

Si premette una osservazione. Se due strutture monodimensionali T ed S hanno lo stesso asse e lo stesso peso proprio, e con riferimento ad n sezioni di ipotetica plasticizzazione la T ha domini di plasticizzazioni più ampi della S (nel senso che in quelle sezioni  $M'_{oNT} > M'_{oNS}$ , ed  $M''_{oNT} < M''_{oNS}$ ) il  $\gamma_{aT}$  calcolato con quella scelta di sezioni è maggiore del  $\gamma_{aS}$ .

Infatti è

$$\gamma_{aT} = - \frac{\Sigma M_{oT} \Delta\varphi_i + L_g}{L_a}$$

$$\gamma_{aS} = - \frac{\Sigma M_{oS} \Delta\varphi_i + L_g}{L_a} ;$$

e poichè è

$$- \Sigma M_{oT} \Delta\varphi_i > - \Sigma M_{oS} \Delta\varphi_i$$

risulta pure

$$\gamma_{aT} > \gamma_{aS} .$$

Ciò premesso, si scelgano le n sezioni di plasticizzazione di primo tentativo, e si fissino in modo arbitrario i momenti  $M_1$ . Da una equazione analoga alla (4-5) si trae un numero

$$\beta_a = - \frac{\Sigma M_1 \Delta\varphi_i + L_g}{L_a} . \quad (v)$$

I carichi  $g + \beta_a a$  e le coppie  $M_1$  sono in equilibrio sulla struttura una volta labile.

Calcolati, per esempio con le (4-7), gli sforzi normali nelle sezioni di plasticizzazione, e poi le caratteristiche  $N_\beta M_\beta$  prodotte in tutte le sezioni dai carichi  $g + \beta_a a$  e dalle coppie  $M_1$ , si riportano sui domini i punti  $P_\beta (N_\beta M_\beta)$  e si eseguono i rapporti

$$\frac{P_g P_\beta}{P_g P'} \quad (z)$$

analoghi ai (q). I rapporti (z), che converrà riportare in diagramma, presentano dei massimi relativi; di essi si considerino i primi n, se n è il numero di sezioni necessario a labilizzare la struttura, e siano  $\rho_{max}$  e  $\rho_{min}$  i valori estremi che detti rapporti assumono in corrispondenza di tali massimi.

Sotto i carichi  $g + a \frac{\beta_a}{\rho_{max}}$  esiste un insieme di reazioni iperstatiche

che genera sulla struttura le caratteristiche  $N_g + \frac{N_\beta}{\rho_{\max}}$ ,  $M_g + \frac{M_\beta}{\rho_{\max}}$  definite da punti  $P_{\rho_{\max}}$  dovunque contenuti nei domini di plasticizzazione. Dunque può scriversi

$$\frac{\beta_a}{\rho_{\max}} = \psi_a. \quad (a')$$

Sotto i carichi  $g + a \frac{\beta_a}{\rho_{\min}}$  esiste un insieme di reazioni iperstatiche

che genera sulla struttura le caratteristiche  $N_g + \frac{N_\beta}{\rho_{\min}}$ ,  $M_g + \frac{M_\beta}{\rho_{\min}}$ , definite da punti  $P_{\rho_{\min}}$  di cui uno, in corrispondenza della sezione ove si verifica  $\rho_{\min}$ , giace sul contorno del dominio, mentre gli altri in  $n-1$  sezioni giacciono fuori del dominio.

Per una struttura ideale, fatta in modo che nelle  $n-1$  sezioni predette il dominio sia più grande del reale, e tale da contenere sul suo contorno i  $P_{\rho_{\min}}$ ,  $\frac{\beta_a}{\rho_{\min}}$  è un  $\gamma_a$ ; quindi per la struttura reale è

$$\frac{\beta_a}{\rho_{\min}} > \gamma_a$$

e perciò

$$\frac{\beta_a}{\rho_{\min}} > s_a. \quad (b')$$

Dalle (a') e (b') si trae

$$\frac{\beta_a}{\rho_{\max}} \leq s_a < \frac{\beta_a}{\rho_{\min}}.$$

Nel primo tentativo conviene scegliere per valori dei momenti  $M$ , il massimo o il minimo forniti dai domini di snervamento. Nel secondo tentativo conviene al solito prevedere le cerniere nelle  $n$  sezioni ove nel primo tentativo si avevano i primi massimi relativi, assegnando in esse ai momenti i valori  $M_g + M_a \frac{P_g P_\beta}{P_g P'}$ , analoghi a quelli dei segmenti  $C'D'$  della fig. 4-29.

Si consideri a titolo di esempio lo stesso arco esaminato nel paragrafo precedente; si inizia con il caso del carico proporzionale.

a) *Carico proporzionale.*

Le sezioni di primo tentativo (fig. 4-37) sono le stesse della fig. 4-33.

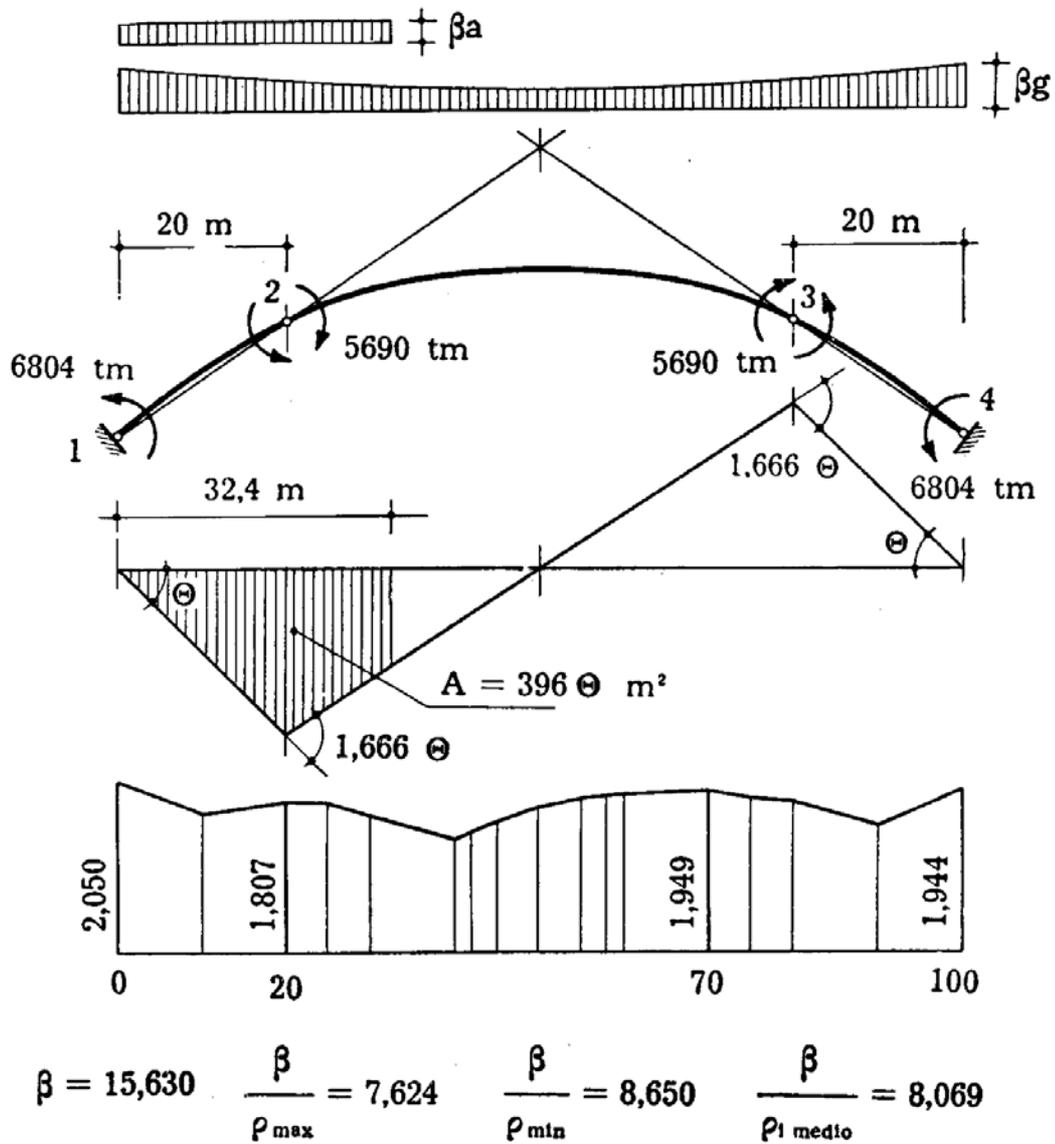


FIG. 4-37

Scelti come valori dei momenti quelli massimi e minimi dei domini

$$M_1 = - 6804 \text{ tm}$$

$$M_2 = 5690 \text{ tm}$$

$$M_3 = - 5690 \text{ tm}$$

$$M_4 = 6804 \text{ tm}$$

la (s) fornisce

$$\beta = 15,63 .$$

I valori  $N_\beta$  ed  $M_\beta$  sono consegnati nella tabella che segue (pagg. 204, 205); nelle sezioni ove sono presenti forze concentrate sono riportati i valori di  $N_\beta$  a sinistra ed a destra.

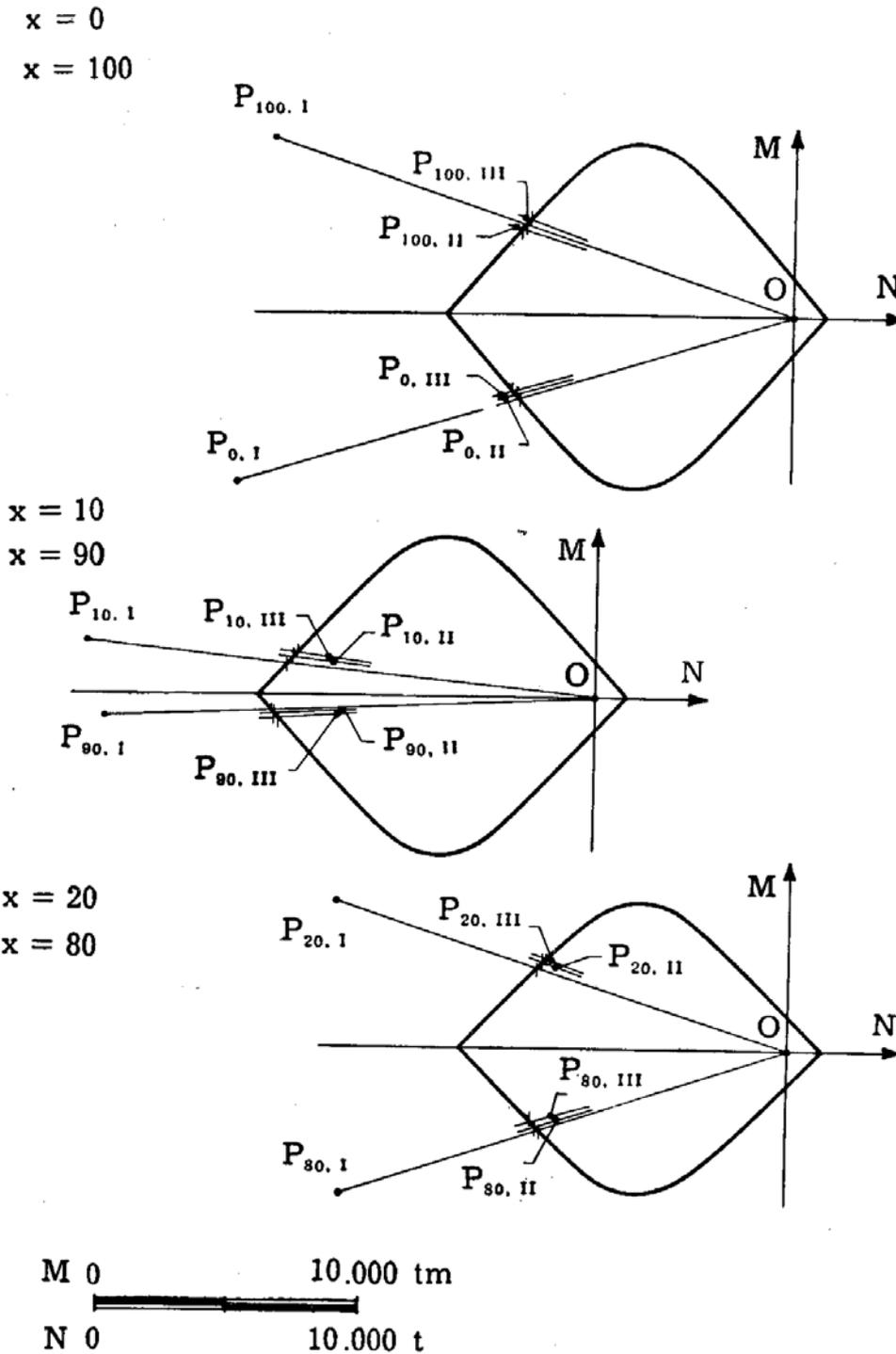


FIG. 4-38 a

Nella fig. 4-38 a, b, c, sono riportati i punti  $P_\beta$ , ottenendo poi i rapporti  $\frac{O P_\beta}{O P'}$  consegnati nella tabella e nella fig. 4-37.

Dove ad uno stesso momento si associano due sforzi normali, si calcola il più alto dei due rapporti  $\frac{OP_{\beta}}{OP'}$ , considerando il punto  $P'_2$  (fig. 4-39) di ordinata minore.

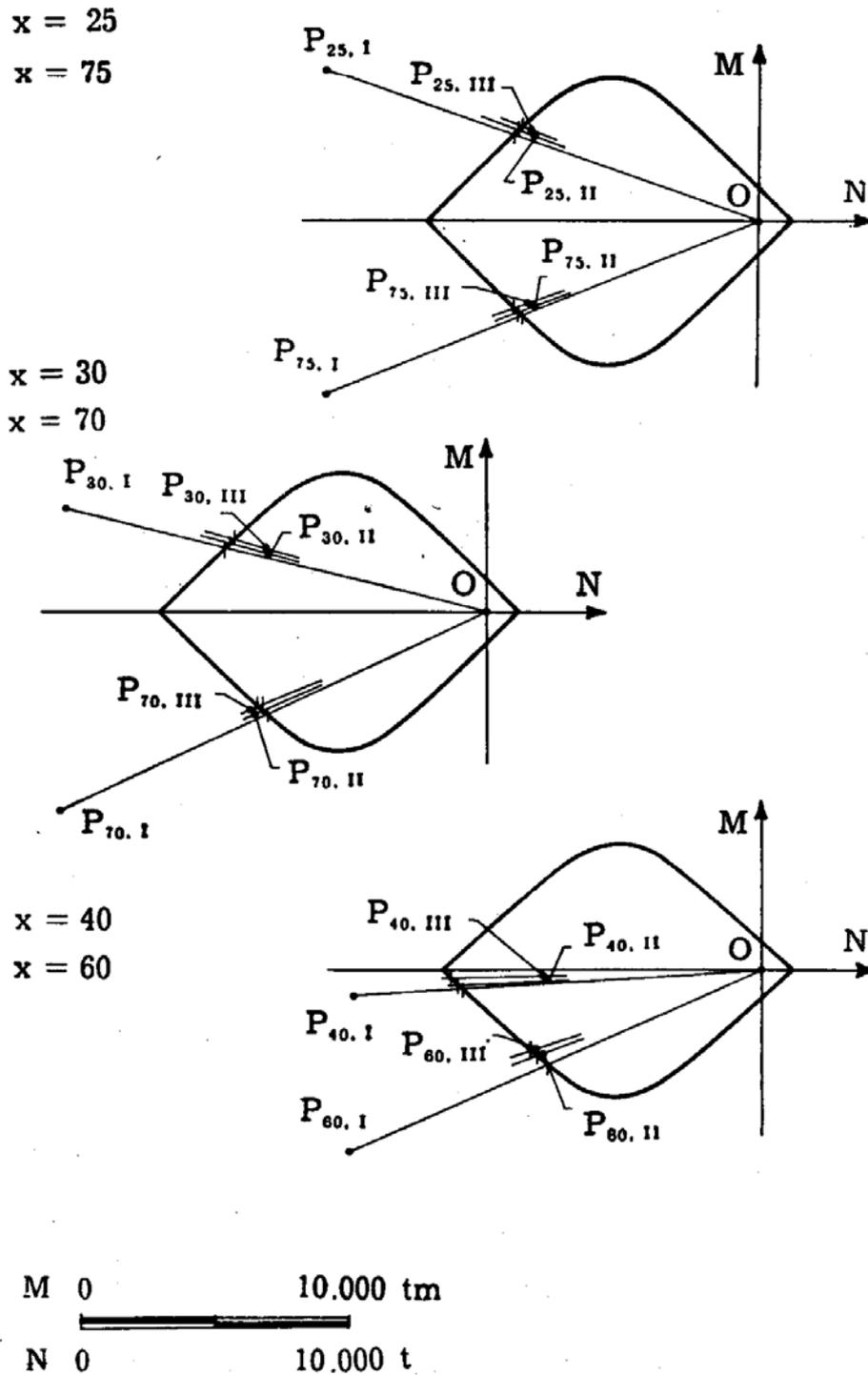


FIG. 4-38 b

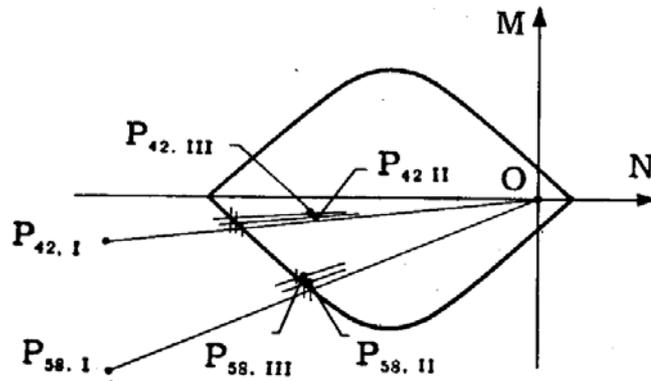
I primi quattro massimi relativi dei rapporti  $\frac{OP_{\beta}}{OP'}$  si hanno in corri-

spondenza delle imposte e delle sezioni di ascissa 20 m e 70 m; tra essi è

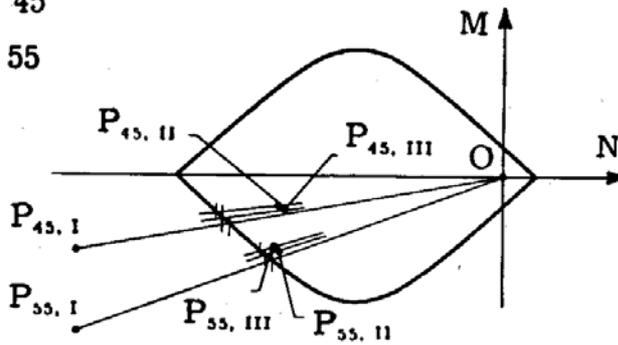
$$\rho_{\max} = 2,050$$

$$\rho_{\min} = 1,807$$

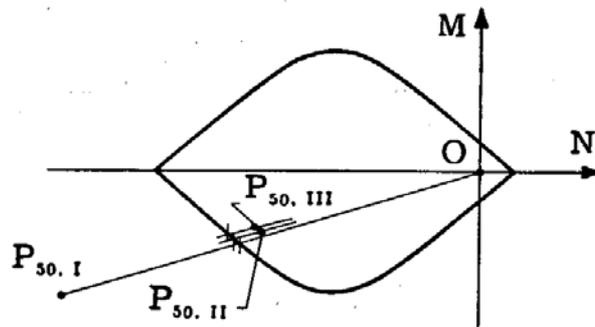
x = 42  
x = 58



x = 45  
x = 55



x = 50



M 0 10.000 tm  
N 0 10.000 t

FIG. 4-38 c

e perciò si ha

$$7,62 \leq s < 8,65 .$$

Nel secondo tentativo (fig. 4-40) le cerniere sono scelte alle imposte ed alle ascisse di 20 m e 70 m. I momenti  $M_i$  sono

$$M_1 = - 3319 \text{ tm}$$

$$M_2 = 3149 \text{ tm}$$

$$M_3 = - 3868 \text{ tm}$$

$$M_4 = 3500 \text{ tm} .$$

La (s) fornisce

$$\beta = 8,14 .$$

CARICO

	x(m)	0	10	20	25	30	40	42	45
1° tentativo	$M_\beta$ (tm)	- 6.804	2.000	5.690	5.867	4.002	- 965	- 1.687	- 2.776
	$N_\beta$ (t)	- 21.060	- 19.299 - 18.412	- 17.097 - 16.507	- 16.080	- 15.663 - 15.474	- 15.180	- 15.160	- 15.143
	$\frac{O P_\beta}{O P'}$	<b>2,050</b>	1,662	<b>1,807</b>	1,800	1,634	1,358	1,440	1,576
2° tentativo	$M_\beta$ (tm)	- 3.319	1.250	3.149	3.234	2.253	- 359	- 740	- 1.316
	$N_\beta$ (t)	- 10.966	- 10.047 - 9.582	- 8.902 - 8.595	- 8.373	- 8.157 - 8.057	- 7.905	- 7.900	- 7.886
	$\frac{O P_\beta}{O P'}$	<b>1,045</b>	0,878	<b>0,961</b>	0,947	0,838	0,705	0,739	0,806
3° tentativo	$M_\beta$ (tm)	- 3.176	1.388	3.277	3.355	2.365	- 266	- 651	- 1.233
	$N_\beta$ (t)	- 10.973	- 10.055 - 9.589	- 8.908 - 8.061	- 8.378	- 8.161 - 8.063	- 7.910	- 7.905	- 7.892
	$\frac{O P_\beta}{O P'}$	<b>1,030</b>	0,866	<b>0,977</b>	0,957	0,878	0,696	0,730	0,800

Nella tabella sono consegnati i valori di  $N_\beta$  ed  $M_\beta$  nel secondo tentativo, e nella fig. 4-38 i punti  $P_\beta$ . I rapporti  $\frac{O P_\beta}{O P'}$  sono riportati nella tabella e nella fig. 4-40. Si ha

$$\rho_{\max} = 1,045$$

$$\rho_{\min} = 0,961$$

e quindi

$$7,79 \leq s < 8,47 .$$

PROPORIZIONALE

50	55	58	60	70	75	80	90	100
— 4.576	— 5.711	— 6.390	— 6.847	— 7.538	— 6.610	— 5.690	— 980	6.804
— 14.829	— 15.173	— 15.190	— 15.208	— 15.541 — 15.798	— 16.073	— 16.359 — 16.881	— 17.772 — 18.505	— 19.746
1,751	1,850	1,898	1,907	<b>1,949</b>	1,861	1,817	1,518	<b>1,944</b>
— 2.266	— 2.877	— 3.238	— 3.480	— 3.868	— 3.400	— 2.932	— 517	3.500
— 7.868	— 7.902	— 7.291	— 7.926	— 8.093 — 8.228	— 8.371	— 8.520 — 8.792	— 9.256 — 9.638	— 10.285
0,934	0,968	0,983	0,994	<b>1,008</b>	0,962	0,834	0,794	<b>1,012</b>
— 2.193	— 2.814	— 3.181	— 3.428	— 3.837	— 3.380	— 2.924	— 533	3.458
— 7.874	— 7.908	— 7.926	— 7.930	— 8.100 — 8.235	— 8.378	— 8.527 — 8.800	— 9.265 — 9.647	— 10.294
0,910	<b>0,926</b>	0,977	0,991	<b>1,005</b>	<b>0,957</b>	0,937	0,796	<b>1,002</b>

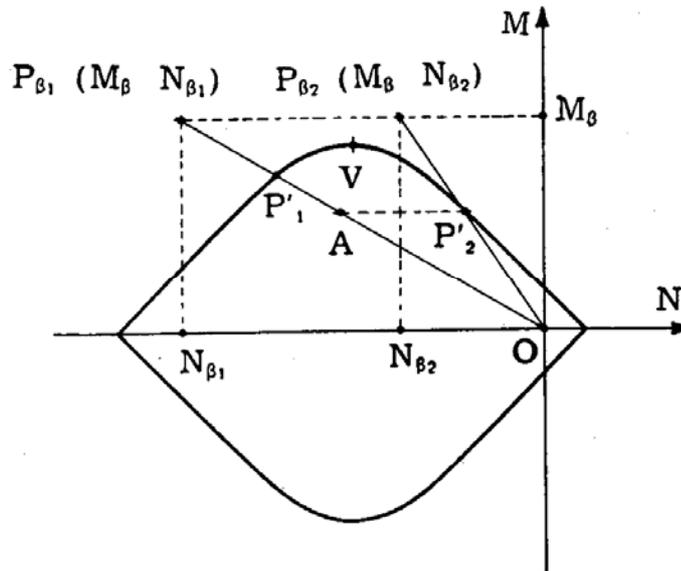
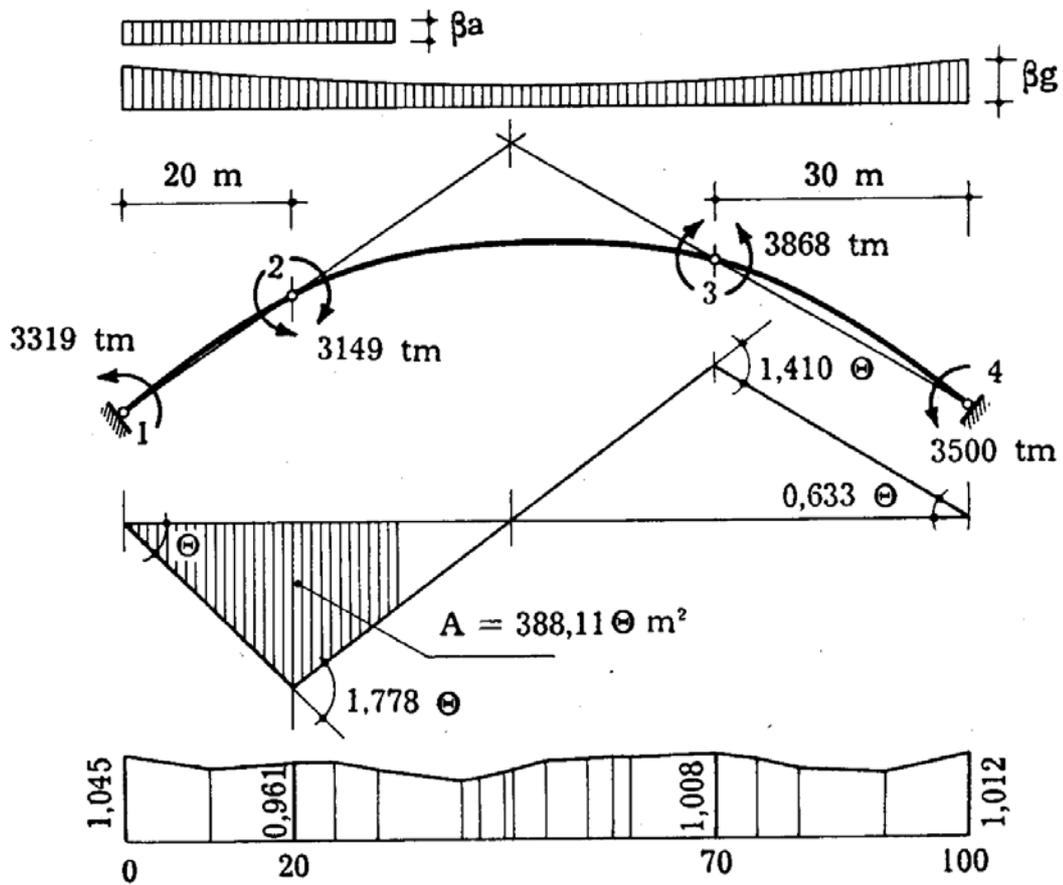


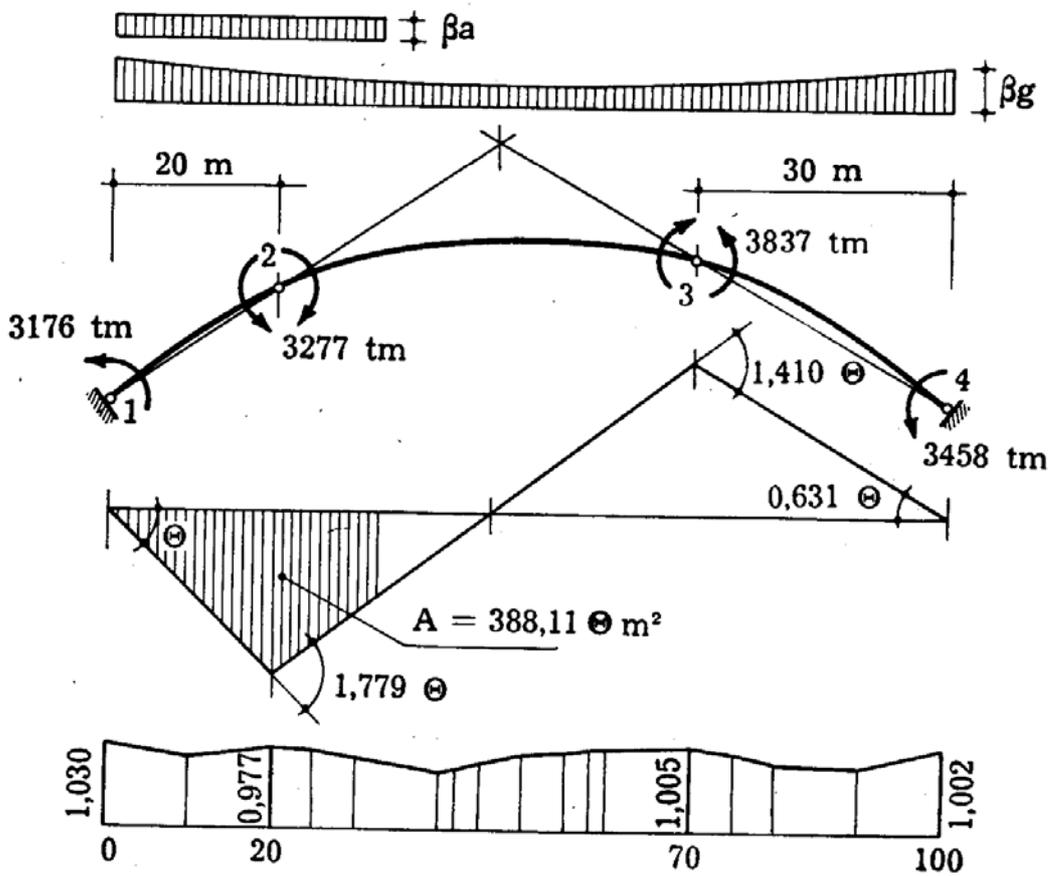
FIG. 4-39



$$\beta = 8,139 \quad \frac{\beta}{\rho_{\max}} = 7,789 \quad \frac{\beta}{\rho_{\min}} = 8,469 \quad \frac{\beta}{\rho_{\text{medio}}} = 8,090$$

FIG. 4-40

Nel terzo tentativo (fig. 4-41) le cerniere hanno la stessa ubicazione, i momenti sono



$$\beta = 8,146, \quad \frac{\beta}{\rho_{\max}} = 7,909, \quad \frac{\beta}{\rho_{\min}} = 8,338, \quad \frac{\beta}{\rho_{\text{medio}}} = 8,122$$

FIG. 4-41

$$M_1 = - 3176 \text{ tm}$$

$$M_2 = 3277 \text{ tm}$$

$$M_3 = - 3837 \text{ tm}$$

$$M_4 = 3458 \text{ tm}$$

Si trae

$$\beta = 8,15$$

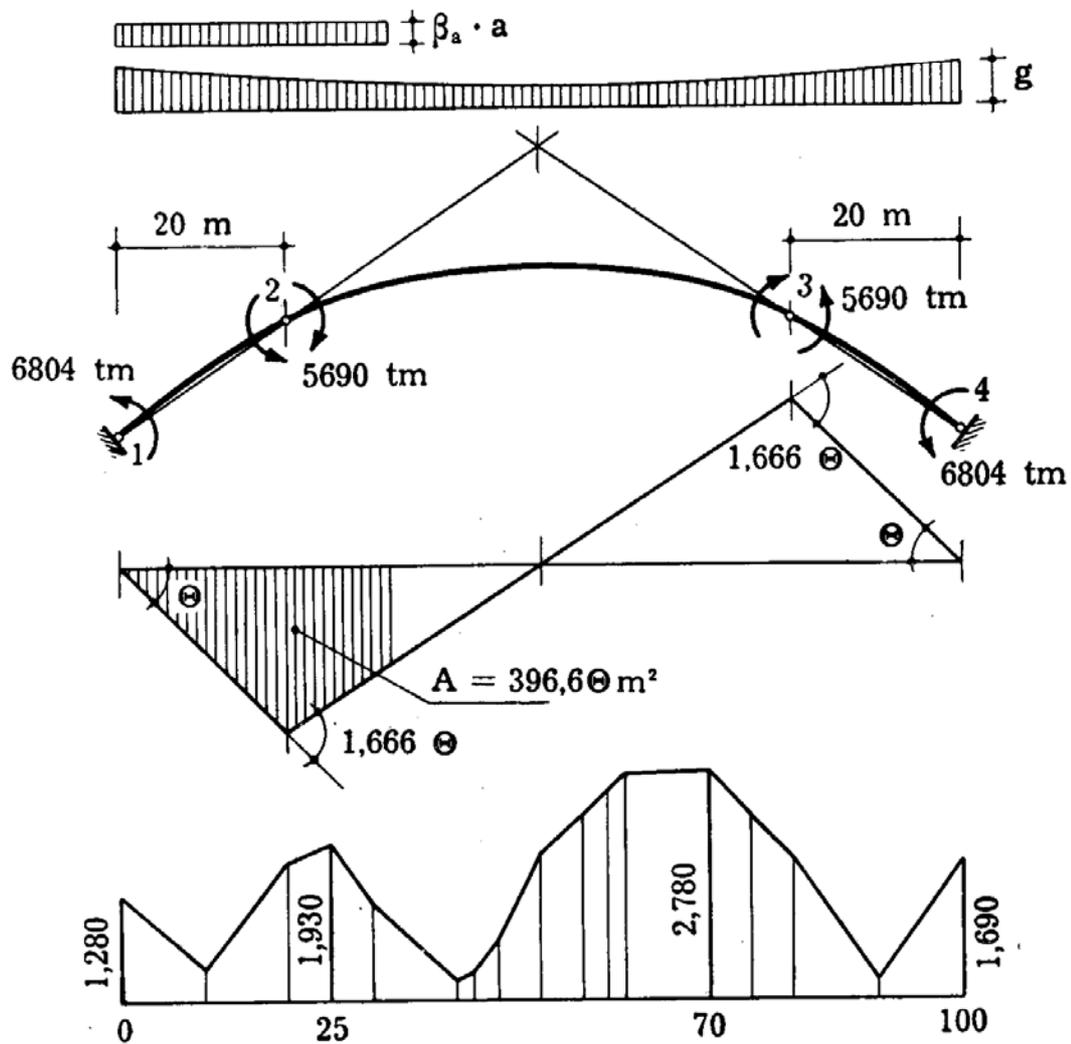
$$\rho_{\max} = 1,030$$

$$\rho_{\min} = 0,977$$

$$7,91 \leq s < 8,34$$

## b) Carico non proporzionale.

Si parte nel primo tentativo (fig. 4-42) dallo stesso meccanismo e



$$\beta_a = 15,630 \quad \frac{\beta_a}{\rho_{\max}} = 5,622 \quad \frac{\beta_a}{\rho_{\min}} = 12,211 \quad \frac{\beta_a}{\rho_{\text{medio}}} = 8,141$$

FIG. 4-42

dalla stessa quadrupla di valori dei momenti della fig. 4-37. Si ha così ancora (s)

$$\beta_a = 15,63 .$$

Nella tabella che segue (pagg. 212, 213) sono riportati i valori  $N_\beta$  ed  $M_\beta$ , e nella fig. 4-43 a, b, c, i punti  $P_\beta$ .

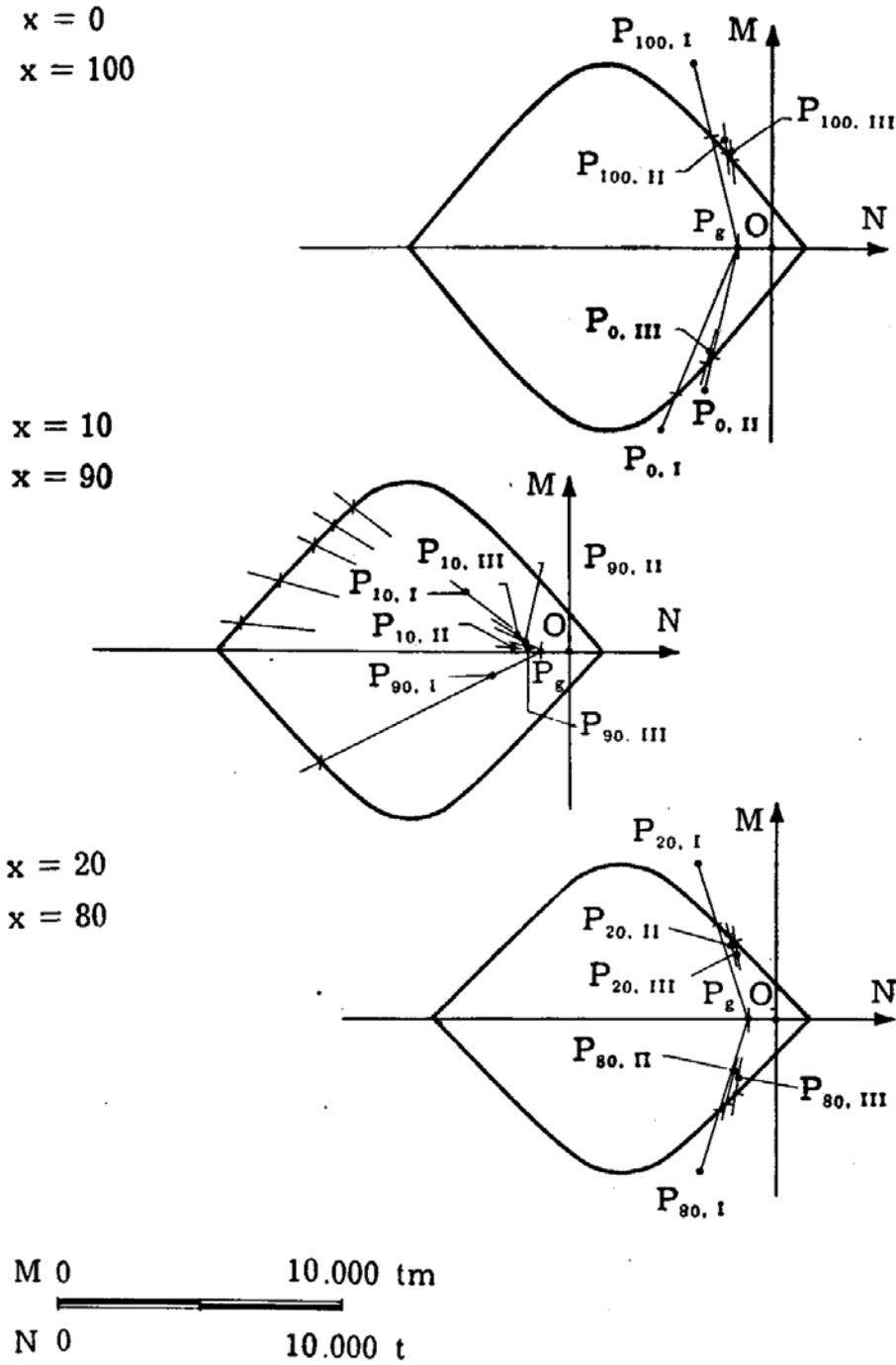
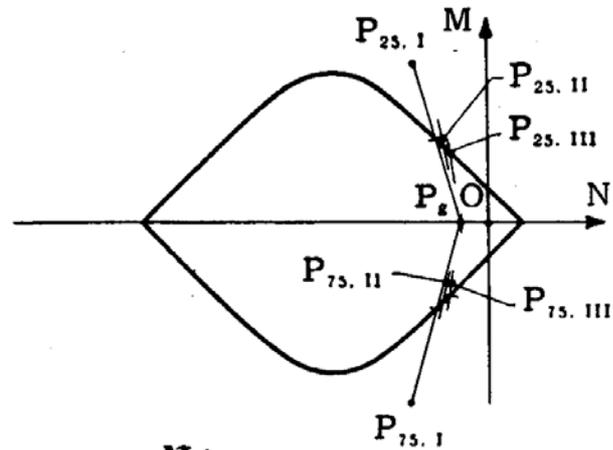


FIG. 4-43 a

I rapporti  $\frac{P_g P_\beta}{P_g P'}$  sono posti in diagramma nella fig. 4-42; risulta

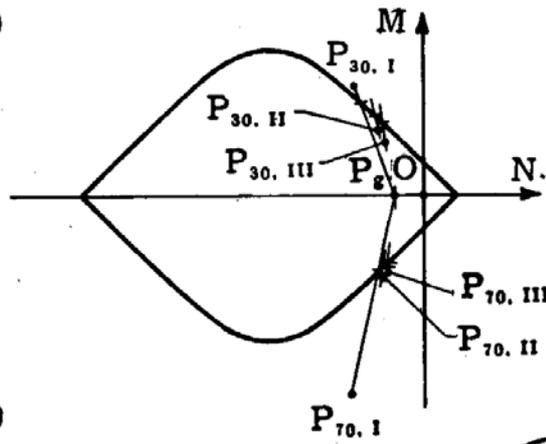
$x = 25$

$x = 75$



$x = 30$

$x = 70$



$x = 40$

$x = 60$

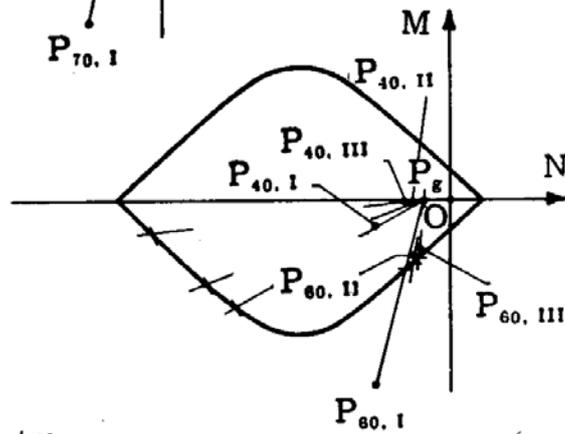
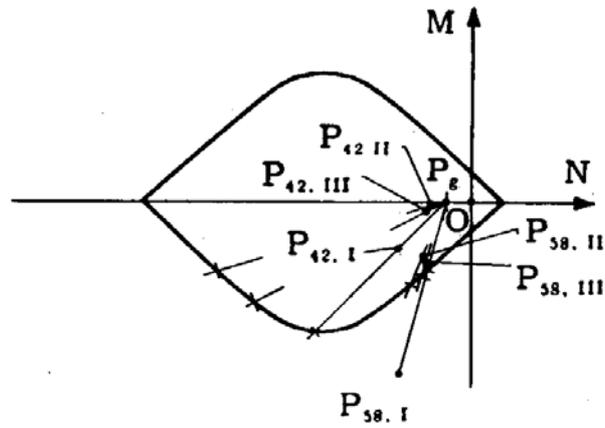


FIG. 4-43 b

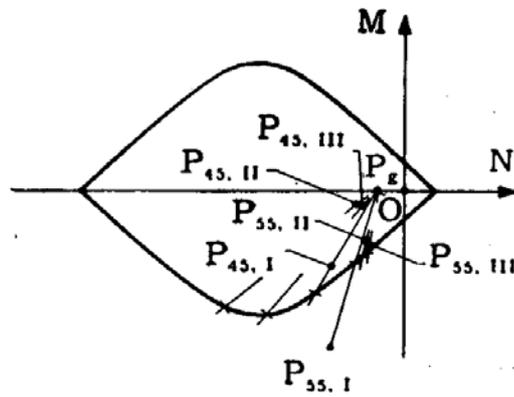
$x = 42$

$x = 58$



$x = 45$

$x = 55$



$x = 50$

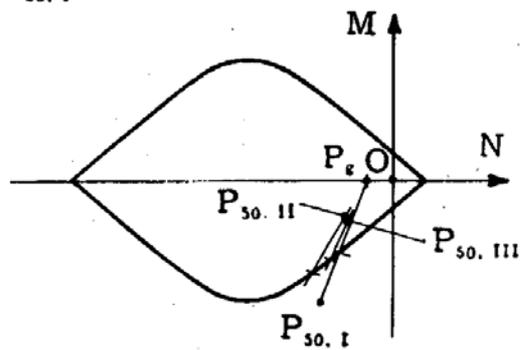


FIG. 4-43 c

## CARICO NON

	x(m)	0	10	20	25	30	40	42	45
1° tentativo	$M_{\beta}$ (tm)	- 6.804	2.000	5.690	5.867	4.002	- 965	- 1.687	- 2.776
	$N_{\beta}$ (t)	- 3.995	- 3.863 - 3.668	- 2.824 - 2.798	- 2.639	- 2.479 - 2.559	- 2.560	- 2.563	- 2.561
	$\frac{P_g P_{\beta}}{P_g P'}$	<b>1,280</b>	0,390	1,710	<b>1,930</b>	1,180	0,250	0,360	0,760
2° tentativo	$M_{\beta}$ (tm)	- 5.316	99	2.684	3.038	2.331	128	- 190	- 672
	$N_{\beta}$ (t)	- 2.438	- 2.090 - 1.985	- 1.714 - 1.659	- 1.568	- 1.477 - 1.493	- 1.410	- 1.406	- 1.476
	$\frac{P_g P_{\beta}}{P_g P'}$	<b>1,354</b>	0,100	0,840	<b>1,137</b>	0,860	0,060	0,070	0,140
3° tentativo	$M_{\beta}$ (tm)	- 3.926	456	2.454	2.672	1.970	- 62	- 357	- 800
	$N_{\beta}$ (t)	- 2.290	- 1.977 - 1.883	- 1.641 - 1.591	- 1.510	- 1.428 - 1.442	- 1.430	- 1.429	- 1.434
	$\frac{P_g P_{\beta}}{P_g P'}$	<b>0,960</b>	0,110	0,810	<b>1,000</b>	0,730	0,060	0,090	0,190

$$\rho_{\max} = 2,780$$

$$\rho_{\min} = 1,280$$

e quindi

$$5,62 \leq s_a < 12,21 .$$

Nel secondo tentativo (fig. 4-44) le sezioni di plasticizzazione si prevedono alle ascisse dove nel primo tentativo si attingevano i primi quattro massimi relativi, e cioè alle imposte ed alle ascisse 25 m e 70 m. I

## PROPORZIONALE

50	55	58	60	70	75	80	90	100
- 4.576	- 5.711	- 6.390	- 6.847	- 7.538	- 6.610	- 5.690	- 980	6.804
- 2.558	- 2.604	- 2.606	- 2.610	- 2.673 - 2.709	- 2.726	- 2.737 - 2.745	- 2.802 - 2.774	- 2.853
1,820	2,270	2,570	2,750	<b>2,780</b>	2,210	1,720	0,240	<b>1,690</b>
- 1.468	- 1.963	- 2.256	- 2.453	- 2.711	- 2.257	- 1.803	406	4.026
- 1.474	- 1.489	- 1.491	- 1.500	- 1.519 - 1.531	- 1.549	- 1.567 - 1.579	- 1.636 - 1.651	- 1.730
0,560	0,790	0,940	0,990	<b>1,008</b>	0,790	0,520	0,090	<b>1,165</b>
- 1.533	- 1.991	- 2.262	- 2.444	- 2.688	- 2.277	- 1.866	149	3.456
- 1.436	- 1.438	- 1.441	- 1.444	- 1.468 - 1.480	- 1.498	- 1.516 - 1.531	- 1.588 - 1.606	- 1.685
0,620	0,830	0,960	0,980	<b>1,030</b>	0,730	0,600	0,060	<b>1,020</b>

valori dei momenti si ottengono dai domini con il solito procedimento.  
Si ha

$$\beta_a = 8,076$$

$$\rho_{\max} = 1,354$$

$$\rho_{\min} = 1,008$$

$$5,965 \leq s_a < 8,012 .$$

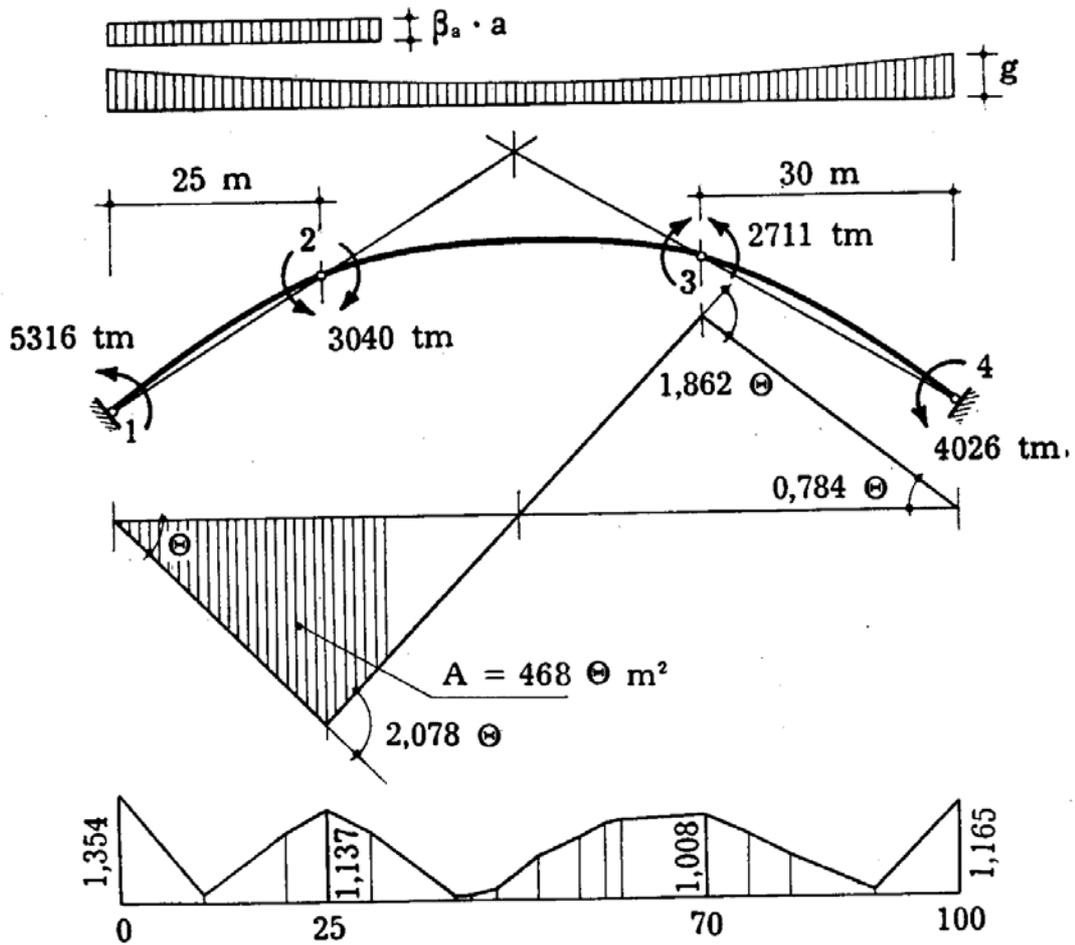
Nel terzo tentativo si conservano le stesse sezioni del secondo (figura 4-45) con i nuovi valori dei momenti che si traggono dai domini. Si ha

$$\beta_a = 7,002$$

$$\rho_{\max} = 1,030$$

$$\rho_{\min} = 0,960$$

$$6,80 \leq s_a < 7,29 .$$



$$\beta_a = 8,076 \quad \frac{\beta_a}{\rho_{\max}} = 5,965 \quad \frac{\beta_a}{\rho_{\min}} = 8,012 \quad \frac{\beta_a}{\rho_{\text{medio}}} = 6,926$$

FIG. 4-44

Dal confronto tra gli esempi numerici relativi al procedimento originario (§ 9) e alla sua variante (§ 10) si osserva come quest'ultima converga in misura notevolmente più lenta; si tenga presente però che

nella pratica tecnica anche un intervallo piuttosto esteso in cui il coefficiente di sicurezza sia compreso può risultare accettabile.

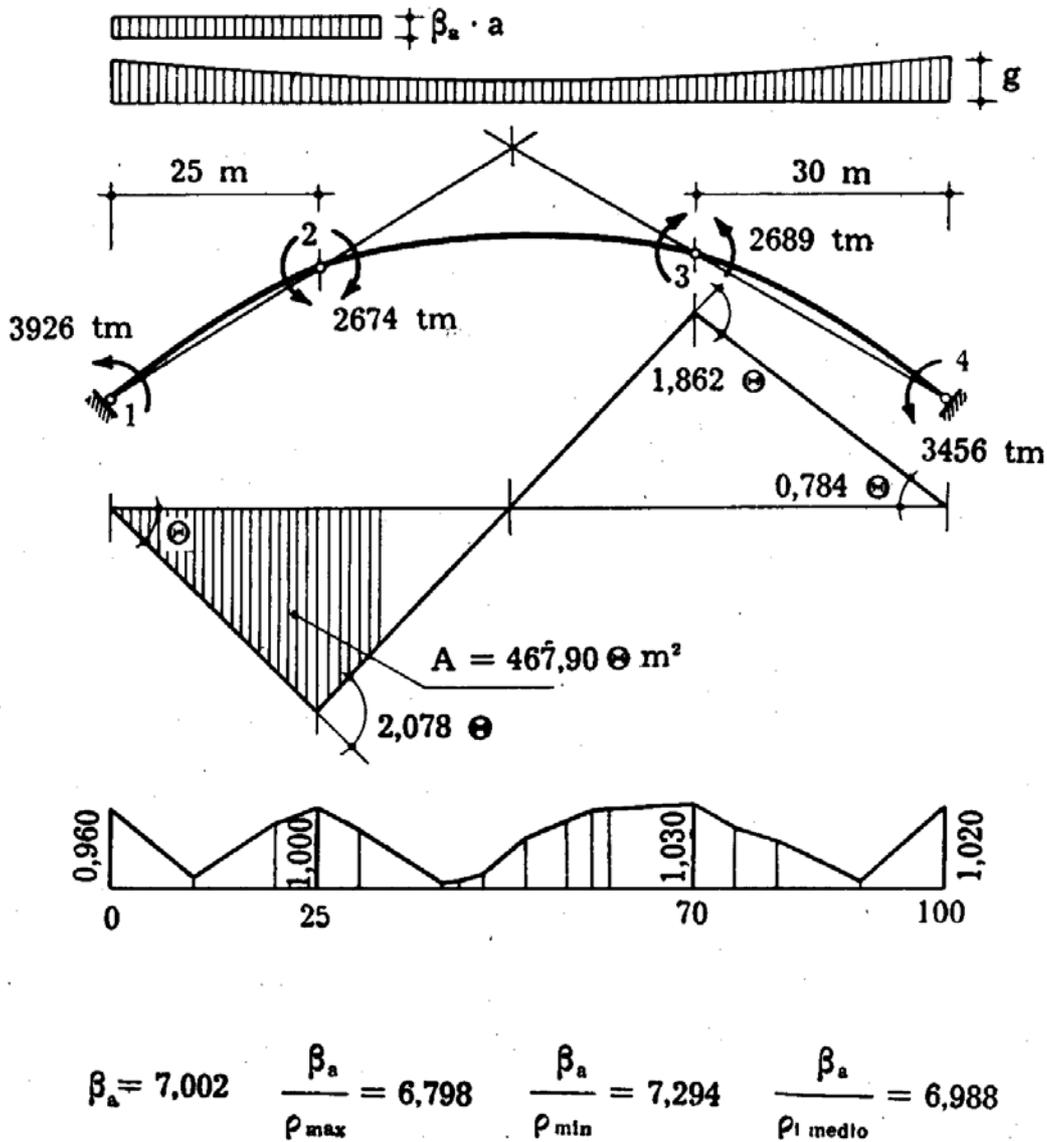


FIG. 4-45

### 11. La ricerca del dominio elastico.

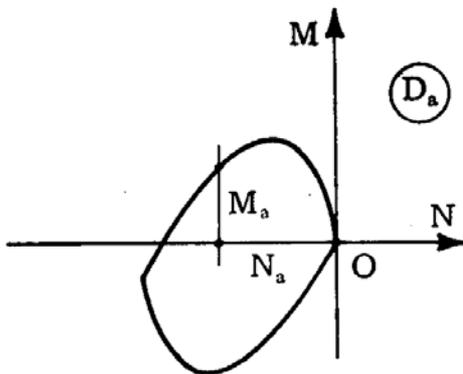
Allo studio della crisi delle strutture tenso- o presso-inflesse soggette a più condizioni di sollecitazione esterna (forze e distorsioni) alternantisi, deve farsi precedere qualche cenno sulla ricerca dei domini elastici.

Data una sezione  $S$  della struttura, sia  $N_a M_a$  ogni possibile coppia di valori delle caratteristiche in  $S$  dovute alle forze variabili, più in generale ai carichi mobili sulla struttura, calcolate in fase elastica.

Il luogo dei punti di coordinate  $N_a M_a$  nel piano  $NM$  (fig. 4-46 a) si definisce *dominio delle sollecitazioni da carichi mobili* relativo ad  $S$  e si indica con  $D_a$ .

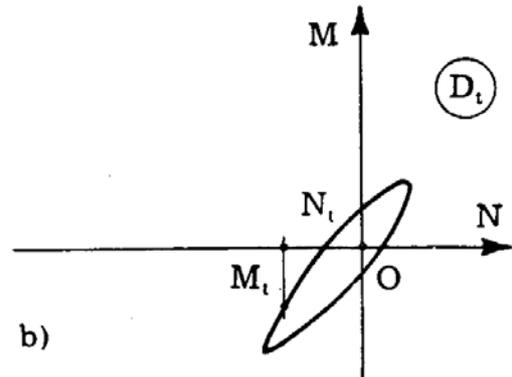
Sia  $N_t, M_t$  ogni possibile coppia di valori delle caratteristiche in  $S$  dovute alle distorsioni variabili, calcolate in fase elastica; il luogo dei punti di coordinate  $N_t, M_t$  è il *dominio delle sollecitazioni da distorsioni variabili* relativo ad  $S$ , e si indica con  $D_t$  (fig. 4-46 b).

Dominio delle sollecitazioni  
da carichi mobili

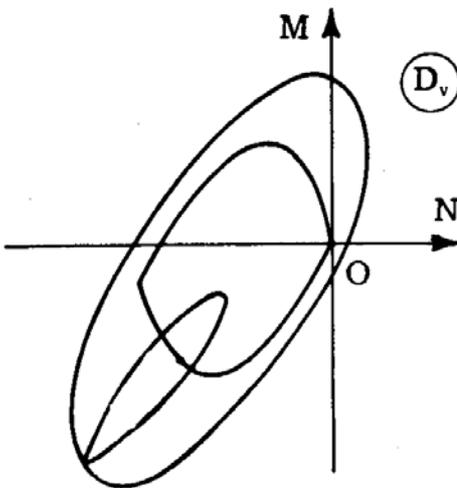


a)

Dominio delle sollecitazioni  
da distorsioni variabili

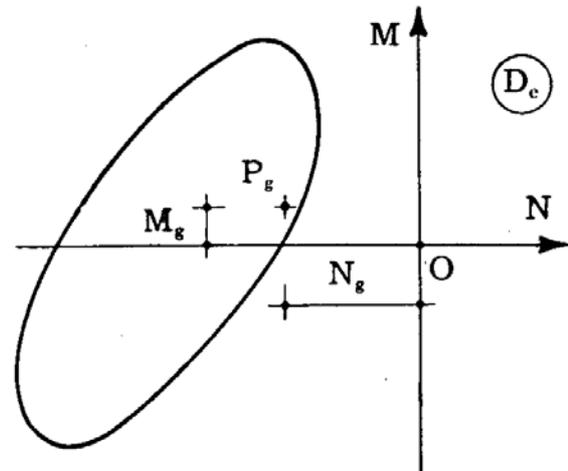


b)



Dominio delle sollecitazioni  
da cause variabili

c)



Dominio elastico

d)

FIG. 4-46

Il luogo dei punti di coordinate  $N_a + N_t, M_a + M_t$  si definisce *dominio delle sollecitazioni da cause variabili* relativo ad  $S$ , e si indica con  $D_v$  (fig. 4-46 c). Il  $D_v$  si ottiene riportando su tutti i punti del contorno di  $D_a$  il dominio  $D_t$ .

Se  $N_g M_g$  sono le caratteristiche in  $S$  dovute al peso permanente, il dominio  $D_v$  traslato di  $N_g M_g$  (o, come può anche dirsi, riferito al punto  $P_g$  di coordinate  $N_g M_g$ ) è il luogo di tutte le possibili coppie di valori  $NM$  in fase elastica. Esso si definisce *dominio elastico* relativo ad  $S$ , e si indica con la lettera  $D_e$  (fig. 4-46 d).

Se i valori delle cause variabili si incrementano nel rapporto  $\phi_v$ , il dominio  $D_e$  si trasforma omoteticamente con centro di omotetia  $P_g$  ( $N_g M_g$ ) e rapporto di omotetia  $\phi_v$  (dominio  $\phi_v D_e$ ); se ai momenti  $N_g M_g$  si aggiungono le caratteristiche  $\bar{N} \bar{M}$  dovute a distorsioni permanenti, il dominio  $D_e$  trasla delle quantità  $\bar{N}$  ed  $\bar{M}$  nel verso dei due assi.

La ricerca del dominio  $D_e$  può perseguirsi attraverso un elegante procedimento dovuto all'*Augusti* (1962).

Si tracci innanzitutto il contorno del dominio  $D_a$  relativo ai soli carichi accidentali. Sia  $S$  la sezione in esame (fig. 4-47) e  $Q$  un punto qua-

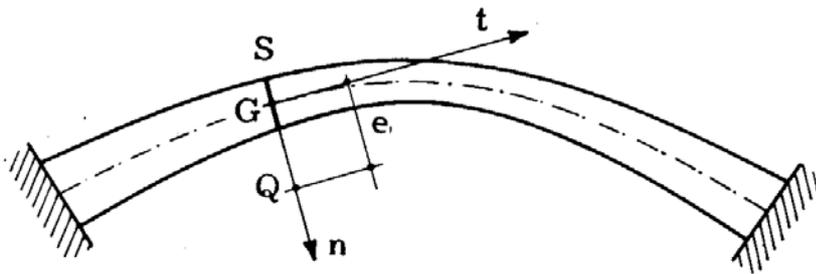


FIG. 4-47

lunque sulla sua traccia, a distanza  $e$  dall'asse; il segno di  $e$  è legato a quello delle caratteristiche  $NM$  attraverso i versi delle rette  $n$  e  $t$ .

Se  $M_Q$  è il momento rispetto al punto  $Q$  dovuto ad una generica condizione di carico, può scriversi

$$M = M_Q + N e , \quad (c')$$

dove  $M$  ed  $N$  sono dovuti alla già detta condizione di carico.

La linea di influenza di  $M_Q$  si ottiene come differenza tra quella di  $M$  e quella di  $N$  moltiplicata per  $e$ :

$$m_a = m - n e . \quad (d')$$

Si possono così calcolare, note le linee  $m$  ed  $n$ , e fissati i carichi mobili, sia  $M_{Q \max}$  che  $M_{Q \min}$ .

Dalla (c') si trae

$$M_{Q \min} + N e \leq M \leq M_{Q \max} + N e ; \quad (e')$$

tracciate quindi sul piano NM le due rette  $r'$  ed  $r''$  di equazione rispettivamente

$$M = M_{Q \max} + N e \quad (f')$$

$$M = M_{Q \min} + N e,$$

il luogo dei punti NM, e cioè il dominio  $D_a$ , è interno alla fascia (fig. 4-48) compresa tra  $r'$  ed  $r''$ , e tangente alle due rette stesse; i punti di tangenza

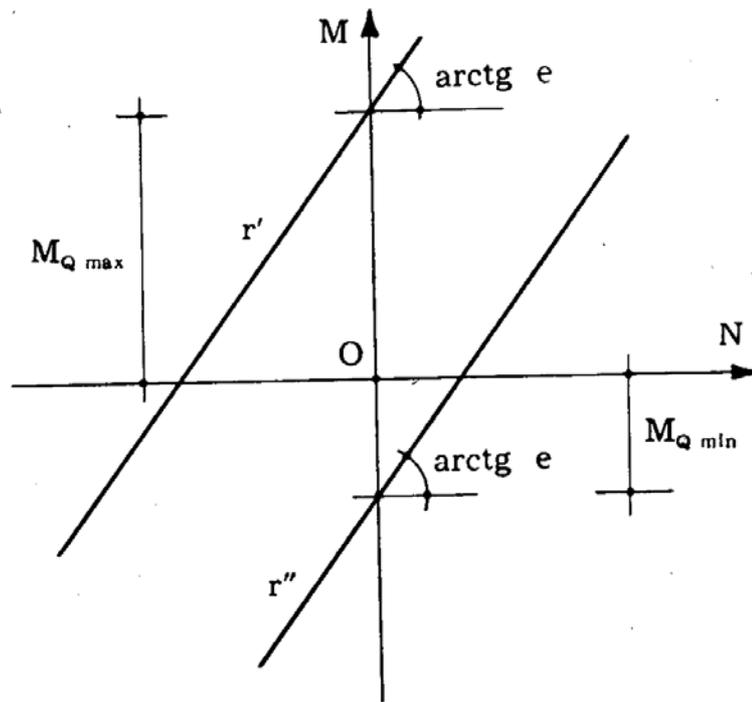


FIG. 4-48

corrispondono alle due condizioni di carico per cui nella (e') si verificano uguaglianze, per cui cioè  $M_Q$  raggiunge i valori massimo e minimo.

Ad ogni valore di  $e$  corrisponde una linea  $m_Q$ , due valori  $M_{Q \max}$  ed  $M_{Q \min}$ , ed una coppia di rette parallele  $r'r''$ ; l'involuppo di tali rette è il contorno del dominio  $D_a$ ; questo è, per costruzione, convesso.

Date le linee  $m$  ed  $n$  relative alla sezione di un arco (fig. 4-51), si osserva che  $n$  presenta comunque ordinate tutte negative.

Si calcoli, per ogni ascissa, il rapporto delle corrispondenti ordinate  $m$  ed  $n$ ; sia

$$e_1 = \left( \frac{m}{n} \right)_{\max} > 0$$

$$e_2 = \left( \frac{m}{n} \right) < 0.$$

La linea

$$m - n e$$

se  $e \geq e_1$  presenta tutte ordinate negative, se  $e \leq e_2$  presenta tutte or-

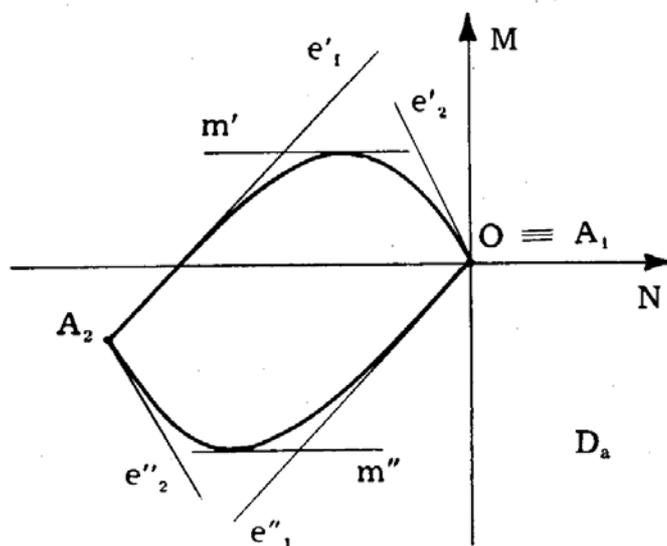


FIG. 4-49

dinate positive. Basta perciò, se il carico accidentale è distribuito uniformemente, operare solo con valori di  $e$  soddisfacenti la relazione

$$e_2 \leq e \leq e_1 ;$$

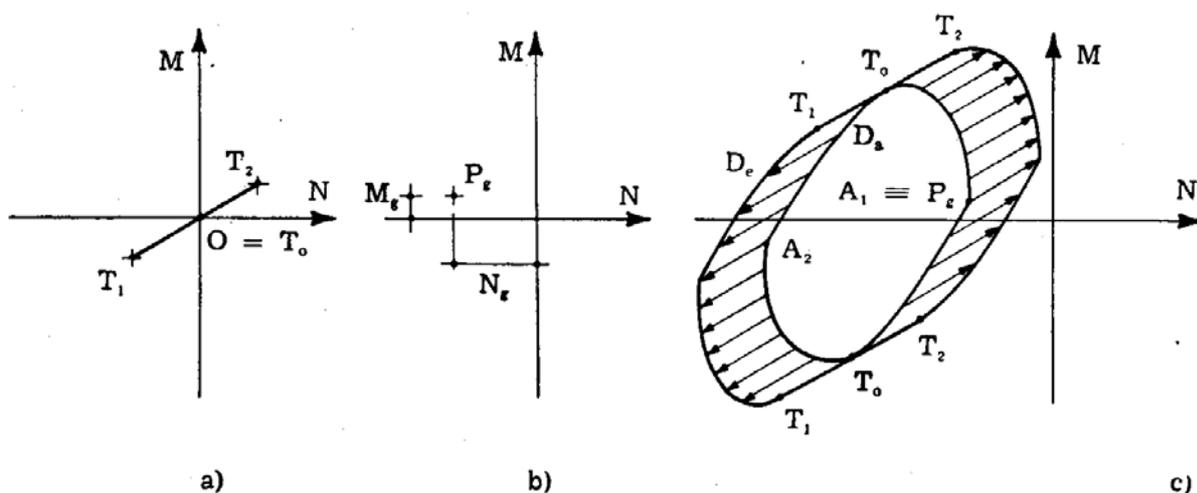


FIG. 4-50

infatti per  $e$  al di fuori di questo intervallo la linea  $m - n e$  presenta ordinate tutte dello stesso segno, e perciò la condizione di carico cui corrisponde  $N_{Q \max}$  è sempre quella estesa a tutta la luce, e la condizione cui corrisponde  $M_{Q \min}$  è quella di carico nullo. A tutte le  $e$  siffatte corri-

spondono perciò le stesse due coppie di valori  $MN$ , e cioè due punti  $A_1$  ed  $A_2$  (fig. 4-49); poichè le rette  $r'$  ed  $r''$  passano in tal caso sempre per  $A_1$  ed  $A_2$ , e sono tangenti al contorno del dominio, i punti  $A_1$  ed  $A_2$  corrispondono a due punti angolosi. Il punto  $A_1$  in particolare coincide con l'origine.

La conoscenza delle due coppie  $e'_1, e''_1$  ed  $e'_2, e''_2$ , assieme a quella della coppia  $m' m''$  corrispondente ad  $e = 0$  ed ottenibile dalla linea  $m$ , è sufficiente per una rappresentazione molto vicina al vero del contorno del dominio.

Conosciuto  $D_a$ , occorre tener conto delle variazioni termiche  $+\Delta t_1$  e  $-\Delta t_2$ ; esse danno luogo, da sole, alle caratteristiche definite dai punti del segmento  $T_1 T_2$  (fig. 4-50), dove  $T_1$  è il punto le cui coordinate sono le caratteristiche provocate da  $+\Delta t_1$  e  $T_2$  il punto le cui coordinate sono le caratteristiche provocate da  $-\Delta t_2$ . Il dominio  $D_v$  delle caratteristiche  $NM$  dovute a tutte le sollecitazioni esterne variabili si ottiene trasladando  $D_a$  dei due segmenti  $OT_1$  ed  $OT_2$ , e considerando tutte le superfici coperte in questo movimento.

Il dominio elastico  $D_e$  si ha poi trasladando ancora il dominio così ottenuto in modo che  $A_1$  coincide con  $P_g (M_g N_g)$  (fig. 4-50 c). Con riferimento all'arco incastrato già preso in esame, si vuole tracciare il dominio  $D_e$  relativo alla sezione all'ascissa 30 m. I carichi accidentali sono quelli già presi in esame, le variazioni termiche sono  $+15^\circ$  e  $-15^\circ$ .

Nella fig. 4-51 sono riportate le linee  $m$  ed  $n$  per la sezione in esame. Dalla  $m$  si traggono le quote delle rette  $m'$  ed  $m''$ , fornite da

$$M_{\max} = 82,1 \text{ tm}$$

$$M_{\min} = -103,5 \text{ tm} .$$

Le ordinate delle linee  $m$  ed  $n$  alle varie ascisse sono riportate nella tabella che segue.

Dai rapporti  $m/n$  risulta

$$e_1 = \left( \frac{m}{n} \right)_{\max} = \frac{-0,580}{-0,152} = 3,82 \text{ m}$$

$$e_2 = \left( \frac{m}{n} \right)_{\min} = \frac{5,538}{-0,725} = -7,65 \text{ m} .$$

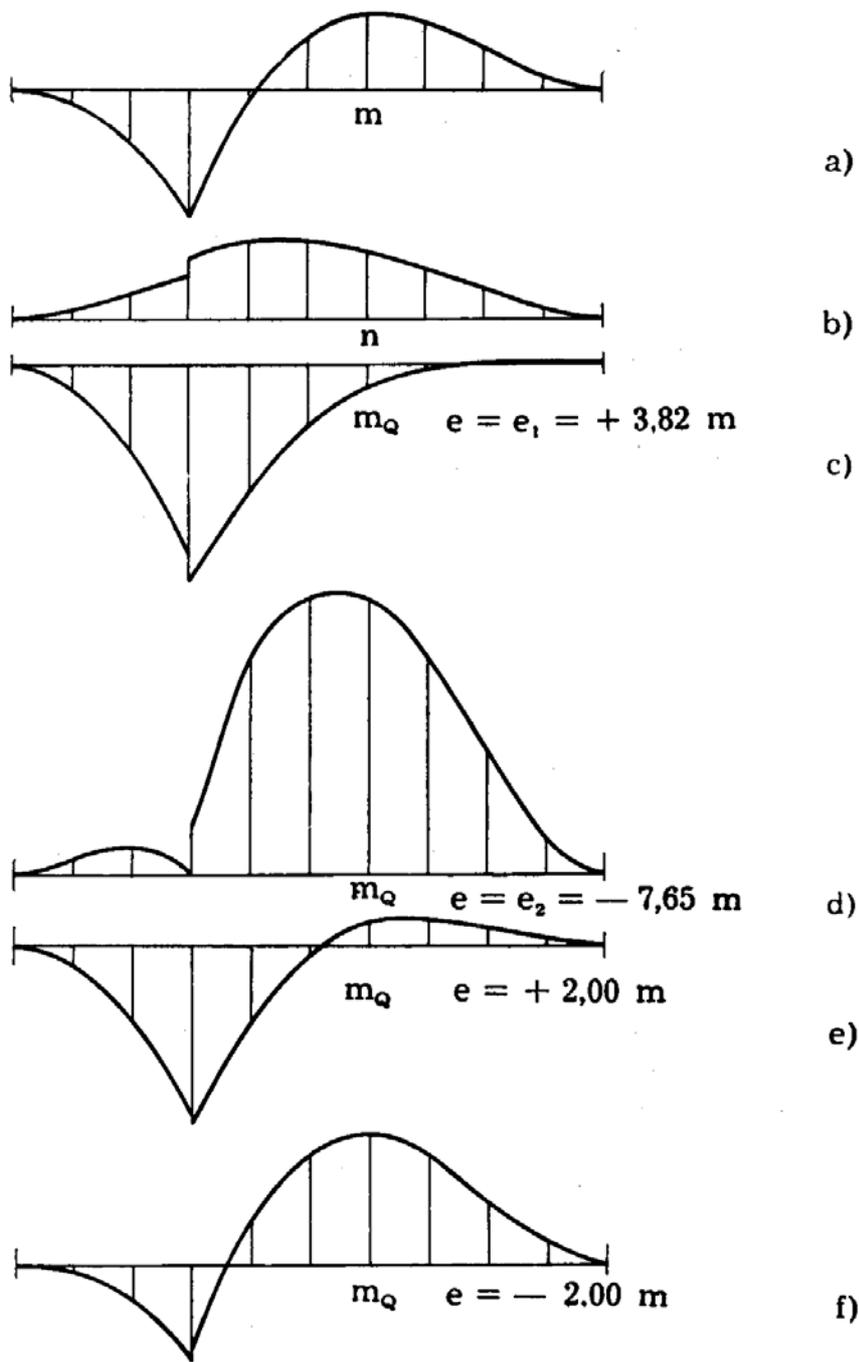
Le relative linee  $m_Q$  sono riportate nella fig. 4-50; da esse si hanno le rette

$$e'_1) \quad M = M_{Q \max} + N e = 222,5 + 3,82 N$$

$$e''_1) \quad M = M_{Q \min} + N e = 3,82 N$$

$$e'_2) \quad M = M_{Q \max} + N e = -7,65 N$$

$$e''_2) \quad M = M_{Q \min} + N e = -524 - 7,65 N .$$



Ascisse            0        20 m

ordinate m,  $m_Q$     0        5 m

ordinate n            0        2,0

$x_s = 30,00 \text{ m}$

FIG. 4-51

Si sono volute tracciare anche le coppie di rette per  $e = \pm 2$  m.

Nella fig. 4-52 sono riportate le coppie di rette suddette, da cui il dominio  $D_a$  è ottimamente definito.

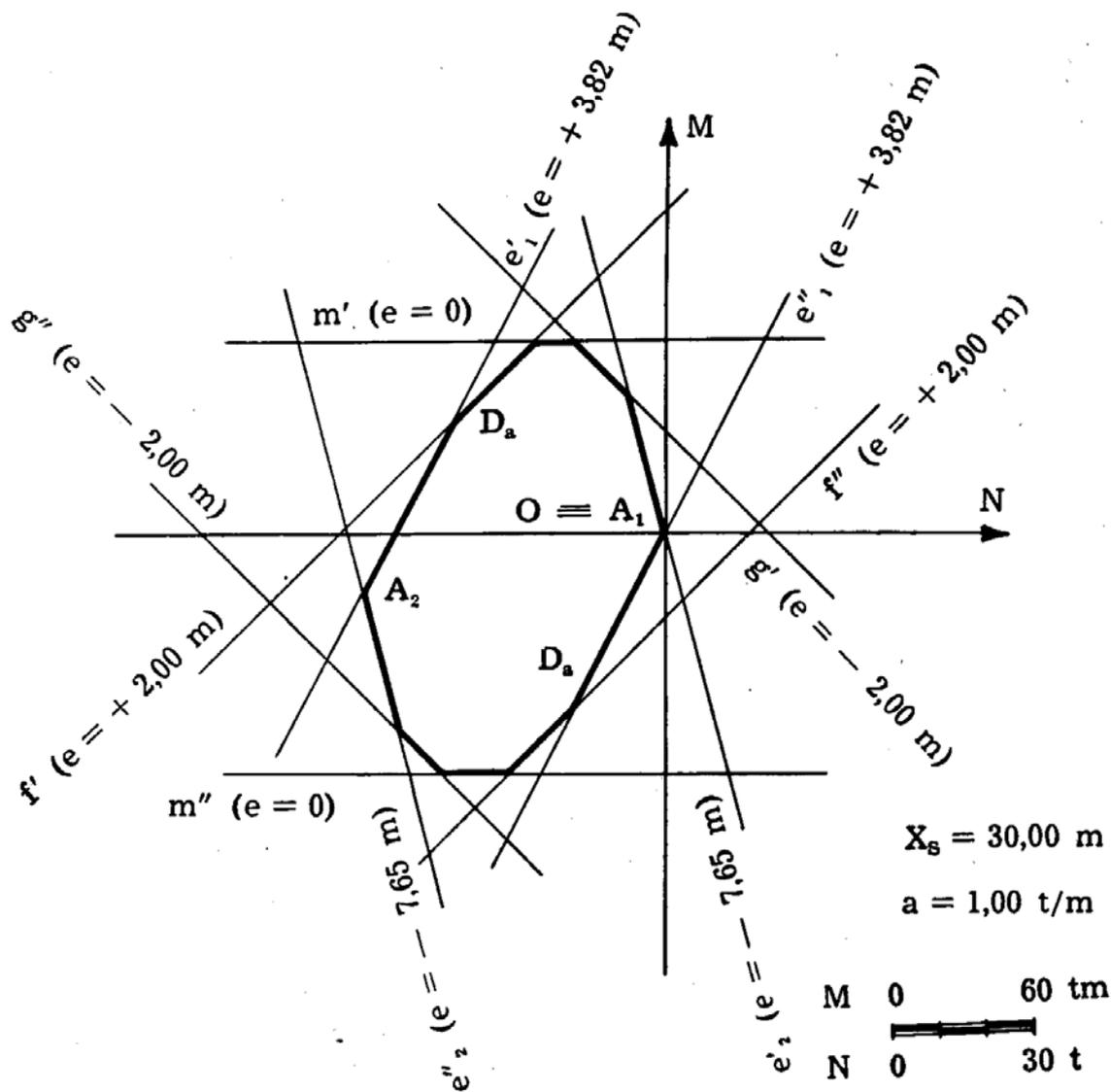


FIG. 4-52

Trascurando le cadute di spinta si ha

$$N_g = 950 \text{ t}$$

$$M_g = 0 .$$

E' poi per la variazione termica

$$N_T = \pm 37,3 \text{ t}$$

$$M_T = \pm 123,9 \text{ tm} .$$

Il dominio  $D_e$  è riportato nella fig. 4-53.

Si è voluto verificare il grado di sicurezza a rottura nella sezione in esame. Il dominio di plasticizzazione è quello già disegnato nel § 9;

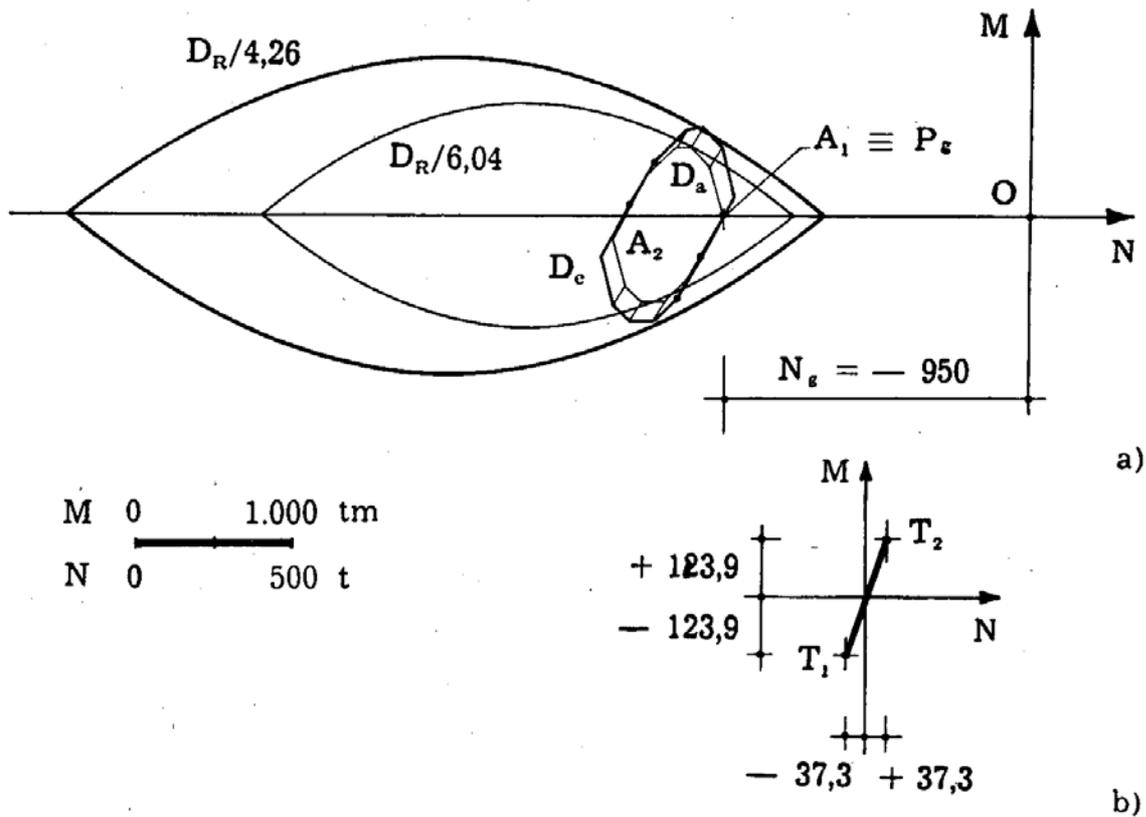


FIG. 4-53

esso si è ridotto omoteticamente con centro  $P_g$  fino a fargli toccare il dominio  $D_e$  con, e senza variazione termica.

Risultano così i seguenti coefficienti di sicurezza a rottura nella sezione per carico non proporzionale:

senza variazione termica	6,04
con variazione termica	4,26 .

Si tenga presente che il coefficiente di sicurezza a rottura globale calcolato come in questo paragrafo è il più piccolo di quelli calcolati in tutte le sezioni; e per strutture isostatiche coincide con il coefficiente effettivo, mentre per strutture iperstatiche risulta di esso più alto, attesa la redistribuzione degli sforzi. Si fa notare che il procedimento esposto in questo paragrafo elimina le incertezze relative alla verifica in fase elastica delle sezioni di un arco in c.a. in presenza di parzializzazioni.

## 12. Definizione di crisi in presenza di carichi mobili e altre sollecitazioni esterne variabili.

In presenza di più condizioni di carico comunque alternantisi vale per le strutture tenso- o presso-inflesse la stessa definizione di crisi già fornita per le strutture soggette a soli sforzi normali o a sola flessione: condizione necessaria e sufficiente perchè una struttura non entri in crisi è che il lavoro dissipato per deformazioni plastiche sia limitato, e cioè che dopo un certo numero di cicli di carico non si verifichino più deformazioni plastiche. Ciò significa che dopo un certo numero di cicli di carico — che può anche essere infinito — è presente nella struttura uno stato di coazione  $\bar{N} \bar{M}$  dovuto a deformazioni plastiche, non più variabile nel tempo, intorno al quale le tensioni oscillano in fase completamente elastica. Questo stato di coazione è detto *insieme residuo di stabilizzazione*; la struttura, pur presentando deformazioni permanenti, si adatta a quella situazione di carico o, con termine dovuto al *Prager*, è in fase di *shake down*.

Un numero  $\psi_v$  si definisce *moltiplicatore staticamente ammissibile* delle condizioni di carico e distorsioni alternantisi se esiste un insieme di sforzi normali  $\bar{N}$  e momenti flettenti  $\bar{M}$  in equilibrio con forze esterne nulle, e tali che per ogni sezione il luogo dei punti aventi per coordinate

$$N_\psi = N_g + \psi_v N_v + \bar{N} \quad (g')$$

$$M_\psi = M_g + \psi_v M_v + \bar{M}$$

(ove  $N_g$  ed  $M_g$  sono le caratteristiche dovute ai carichi permanenti,  $N_v$

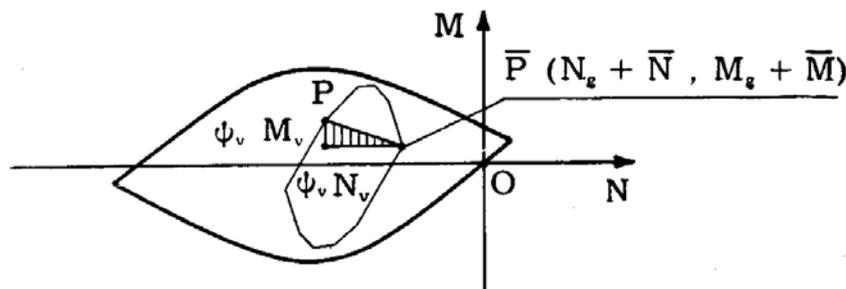


FIG. 4-54

ed  $M$ , ogni possibile coppia di valori delle caratteristiche dovute alle sollecitazioni esterne alternantisi) sia compreso nel dominio di snervamento (fig. 4-54).

Il dominio  $N_g + N_v$ ,  $M_g + M_v$  si chiama *dominio elastico* e si indica, come già detto, con  $D_e$ ; il dominio  $N_g + \psi_v N_v$ ,  $M_g + \psi_v M_v$  si indicherà con  $\psi_v D_e$ . Al variare di  $\bar{N} \bar{M}$  il dominio  $\psi_v D_e$  trasla di  $\bar{N}$  ed  $\bar{M}$ , al variare di  $\psi_v$  si deforma omoteticamente, con centro di omotetia  $P_g$ ; le sue tangenti quindi non variano in alcun caso.

L'insieme  $\bar{N} \bar{M}$  è un possibile insieme residuo di stabilizzazione relativo alle sollecitazioni  $g + \psi_v v$ ; esso è in genere diverso dall'insieme reale di stabilizzazione, che si distingue con doppio soprassegno.

Si definisce come *coefficiente di sicurezza* quel moltiplicatore  $s_v$  delle sollecitazioni alternantisi  $v$  tale che per le sollecitazioni  $g + s_v v$  si abbia ancora *shake down*, per le sollecitazioni  $g + (s_v + ds_v) v$  si abbia cri-

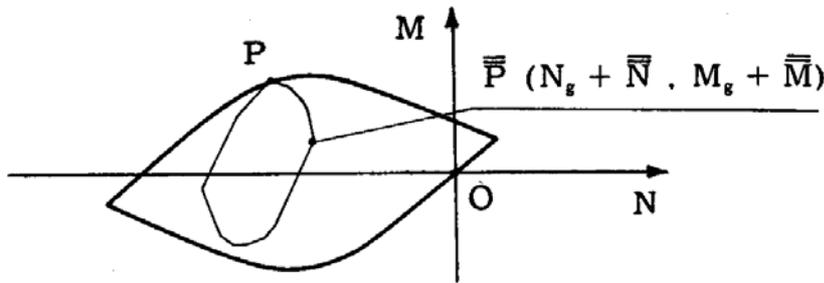


FIG. 4-55

si. Quindi  $s_v$  è un  $\psi_v$ , poichè ad esso corrisponde un insieme reale di stabilizzazione  $\bar{N} \bar{M}$ , invariabile nel tempo. Per  $s_v + ds_v$  si ha crisi, e cioè si verificano deformazioni permanenti in numero illimitato. Deve perciò esistere un insieme  $\bar{N} \bar{M}$  residuo, reale, tale che il dominio  $(s_v + ds_v) D_e$  definito da

$$\begin{aligned} N_e &= N_g + (s_v + ds_v) N_v + \bar{N} \\ M_e &= M_g + (s_v + ds_v) M_v + \bar{M} \end{aligned} \quad (h')$$

superi di pochissimo (fig. 4-55) il dominio di plasticizzazione in  $n$  sezioni di numero e ubicazione tali da rendere labile la struttura intera o una sua parte (tali cioè da creare un *meccanismo*), oppure tale che il dominio predetto in una sezione almeno superi di pochissimo il dominio di plasticizzazione in due punti  $P_1$  e  $P_2$  ove  $M$  o  $N$  siano di segno opposto (fig. 4-56), ma corrispondenti allo stesso asse neutro; nelle altre sezioni il dominio  $(s_v + ds_v) D_e$  deve essere interno (e non tangente) al dominio di plasticizzazione.

Nel primo caso (*collasso incrementale*) si verificano, nei cicli successivi di sollecitazioni esterne, deformazioni plastiche che aumentano inde-

finitamente nel tempo; esse nel complesso sono relative al meccanismo creato dalle cerniere ubicate nelle  $n$  sezioni sull'asse neutro corrispondente al punto di contatto dei due domini, però non si verificano contemporaneamente nelle  $n$  sezioni, come avviene nel collasso da carichi fissi (*collasso statico*), e quindi sotto una determinata condizione di carico, ma derivano dal verificarsi di plasticizzazioni successive nelle  $n$  sezioni, plasticizzazioni provocate in ognuna delle  $n$  sezioni, o in un gruppo di esse — generalmente non in tutte — da una delle condizioni di carico in gioco.

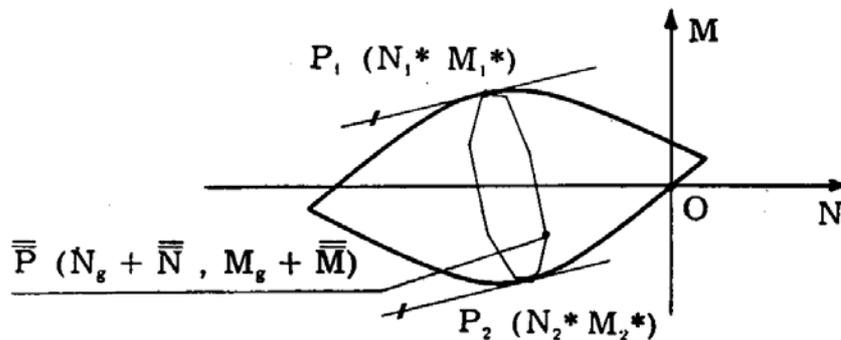


FIG. 4-56

Nel secondo caso (*collasso da plasticizzazione alternata*), si verificano, nei cicli successivi di sollecitazioni esterne, e in corrispondenza della sezione della fig. 4-56, deformazioni plastiche di segno opposto, illimitate in numero anche se limitate in entità. In ambedue i casi predetti il lavoro disperso per deformazioni permanenti cresce indefinitamente.

Altri casi di aumento indefinito del lavoro disperso per deformazioni permanenti non possono darsi; e cioè le deformazioni permanenti di crisi devono costituire in ogni caso un insieme atensionale di distorsioni di *Volterra*. Poichè infatti la definizione di crisi importa non la rottura, ma un sovrapporsi indefinito di deformazioni permanenti — la rottura, intesa come incapacità a sopportare l'incremento del valore del carico, si avrebbe soltanto se una delle condizioni di carico portasse da sola al meccanismo — anche in condizioni di crisi deve, a lungo andare, determinarsi un insieme di caratteristiche residue limitate nel tempo e oscillanti intorno a valori fissi. Infatti in qualsiasi caso, in un fenomeno indefinito dipendente da cause variabili con legge qualunque ma date ciascuna dalla somma di un certo numero finito di cause — nel caso in esame le sollecitazioni esterne — esiste un intervallo di tempo, più o meno lungo, variabile in genere nel tempo, dopo il quale si ripetono gli stessi effetti. Sia  $\Delta M_h$  la variazione della generica caratteristica dopo tale periodo; se  $\Delta M_h > 0$ , o  $\Delta M_h < 0$ , la  $M_h$  tende a crescere in valore assoluto oltre ogni limite, e ciò è inammissibile. Quindi  $\Delta M_h = 0$ ; e ciò può

aversi solo se nel periodo suddetto le distorsioni nel complesso sono atensionali.

Se si suppone noto il teorema di *Bleich-Mélan*, l'impossibilità che il dominio di snervamento sia toccato unilateralmente, in condizioni di crisi, soltanto in sezioni di numero e ubicazione tali da non consentire la formazione di un meccanismo si dimostra considerando che in tal caso esiste sempre una variazione dell'insieme  $\bar{N}\bar{M}$  tale da riportare i domini  $NM$  di tutte le sezioni nell'interno dei domini di plasticizzazione, e quindi  $s_v + ds_v$  sarebbe ancora un  $\phi_v$ , contrariamente all'ipotesi che  $s_v + ds_v$  non corrisponda più allo *shake down*.

Si osservi che, per lo stesso motivo ora addotto, non possono variare nel tempo i punti di contatto  $P$  dei domini  $s_v D_e$  con i domini di plasticizzazione (fig. 4-55), cosa che sarebbe accompagnata da variazione dei momenti residui. Ancora per lo stesso motivo è necessario che i due punti di contatto  $P_1$  e  $P_2$  della fig. 4-56 corrispondano allo stesso asse neutro.

Se conoscessimo il meccanismo di collasso incrementale, o la sezione di plasticizzazione alternata, il coefficiente di sicurezza si calcolerebbe con immediatezza. Nel primo caso infatti si opera come segue. Impresa la deformata resa possibile dal grado di labilità del meccanismo (fig. 4-57) sia  $\Delta'\varphi_i$  la rotazione in corrispondenza della cerniera plastica  $i$ -esima,  $h_i$  la distanza della cerniera dal baricentro della sezione cui essa corrisponde. Poichè il sistema  $\bar{N}\bar{M}$  è in equilibrio per forze esterne nulle, è

$$\Sigma (\bar{M}_i - \bar{N}_i h_i) \Delta'\varphi_i = 0 ; \quad (i')$$

in corrispondenza della sezione  $i$ -esima si ha, chiamando  $M_i^*$  ed  $N_i^*$  le caratteristiche relative al punto di contatto tra il dominio  $s_v D_e$  ed il dominio di plasticizzazione,

$$\begin{aligned} N_i^* &= N_{gi} + s_v N_{vi} + \bar{N}_i \\ M_i^* &= M_{gi} + s_v M_{vi} + \bar{M}_i . \end{aligned} \quad (11)$$

Dalle (i') ed (11) si ha

$$\begin{aligned} \Sigma [M_i^* - M_{gi} - (N_i^* - N_{gi}) h_i] \Delta'\varphi_i &= \\ = s_v \Sigma [M_{vi} - N_{vi} h_i] \Delta'\varphi_i . \end{aligned} \quad (12)$$

Dalla (12) si ricava  $s_v$  poichè, essendo nota la tangente al dominio  $D_e$ , sono noti anche  $M_{vi}$  ed  $N_{vi}$ . Conosciuto  $s_v$ , dalle (11) si ricavano i valori di  $\bar{N}_i, \bar{M}_i$  nelle  $n$  sezioni dove sono ubicate le cerniere, e quindi i diagrammi dei momenti e sforzi normali residui.

Come già detto in tema di collasso statico (§ 6 di questo capitolo) per il calcolo di  $s_v$  si può, più convenientemente, far riferimento alla deformata baricentrica. La (i') si scrive in tal caso

$$\Sigma \bar{M}_i \Delta\varphi_i = 0$$

e la (12)

$$\Sigma (M_i^* - M_{gi}) \Delta\varphi_i = s_v \Sigma M_{vi} \Delta\varphi_i .$$

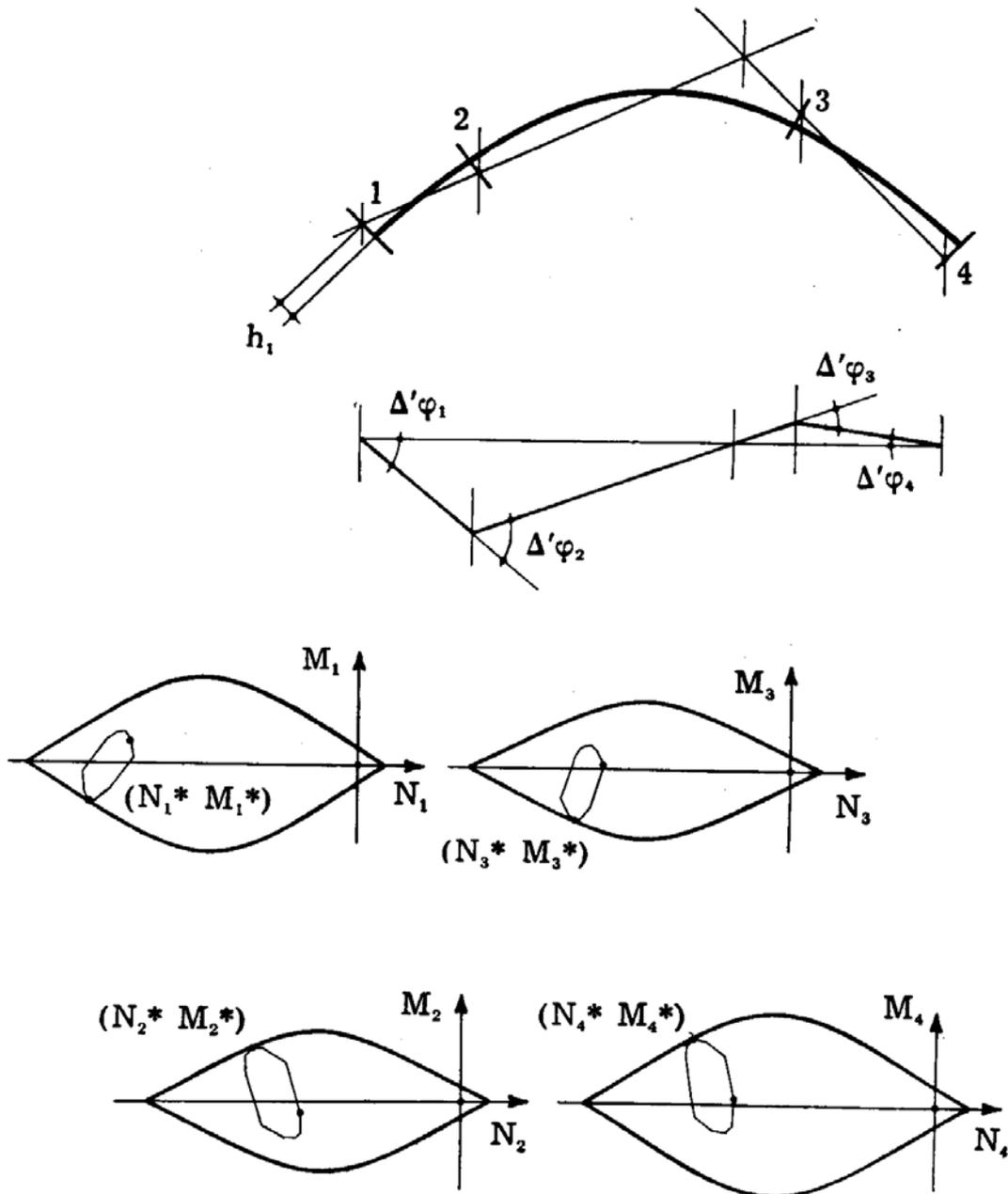


FIG. 4-57

Nel secondo caso, nota la sezione  $i$  di plasticizzazione alternata, le condizioni che determinano  $s_v$  sono le seguenti

$$s_v N_{vi1} + \bar{N}_i = N_{i1}^* - N_{gi}$$

$$s_v M_{vi1} + \bar{M}_i = M_{i1}^* - M_{gi}$$

$$\begin{aligned} s_v N_{v12} + \bar{N}_1 &= N_{12}^* - N_{g1} \\ s_v M_{v12} + \bar{M}_1 &= M_{12}^* - M_{g1} \end{aligned} \quad (l')$$

$$\left( \frac{dM_{v1}}{dN_{v1}} \right)_1 = \left( \frac{dM_1^*}{dN_1^*} \right)_1$$

$$\left( \frac{dM_{v1}}{dN_{v1}} \right)_2 = \left( \frac{dM_1^*}{dN_1^*} \right)_2$$

Inoltre esistono quattro condizioni, esprimenti il legame tra  $N_{v11}$  ed  $M_{v11}$ , tra  $N_{v12}$  ed  $M_{v12}$ , tra  $N_{11}^*$  ed  $M_{11}^*$ , tra  $N_{12}^*$  ed  $M_{12}^*$ , ed un'ultima condizione che lega  $N_{11}^* M_{11}^* N_{12}^* M_{12}^*$ , esprimente che l'asse neutro relativo ad  $N_{11} M_{11}$  deve coincidere con quello relativo ad  $N_{12} M_{12}$ .

Sono quindi determinati  $s_v$ , la posizione dell'asse neutro, ed i valori delle caratteristiche residue, poichè ci si trova in presenza di undici equazioni in undici incognite. Si osserva che il valore di  $s_v$  si può ricavare, operando graficamente, con pochi tentativi.

### 13. Generalizzazione del teorema fondamentale.

Un numero  $\gamma_v$  si definisce *moltiplicatore cinematicamente sufficiente* delle condizioni di carico e distorsioni alternantisi se è calcolato come un  $s_v$  per un numero di sezioni plastiche prefissato e per un prefissato verso del relativo meccanismo, o in condizioni di plasticizzazione alternata in una prefissata sezione.

Il teorema fondamentale si enuncia:

un qualsiasi moltiplicatore  $\gamma_v$  cinematicamente sufficiente non può essere inferiore ad un qualsiasi moltiplicatore  $\phi_v$  staticamente ammissibile.

Si può cioè scrivere, per  $\gamma_v$  e  $\phi_v$  qualsiasi,

$$\phi_v \leq \gamma_v. \quad (13)$$

Se il  $\gamma_v$  deriva da un meccanismo, l'equazione che lo determina è analoga alla (4-12):

$$\begin{aligned} \Sigma [M_1^* - M_{g1} - (N_1^* - N_{g1}) h_1] \Delta' \varphi_1 &= \\ = \gamma_v \Sigma [M_{v1} - N_{v1} h_1] \Delta' \varphi_1. \end{aligned} \quad (14)$$

Sia  $\bar{N} \bar{M}$  l'insieme residuo connesso con  $\phi_v$ ; poichè anche  $\bar{N} \bar{M}$  sono in equilibrio con forze esterne nulle, si può scrivere, con riferimento alla

stessa deformata utilizzata per il calcolo di  $\gamma_v$ , una equazione analoga alla (i'):

$$\Sigma (\bar{M}_i - \bar{N}_i h_i) \Delta' \varphi_i = 0 . \quad (m')$$

Dalle (m') e (g') si ha

$$\begin{aligned} \Sigma [M_{\psi_i} - M_{g_i} - (N_{\psi_i} - N_{g_i}) h_i] \Delta' \varphi_i &= \\ = \psi_v \Sigma [M_{v_i} - N_{v_i} h_i] \Delta' \varphi_i . \end{aligned} \quad (n')$$

I termini  $N_{v_i}$  ed  $M_{v_i}$  della (n') coincidono con quelli della (4-14), poichè tra le  $\infty$  relazioni (g') che possono scriversi in corrispondenza della

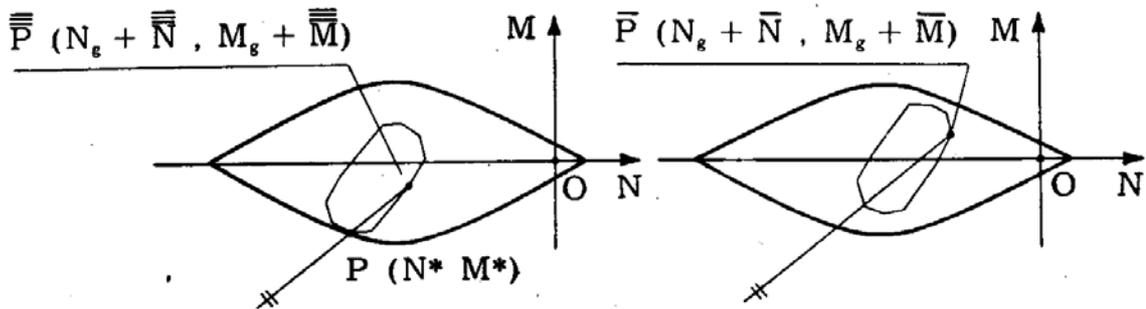


FIG. 4-58

sezione  $i$  si sceglie quella relativa alla retta passante per  $\bar{P}$  e parallela alla congiungente  $\bar{\bar{P}} P$  (fig. 4-58) (\*).

Dalle (14) ed (n') si ha

$$\begin{aligned} \Sigma (M_i^* - N_i^* h_i) \Delta' \varphi_i - \Sigma (M_{\psi_i} - N_{\psi_i} h_i) \Delta' \varphi_i &= \\ = (\gamma_v - \psi_v) \Sigma (M_{v_i} - N_{v_i} h_i) \Delta' \varphi_i . \end{aligned} \quad (o')$$

Scegliendo per deformata quella per cui la prima sommatoria della (o') è negativa, è pure (\*\*)

(\*) Si indicano con tre soprassegni le caratteristiche residue connesse con  $\gamma_v$ .

(\*\*) Il fatto è intuitivo, ma può dimostrarsi nel seguente modo. Il tronco elementare corrispondente alla cerniera  $i$  presenta una rotazione plastica  $\Delta' \varphi_i$  quando le caratteristiche  $N_v, M_v$  assumono valori tali da fare attingere in quel tronco il contorno del dominio. Il lavoro svolto in complesso da  $N_v$  ed  $M_v$ , supposte agenti sul tronco, per effetto di  $\Delta' \varphi_i$  deve essere dello stesso segno del lavoro elastico precedente la plasticizzazione, e cioè positivo; quindi il lavoro delle  $N_v, M_v$  supposte agenti non sul tronco ma sulla struttura è negativo:

$$(M_{v_i} - N_{v_i} h_i) \Delta' \varphi_i < 0 .$$

$$\Sigma (M_{vi} - N_{vi} h_i) \Delta' \varphi_i < 0 ;$$

se quindi fosse  $\gamma_v < \psi_v$  si avrebbe

$$\Sigma (M_i^* - N_i^* h_i) \Delta' \varphi_i - \Sigma (M_{\psi i} - N_{\psi i} h_i) \Delta' \varphi_i > 0 . \quad (p')$$

Il generico termine  $(M_i^* - N_i^* h_i)$  non è altro che il momento ri-

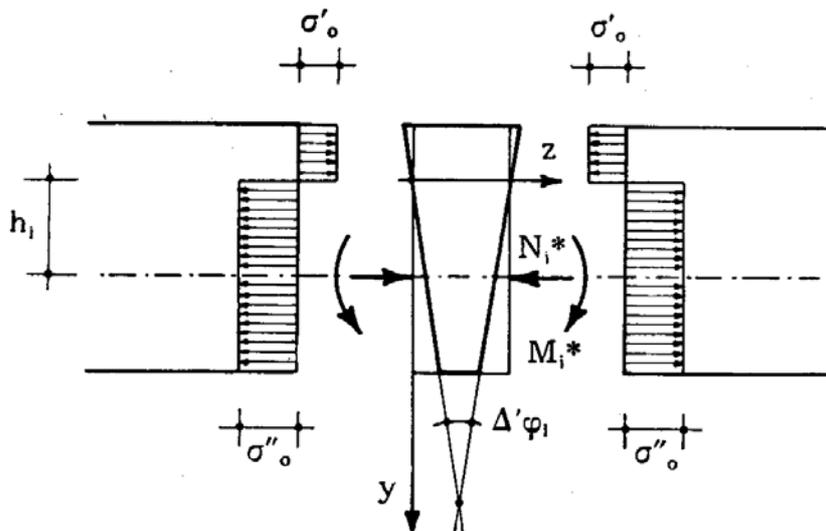


FIG. 4-59

spetto all'asse neutro della sezione  $i$  (fig. 4-59), fornito da

$$\int_{A'} \sigma'_o y dA + \int_{A''} \sigma''_o y dA ;$$

può scriversi perciò

$$(M_i^* - N_i^* h_i) \Delta' \varphi_i = \int_{A'} \sigma'_o \Delta' \varphi_i y dA + \int_{A''} \sigma''_o \Delta' \varphi_i y dA ,$$

dove  $A'$  ed  $A''$  sono le zone tese e compresse della sezione, e  $y$  la distanza dell'area elementare  $dA$  dall'asse neutro.

Analogamente il termine  $(M_{\psi i} - N_{\psi i} h_i)$  non è che il momento, rispetto allo stesso asse prima considerato, dovuto ad  $N_{\psi i}$  ed  $M_{\psi i}$ ; esso è fornito da

$$\int_{A'} \sigma y dA + \int_{A''} \sigma y dA .$$

Può scriversi perciò

$$(M_{\psi_i} - N_{\psi_i} h_i) \Delta' \varphi_i = \int_{A'} \sigma \Delta' \varphi_i y \, dA + \int_{A''} \sigma \Delta' \varphi_i y \, dA .$$

Nella zona A' è (\*)

$$\begin{aligned} \Delta' \varphi_i y &< 0 \\ \sigma &\leq \sigma'_0 \end{aligned}$$

e quindi

$$\int_{A'} \sigma'_0 \Delta' \varphi_i y \, dA \leq \int_{A'} \sigma \Delta' \varphi_i y \, dA$$

Nella zona A'' è

$$\begin{aligned} \Delta' \varphi_i y &> 0 \\ \sigma &\geq \sigma''_0 \end{aligned}$$

e quindi

$$\int_{A''} \sigma''_0 \Delta' \varphi_i y \, dA \leq \int_{A''} \sigma \Delta' \varphi_i y \, dA$$

E' perciò pure

$$\begin{aligned} (M_i^* - N_i^* h_i) \Delta' \varphi_i &\leq (M_{\psi_i} - N_{\psi_i} h_i) \Delta' \varphi_i \\ (M_i^* - N_i^* h_i) \Delta' \varphi_i - (M_{\psi_i} - N_{\psi_i} h_i) \Delta' \varphi_i &\leq 0 . \end{aligned}$$

La somma di termini tutti nulli o negativi non può essere positiva, quindi la (p') è un assurdo, e assurda è l'ipotesi  $\psi_v > \gamma_v$ . La (4-13) è perciò confermata.

Poichè  $s_v$  è per definizione un  $\psi_v$  ed un  $\gamma_v$ , dalla (4-13) scende pure

$$\psi_v \leq s_v \leq \gamma_v . \quad (15)$$

Se il  $\gamma_v$  è calcolato come derivante da plasticizzazione alternata in una sezione S, si scelga (fig. 4-60) un qualsiasi meccanismo, che in S abbia la cerniera in corrispondenza dell'asse neutro di plasticizzazione alternata; nelle altre sezioni la cerniera può supporre baricentrica. Si può scrivere

---

(\*) Nella zona A' plasticizzata a trazione (fig. 4-59) gli estremi del tronco si allontanano, e perciò  $\Delta w = \Delta' \varphi_i y < 0$ . Si può anche dire che (fig. 4-59) a  $\Delta' \varphi_i > 0$  corrisponde nella zona tesa  $y < 0$ , e viceversa.

$$\begin{aligned}
 (\bar{M}_S - \bar{N}_S h_S) \Delta' \varphi_S + \sum_j \bar{M}_i \Delta' \varphi_i &= 0 \\
 (\bar{M}_S - \bar{N}_S h_S) \Delta' \varphi_S + \sum_j \bar{M}_i \Delta' \varphi_i &= 0
 \end{aligned}
 \tag{q'}$$

avendo indicato con  $j$  le sezioni del meccanismo esclusa la  $S$ . Con riferimento al punto di contatto  $P_1$  (fig. 4-60), si scelga tra le deformate dei

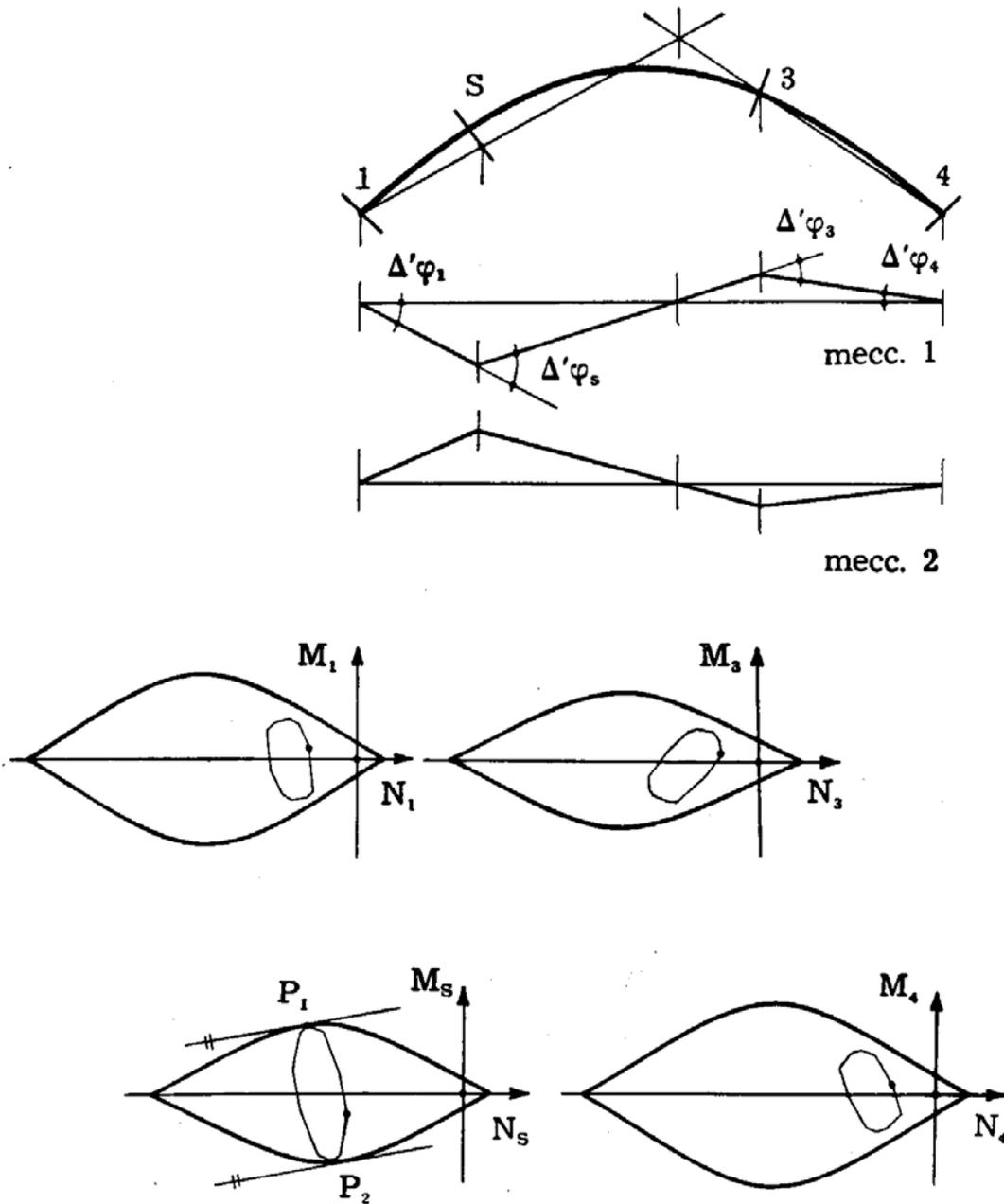


FIG. 4-60

due segni quella per cui il lavoro complessivo svolto dalle tensioni agenti sulle due facce risultanti dall'asportazione del tronco elementare in  $S$ , per effetto del  $\Delta' \varphi_S$ , è negativo.

Dalla prima delle (q') e dalle prime due delle (l') scritte per  $\gamma_v$  (e quindi con tre soprassegni) si trae

$$[M_{S1}^* - M_{gS} - \gamma_v M_{vS1} - (N_{S1}^* - N_{gS} - \gamma_v N_{vS1}) h_S] \Delta' \varphi_S + \\ + \sum_j (M_{\gamma j} - M_{g j} - \gamma_v M_{v j}) \Delta' \varphi_j = 0 ; \quad (r')$$

i termini  $M_{vS1}$  ed  $N_{vS1}$  sono relativi al punto  $P_1$ , i termini  $M_{\gamma j}$  sono forniti dalla relazione

$$M_{\gamma j} = \overline{\overline{M}}_j + M_{g j} + \gamma_v M_{v j} , \quad (s')$$

ove  $M_{v j}$  è uno qualunque dei momenti derivanti dalle sollecitazioni variabili in  $i$ .

Dalla seconda delle (q') e dalle (g') si trae

$$[M_{\psi S} - M_{gS} - \psi_v M_{vS1} - (N_{\psi S} - N_{gS} - \psi_v N_{vS1}) h_S] \Delta' \varphi_S + \\ + \sum_j (M_{\psi j} - M_{g j} - \psi_v M_{v j}) \Delta' \varphi_j = 0 \quad (t')$$

ove

$$M_{\psi S} = M_{gS} + \psi_v M_{vS1} + \overline{M}_S \\ N_{\psi S} = N_{gS} + \psi_v N_{vS1} + \overline{N}_S$$

ed

$$M_{\psi j} = M_{g j} + \psi_v M_{v j} + \overline{M}_j .$$

Dalle (r' e t') si ha, sottraendo:

$$(M_{S1}^* - N_{S1}^* h_S) \Delta' \varphi_S - (M_{\psi S} - N_{\psi S} h_S) \Delta' \varphi_S = \\ = (\gamma_v - \psi_v) (M_{vS1} - N_{vS1} h_S) \Delta' \varphi_S - \\ - \sum_j (M_{\gamma j} - M_{\psi j}) \Delta' \varphi_j + (\gamma_v - \psi_v) \sum_j M_{v j} \Delta' \varphi_j . \quad (u')$$

Con dimostrazione identica a quella eseguita nel caso di un  $\gamma_v$  derivante da un meccanismo, si trae che

$$(M_{S1}^* - N_{S1}^* h_S) \Delta' \varphi_S - (M_{\psi S} - N_{\psi S} h_S) \Delta' \varphi_S \leq 0 .$$

Si faccia l'ipotesi  $\gamma_v < \psi_v$ .

Poichè è pure  $(M_{vS1} - N_{vS1} h_S) \Delta' \varphi_S < 0$ , in tal caso si avrebbe  $(\gamma_v - \psi_v) (M_{vS1} - N_{vS1} h_S) \Delta' \varphi_S > 0$ .

Se la somma dei due ultimi termini della (u') fosse nulla o positiva si giungerebbe ad un assurdo, e quindi  $\gamma_v \geq \psi_v$ .

Se invece la somma dei due ultimi termini della (u') fosse negativa, la proposizione  $\gamma_v < \phi_v$  sarebbe possibile; in tal caso si scriva la (u') con riferimento al punto  $P_2$  della fig. 4-60; e quindi alla deformata di segno opposto alla precedente:

$$\begin{aligned} & (M_{S_2}^* + N_{S_2}^* h_S) \Delta' \varphi_S - (M_{\psi_S} - N_{\psi_S} h_S) \Delta' \varphi_S = \\ & = (\gamma_v - \phi_v) (M_{vS_2} - N_{vS_2} h_S) \Delta' \varphi_S - \\ & - \sum_j (M_{\gamma_j} - M_{\psi_j}) \Delta' \varphi_j + (\gamma_v - \phi_v) \sum_j M_{v_j} \Delta' \varphi_j . \end{aligned} \quad (v')$$

Il primo membro della (v') è ancora negativo o nullo, il primo termine del secondo membro sarebbe ancora positivo per  $\gamma_v < \phi_v$ , e la somma dei due ultimi termini anche essa positiva. Si giungerebbe così ancora, ad un assurdo. Se ne trae quindi la validità della  $\gamma_v \geq \phi_v$  in ogni caso.

#### 14. Calcolo di un intervallo di definizione di $s_v$ .

Calcolato un  $\gamma_v$ , si può da esso trarre un  $\phi_v$ , e quindi un intervallo in cui  $s_v$  è sicuramente compreso. Conosciuto un qualsiasi  $\gamma_v$  connesso con un certo meccanismo, dalle (4-11) scritte per  $\gamma_v$  si calcolano le caratteristiche  $\bar{M}_1$  ed  $\bar{N}_1$ ; poi si traggono in modo univoco le caratteristiche  $\bar{M}$  ed  $\bar{N}$  in tutta la parte labile della struttura, disegnando le stesse per l'eventuale parte non labile con il solo rispetto dell'equilibrio. Quindi per ogni

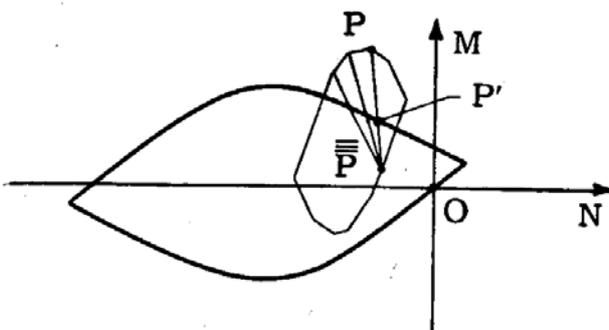


FIG. 4-61

sezione si traccia sul piano  $MN$  (fig. 4-61) il punto  $\bar{P}$  di coordinate  $M_g + \bar{M}$ ,  $N_g + \bar{N}$ , e a partire da  $\bar{P}$  si riporta il dominio  $D_e$  moltiplicato per  $\gamma_v$ ; siano  $P$  gli estremi di questo. Fatti tutti i rapporti  $\frac{\bar{P} P}{\bar{P} P'}$ , dove  $P'$  è il punto di incontro tra la retta  $\bar{P} P$  ed il dominio di snervamento, si scelga

il più elevato  $\rho$  tra tutti i suddetti rapporti in tutte le sezioni. Il numero  $\gamma/\rho$  è un  $\psi_v$ , come immediatamente si verifica.

Per calcolare un  $\gamma_v$  una volta fissate le  $n$  sezioni di plasticizzazione, può operarsi come segue.

Si fissano in prima approssimazione sul dominio di plasticizzazione della generica sezione  $S_i$  di plasticizzazione i punti  $T_i^{(1)}$  di contatto con i domini elastici; ciò significa fissare i valori  $N_i^* M_i^*$  ed i valori  $N'_{vi} M'_{vi}$ , poichè le tangenti ai due domini nel punto  $T_i^{(1)}$  coincidono. Dalle relazioni analoghe alle (4-11)

$$\begin{aligned} N_i^* &= N_{gi} + \gamma_v N_{vi} + \bar{\bar{N}}_i \\ M_i^* &= M_{gi} + \gamma_v M_{vi} + \bar{\bar{M}}_i \end{aligned} \quad (z')$$

e dall'equazione analoga alla (i') e scritta per una deformata baricentrica

$$\Sigma \bar{\bar{M}}_i \Delta\varphi_i = 0 \quad (a'')$$

derivante dall'essere le  $N_i M_i$  in equilibrio con forze esterne nulle, si ha  $\gamma_v$ . Se l'asse dell'arco è sagomato come funicolare del peso proprio, è  $\Sigma M_{gi} \Delta\varphi_i = 0$ , e perciò si ha

$$\gamma_v^{(1)} = \frac{\Sigma M_i^* \Delta\varphi_i}{\Sigma M_{vi} \Delta\varphi_i} \quad (b'')$$

Ottenuto  $\gamma_v^{(1)}$ , si ricavano dalle (z') le  $\bar{\bar{N}}'_i$  ed  $\bar{\bar{M}}'_i$ . Il valore  $\gamma_v^{(1)}$  è di primo tentativo, perchè non basta la (a'') per garantire che le  $\bar{\bar{N}}'_i$ ,  $\bar{\bar{M}}'_i$  sono in equilibrio con forze esterne nulle.

Le condizioni che garantiscono ciò sono le  $n$  relazioni omogenee che legano le  $\bar{\bar{N}}_i$  e le  $\bar{\bar{M}}_i$ :

$$\bar{\bar{N}}_i = \Sigma \bar{\bar{M}}_j b_{ij} \quad (c'')$$

e che possono ottenersi come già descritto a proposito del collasso statico.

Partendo dai valori  $\bar{\bar{M}}'_i$ , le (c'') forniscono i valori  $\bar{\bar{N}}''_i$  in equilibrio con le  $\bar{\bar{M}}'_i$  e con carichi nulli; riportando sul piano  $M_i N_i$  il punto  $\bar{\bar{P}}'' (N_g + \bar{\bar{N}}'' , M_g + \bar{\bar{M}}'')$ , e disegnando il dominio  $\gamma_v^{(1)} D_e$ , questo non è più tangente al dominio di plasticizzazione. Si itera così il procedimento a partire da nuovi punti di contatto  $T_i^{(2)}$ ; questi possono essere scelti in corrispondenza del più elevato rapporto

$$\frac{\bar{\bar{P}}'' P}{\bar{\bar{P}}'' P'}$$

dove  $P$  è il generico punto del dominio  $D_e$  disegnato la seconda volta, e  $P'$  il punto di contatto tra  $\bar{P}''$  e il dominio di plasticizzazione. Si osservi che se nel calcolo del  $\gamma_v^{(1)}$  relativo ad  $n$  sezioni prefissate, alla fine il dominio  $D_e$  risulta tangente in un punto  $T_i$  al dominio di plasticizzazione della sezione  $i$ -esima, ma lo supera dalla parte dei momenti di segno opposto, il  $\gamma_v$  che si è determinato è sempre un coefficiente cinematicamente sufficiente, relativo alle sezioni prescelte ed al meccanismo di quel verso cui corrisponde in  $S_i$  un momento di plasticizzazione del segno inerente a  $T_i$ ; è ovvio che nel calcolo di  $\rho$  deve includersi anche la sezione  $S_i$ . Tutto ciò è implicito nella definizione di  $\gamma_v$  fornita nel § 13 di questo capitolo.

### 15. Un esempio numerico.

L'esempio è stato svolto, insieme ad interessanti conclusioni che si riportano alla fine del paragrafo, da *Augusti e Sparacio* (1962). L'arco preso in esame è lo stesso che ha formato oggetto del calcolo al collasso statico. Nella fig. 4-62 sono riportati per la sezione di imposta e per quelle alle ascisse 10 m, 20 m, 30 m, 40 m e 50 m i domini di plasticizzazione ed i domini  $D_e$  (comprensivi della variazione termica  $\pm 15^\circ$ ) esaltati omoteticamente con centro  $P_g$  fino a risultare tangenti al contorno del dominio di plasticizzazione. Le coordinate  $N_g M_g$  di  $P_g$  si sono calcolate prescindendo dalla caduta di spinta, la quale, essendo in equilibrio con carichi esterni nulli, non influenza, al pari delle distorsioni fisse, il coefficiente di sicurezza; perciò  $P_g$  giace sempre sull'asse delle  $N$ .

Si osserva che il più basso moltiplicatore dei domini  $D_e$  è 2,15, e si verifica nella sezione di incastro, mentre il più elevato è pari a 6,40, e si verifica in corrispondenza della sezione all'ascissa 10 m.

Si può subito dire che 2,15 è un  $\phi_v$ , mentre, per quanto detto all'inizio del § 10, il valore 6,40 è un  $\gamma_v$  per una struttura ideale che all'ascissa 10 m abbia lo stesso dominio della struttura reale, e in altre tre ascisse, ove in realtà il 6,40  $D_e$  fuoriesce dal dominio, abbia sezioni maggiorate. E cioè è già noto un primo intervallo

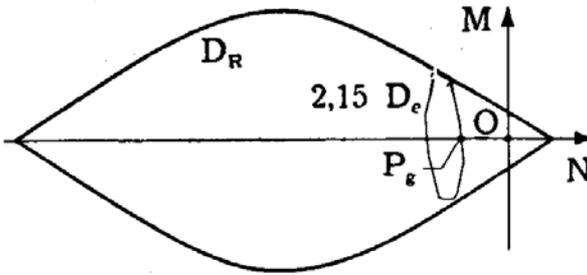
$$2,15 \leq s_v \leq 6,40 . \quad (d'')$$

Si fissino le 4 sezioni di plasticizzazione alle ascisse 0 m, 30 m, 70 m, 100 m; i domini sono riportati nella fig. 4-63 a b c d. Si fissano, sui contorni di questi, i punti di contatto di prima approssimazione  $T_i^{(1)}$ . Si hanno così i seguenti valori di  $N$  ed  $M$  espressi in  $t$  e  $tm$ .

ascissa	0	30 m	70 m	100 m
$N^*$	- 2238	- 2282	- 3056	- 2815
$M^*$	- 4082	3360	- 4056	4738
$N_v$	- 60	- 62	- 213	- 132
$M_v$	- 1365	554	- 667	1496

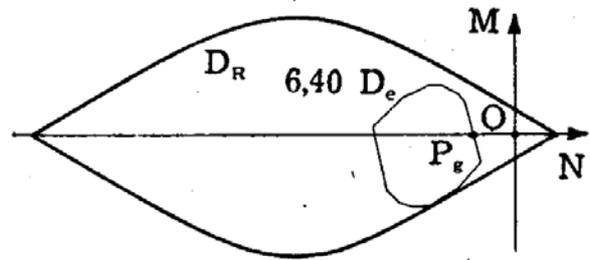
$x_s = 0$  (Sezione d'incastro)

$k = 2,15$



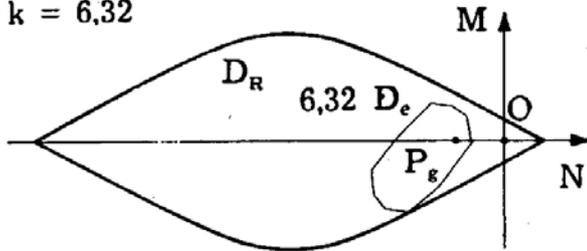
$x_s = 10$  m

$k = 6,40$



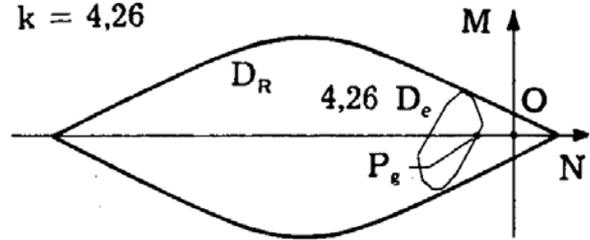
$x_s = 20$  m

$k = 6,32$



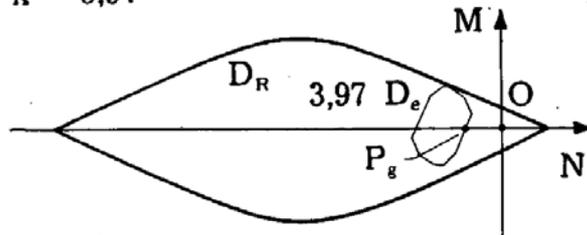
$x_s = 30$  m

$k = 4,26$



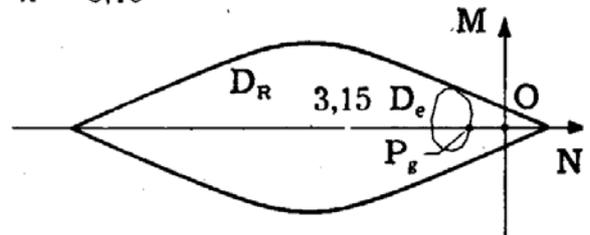
$x_s = 40$  m

$k = 3,97$



$x_s = 50$  m

$k = 3,15$



M 0 10.000 tm

N 0 5.000 t

FIG. 4-62



Per i carichi fissi si ha

ascissa	0	30 m	70 m	100 m
$N_g$	- 1188	- 950	- 950	- 1188
$M_g$	0	0	0	0

Dalla (b'') si ha  $\gamma_v^{(1)}$ , attraverso il meccanismo della fig. 4-64

$$\gamma_v^{(1)} = \frac{\sum M_i^* \Delta\varphi_i}{\sum M_{vi} \Delta\varphi_i} = - \frac{9119}{1974} = 4,62 .$$

Introducendo questo valore di  $\gamma_v^{(1)}$  nelle (z') si ha

$$\bar{\bar{N}}'_i = N_i^* - N_{gi} - \gamma_v N_{vi}$$

$$\bar{\bar{M}}'_i = M_i^* - M_{gi} - \gamma_v M_{vi}$$

e cioè i valori

ascissa	0	30 m	70 m	100 m
$\bar{\bar{N}}'$	- 798	- 1044	- 1122	- 1015
$\bar{\bar{M}}'_1$	2271	802	- 976	2173

Nella fig. 4-63 si sono riportati i punti  $\bar{\bar{P}}'$  di coordinate  $(\bar{\bar{N}}' + N_g, \bar{\bar{M}}')$

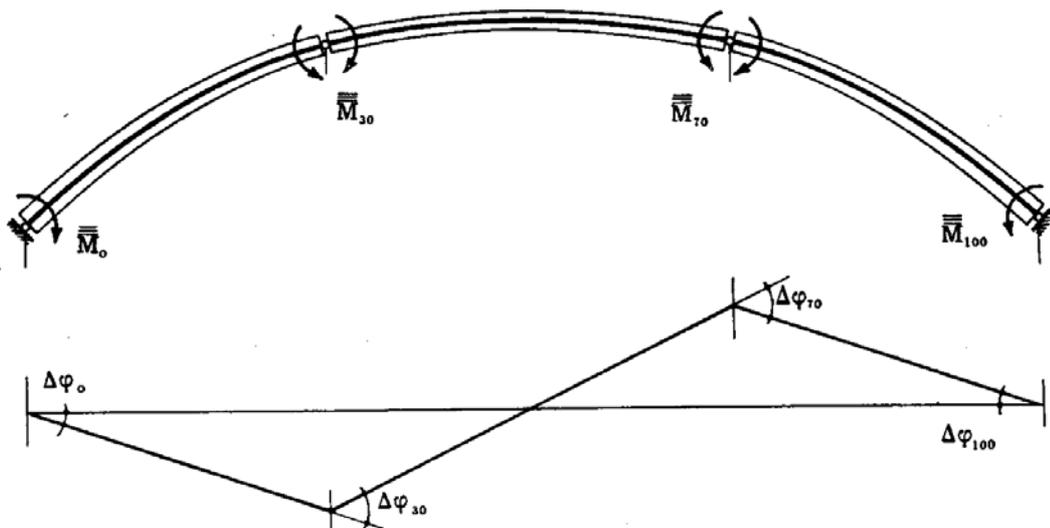


FIG. 4-64

e a partire da questi i domini  $\gamma_v^{(1)} D_e$ , tratteggiati; essi devono risultare

tangenti ai domini di plasticizzazione in  $T_1^{(1)}$ . Si ricavano poi i valori  $\bar{N}_1''$  in seconda approssimazione; essi sono

ascissa	0	30 m	70 m	100 m
$\bar{N}''$	21	6	-19	-33

Si riportano (fig. 4-63) i punti  $\bar{P}''$  di coordinate  $(\bar{N}'' + N_g, \bar{M}')$ , ed a partire da questi  $\gamma_v^{(1)} D_e$ . Poichè questi non sono più tangenti ai domini di plasticizzazione, si fissano i nuovi punti di contatto  $T_1^{(2)}$  come già detto nel paragrafo precedente, e si itera il procedimento. Si ha così

ascissa	0	30 m	70 m	100 m
$\gamma_v^{(2)}$	3,19			
$\bar{N}'$	- 50	44	155	- 122
$\bar{M}'$	1233	493	- 500	-1250
$\bar{N}''$	15	8	- 6	- 15
$\gamma_v^{(3)}$	3,26			
$\bar{N}'$	0	21	- 30	- 14
$\bar{M}'$	1365	469	- 662	-1465
$\bar{N}''$	15	6	- 10	- 19
$\gamma_v^{(4)}$	3,22			
$\bar{N}'$	16	7	- 8	- 19
$\bar{M}'$	1332	487	- 609	-1379

Si avverte che fin dal primo ciclo si poteva rinunciare a calcolare il  $\gamma_v$ , spostando le cerniere nelle sezioni ove si hanno, nel primo ciclo, le maggiori fuoriuscite di  $\gamma_v^{(1)} D_e$  dal dominio di plasticizzazione. Si guadagna così in rapidità, ma si perde in chiarezza concettuale.

Ottenuto

$$\gamma_v = 3,22$$

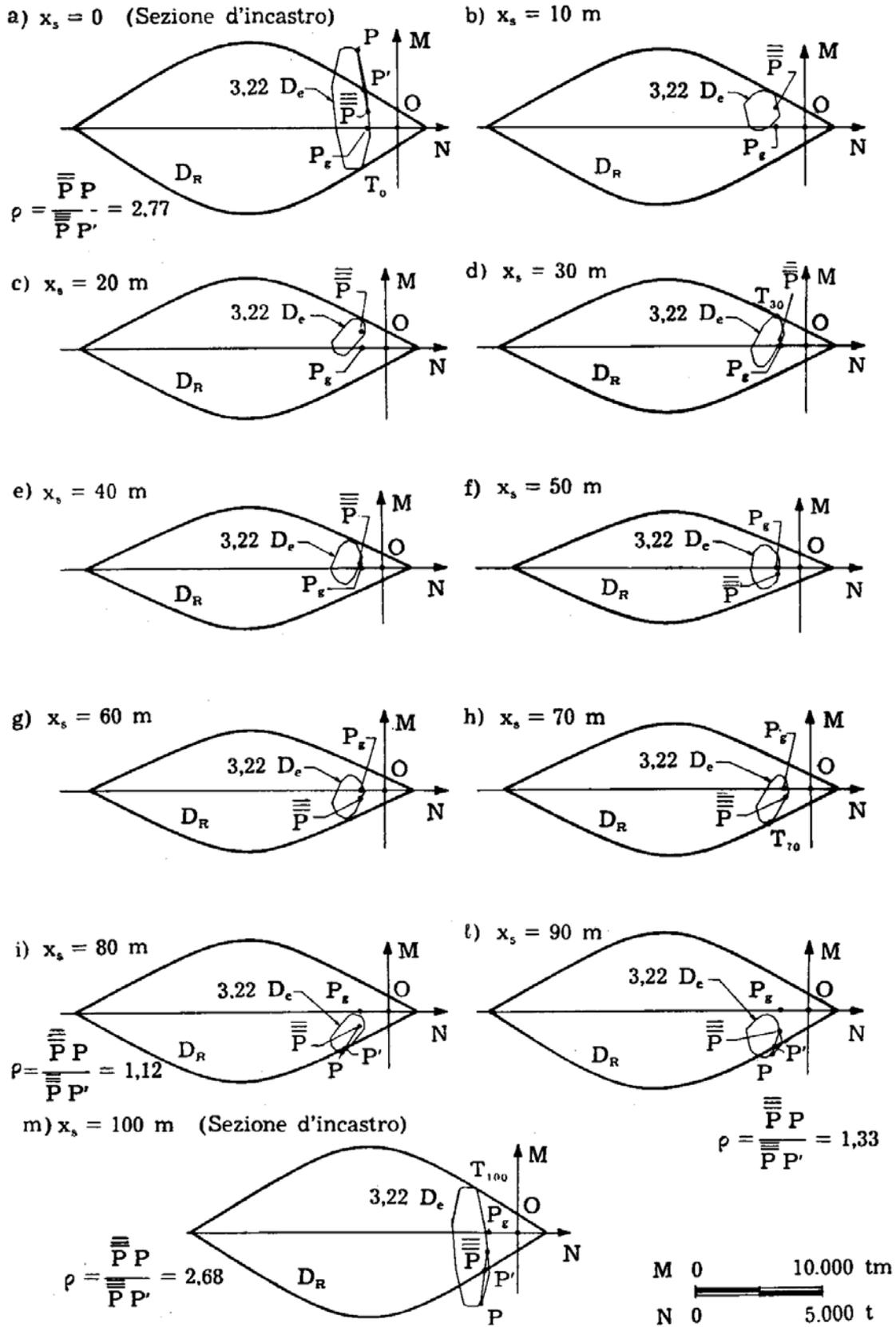


FIG. 4-65

si disegnano in tutte le sezioni dell'arco i punti  $\overline{\overline{P}}$  e da questi i domini  $\gamma_v D_e$  (fig. 4-65). Risulta così nella sezione di incastro di sinistra

$$\rho = 2,77$$

$$\psi_v = \frac{3,22}{2,77} = 1,16$$

Per la (d'') può scriversi però

$$2,15 \leq s, \leq 3,22 .$$

Poichè il valore  $\rho$  si attinge per la sezione di imposta di sinistra, dove già si è supposta la formazione di una cerniera, sorge il dubbio della possibili-

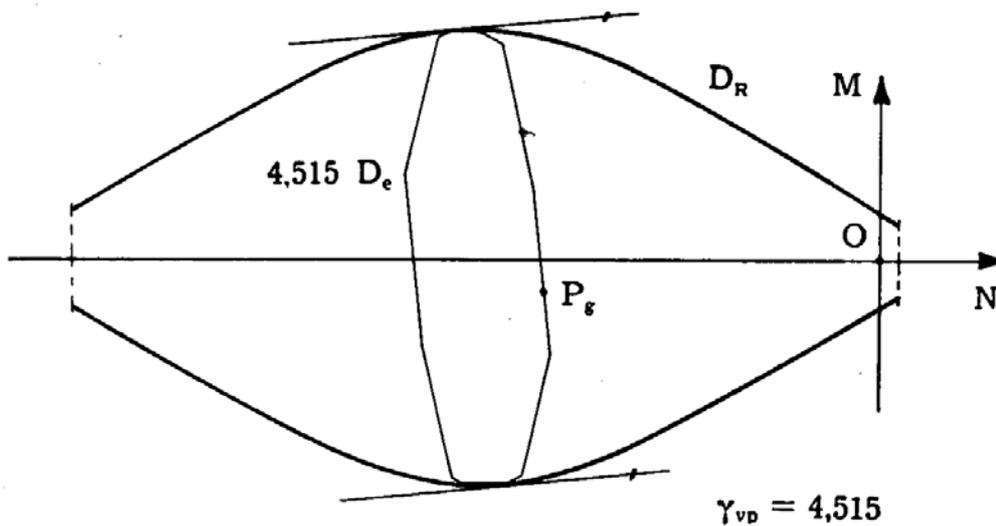


FIG. 4-66

tà di rottura per plasticità alternata in tale sezione. Ad essa però corrisponde (fig. 4-66)

$$\gamma_v = 4,51$$

che è maggiore del  $\gamma_v$  precedentemente determinato. Si ripiega perciò sul collasso incrementale.

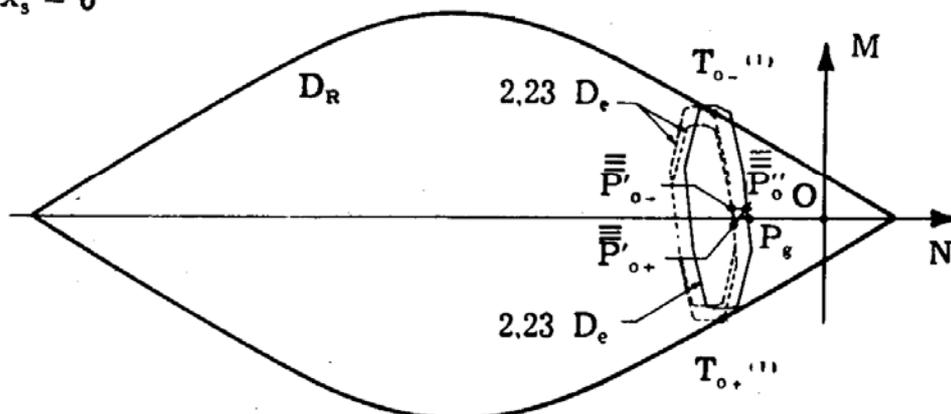
La nuova disposizione di cerniere plastiche è quella che si deduce dalla fig. 4-67; due cerniere si formano vicinissime, in corrispondenza dell'imposta di sinistra, e le altre due alle ascisse 50 m e 100 m. Nella sezione di imposta (si disegna un solo dominio di plasticizzazione, perchè le due cerniere plastiche si formano molto vicine) i due punti di contatto sono  $T_+^{(1)}$  e  $T_-^{(1)}$ , corrispondenti alle distanze dell'asse neutro

$$T_-^{(1)} \quad h = 1,11 \text{ m}$$

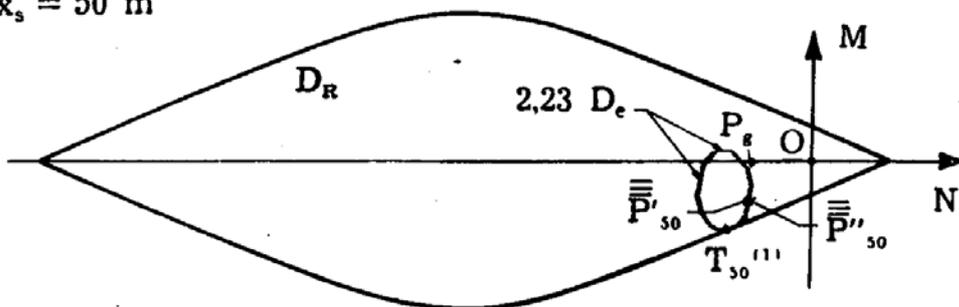
$$T_+^{(1)} \quad h = - 1,10 \text{ m} .$$

Il meccanismo prescelto per la ricerca di  $\gamma_v$  è quello della fig. 4-68;

a)  $x_s = 0$



b)  $x_s = 50$  m



c)  $x_s = 100$  m

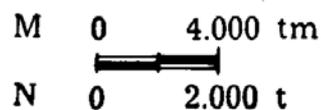
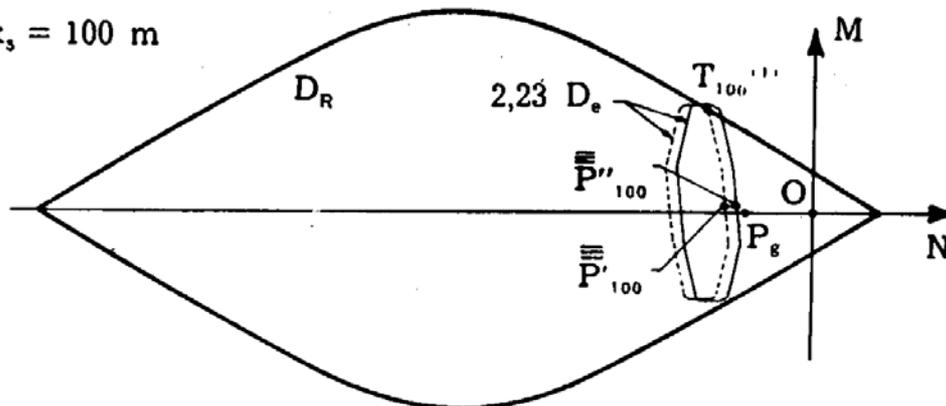


FIG. 4-67

l'equazione è analoga alla (e''), salvo l'introduzione del lavoro dei due sforzi normali relativi alla prima cerniera, e fornisce

$$\gamma_v^{(1)} = 2,23 .$$

Dalle (z') si ha

ascisse	0 +	0 -	50 m	100 m
$\bar{\bar{N}}'$	- 272	- 298	- 40	- 298
$\bar{\bar{M}}'$	- 281	235	- 1203	235

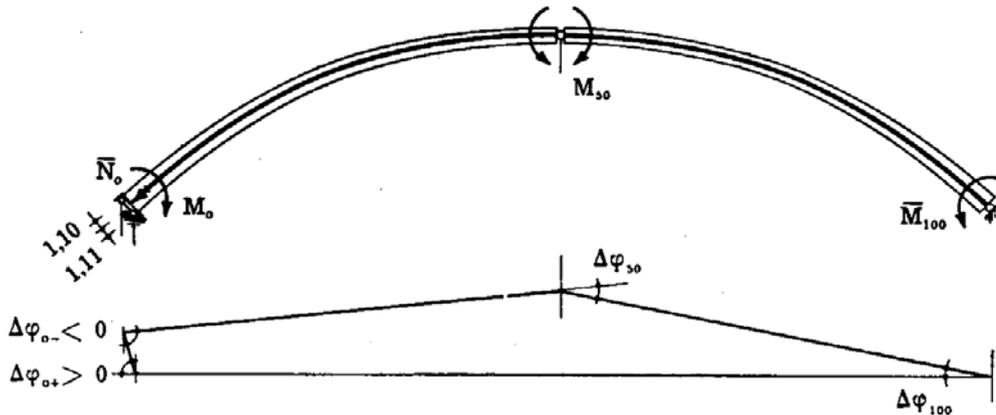


FIG. 4-68

Un insieme di caratteristiche  $\bar{\bar{M}}\bar{\bar{N}}$  tra loro in equilibrio non può aversi, come si è fatto prima e come si fa in generale, associando alle  $\bar{\bar{M}}'$  i valori di  $\bar{\bar{N}}''$  che ad esse fanno equilibrio, perchè nel caso in esame due degli  $\bar{\bar{M}}$  devono essere uguali, e precisamente quelli nella sezione di imposta di sinistra. Si fissano perciò tre valori di  $\bar{\bar{M}}$ , per esempio gli  $\bar{\bar{M}}'$  nelle sezioni di ascisse 50 m e 100 m, ed uno dei due  $\bar{\bar{M}}'$  come valore di  $\bar{\bar{M}}$  nella sezione di imposta di sinistra, ricavando quindi gli  $\bar{\bar{N}}''$ . Si ha così

ascisse	0	50 m	100 m
$\bar{\bar{N}}''$	- 56	- 17	- 97
$\bar{\bar{M}}''$	235	- 1203	235

Si tracciano così i punti  $\bar{\bar{P}}''$ , ed i domini 2,23  $D_e$  a partire da tali punti. Iterando il procedimento dai nuovi punti di contatto  $T_1^{(2)}$ , ottenuti al solito modo, si ha

$$\gamma_v^{(2)} = 2,196$$

$$\gamma_v^{(3)} = 2,207 .$$

Si ha poi, costruendo per tutte le sezioni i punti  $\bar{P}$  ed i domini  $2,207 D_e$ ,

$$\rho = 1,035$$

$$\psi_v = \frac{2,207}{1,035} = 2,13$$

$$2,13 \leq s_v \leq 2,21 .$$

La riduzione del coefficiente di sicurezza, rispetto a quello ottenuto nel caso di collasso statico per la condizione di carico più sfavorevole dal punto di vista elastico, è molto sensibile; ciò dipende dal fatto di aver tenuto qui conto di tutte le possibili condizioni di carico, ma soprattutto dall'aver potuto chiamare in gioco le variazioni termiche.

Circa il meccanismo di rottura, esso non differisce in fondo da un qualsiasi altro meccanismo di collasso incrementale di un arco incastrato; il fatto però che due delle sezioni di plasticizzazione siano vicinissime ha come conseguenza la produzione di deformazioni plastiche di segno contrario sia al bordo superiore che al bordo inferiore della sezione in esame.

Non è questa certo la plasticità alternata, fenomeno che interessa una sola sezione; in questo caso infatti gli assi neutri relativi ai due punti di contatto  $T_{o+}$  e  $T_{o-}$  non coincidono, quindi la lunghezza media del concio interessato da tale fenomeno plastico varia sotto l'alternarsi dei carichi, e perchè ciò sia consentito in regime atensionale è necessario che si formino altre due cerniere, alle ascisse 50 m e 100 m.

Però, uno dei caratteri della plasticità alternata è presente, come già detto, per cui il fenomeno esaminato può considerarsi al limite tra collasso incrementale e plasticità alternata. Il teorema fondamentale, che contempla ambedue i casi, assicura comunque che non esistono coefficienti di sicurezza più bassi di quello così determinato.

E' utile infine osservare che oltre al meccanismo di rottura esaminato esiste anche la possibilità del simmetrico, con lo stesso coefficiente di sicurezza; sotto le sollecitazioni  $\gamma_v a$  e  $\gamma_v \Delta t$  si presenterà l'uno o l'altro, a seconda dell'innesco iniziale.