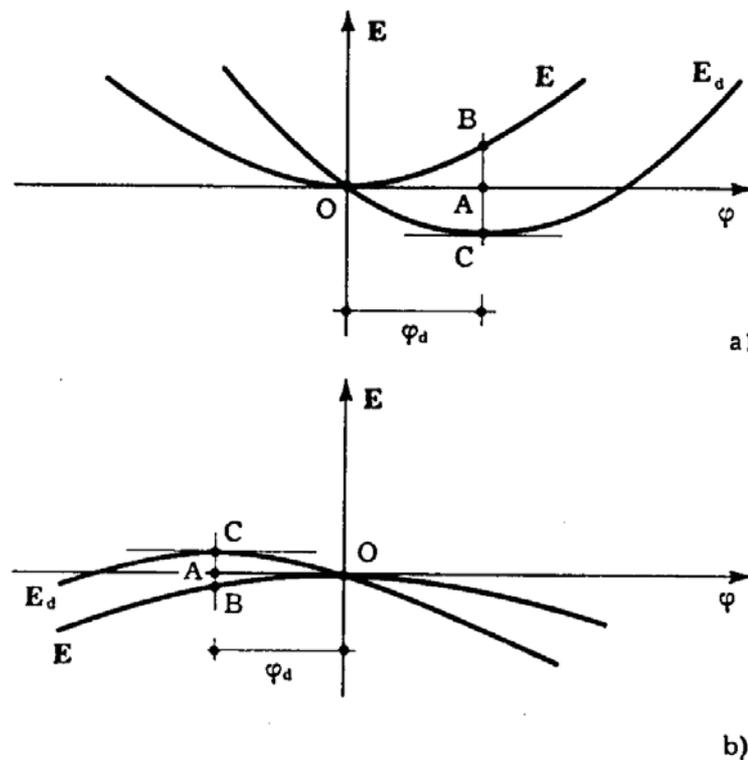


FIG. 1-11

nella fig. 1-11 a; la  $E$  presenta un minimo in  $\varphi = 0$ , la  $E_d$  in  $\varphi = \varphi_d$  soluzione della (m). Il valore di  $E_d$  in  $\varphi = \varphi_d$  è più basso di quello di  $E$  in

$$\frac{dF}{d\varphi} = 4 \frac{k}{l} \frac{\operatorname{tg} \varphi - \varphi}{\operatorname{sen} \varphi \operatorname{tg} \varphi};$$

per  $\varphi = 0$  è  $dF/d\varphi = 0$ , e cioè la curva  $F\varphi$  parte con tangente parallela all'asse delle  $\varphi$ ; per  $\varphi = \pm \pi$  è  $dF/d\varphi = \infty$ , e cioè le due rette  $\varphi = \pm \pi$  sono asintoti della curva  $F\varphi$ .

Nel caso in esame, il fenomeno non ha in genere nulla di drammatico; se  $F$  supera il valore  $F_c$ , la struttura reale si avvia sull'una o sull'altra delle due configurazioni stabili, ad ogni valore di  $F$  corrisponde poi un sol valore di  $\varphi$ , e la  $F$  può aumentare quanto si vuole. Si osservi che nel passaggio per  $F_c$  cambia il tipo di configurazione, che da rettilinea diviene inflessa.

E' interessante il caso in cui sulla stessa struttura della fig. 1-7 agisce in B una forza costante  $F_d$  normale all'asse AC, e diretta secondo l'asse  $y$ ,

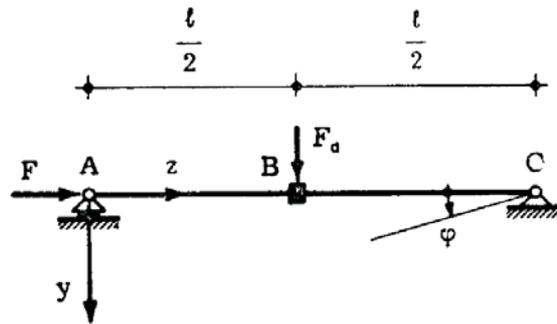


FIG. 1-9

oltre alla forza assiale  $F$  variabile (fig. 1-9). Si ha, chiamando  $E_d$  la nuova espressione della  $E$ ,

$$E_d = -F l (1 - \cos \varphi) + 2 k \varphi^2 - F_d \frac{l}{2} \operatorname{sen} \varphi. \quad (l)$$

La condizione di equilibrio

$$\frac{dE_d}{d\varphi} = -F l \operatorname{sen} \varphi + 4 k \varphi - F_d \frac{l}{2} \cos \varphi = 0 \quad (m)$$

porge soluzioni diverse da zero per qualunque valore di  $F$ ; esiste un valore  $F_{cd}$  tale che per  $F < F_{cd}$  (fig. 1-10) la soluzione è unica, per  $F > F_{cd}$  invece è triplice. Per  $F > F_{cd}$ , assieme al ramo esistente anche per  $F < F_{cd}$ , compare un altro ramo a due soluzioni, distaccato dal primo; la soluzione del ramo principale è stabile, le altre due una stabile e l'altra instabile.

e risulta

$$\left(\frac{d^2\mathbf{E}}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=0} \geq 0 \quad \text{per} \quad \mathbf{F} \leq 4 \frac{k}{l};$$

ciò significa che la configurazione  $\varphi=0$  è stabile per  $\mathbf{F} < 4 \frac{k}{l}$ , instabile per  $\mathbf{F} > 4 \frac{k}{l}$ .

Nelle due configurazioni diverse da zero (inflesse) risulta, per la (h),

$$\frac{d^2\mathbf{E}}{d\varphi^2} = 4k \left(1 - \frac{\varphi}{\text{tg } \varphi}\right) > 0$$

e quindi le configurazioni sono stabili.

Per  $\mathbf{F} = 4 \frac{k}{l}$  e  $\varphi = 0$  risulta

$$\frac{d^2\mathbf{E}}{d\varphi^2} = 0$$

$$\frac{d^3\mathbf{E}}{d\varphi^3} = \mathbf{F} l \text{ sen } \varphi = 0$$

$$\frac{d^4\mathbf{E}}{d\varphi^4} = \mathbf{F} l \text{ cos } \varphi = \mathbf{F} l > 0;$$

la configurazione  $\varphi = 0$  è, in tal punto, in equilibrio neutro, ma ancora stabile.

Da quanto sopra si trae che la qualità dell'equilibrio, contrariamente a quanto accade nei sistemi rigidi, dipende dall'entità della forza applicata.

Il valore di  $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F}_c = 4 \frac{k}{l} \tag{i}$$

per cui si passa da una soluzione a tre, e la soluzione che prima era stabile diviene instabile, si chiama *valore critico* della forza  $\mathbf{F}$ . Il punto D del diagramma  $\mathbf{F}\varphi$  in cui si passa da una a più soluzioni si chiama *punto di diramazione*.

Dalla (h) si trae

$$\mathbf{F} = 4 \frac{k}{l} \frac{\varphi}{\text{sen } \varphi}$$

la (h), oltre alla soluzione  $\varphi = 0$ , ne ammette altre due uguali e contrarie.

La costruzione del diagramma  $F(\varphi)$  (fig. 1-8) si può eseguire ricer-

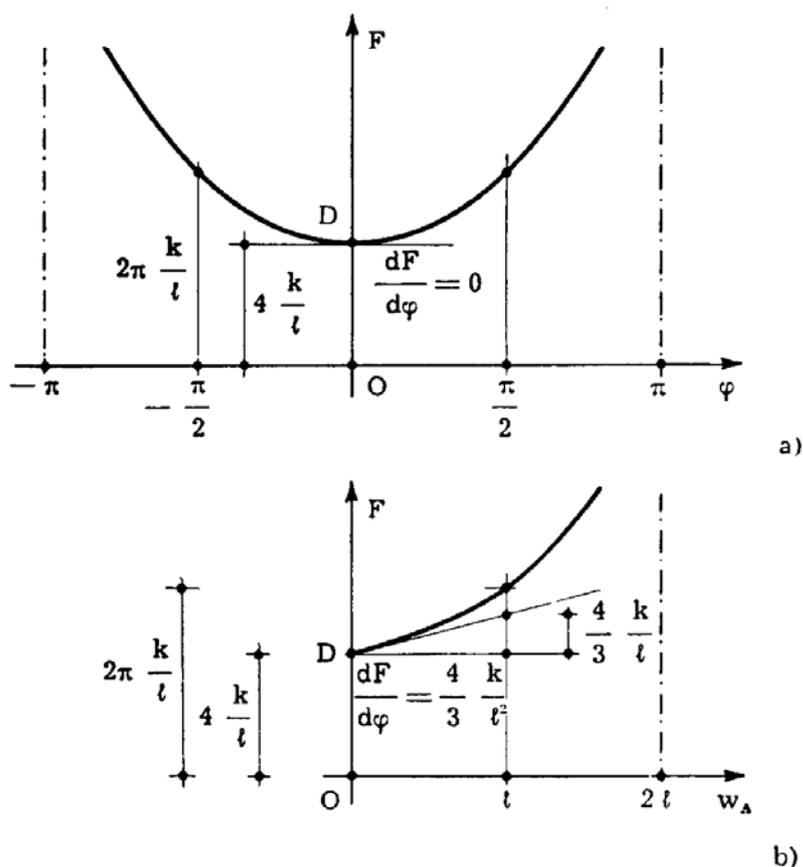


FIG. 1-8

cando dalla (g) i valori di  $F$  che corrispondono a successivi valori assegnati di  $\varphi$ . Si vede così che  $\varphi$  cresce con  $F$ ; per  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  risulta  $F = \frac{2\pi k}{l}$ , per  $\varphi = \pm \pi$ , è  $F = \infty$ .

Esistono quindi una o tre configurazioni di equilibrio per ogni valore di  $F$ , secondo che  $F \leq 4 \frac{k}{l}$ ; per giudicare della stabilità di esse, si consideri la derivata seconda di  $\mathbf{E}$

$$\frac{d^2\mathbf{E}}{d\varphi^2} = -F l \cos \varphi + 4k.$$

Nella configurazione  $\varphi = 0$  (rettilinea) è

$$\left(\frac{d^2\mathbf{E}}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=0} = -F l + 4k,$$

sulti indeformato quando A B C sono allineati, e reagisca con due coppie  $\mathcal{M}$  proporzionali alla rotazione relativa  $\Delta\varphi$  delle due facce da esso collegate:

$$\mathcal{M} = k \Delta\varphi = \pm 2 k\varphi .$$

Il sistema è ad un sol grado di libertà, e come coordinata lagrangiana si assuma l'angolo di rotazione  $\varphi$  dell'asta B C.

Valutando l'energia potenziale dalla posizione in cui A B C sono allineati, si ha

$$w_A = l (1 - \cos \varphi)$$

e quindi

$$P = - F l (1 - \cos \varphi) .$$

D'altro canto l'energia elastica presente nel concio elastico è

$$L = \frac{1}{2} \mathcal{M} \Delta\varphi = 2 k \varphi^2 .$$

Si può quindi scrivere

$$E = - F l (1 - \cos \varphi) + 2 k \varphi^2 . \quad (g)$$

Le posizioni di equilibrio sono fornite dalla relazione

$$\frac{dE}{d\varphi} = - F l \operatorname{sen} \varphi + 4 k \varphi = 0$$

che porge

$$\frac{\operatorname{sen} \varphi}{\varphi} = \frac{4 k}{F l} . \quad (h)$$

Per  $\frac{4 k}{F l} > 1$ , e cioè per

$$F < 4 \frac{k}{l} ,$$

la (h) ammette l'unica soluzione  $\varphi = 0$ ; per  $4 k/F l < 1$ , e cioè per

$$F > 4 \frac{k}{l} ,$$

La condizione di stabilità

$$d_2 E > 0$$

si traduce nell'altra

$$F < Q \frac{r}{R - 2r} .$$

Se  $R = \infty$  (appoggio piano) la condizione risulta essere  $F < 0$ , e cioè la condizione di stabilità è che la  $F$  sia diretta verso l'alto, quale che sia il suo valore purchè finito. Se  $R < 0$  (superficie concava) la condizione è che la  $F$  sia diretta verso l'alto, e superiore in valore assoluto a

$$Q \frac{r}{|R - 2r|} .$$

Il fatto che esistano dei valori di  $F$  per cui la situazione è stabile, ed altri per cui non lo è, non è in contrasto con quanto detto prima circa la dipendenza della stabilità dei sistemi rigidi dalla sola geometria; infatti in questo caso fissato il rapporto  $F/Q$ , e cioè la *forma* del carico, la stabilità non dipende dal valore effettivo di  $F$  o di  $Q$ , ma solo dai valori di  $R$  ed  $r$ .

Questa osservazione è dovuta allo *Zanaboni*.

**3. Due esempi elementari relativi a sistemi olonomi rigido-elastici ad un sol grado di libertà.**

a) Si consideri la struttura della fig. 1-7, costituita da due aste rigide

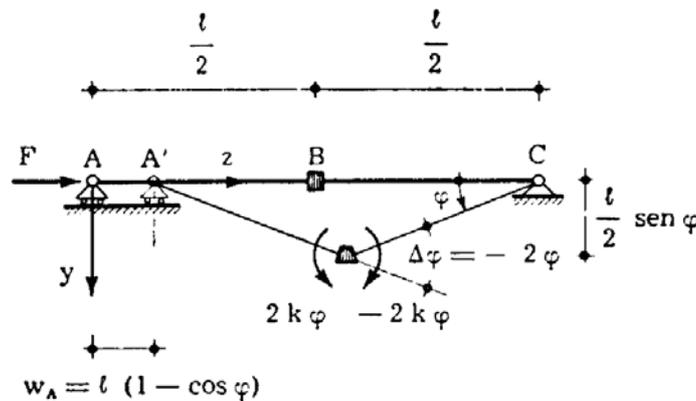


FIG. 1-7

uguali AB e BC, collegate in B da un concio elastico; questo concio ri-



Si noti che nell'intorno di  $x = 0$  è

$$\frac{dE}{dx} = \left( \frac{dE}{dx} \right)_0 + \left( \frac{d^2E}{dx^2} \right)_0 dx ,$$

che è nulla se  $(d^2E/dx^2)_0 = 0$ ; e cioè per  $n > 2$  tutte le posizioni dell'intorno di  $x = 0$  sono di equilibrio.

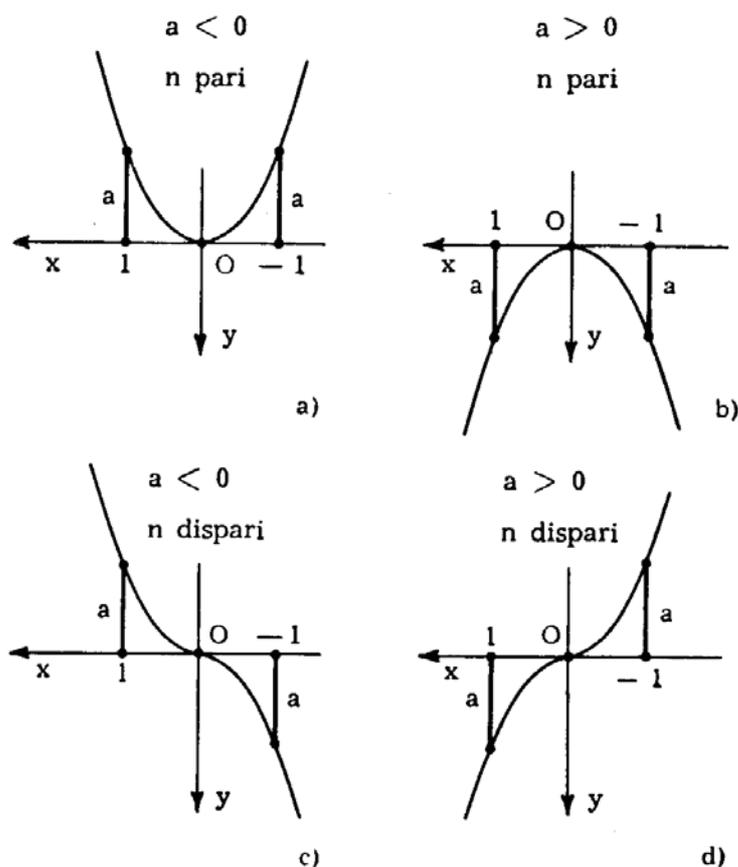


FIG. 1-5

c) Si prenda in esame il sistema (*Southwell*) della fig. 1-6, costituito da una sfera di peso  $Q$  e raggio  $r$  costretta a rotolare senza attrito su una superficie sferica di raggio  $R$ ; nel punto  $B$  più alto della superficie della sfera è applicata una forza verticale  $F$  diretta verso il basso. Per simmetria il sistema è ad un grado di libertà, e come coordinata lagrangiana si assume l'angolo  $\varphi$  che la congiungente i due centri  $H$  e  $K$  forma con la verticale.

Una posizione di equilibrio è quella per cui le forze  $Q$  ed  $F$  sono ambedue sulla verticale per il punto  $A$  più basso della superficie sferica. Si

l'ascissa  $x$ . La reazione non compie lavoro negli spostamenti del punto lungo la curva, ed il lavoro svolto è quindi quello del solo peso  $F$ . L'energia potenziale è perciò fornita, presa come quota di riferimento la retta  $y = 0$ , da

$$E = P = -Fy = -aFx^n,$$

ed a meno di  $-F$  il suo diagramma coincide con la curva.

Risulta

$$\frac{dE}{dx} = -anFx^{n-1}$$

$$\frac{d^2E}{dx^2} = -an(n-1)Fx^{n-2}$$

.....

$$\frac{d^n E}{dx^n} = -an(n-1)(n-2) \dots F$$

$$\frac{d^{n+1} E}{dx^{n+1}} = 0.$$

Posizione di equilibrio è la  $x = 0$ , derivante dall'equazione

$$\frac{dE}{dx} = -anFx^{n-1} = 0.$$

Per assodare se in  $x = 0$  la  $E$  è o meno un minimo, occorre esaminare la parità o disparità di  $n$  ed il segno di  $a$ . Per  $n$  dispari la prima derivata non nulla in  $x = 0$  è dispari, quindi in  $x = 0$  esiste un flesso (fig. 1-5 c e 1-5 d); per  $n$  pari invece la prima derivata non nulla in  $x = 0$  è pari, quindi in  $x = 0$  c'è un minimo se tale derivata è positiva, e cioè per  $a < 0$  (fig. 1-5 a), e un massimo se tale derivata è negativa, cioè  $a > 0$  (fig. 1-5 b).

Nella fig. 1-5 a l'equilibrio è stabile, nelle altre tre instabile; in tutte e quattro è neutro per  $n > 2$ . L'indifferenza può aversi solo per  $n = \infty$  e cioè solo se la parabola degenera, nel tratto  $-1 < x < 1$ , nella retta  $y = 0$ ; in tale evenienza tutti i suddetti punti sono posizioni di equilibrio. Si osservi che anche nel caso in esame la stabilità dell'equilibrio non dipende dal valore del peso  $F$ .

$$d_1 \mathbf{E} = 0$$

$$d_2 \mathbf{E} = F l \frac{d\varphi^2}{2} > 0$$

e la posizione è di equilibrio, stabile.

In una posizione  $\varphi$  diversa dalle due precedenti è invece (\*)

$$dv = l \left( \cos \varphi d\varphi - \operatorname{sen} \varphi \frac{d\varphi^2}{2} \right)$$

$$dw = l \left( \operatorname{sen} \varphi d\varphi + \cos \varphi \frac{d\varphi^2}{2} \right)$$

$$d_1 \mathbf{E} = - F l \operatorname{sen} \varphi d\varphi \neq 0$$

$$d_2 \mathbf{E} = - F l \cos \varphi \frac{d\varphi^2}{2}$$

e non c'è equilibrio.

b) Si studi il caso di un punto pesante vincolato senza attrito su una curva piana di equazione

$$y = a x^n,$$

ove l'asse  $y$  è verticale ed orientato verso il basso (fig. 1-4). Il sistema è

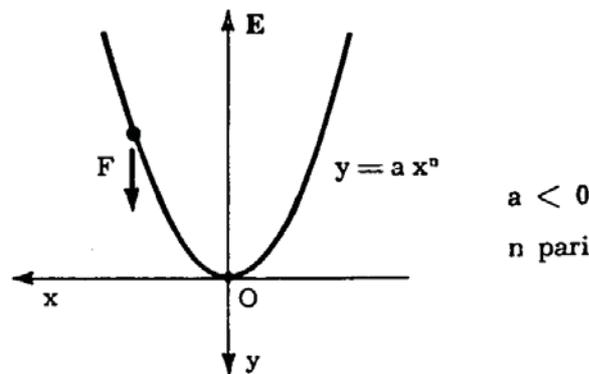


FIG. 1-4

ad un grado di libertà, e come coordinata lagrangiana può essere assunta

(\*)

$$dv = l \operatorname{sen} (\varphi + d\varphi) - l \operatorname{sen} \varphi$$

$$dw = l [1 - \cos (\varphi + d\varphi)] - l (1 - \cos \varphi).$$

dalla espressione della  $d^2E/d\varphi^2$  si osserva che la derivata seconda (pari) di  $E$  in corrispondenza di tali posizioni è negativa per  $k$  nulla o pari, e positiva per  $k$  dispari, (la  $E$  è minima per  $k$  dispari, e massima per  $k$  nulla o pari). Le posizioni di equilibrio stabile sono perciò quelle caratterizzate da  $k$  dispari, in cui la  $F$  è di trazione, quelle di equilibrio non stabile da  $k$  nulla o pari, in cui la  $F$  è di compressione. Questi risultati sono in accordo con quello che è l'ovvio comportamento del sistema secondo il criterio statico o dinamico. Si osservi che nella definizione dell'equilibrio e della sua qualità entra in gioco soltanto la geometria del sistema, e non il valore della forza applicata; questo risultato è valido, come si mostrerà in seguito, per tutti i sistemi privi di elasticità.

Lo studio dell'equilibrio e della stabilità, con riferimento ad una data configurazione, può essere fatto anche limitandosi ai termini dello spostamento del primo e secondo ordine in  $d\varphi$ . Nella posizione  $\varphi = 0$  può porsi, trascurando le potenze di  $d\varphi$  dal terzo grado in poi (\*),

$$dv = l d\varphi$$

$$dw = l \frac{d\varphi^2}{2}.$$

Si ha così

$$d_1E = 0$$

$$d_2E = - F l \frac{d\varphi^2}{2} < 0$$

e cioè la posizione è di equilibrio, non stabile; nella configurazione  $\varphi = \pi$  è invece

$$dv = - l d\varphi$$

$$dw = - l \frac{d\varphi^2}{2}$$

(\*)

$$dv = l \operatorname{sen} d\varphi = l \left( d\varphi - \frac{d\varphi^3}{3!} + \frac{d\varphi^5}{5!} - \dots \right)$$

(f)

$$dw = l (1 - \cos d\varphi) = l \left( 1 - 1 + \frac{d\varphi^2}{2!} - \frac{d\varphi^4}{4!} + \dots \right).$$

perchè il sistema è privo di elasticità. Si ha quindi

$$E = P = -F w = -F l (1 - \cos \varphi)$$

$$\frac{dE}{d\varphi} = -F l \sin \varphi$$

$$\frac{d^2E}{d\varphi^2} = -F l \cos \varphi .$$

Il diagramma  $E(\varphi)$  è quello della fig. 1-3; dalla  $dE/d\varphi = 0$  si hanno

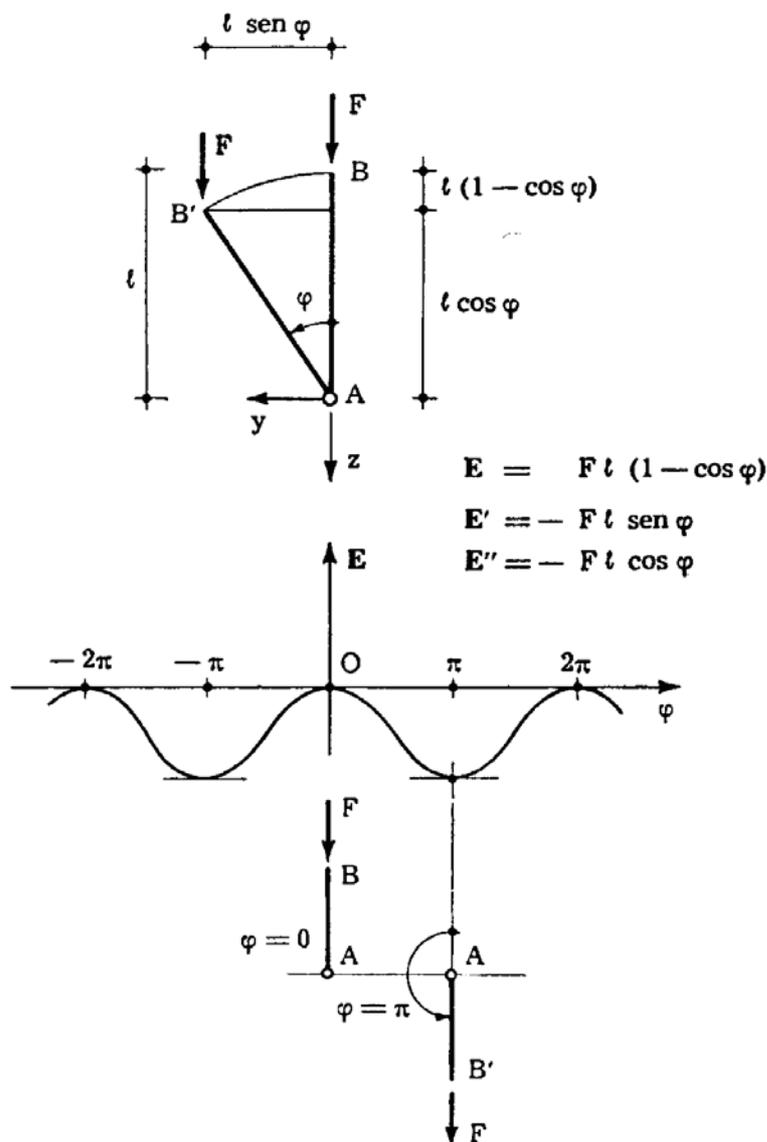


FIG. 1-3

le posizioni di equilibrio ( $k$  intero)

$$\varphi = k \pi ;$$

Il secondo garantisce che la condizione

$$\delta_2^* P < 0 \quad (5)$$

per almeno una variazione  $d^*c_i$  delle coordinate di  $C_0$  è sufficiente per l'instabilità.

Sembra valido accettare i suddetti teoremi per i sistemi continui, che possono sempre trasformarsi, con una certa approssimazione, in sistemi olonomi (gradi di libertà in numero finito); questo sempre che le forze siano conservative, e sostituendo l'energia potenziale totale  $\mathbf{E}$  all'energia potenziale delle forze  $\mathbf{P}$ .

Appare evidente così la differenza — non sostanziale — tra il criterio statico e quello dinamico (sotto forze conservative).

Il minimo di  $\mathbf{E}$  è, per il primo, condizione necessaria e sufficiente di stabilità o neutro stabilità, per il secondo condizione sufficiente di stabilità; l'esistenza di almeno un  $\delta_2^* \mathbf{E} < 0$  è per il primo condizione necessaria e sufficiente di instabilità, per il secondo è solo condizione sufficiente di instabilità.

Sempre secondo il criterio statico, ma in senso più lato (anche se meno rigoroso), una configurazione di equilibrio potrebbe definirsi stabile quando una successione indefinita di piccole cause perturbanti non fa allontanare il sistema dall'intorno di  $C_0$ , e instabile quando tale allontanamento si verifica; in tal caso la neutro stabilità e la neutro instabilità sono da considerarsi come stabilità e instabilità. Si può dire allora che condizione sufficiente (ed anche necessaria) di stabilità è la presenza di un minimo di  $\mathbf{E}$  in  $C_0$ ; condizione sufficiente (ma non necessaria) di instabilità è che esista almeno un  $\delta_2^* \mathbf{E}$  negativo. Così i teoremi di *Dirichlet* e *Lyapunov* sono del tutto validi anche dal punto di vista statico.

## 2. Esempi elementari relativi a sistemi olonomi rigidi.

a) Si consideri l'asta rigida della fig. 1-3, vincolata con cerniera cilindrica senza attrito in un estremo A, e soggetta nell'altro estremo B alla forza assiale  $\mathbf{F}$ ; il sistema è ad un sol grado di libertà, e come coordinata lagrangiana si assuma l'angolo  $\varphi$ .

In B è

$$v = l \sin \varphi$$

$$w = l (1 - \cos \varphi) .$$

L'energia potenziale totale coincide con l'energia potenziale della  $\mathbf{F}$ ,

Se ci si limita ai termini del secondo ordine nelle  $dc_1$ , tenendo conto che  $W$  contiene solo termini del secondo ordine, è

$$\delta_2 \mathbf{E} = \delta_2 P + \int_V \sigma \delta^{(2)} \varepsilon dV + W \quad (2)$$

o, in simboli comunemente usati,

$$\delta_2 \mathbf{E} = -L_2 + L_2^* + W. \quad (3)$$

Se le componenti delle forze non variano con la configurazione, si può scrivere

$$-L_2 = -\sum F_1 s_1^{(2)}$$

dove le  $s_1^{(2)}$  sono le corrispondenti componenti dello spostamento del secondo ordine nelle  $dc_1$ .

Se esistono solo distorsioni, è  $L_2 = 0$ , e quindi

$$\delta_2 \mathbf{E} = L_2^* + W.$$

Data la  $C_0$  e la variazione  $C_0 \rightarrow C_d$ , risulta

$$\begin{aligned} -L_2 + L_2^* &= a \gamma^2 \\ W &= b \gamma^2 \end{aligned}$$

dove  $a$  è funzione delle forze applicate e delle distorsioni,  $b$  è indipendente da esse. Si intuisce fin d'ora come il segno di  $\delta_2 \mathbf{E}$ , e quindi la qualità dell'equilibrio, dipenda dai valori delle forze e delle distorsioni.

Dalla Meccanica Razionale sono noti i teoremi di *Dirichlet* e *Lyapunov*, dimostrati per i sistemi olonomi e per le forze conservative, nello spirito del criterio dinamico.

Il primo assicura che la condizione

$$\begin{aligned} \delta_1 P = \delta_2 P = \dots = \delta_{n-1} P = 0 \\ \delta_n P > 0 \end{aligned} \quad (4)$$

per qualsiasi variazione delle coordinate lagrangiane a partire da una configurazione  $C_0$  di equilibrio, e per  $n$  qualsiasi ( $n > 1$ ), e cioè la condizione di minimo in  $C_0$  dell'energia potenziale  $P$  delle forze, è sufficiente per la stabilità della  $C_0$ .

tiva per qualsiasi variazione  $\delta u \delta v \delta w$  della configurazione di equilibrio. Condizione necessaria e sufficiente di *instabilità* è invece che per almeno una variazione  $\delta u^* \delta v^* \delta w^*$  la  $\delta_2^* \mathbf{E}$  sia negativa. Condizione necessaria e sufficiente di *neutro stabilità* è che esista almeno una  $\delta_2^* \mathbf{E} = 0$  con  $\delta^* \mathbf{E} > 0$ , e con tutti gli altri  $\delta_2 \mathbf{E} > 0$ ; condizione necessaria e sufficiente di *neutro instabilità* che esista almeno una  $\delta_2^* \mathbf{E} = 0$  con  $\delta^* \mathbf{E} < 0$ , e con tutti gli altri  $\delta_2 \mathbf{E} > 0$ .

Le  $\delta u \delta v \delta w$  caratterizzanti la  $\delta C = C_0 \rightarrow C_d$  dipendono dalle variazioni  $dc_i$  delle coordinate lagrangiane  $c_i$  del sistema olonomo cui il continuo può sempre ridursi. Fissati i rapporti tra i valori  $dc_i$ , sia i  $\delta u \delta v \delta w$  che la variazione  $\delta \mathbf{E}$  sono definiti a meno di una sola variabile  $\gamma$ , e l'ordine del  $\delta \mathbf{E}$  e dei  $\delta u \delta v \delta w$  nelle  $dc_i$  non nulle coincide con quello in  $\gamma$ . In tal senso si parla di ordine del  $\delta \mathbf{E}$  e per una variazione  $\delta u \delta v \delta w$ ; esso è sicuramente superiore ad uno in  $C_0$ , perchè in  $C_0$  è comunque  $\delta_1 \mathbf{E} = 0$ , mentre in  $C_d$  è in genere di ordine uno nelle  $dc_i$  valutate a partire da  $C_d$ .

Distinguendo la parte del primo ordine dal resto, si ha

$$\delta P = \delta_1 P + \delta_r P \quad (c)$$

$$\delta L = \int_V \sigma \delta^{(1)} \varepsilon dV + \int_V \sigma \delta^{(r)} \varepsilon dV + W ; \quad (d)$$

le  $\sigma$  sono le componenti di tensione connesse con la configurazione  $C_0$ , le  $\delta^{(1)} \varepsilon$  e  $\delta^{(r)} \varepsilon$  le componenti di deformazione del primo ordine e residue connesse con le  $\delta u \delta v \delta w$ , gli integrali rappresentano l'energia mutua di deformazione nel passaggio tra  $C_0$  e  $C_d$ , il  $W$  è l'energia propria connessa con le  $\delta \sigma$  che sorgono in tale passaggio.

Dalle (b), (c) e (d) si trae

$$\delta \mathbf{E} = \delta_1 P + \delta_r P + \int_V \sigma \delta^{(1)} \varepsilon dV + \int_V \sigma \delta^{(r)} \varepsilon dV + W . \quad (e)$$

Per il principio dei lavori virtuali è, in  $C_0$ ,

$$\delta_1 P = - \int_V \sigma \delta^{(1)} \varepsilon dV ;$$

la (e) si scrive perciò (si parte da una configurazione di equilibrio)

$$\delta \mathbf{E} = \delta_r \mathbf{E} = \delta_r P + \int_V \sigma \delta^{(r)} \varepsilon dv + W . \quad (1)$$

La necessità di considerare più condizioni di equilibrio sotto le stesse forze importa l'abrogazione del principio di *Kirchhoff*, e quindi la rimozione, negli studi sulla stabilità, di una o tutte le ipotesi su cui si regge tale principio. In genere si rinuncia all'ipotesi di piccolezza degli spostamenti, o, nel modo più ampio, non considerando più trascurabili le derivate prime delle  $u v w$  rispetto all'unità, o, nel senso più ristretto, non definendo più gli stati tensionali — in particolare le caratteristiche della sollecitazione interna — con riferimento alla struttura indeformata, ma alla configurazione di equilibrio.

Si ricorda che grandi spostamenti non significa grandi deformazioni; infatti è possibile avere in tutta la struttura delle componenti di deformazione piccole, comunque contenute nell'ambito elastico, associate a spostamenti vistosi; ciò non è in contraddizione con l'enunciato dell'ipotesi di piccoli spostamenti, perchè le derivate prime di  $u v w$  sono in tal caso grandi rispetto ad un riferimento fisso nello spazio, piccole rispetto ad un riferimento variabile ed avente l'origine nell'intorno cui le componenti sono relative. Ciò equivale a dire che sono grandi le componenti della traslazione rigida e della rotazione rigida dell'intorno, mentre si mantengono piccole le componenti della deformazione pura.

Del resto, è proprio la presenza di spostamenti notevoli, condizione che si accompagna in genere alla presenza di più configurazioni di equilibrio, che impone di star lontani da tali situazioni; infatti spesso si dà il caso, nelle strutture sottili, di cambiamenti di configurazione radicali pur restando in campo perfettamente elastico, senza quindi alcuna compromissione del materiale, ma con perdita completa della funzionalità. Basti pensare ad un appoggio pendolare sottile che entri in flessione per carico di punta; l'appoggio non entra in crisi, ma la struttura non può più fare affidamento su di esso come vincolo, anzi deve dedicare ad esso parte delle sue risorse complessive di resistenza.

Se le forze  $F$  agenti sono conservative, e  $\delta u \delta v \delta w$  sono le variazioni di configurazione, cui sono connesse le variazioni di spostamento  $\delta s$  e le variazioni di deformazione  $\delta \epsilon$ , si ha per effetto della variazione (e ricordando che si tratta di strutture elastiche)

$$\delta V = \delta L_e + \delta L_i = - \delta P - \delta L = - \delta (L + P) . \quad (a)$$

Si può quindi scrivere, ricordando che si definisce *energia potenziale totale*  $E$  sotto le forze  $F$  (accompagnate da eventuali distorsioni) la somma  $P + L$ ,

$$\delta V = - \delta E . \quad (b)$$

Secondo il criterio statico, condizione necessaria e sufficiente di *stabilità* di una configurazione di equilibrio  $C_0$  è quindi che in  $C_0$  la  $\delta_2 E$  sia posi-

Si dimostrerà che condizione necessaria e sufficiente di esistenza di un'altra configurazione di equilibrio (\*)  $C_d^*$  vicina alla  $C_o$  è che la  $\delta_2^*V_{o \rightarrow d}$  calcolata per  $\delta u^* \delta v^* \delta w^*$  sia stazionaria rispetto alle altre  $\delta u \delta v \delta w$  (si dimostrerà pure che, se ciò accade, è  $\delta_2^*V_{o \rightarrow d} = 0$ , mentre non vale il contrario).

Si è visto che condizione necessaria e sufficiente perchè una configurazione sia in equilibrio *neutro* è che una (o più)  $\delta_2^*V_{o \rightarrow d}$  sia nulla e tutte le altre  $-\delta_2^*V_{o \rightarrow d}$  siano positive (ciò importa che la  $\delta_2^*V_{o \rightarrow d}$  sia stazionaria).

L'equilibrio neutro a sua volta è *neutro stabile*, *neutro indifferente* o *neutro instabile* secondo che

$$-\delta^*V_{o \rightarrow d} \cong 0 .$$

I casi che possono presentarsi sono perciò i seguenti:

eq. stabile	$-\delta_2^*V_{o \rightarrow d} > 0$ per tutte le variazioni $\pm \delta C$	
eq. instabile	$-\delta_2^*V_{o \rightarrow d} < 0$ per una (o più) variazioni $\pm \delta C$	
eq. neutro	$-\delta_2^*V_{o \rightarrow d} = 0$ per una (o più) variazioni $\delta^*C$	neutro stabile $-\delta^*V_{o \rightarrow d} > 0$ per $+\delta^*C$ e $-\delta^*C$
		neutro indifferente $-\delta^*V_{o \rightarrow d} = 0$
		neutro instabile $-\delta^*V_{o \rightarrow d} < 0$ per $+\delta^*C$ , o $-\delta^*C$ , o ambedue
	$-\delta_2^*V_{o \rightarrow d} > 0$ per tutte le altre variazioni	

Il criterio statico contiene implicita, come condizione necessaria per l'instabilità, l'esistenza di più configurazioni di equilibrio distinte sotto lo stesso insieme di forze e distorsioni.

(\*) Non necessariamente neutro; se infatti  $C_o$  e  $C_d^*$  sono ambedue instabili, l'equilibrio non corrisponde alla definizione di *neutro* già data.

Se le forze non sono conservative quanto sopra cade in difetto. Per esempio, nel passaggio da  $C_0$  a  $C_d$  il lavoro  $\delta V_{0 \rightarrow d} = \delta_2 V_{0 \rightarrow d}$  non è univocamente definito. Si ha pure che, se nel passaggio da  $C_0$  a  $C_d$  è  $\delta_1 V_{d \rightarrow 0} < 0$  (il lavoro del primo ordine è comunque definito univocamente), può aversi ancora avvicinamento a  $C_0$ , non secondo la  $C_d C_0$ , ma attraverso altre configurazioni  $C_f$ . Ciò dipende dal fatto che le due condizioni  $\delta_1 V_{d \rightarrow f} > 0$  e  $\delta_1 V_{f \rightarrow 0} > 0$  possono, nel caso di forze non conservative, essere compatibili con l'altra  $\delta_1 V_{d \rightarrow 0} < 0$ . Infatti, se  $\delta_1 V_{d \rightarrow f} > 0$  e  $\delta_1 V_{f \rightarrow 0} > 0$ , è pure  $\delta V_{d \rightarrow f} > 0$  e  $\delta V_{f \rightarrow 0} > 0$ ; se le forze sono conservative, si trae  $\delta V_{d \rightarrow 0} = \delta V_{d \rightarrow f} + \delta V_{f \rightarrow 0} > 0$ , e quindi  $\delta_1 V_{d \rightarrow 0} > 0$ , ma se le forze non sono conservative ciò non è più valido. Si tenga presente che, anche per forze conservative,  $\delta_1 V_{d \rightarrow f} + \delta_1 V_{f \rightarrow 0} \neq \delta_1 V_{d \rightarrow 0}$ .

La configurazione  $C_0$  si dice in equilibrio *stabile*, secondo il criterio statico, se si ha ritorno in essa per qualsiasi insieme di  $F_d$ , e cioè per qualsiasi variazione  $\delta u \delta v \delta w$  delle componenti dello spostamento; si dice in equilibrio *instabile* se per almeno una di tali variazioni si ha allontanamento da  $C_0$ . Da quanto sopra si trae che condizione sufficiente di stabilità è che nell'intorno di  $C_0$  la  $-\delta_2 V_{0 \rightarrow d}$  sia positiva per qualsiasi altra configurazione vicina  $C_d$ ; condizione sufficiente di instabilità è che la  $-\delta_2 V_{0 \rightarrow d}$  sia negativa per almeno un'altra configurazione vicina  $C_d$ .

Le due condizioni sono anche necessarie; ciò si dimostra come segue.

Si abbia comunque ritorno in  $C_0$ . Non può esistere una  $-\delta_2 V_{0 \rightarrow d}$  negativa, perchè in tal caso si avrebbe instabilità. Non può neppure darsi che una  $-\delta_2 V_{0 \rightarrow d}$  sia nulla (e tutte le altre positive); se infatti ciò si verifica, per una  $C_d^*$ , non può aversi allontanamento spontaneo da  $C_d^*$  (e quindi neppure ritorno in  $C_0$ ) giacchè ad ogni movimento spontaneo si accompagna una diminuzione di quota del  $-\delta_2 V_{0 \rightarrow d}$ . La configurazione  $C_d^*$  è anch'essa di equilibrio, e sono di equilibrio tutte le configurazioni, vicinissime, caratterizzate dagli stessi rapporti  $dc_i/dc_j$  che regolano la  $C_0 \rightarrow C_d^*$ . Comunque si sposti la configurazione da  $C_0$ , si ricade in una delle suddette configurazioni di equilibrio vicinissime a  $C_0$ ; si dice che l'equilibrio in  $C_0$  è *neutro*. Si è visto che condizione sufficiente perchè ciò accada è che esista una  $C_d^*$  per cui  $-\delta_2^* V_{0 \rightarrow d}$  sia nulla, e che tutte le altre  $-\delta_2 V_{0 \rightarrow d}$  siano positive; tale condizione è anche necessaria, poichè in ogni altro caso si ha ritorno in  $C_0$  o allontanamento da quest'ultima.

Si abbia invece, da una  $C_d$ , allontanamento spontaneo da  $C_0$ ; deve aversi almeno una  $-\delta_2 V_{0 \rightarrow d}$  negativa, perchè, in caso contrario, si è visto che l'equilibrio è stabile o neutro.

Si avverte che la sola condizione  $\delta_1^* V_{d \rightarrow 0} = 0$ , cioè  $\delta_2^* V_{0 \rightarrow d} = 0$ , non basta per garantire che  $C_d^*$  sia di equilibrio; occorre e basta che tutte le  $\delta_1^* V$  in  $C_d^*$  siano nulle. Se per esempio si fa riferimento alla fig. 1-2 b, si osserva che per le configurazioni lungo le rette  $a$  e  $b$  si ha  $\delta_1 V_{d \rightarrow 0} = 0$ , ma le altre  $\delta_1 V_{d \rightarrow 0}$  sono diverse da zero; invece esse sono di equilibrio se le rette  $a$  e  $b$  coincidono, se cioè il piano  $dc_1 dc_2$  è tangente in essa alla superficie  $\delta_2 V_{0 \rightarrow d}$ .

e quindi

$$\delta_2 V_{o \rightarrow f} > \delta_2 V_{o \rightarrow d} .$$

Alla configurazione  $C_f$  corrisponde quindi una  $-\delta_2 V_{o \rightarrow f}$  minore di  $-\delta_2 V_{o \rightarrow d}$ ; poichè  $-\delta_2 V_{o \rightarrow d}$  è ovunque positiva nell'intorno di  $C_o$ , ed è nulla in  $C_o$  (fig. 1-2 a), il sistema deve avvicinarsi a  $C_o$ , e, per deformazione guidata, ritornare in  $C_o$ ; infatti, bloccato il sistema in  $C_f$  dopo il primo movimento, e poi sbloccato, si può ripetere, a partire da  $C_f$ , lo stesso ragionamento.

Si faccia invece il caso che esistano delle configurazioni  $C_d$  per cui  $-\delta_2 V_{o \rightarrow d}$  è negativo (fig. 1-2 b); il movimento provocato dalle for-

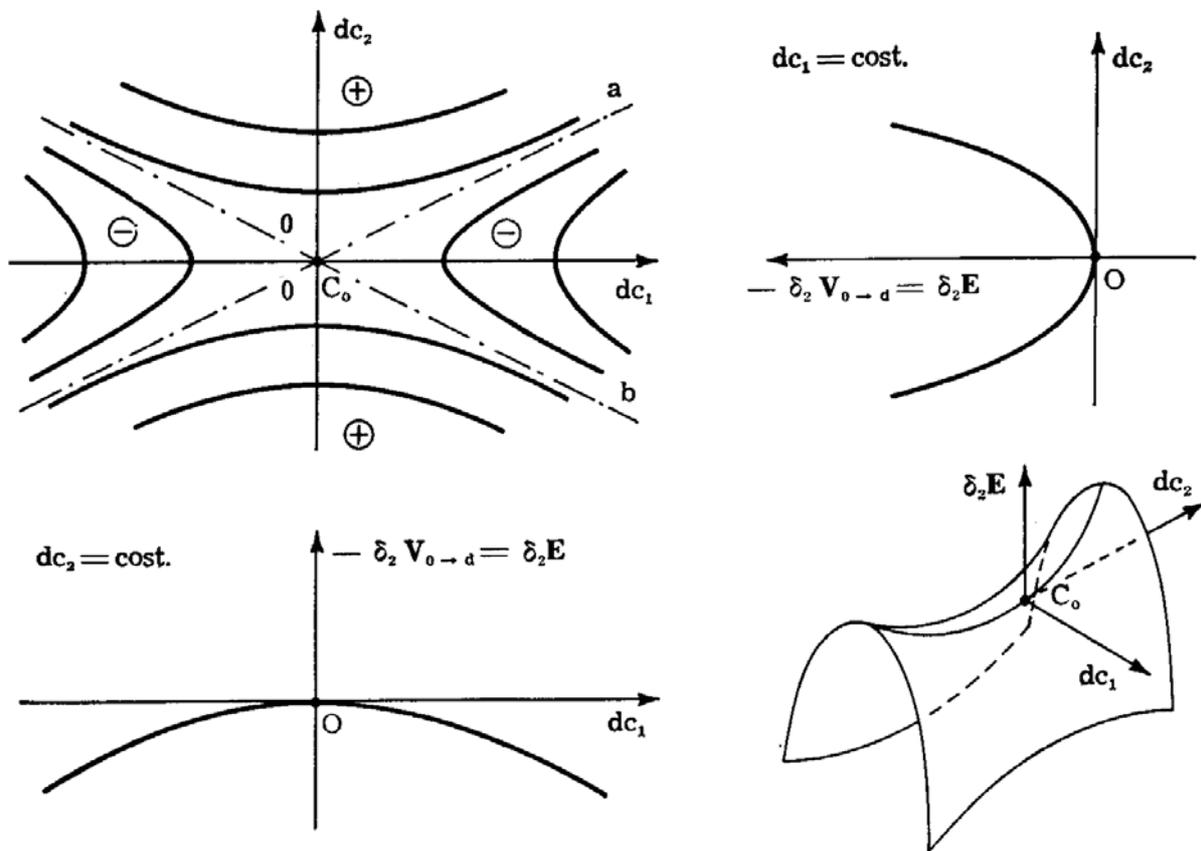


FIG. 1-2 b

ze  $F$ , a partire da una di queste  $C_d$ , è connesso di necessità ad un allontanamento da  $C_o$ ; il sistema va alla ricerca di un'altra configurazione di equilibrio, in genere lontana da  $C_o$ .

Tale movimento, violento se le  $F_d$  sono tolte istantaneamente, si realizza invece con lentezza in regime di deformazione guidata.

Sia  $-\delta_2 V_{o \rightarrow d}$  ovunque positivo nell'intorno di  $C_o$ ;  $\delta_1 V_{d \rightarrow o}$  è positiva per qualsiasi variazione  $C_d$ . Quindi quale che sia  $C_d$ , il sistema spostato in  $C_d$  non può rimanervi. Se il sistema è ad un solo grado di libertà, da  $C_d$  esso deve avvicinarsi a  $C_o$ , perchè deve compiere lavoro del primo ordine positivo. Se il sistema è a più gradi di libertà (fig. 1-2 a, dove per

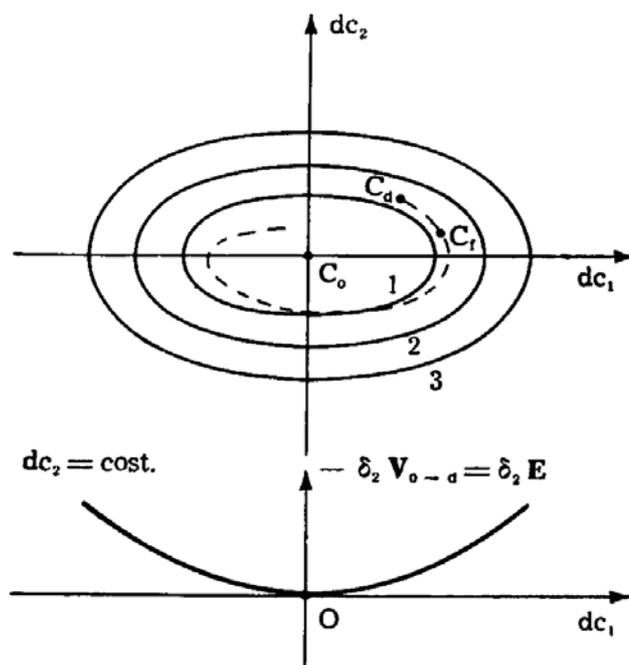


FIG. 1-2 a

semplicità si è fatto riferimento ad un sistema con due gradi di libertà) nel passaggio da una configurazione  $C_d$  ad un'altra  $C_f$  è

$$\delta_1 V_{d \rightarrow f} > 0$$

e quindi

$$\delta V_{d \rightarrow f} > 0 .$$

Ma è pure, per forze conservative,

$$\delta V_{d \rightarrow f} = \delta V_{d \rightarrow o} + \delta V_{o \rightarrow f} = \delta V_{o \rightarrow f} - \delta V_{o \rightarrow d}$$

La variazione  $C_o \rightarrow C_d$  è definita dalle variazioni  $\gamma \cdot dc_i$  delle coordinate lagrangiane  $c_i$  (qualcuna delle  $dc_i$  può essere anche nulla), e quindi a meno della  $\gamma$ .

Fissati perciò i rapporti tra le varie  $dc_i$ , la  $\delta V$  è per forze conservative una funzione di  $\gamma$ , e l'ordine della  $\delta V$  nelle  $dc_i$  non nulle, coincide con l'ordine di  $\delta V$  nella  $\gamma$ . Si ha, limitandosi ai termini fino al secondo ordine,

$$\delta V_{o \rightarrow d} = \left( \frac{dV}{d\gamma} \right)_o d\gamma + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2V}{d\gamma^2} \right)_o d\gamma^2 = \delta_1 V_{o \rightarrow d} + \delta_2 V_{o \rightarrow d}$$

$$\delta V_{d \rightarrow o} = \left( \frac{dV}{d\gamma} \right)_d d\gamma + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2V}{d\gamma^2} \right)_d d\gamma^2 = \delta_1 V_{d \rightarrow o} + \delta_2 V_{d \rightarrow o} .$$

Nel caso in esame è  $\delta_1 V_{o \rightarrow d} = 0$ , e quindi si trae

$$\delta_1 V_{d \rightarrow o} + \delta_2 V_{d \rightarrow o} = - \delta_2 V_{o \rightarrow d}$$

$$\delta_1 V_{d \rightarrow o} = - \delta_2 V_{d \rightarrow o} - \delta_2 V_{o \rightarrow d} .$$

Poichè è ancora

$$\left( \frac{d^2V}{d\gamma^2} \right)_d = \left( \frac{d^2V}{d\gamma^2} \right)_o + \left( \frac{d^3V}{d\gamma^3} \right)_o d\gamma \approx \left( \frac{d^2V}{d\gamma^2} \right)_o$$

può scriversi

$$\delta_2 V_{d \rightarrow o} = 2 \delta_2 V_{o \rightarrow d}$$

e quindi

$$\delta_1 V_{d \rightarrow o} = - 2 \delta_2 V_{o \rightarrow d} .$$

Il caso della fig. 1-3, sia pure ad un solo grado di libertà e senza elasticità, può essere istruttivo in proposito. La  $\varphi = 0$  è una configurazione  $C_o$  di equilibrio, la  $\varphi = \varphi_d$  è la posizione  $C_d$  variata rispetto ad essa.

In  $\varphi = 0$  si ha, limitandosi ai termini fino al secondo ordine incluso,

$$\delta V_{o \rightarrow d} = F l (1 - \cos \varphi) = F l \frac{d\varphi^2}{2} = F l \frac{\varphi_d^2}{2} = \delta_2 V_{o \rightarrow d} .$$

In  $\varphi = \varphi_d$  invece si ha

$$\begin{aligned} \delta V_{o \rightarrow d} &= F \frac{l}{2} [\varphi_d^2 - (\varphi_d + d\varphi)^2] = F l \varphi_d d\varphi + F l \frac{d\varphi^2}{2} = \\ &= \delta_1 V_{d \rightarrow o} + \delta_2 V_{d \rightarrow o} . \end{aligned}$$

Per  $d\varphi = - \varphi_d$  è

$$\delta V_{d \rightarrow o} = - F l \varphi_d^2 + F l \frac{\varphi_d^2}{2} = - F l \frac{\varphi_d^2}{2} = - \delta_2 V_{o \rightarrow d}$$

$$\delta_1 V_{d \rightarrow o} = - F l \varphi_d^2 = - 2 \delta_2 V_{o \rightarrow d} .$$

Si trae da ciò che se non c'è alcuna possibilità di compiere lavoro positivo del primo ordine, se cioè per tutti i possibili insiemi di piccoli spostamenti il lavoro del primo ordine delle forze applicate è nullo (\*), il sistema non si muove, cioè è in equilibrio; e viceversa, se è in equilibrio, il lavoro del primo ordine compiuto dalle forze per qualsiasi insieme di piccoli spostamenti è nullo. E' questo il principio dei lavori virtuali per i sistemi rigidi, da cui si traggono il principio dei lavori virtuali per i sistemi deformabili — in particolare elastici — e il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale per i sistemi elastici a vincoli lisci.

La quantità che nei sistemi deformabili fa giudicare dell'equilibrio è la somma

$$\delta V = \delta L_e + \delta L_i$$

del lavoro  $\delta L_e$  delle forze  $F$  esterne, e del lavoro delle forze interne connesse con le  $F$  (e con eventuali distorsioni) considerate agenti dal singolo elemento elastico sulla rimanente struttura. Se il materiale è elastico (linearmente o meno) si ha

$$\delta L_i = - \int_v \sigma \delta \varepsilon dV - \frac{1}{2} \int_v \delta \sigma \delta \varepsilon dV .$$

Il  $\delta L_i$  è pari, in tal caso, alla variazione  $\delta L$  dell'energia elastica cambiata di segno.

La configurazione  $C_o$  è di equilibrio,  $C_d$  è una configurazione variata rispetto alla  $C_o$ ; in genere la  $C_d$  non è di equilibrio, e quindi il lavoro del primo ordine nel passaggio da  $C_d$  a  $C_o$  è in genere diverso da zero. Limitandosi ai termini fino al secondo ordine, può scriversi

$$\delta V_{d \rightarrow o} = \delta_1 V_{d \rightarrow o} + \delta_2 V_{d \rightarrow o} .$$

Nel passaggio da  $C_o$  a  $C_d$  è invece

$$\delta V_{o \rightarrow d} = \delta_2 V_{o \rightarrow d} .$$

Se le forze sono conservative è

$$\delta V_{d \rightarrow o} = - \delta V_{o \rightarrow d}$$

e  $\delta_1 V_{d \rightarrow o}$  è quindi di segno opposto a quello di  $\delta_2 V_{o \rightarrow d}$ .

---

(\*) Poichè il lavoro è del primo ordine, se per un insieme  $dc_i$  è negativo, per l'insieme  $-dc_i$  è positivo.

e quindi (Vol. I, Cap. VIII, § 1)

$$\delta L_{ey} = \int_0^{\delta f} F'_y df' = - \frac{F}{h + h_1} \int_0^{\delta f} f' df' = - \frac{F \delta f^2}{2(h + h_1)} = \frac{1}{2} F_y \delta f .$$

Nel caso della fig. 1-1 c, invece, il lavoro della  $F_y$  è nullo se la variazione di configurazione si assegna dando prima lo spostamento orizzontale all'estremo superiore e poi la rotazione, è pari a  $F_y \delta f$  se invece si dà prima la rotazione e poi lo spostamento, e può assumere valori diversi giocando opportunamente sui due enti rotazione e spostamento. Sono *non conservative* le forze che, come le  $F_y$ , sorgono con la variazione di configurazione, e non sono funzioni note dei corrispondenti spostamenti.

Il lavoro compiuto dalle forze non conservative non è univocamente definito per ogni variazione di una configurazione; comunque esso è di ordine due (o superiore) nei parametri della variazione, perchè le forze non conservative sono funzioni di detti parametri, quindi di esso non si tiene conto — e non si dà il caso di distinguere le forze in conservative o meno — in tutti i problemi di equilibrio già incontrati dove entrino in gioco solo i lavori di primo ordine.

Le distorsioni sono definite anch'esse dalle loro componenti — o caratteristiche — secondo il riferimento adottato, e dai punti — o dalle sezioni — in cui agiscono, punti solidali con la struttura.

Si faccia agire sulla struttura nella configurazione  $C_0$  un insieme di forze (*forze perturbanti*)  $F_d$ , piccole in rapporto alle forze applicate e alle reazioni già presenti in  $C_0$ . Le  $F_d$  vanno deposte sulla struttura secondo le norme della *deformazione guidata*, già precisate nel § 6 del Cap. V, Vol. I; in particolare, ciascuna delle  $F_d$  è accompagnata dal vincolo (ideale) corrispondente, vincolo che poi viene lentamente rimosso in ambedue i sensi fino al suo distacco dalla struttura.

In ogni caso, per ragioni di continuità analitica, esiste una configurazione  $C_d$ , prossima alla  $C_0$ , che è di equilibrio sotto le forze  $F$  ed  $F_d$ . La  $C_d$  è tanto più vicina alla  $C_0$  quanto più piccole sono le  $F_d$ ; essa può sempre essere raggiunta dalle  $F_d$  per il modo con cui queste sono applicate.

Si portino via le forze  $F_d$ ; la  $C_d$  in genere non è più di equilibrio, Si sa dalla Meccanica Razionale che se un sistema olonoma a vincoli lisci e bilaterali si muove a partire da una certa configurazione, il lavoro compiuto dalle forze (conservative o meno) per effetto degli spostamenti iniziali connessi con il suddetto movimento è del primo ordine nelle variazioni  $dc_i$  delle coordinate lagrangiane, ed è positivo; e viceversa, se c'è anche una di queste possibilità, il sistema si muove (compiendo lavoro del primo ordine e positivo).

omologhi, come nelle figg. 1-1 c, e 1-1 d, dove la forza  $F$  è costretta secondo la tangente o la normale all'asse. Può darsi pure che il punto d'applicazione sia funzione della configurazione (fig. 1-1 e), dove  $F$  ha sempre la stessa retta d'azione.

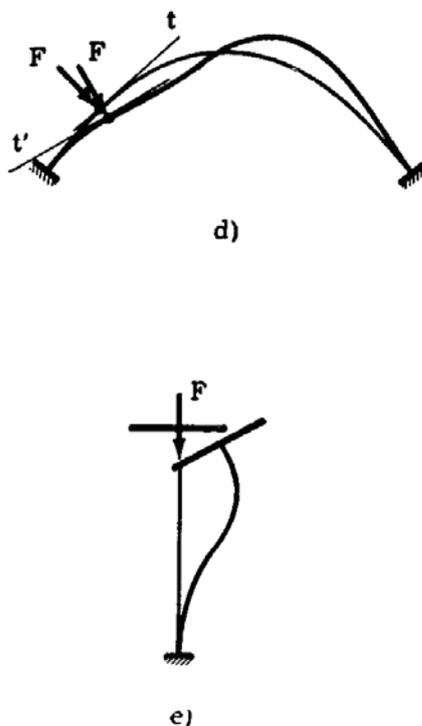


FIG. 1-1 d, e

Si ricorda dalla Meccanica Razionale che un insieme di forze  $F$  applicate ad un sistema olonomo si dice *conservativo* se il lavoro da esse compiuto per una variazione  $dc_1 dc_2 \dots$  delle coordinate lagrangiane del sistema è il differenziale esatto di una funzione  $P$  (*energia potenziale delle forze*) delle coordinate lagrangiane stesse. In altre parole, le forze sono conservative se il lavoro da esse compiuto per una variazione della configurazione è univocamente definito dai parametri  $dc_1 dc_2 \dots$  della variazione stessa.

Ciò è senz'altro vero se le componenti delle forze sono indipendenti dalla configurazione (tipo gravitazionale) (fig. 1-1 a); ma lo è anche se le componenti delle forze  $F_i$  sono funzioni note dei corrispondenti spostamenti  $ds_i$ . Per esempio, nel caso della fig. 1-1 b è, per una variazione di configurazione a partire da quella rettilinea,

$$F'_y = -F \frac{f'}{h + h_1}$$

Sia  $C_0$  una configurazione di equilibrio di una struttura elastica (\*) ed a vincoli lisci e bilaterali, soggetta alle forze  $F$  ed alle distorsioni  $\Delta$ ; la  $C_0$  è definita dalle componenti  $u_0, v_0, w_0$  dello spostamento valutate a partire dalla configurazione iniziale (dalla configurazione cioè che la struttura assume in assenza di forze e distorsioni).

Le forze  $F$  applicate sulla struttura siano indipendenti dal tempo; esse sono definite dal punto di applicazione, e dalle componenti secondo un riferimento cartesiano fisso nello spazio. Il caso più frequente è che il punto di applicazione e le componenti siano indipendenti dalla configurazione (fig. 1-1 a). Può darsi però che le componenti siano funzioni note

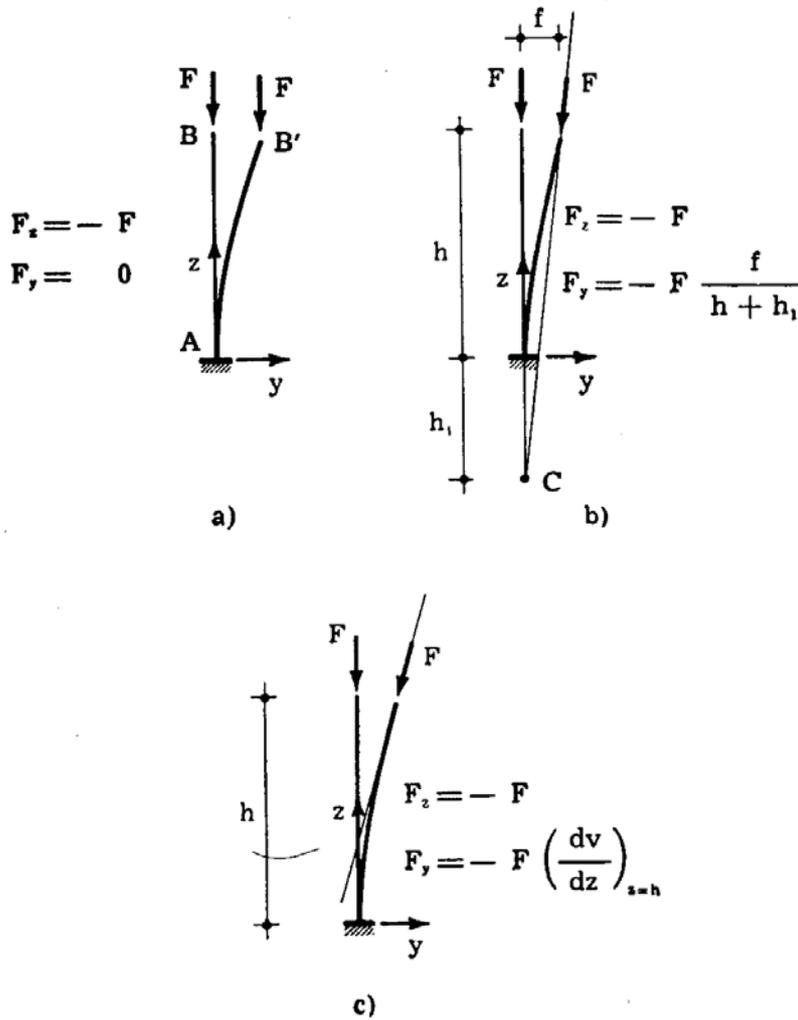


FIG. 1-1 a, b, c

(sono esclusi i casi di vincoli con attrito) della configurazione, in particolare dei termini ad esse omologhi della stessa (fig. 1-1 b), o di termini non

(\*) Si intende come tale una struttura costituita in ogni sua parte da materiale elastico, anche se ad elasticità non lineare.

## CAPITOLO I

### LA STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO NELLE STRUTTURE ELASTICHE

#### 1. Definizioni di stabilità delle configurazioni di equilibrio di una struttura elastica: criterio dinamico e statico.

Nella Meccanica Razionale si legge che una configurazione  $C_0$  di equilibrio di un sistema olonomo (costituito di parti rigide collegate, mediante vincoli lisci, tra loro ed al suolo) sottoposto a determinate forze  $F$ , è *stabile* se, impresso un qualsiasi insieme di piccole velocità  $\dot{c}_i$  ai punti del sistema, è sempre possibile, assegnando alle  $\dot{c}_i$  dei valori sufficientemente piccoli, far sì che il sistema presenti delle oscillazioni caratterizzate da spostamenti dalla  $C_0$  di ampiezza comunque piccola. Le  $\dot{c}_i$  sono le derivate temporali delle coordinate lagrangiane  $c_i$ . Esse possono farsi risalire all'azione di un generico insieme di forze di valore costante  $F_d$ , agenti per un tempo elementare  $dt$ .

Appare da quanto sopra che lo studio delle vibrazioni libere del sistema eseguito a partire da  $C_0$ , e condotto nell'ipotesi di piccoli spostamenti, può risolvere il problema; infatti se le oscillazioni libere semplici sono tutte di ampiezza finita, le condizioni di stabilità sono soddisfatte per un qualsiasi insieme  $F_d$ , poichè dopo il tempo  $dt$  di azione delle  $F_d$  si instaura un moto somma delle oscillazioni libere semplici, e perciò di ampiezza finita, che tende a zero per  $dt$  tendente a zero.

Se invece di una delle oscillazioni libere semplici, di qualsiasi ordine, si ha un moto che cresce indefinitamente con il tempo, il sistema risulta non stabile; infatti l'ampiezza di quel moto, pur essendo in realtà non infinita, è pur sempre grande, poichè risulta non limitata nell'ipotesi di piccoli spostamenti.

E' questo il cosiddetto *criterio dinamico di stabilità*; in particolare, esso è l'unico criterio attendibile in presenza di forze funzioni del tempo.

Il criterio dinamico può essere adottato anche per i sistemi continui elastici; appare preferibile però, nell'ambito della Scienza delle Costruzioni, il *criterio statico*.

Si passa ad esporre tale criterio.