

diagrammi può eseguirsi graficamente, ma si preferisce, in sede di esercizio, la via analitica. Poichè risulta, assumendo come origine la mezzeria,

$$M - M_g = \frac{g \ell}{12} x + \frac{g \ell^2}{24}$$

$$M_o - M_g = \frac{g}{2} x^2 + \frac{g \ell^2}{24}$$

dalla condizione

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{M - M_g}{M_o - M_g} = 0 \quad (d)$$

si ha l'ascissa ove tale rapporto è massimo

$$x_m = 0,077 \ell \quad (e)$$

ed il valore del rapporto

$$\rho_{\max} = 1,08 \quad (f)$$

La condizione (d) si scrive

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\frac{\ell x}{6} + \frac{\ell^2}{12}}{x^2 + \frac{\ell^2}{12}} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{a x + b}{x^2 + b} = 0$$

da cui

$$(x^2 + b) a - 2 (a x + b) x = 0$$

$$x^2 + 2 \frac{b}{a} x - b = 0$$

$$x = -\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + b} = -\frac{\ell}{2} + \sqrt{\frac{\ell^2}{4} + \frac{\ell^2}{12}} =$$

$$= \ell \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{3}} \right) = \ell \left( -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{3}} \right) = 0,077 \ell .$$

Si può quindi scrivere

$$2,46 \leq s_a \leq 2,66 \quad (g)$$

Si ripete il calcolo scegliendo come meccanismo quello della fig. 3-21, ove, rispetto al meccanismo della fig. 17, appare soppressa la cerniera



Chiamando  $x$  la distanza della cerniera dall'estremo di sinistra (fig. 3-22) la (3-13)

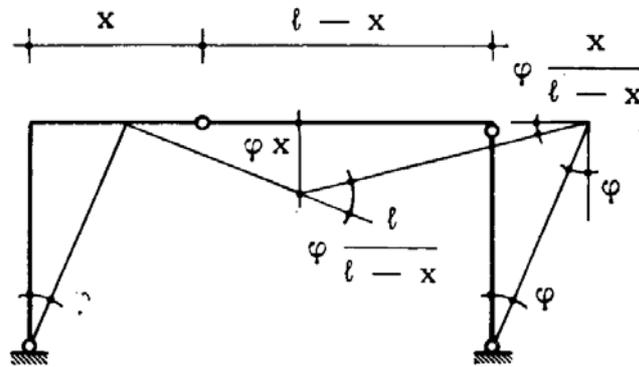


FIG. 3-22

si scrive

$$2 \frac{M_{ot}}{3} \varphi + \frac{M_{ot}}{3} \left( \varphi + \varphi \frac{x}{l-x} \right) + M_{ot} \varphi \frac{l}{l-x} = \gamma_a \frac{5}{80} g l^2 \varphi + g \varphi x \frac{l}{2}$$

da cui

$$\gamma_a = \frac{4}{3} \frac{3l-x}{l-x} - 8 \frac{x}{l}$$

La condizione

$$\frac{\partial \gamma_a}{\partial x} = \frac{8}{3} \frac{l}{(l-x)^2} - \frac{8}{l} = 0$$

fornisce

$$x = \frac{6l \pm l \sqrt{36 - 24}}{6} = 0.423 l \tag{i}$$

cui corrisponde

$$\gamma_a = s_a = 2,56$$

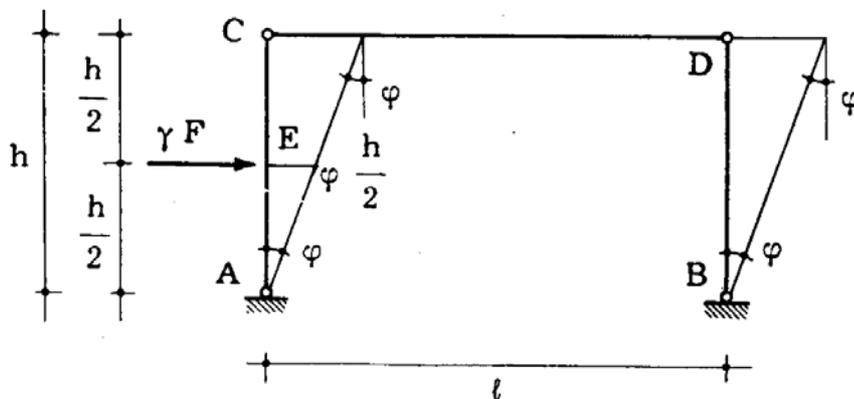


FIG. 3-23

si noti che la posizione (i) coincide con la (e).

Come secondo esempio si considera il telaio della fig. 3-23, caricato da una forza orizzontale in corrispondenza della mezzzeria del ritto di sinistra; in ogni sezione si ha  $M'_o = |M''_o| = M_o$ , ed  $M_o$  è costante per

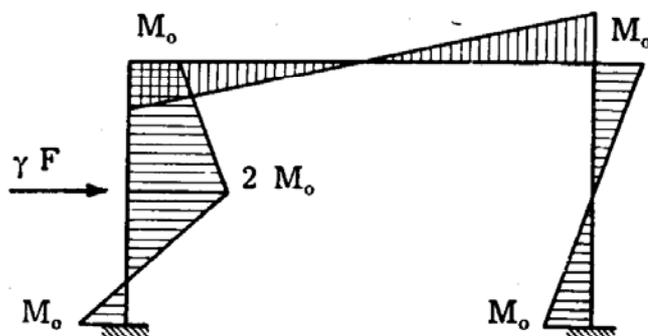


FIG. 3-24

tutte le sezioni. Il ricercato coefficiente di sicurezza è ovviamente per carico proporzionale. In un primo tentativo si opera sul meccanismo della fig. 3-23; la (3-13) porge

$$\gamma F \varphi \frac{h}{2} - 4 M_o \varphi = 0$$

da cui

$$\gamma = 8 \frac{M_o}{h F} .$$

Il diagramma dei momenti generato sulla struttura labile della fig. 3-23

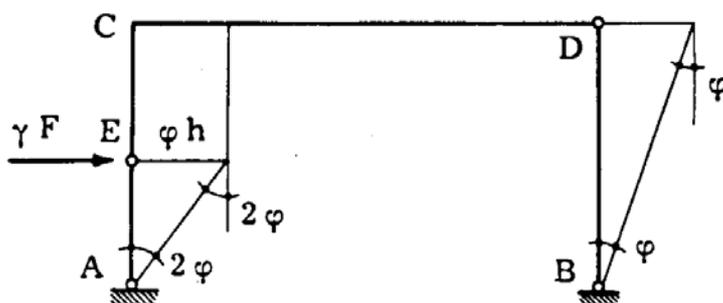


FIG. 3-25

dalla forza  $\gamma F$  e dalle coppie  $M_o$  è quello della fig. 3-24. Risulta  $\rho = 2$ ; può quindi scriversi

$$4 \frac{M_o}{h F} \leq s \leq 8 \frac{M_o}{h F} .$$

Nel secondo tentativo si utilizza il meccanismo della fig. 3-25; in esso una cerniera plastica è prevista nella sezione ove nel primo tentativo il rapporto  $M/M_0$  risultava più elevato, ed è nello stesso tempo soppressa una delle cerniere ad essa più vicine, e cioè quella in C; così operando si restringe in genere l'intervallo. Risulta in tal modo

$$\gamma F \varphi h - 6 M_0 \varphi = 0$$

da cui

$$\gamma = 6 \frac{M_0}{h F} .$$

Il diagramma dei momenti è quello della fig. 3-26: la componente orizzontale della reazione in B è pari a  $-2 \frac{M_0}{h}$ , il taglio in DB è uguale

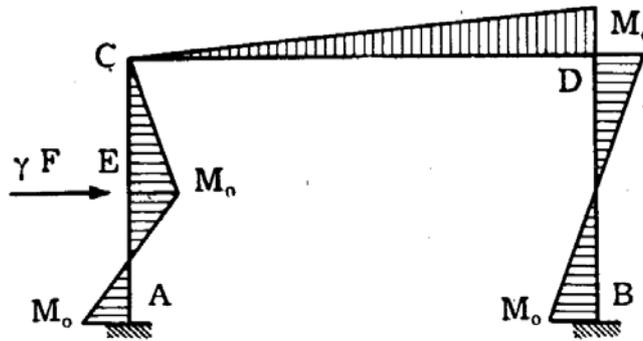


FIG. 3-26

a  $2 \frac{M_0}{h}$ , ed in CE a  $-2 \frac{M_0}{h}$ ; perciò l'inclinazione del diagramma in CE è uguale e contraria a quella in DB, ed il momento in C è nullo.

Le convenzioni sui segni sono quelle note: componenti delle reazioni positive se dirette secondo i versi positivi della coppia fissa cartesiana di riferimento (nel caso presente  $y$  verticale diretta verso il basso e  $z$  orizzontale diretta verso destra), e caratteristiche della sollecitazione interna positive se concordi con le rette  $n$  e  $t$  normale e tangente all'asse, con riferimento alla faccia per la quale  $t$  è uscente (t ed  $n$  sono orientate in modo che l'angolo  $\hat{nt}$  positivo, e cioè quello antiorario, risulti di  $90^\circ$ ).

Dalla fig. 3-26 risulta che in nessuna sezione è superato il momento limite, e perciò risulta  $\rho = 1$ ; se ne trae che può scriversi

$$s = \gamma = 6 \frac{M_0}{h F} . \quad (\ell)$$

Se si effettuasse il primo tentativo con riferimento ad un meccanismo di

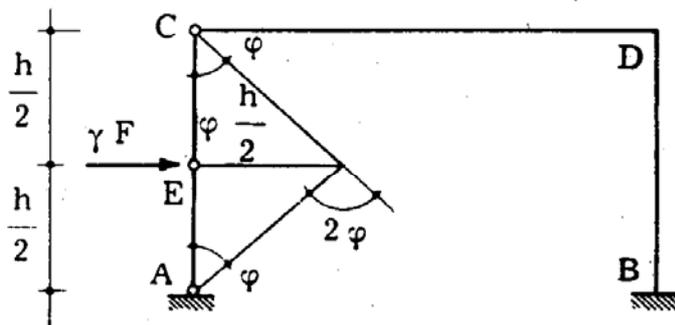


FIG. 3-27

collasso parziale (fig. 3-27) dalla 3-13 si otterrebbe

$$\gamma F \varphi \frac{h}{2} - 4 M_0 \varphi = 0 ,$$

da cui

$$\gamma = 8 \frac{M_0}{h F} .$$

Si tracci poi il diagramma dei momenti. Esso è univocamente determinato nel ritto di sinistra (fig. 3-28); per completare il diagramma nella re-

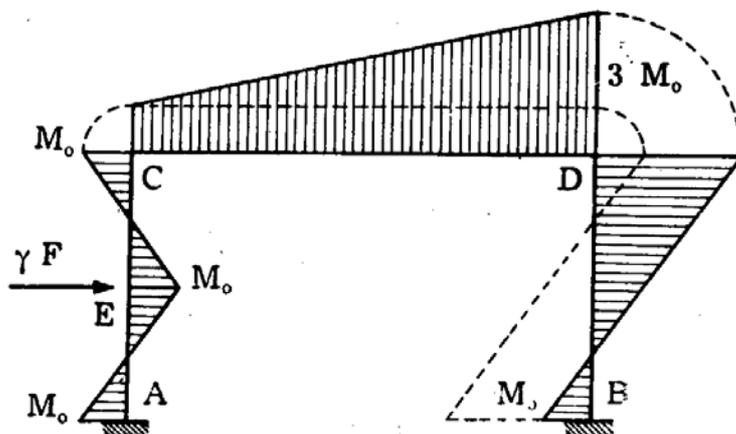


FIG. 3-28

stante struttura, una volta iperstatica, occorre fissare il valore del momento in una sezione, per esempio pari ad  $M_0$  in B. La componente orizzontale

della reazione in A è pari  $-4 \frac{M_0}{h}$ , ed in B è pari a

$$-8 \frac{M_0}{h} + 4 \frac{M_0}{h} = -4 \frac{M_0}{h} ;$$

esse non dipendono dal valore assegnato al momento in B, e perciò l'inclinazione del diagramma del momento in BD è comunque pari a

$$T_{BD} = - R_B = 4 \frac{M_o}{h} .$$

Il momento in D vale perciò  $-3 M_o$ , e il diagramma completo del momento è quello della fig. 3-28. Appare chiaro da questa, attesa l'invarianza di  $T_{BD}$ , che per ridurre al minimo il valore  $\rho$  conviene assumere pari a  $2 M_o$  il valore del momento in B. In tal caso si ha un momento  $-2 M_o$  in D, e risulta  $\rho = 2$ , per cui ancora può scriversi

$$4 \frac{M_o}{h F} \leq s \leq 8 \frac{M_o}{h F} .$$

Nel secondo tentativo converrà prevedere una cerniera in B e in D, e sopprimere la C, che è la più vicina a D tra quelle del primo tentativo; si ricade così nel meccanismo della fig. 3-25, che è stato già riconosciuto essere quello effettivo.

Come terzo esempio si considera il portale della fig. 3-29; ogni elemen-

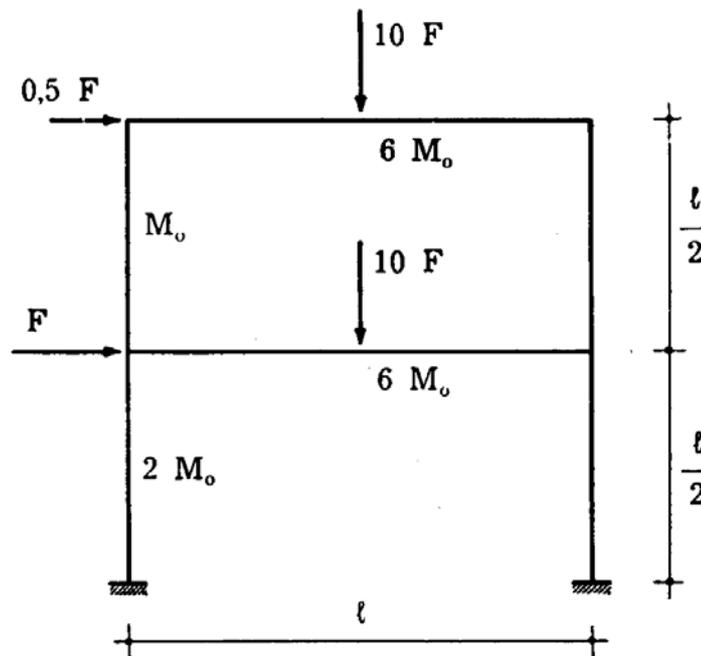


FIG. 3-29

to compreso tra due nodi successivi è di sezione costante con  $M'_o = |M''_o|$ ; i valori dei momenti limiti sono riportati in figura; il coefficiente di sicu-

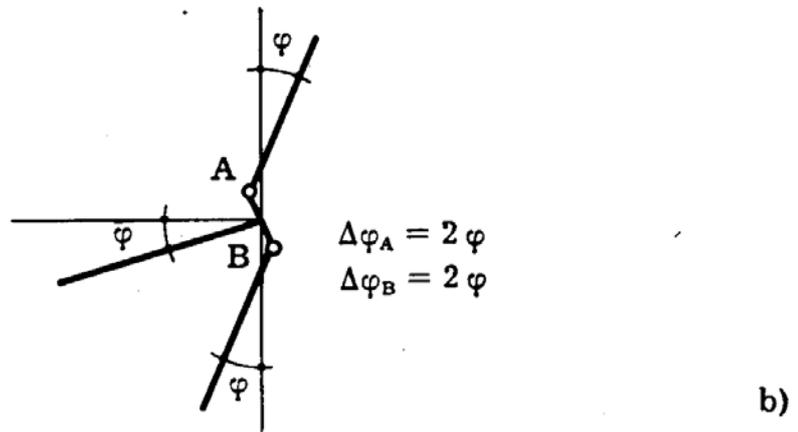
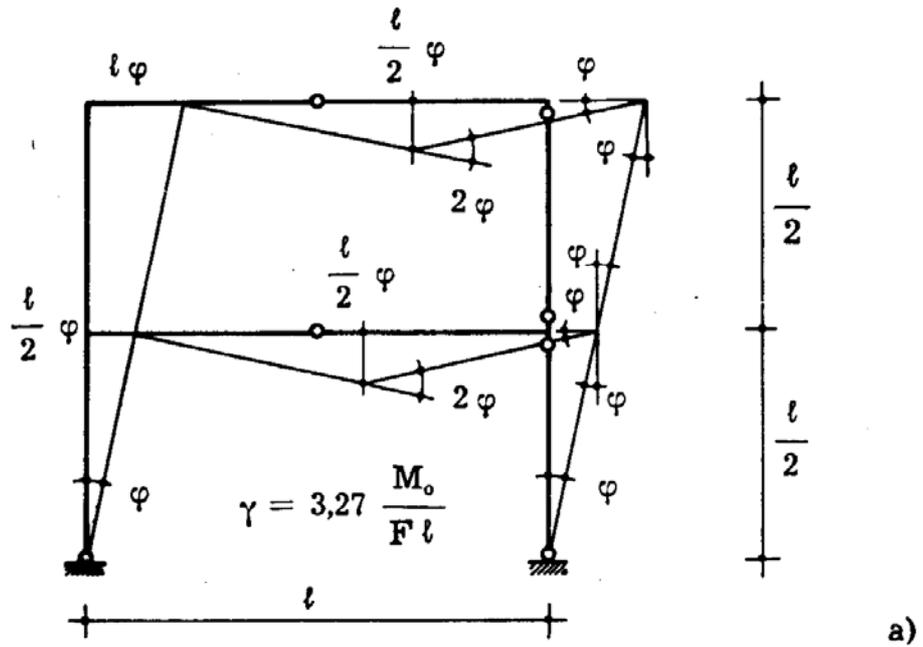


FIG. 3-30

rezza è per carico proporzionale. Dal meccanismo della fig. 3-30 risulta

$$\begin{aligned} & \gamma F \varphi \frac{l}{2} + \gamma \frac{F}{2} \varphi l + 2 \cdot 10 \gamma F \varphi \frac{l}{2} - 2 \cdot 2 M_o \varphi - \\ & - 2 \cdot 6 M_o \cdot 2 \varphi - M_o 2 \varphi - M_o 2 \varphi - 2 M_o \cdot 2 \varphi = 0 \end{aligned}$$

da cui

$$11 \gamma F l - 36 M_o = 0$$

$$\gamma = \frac{36 M_o}{11 F l} = 3,28 \frac{M_o}{F l} \quad (m)$$

Il diagramma dei momenti generati dalle forze  $\gamma F$  e dalle coppie limiti

sulla struttura della fig. 3-30 è riportato nella fig. 3-32; i calcoli relativi sono riassunti nella fig. 3-31. Risulta  $\rho = 3,35$ , e quindi

$$0,965 \frac{M_o}{F l} \leq s \leq 3,28 \frac{M_o}{F l} .$$

Nel secondo tentativo conviene prevedere una cerniera in corrispon-

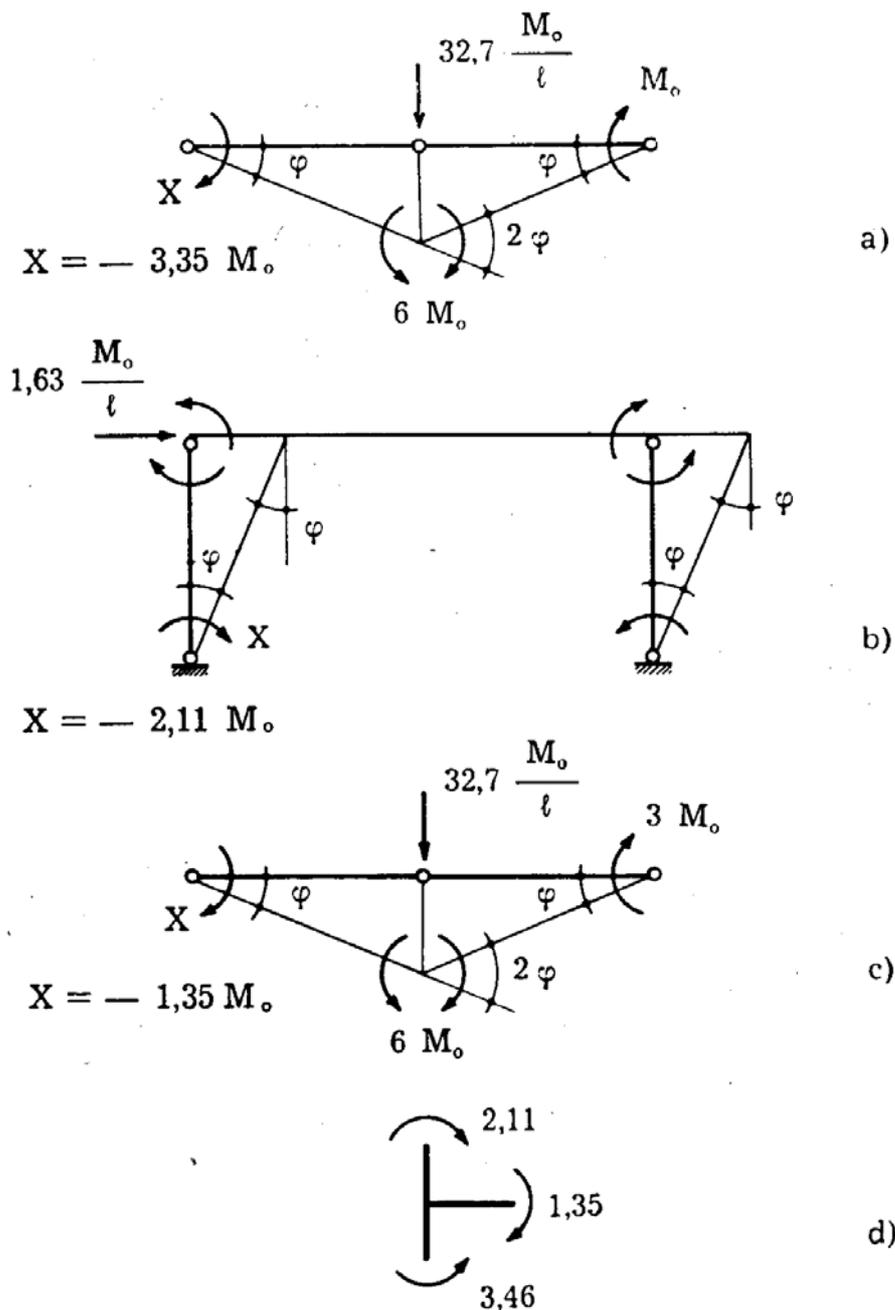
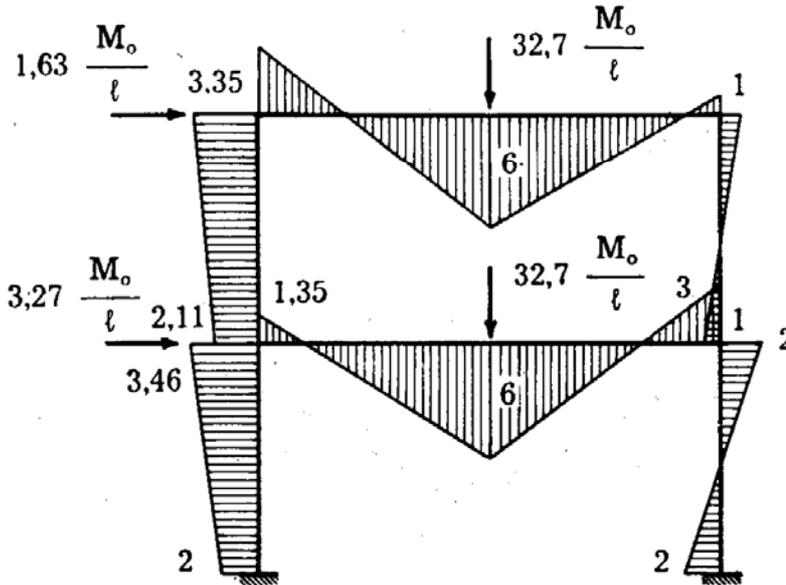


FIG. 3-31

denza della sommità del ritto sinistro superiore, ove nel primo tentativo

si verificava il maggior rapporto tra momento effettivo e momento limite;



$$0,965 \frac{M_o}{F l} \leq s \leq 3,28 \frac{M_o}{F l}$$

FIG. 3-32

si genera così il meccanismo di collasso parziale, che si riporta nella fig. 3-33.

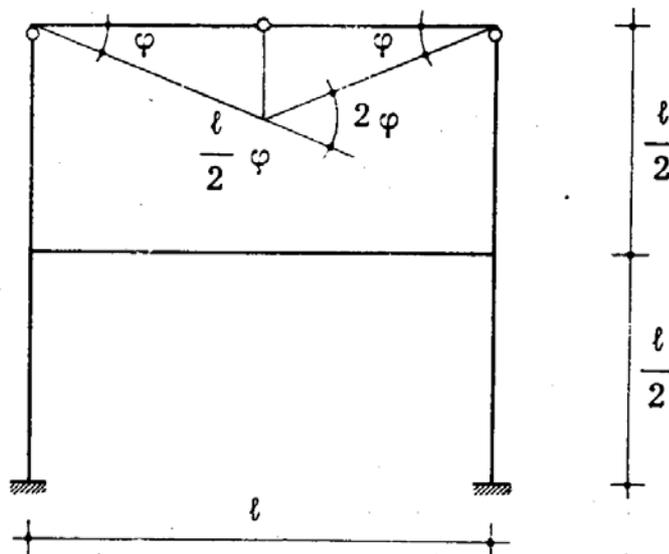


FIG. 3-33

Operando su questo si ottiene

$$\gamma \cdot 10 F \varphi \frac{l}{2} - 2 M_o \varphi - 6 M_o \cdot 2 \varphi = 0$$

da cui

$$\gamma = 2,8 \frac{M_o}{F \ell} .$$

Alle forze  $\gamma F$  ed alle coppie limiti si associano nel caso in esame infiniti diagrammi di momenti compatibili con le leggi della statica; uno è quello

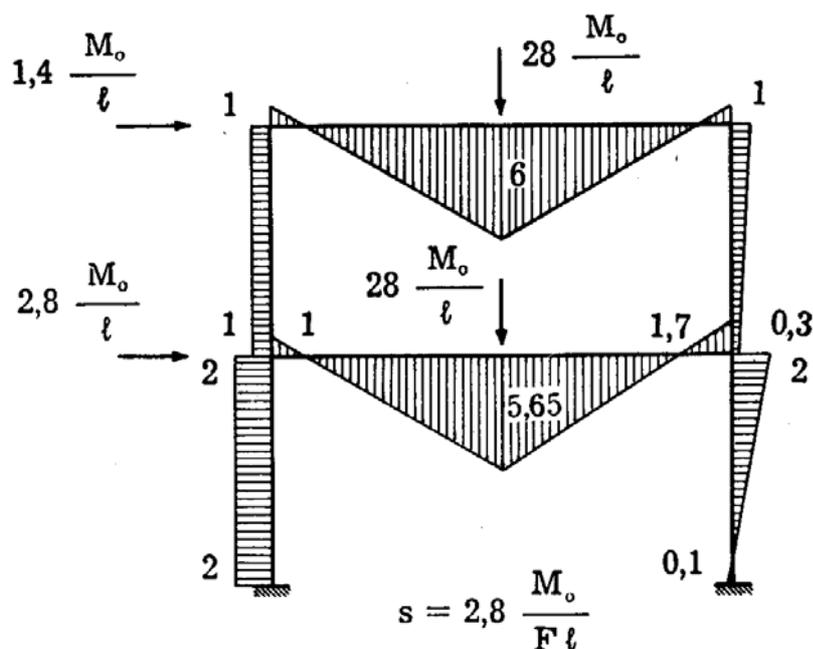


FIG. 3-34

della fig. 3-34. Poichè in esso risulta  $\rho = 1$  si può scrivere

$$s = 2,8 \frac{M_o}{F \ell} .$$

## 6. Il calcolo a rottura dei telai.

Nei telai è molto frequente che la crisi si verifichi per collasso parziale; conviene perciò innanzitutto ricavare i moltiplicatori cinematicamente sufficienti relativi a questo tipo di collasso. Ciò è facilitato dal fatto che in genere le cerniere di snervamento si formano in corrispondenza di sezioni particolari di numero complessivo limitato; per esempio, in presenza di elementi di caratteristiche costanti tra nodo e nodo e caricati da forze concentrate, le cerniere plastiche possono formarsi soltanto nelle sezioni di nodo, o in quelle corrispondenti alle forze.

Ritornando al caso della fig. 3-29, che dimentichiamo di aver già risolto, i tipi di collasso parziale più semplice (e cioè che chiamano in gioco

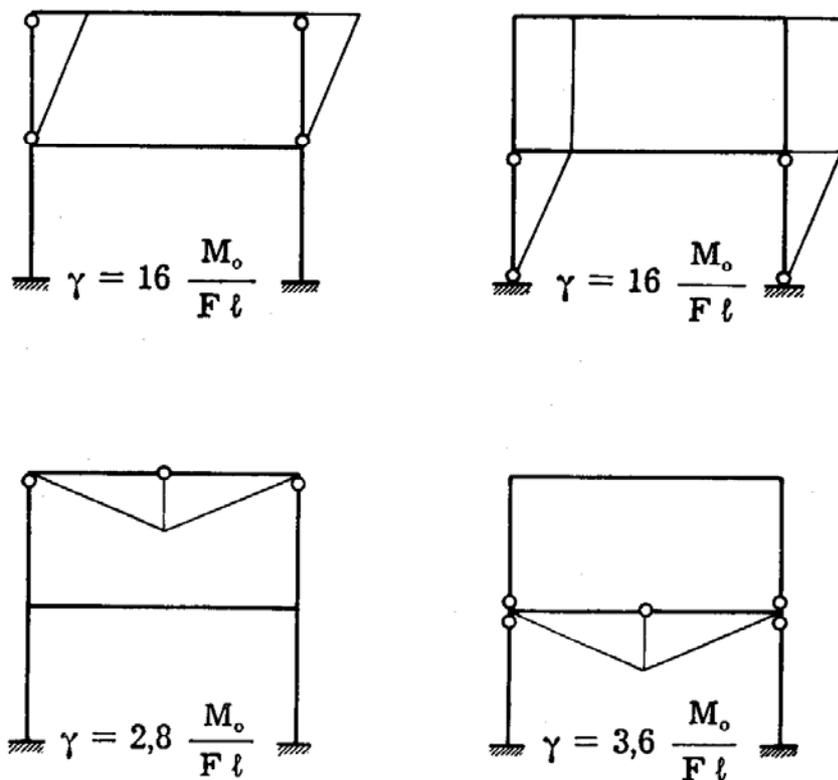


FIG. 3-35

il minor numero di cerniere) sono quelli riportati nella fig. 3-35; il più

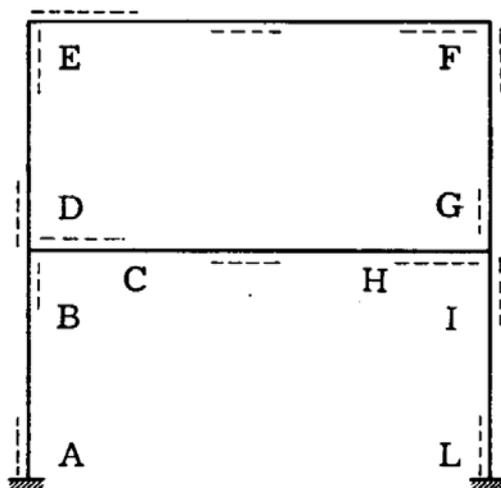


FIG. 3-36

basso  $\gamma$  corrisponde al terzo meccanismo, ed è pari a 2,8; quindi può porsi

$$s \leq 2,8 .$$

Con riferimento al meccanismo semplice così individuato ed al corrispondente  $\gamma$  si traccia il diagramma dei momenti. Conviene in tale fase operare in modo che il rapporto  $\rho$  risulti minimo, e quindi massimo  $\psi$  e minimo l'intervallo  $\phi \gamma$  in cui  $s$  è compreso. Nel caso in esame ciò è

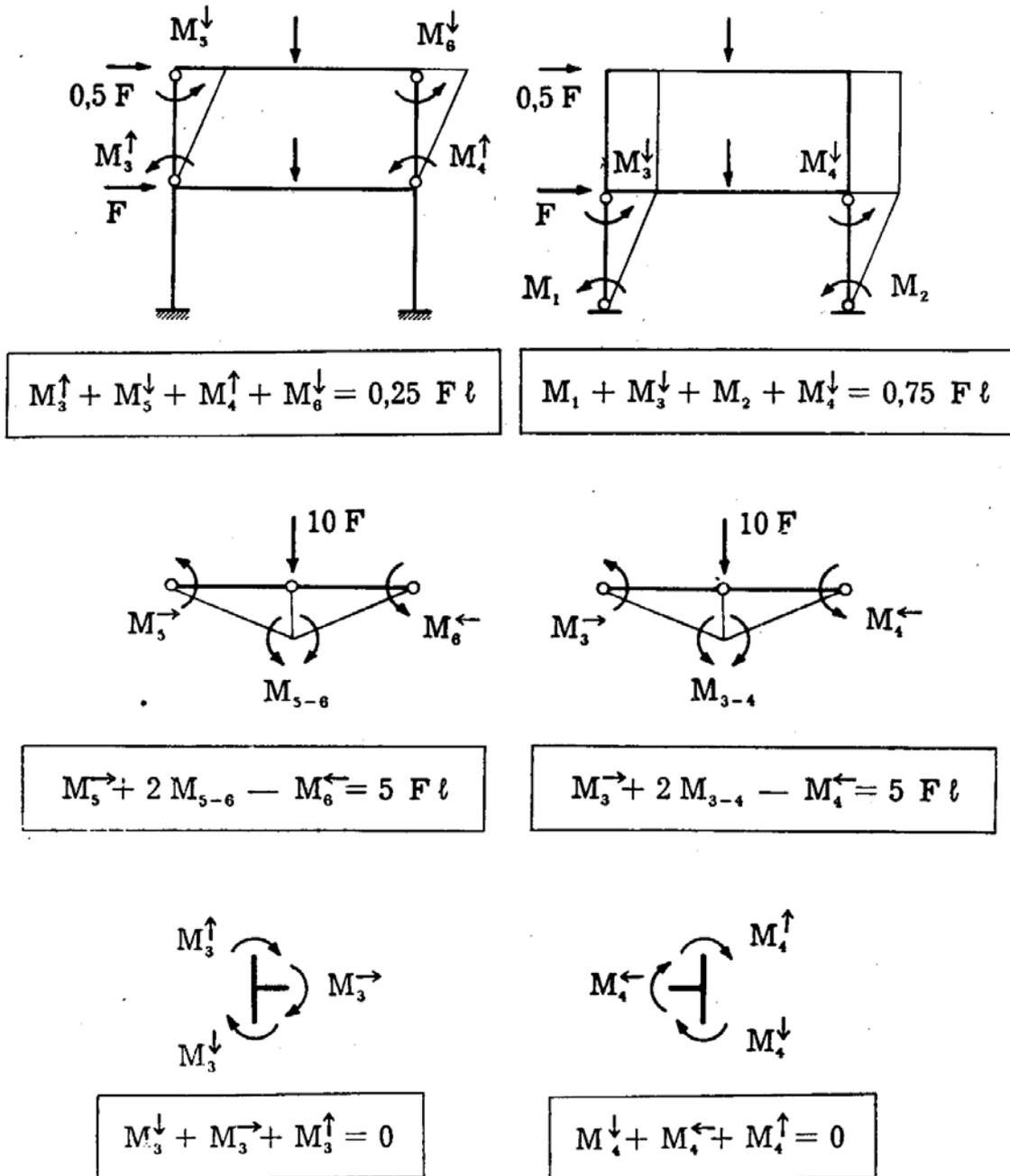


FIG. 3-37

stato abbastanza facile (fig. 3-34), ottenendosi  $\rho = 1$ , attesa la semplicità dello schema. In casi più complessi conviene scrivere innanzi tutto le relazioni della statica fra i momenti in gioco; questi ultimi sono senz'altro, in assenza di forze distribuite, quelli in corrispondenza dei nodi (o degli

incastri) e quelli in corrispondenza delle forze applicate. Sia  $m$  il numero di detti momenti ed  $i$  il grado di iperstaticità della struttura; le relazioni della statica non possono essere che  $m - i$  indipendenti, poichè delle  $m$  quantità se ne possono assegnare a piacere  $i$ , e non più di  $i$ ; le altre  $m - i$  devono essere quindi legate. Nel caso in esame è  $m = 12$ ,  $i = 6$ , e quindi le equazioni della statica devono essere  $12 - 6 = 6$ . Conviene scriverle, poichè esse chiamano in gioco determinate caratteristiche, attraverso il principio dei lavori virtuali così come enunciato per i sistemi olonomi (S. d. C., cap. XXII, § 7); conviene cioè, mediante interposizione di opportune cerniere, rendere un grado di libertà ai singoli piani (*equazioni di piano*), o alle singole aste caricate (*equazioni di trave*), o ai singoli nodi (*equazioni di nodo*). Preliminarmente, è necessario definire il verso positivo dei momenti; è ciò che si è fatto nella fig. 3-36, tratteggiando le fibre tese dai momenti positivi. La convenzione per i momenti di nodo è quella di Cross. Le equazioni, con i relativi meccanismi, risultano dalla fig. 3-37.

Nella fig. 3-38 sono riportati i successivi tentativi (due) nella distribuzione dei momenti limiti relativi alle sezioni estreme dei ritti dell'ultimo

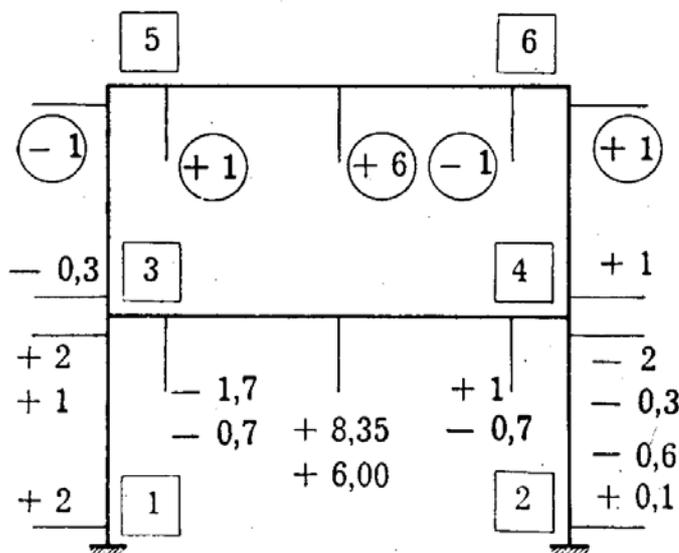


FIG. 3-38

piano, e nella fig. 3-39 il diagramma finale dei momenti, che, pur non coincidendo con quello della fig. 3-34 (e non v'è nessuna necessità che coincida) porta allo stesso risultato  $\rho = 1$ .

Nel caso più generale di più forze agenti su ogni asta del telaio, le sezioni di possibile plasticizzazione sono tutte quelle ubicate sotto le forze; quindi per ogni asta occorre scrivere una equazione nell'ipotesi di formazione di cerniera plastica sotto ciascuna delle forze agenti; e cioè tante quante sono dette forze. Se poi le forze sono distribuite, occorrereb-

be procedere con approssimazione assimilando il carico ad un insieme di forze concentrate. Tanto vale perciò, in tale evenienza, non scrivere che

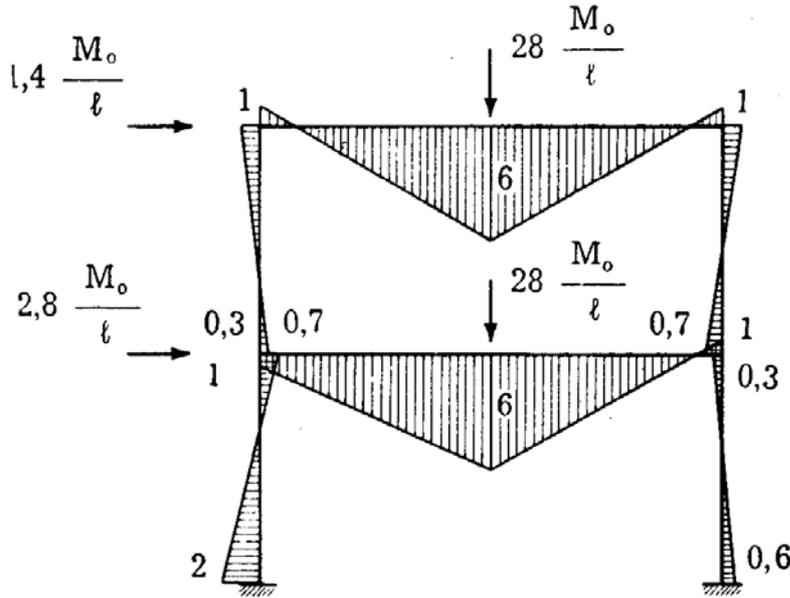


FIG. 3-39

le equazioni di nodo e di piano, e dopo avere ottenuto le fondamentali

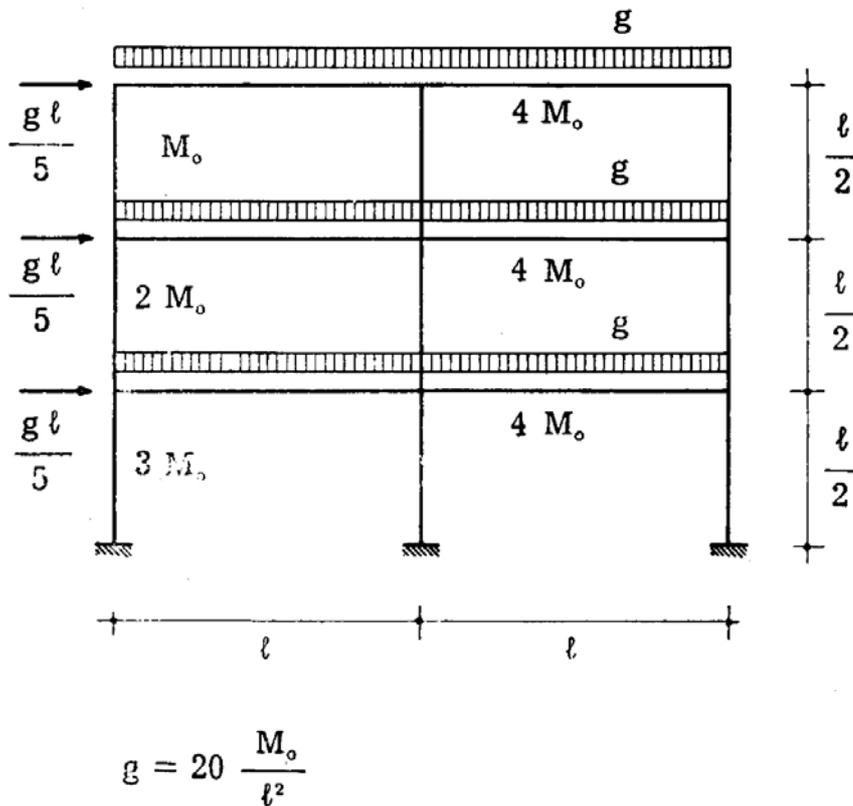
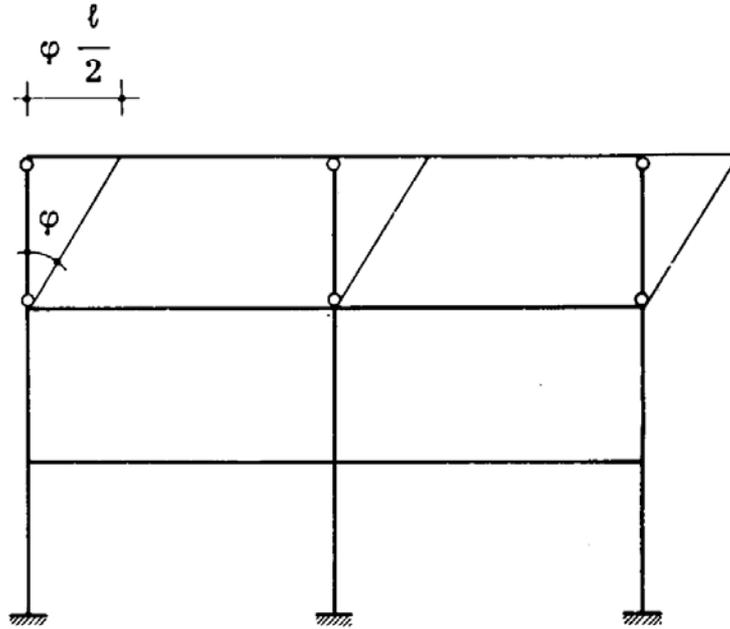


FIG. 3-40

del diagramma dei momenti — congiungenti gli estremi dei momenti di

nodo — su queste disegnare le superfici semplici dei momenti. Si è così operato nel caso della fig. 3-40, ove si ricerca il coefficiente di sicurezza  $s_a$  per carico non proporzionale, relativo cioè alle sole forze orizzontali.



$$\gamma_a \frac{g l}{5} \varphi \frac{l}{2} = 6 M_o \varphi$$

$$\gamma_a = 60 \frac{M_o}{g l^2} = 3$$

FIG. 3-41

Il coefficiente cinematicamente sufficiente relativo al meccanismo di collasso parziale della fig. 3-41 è fornito dalla relazione

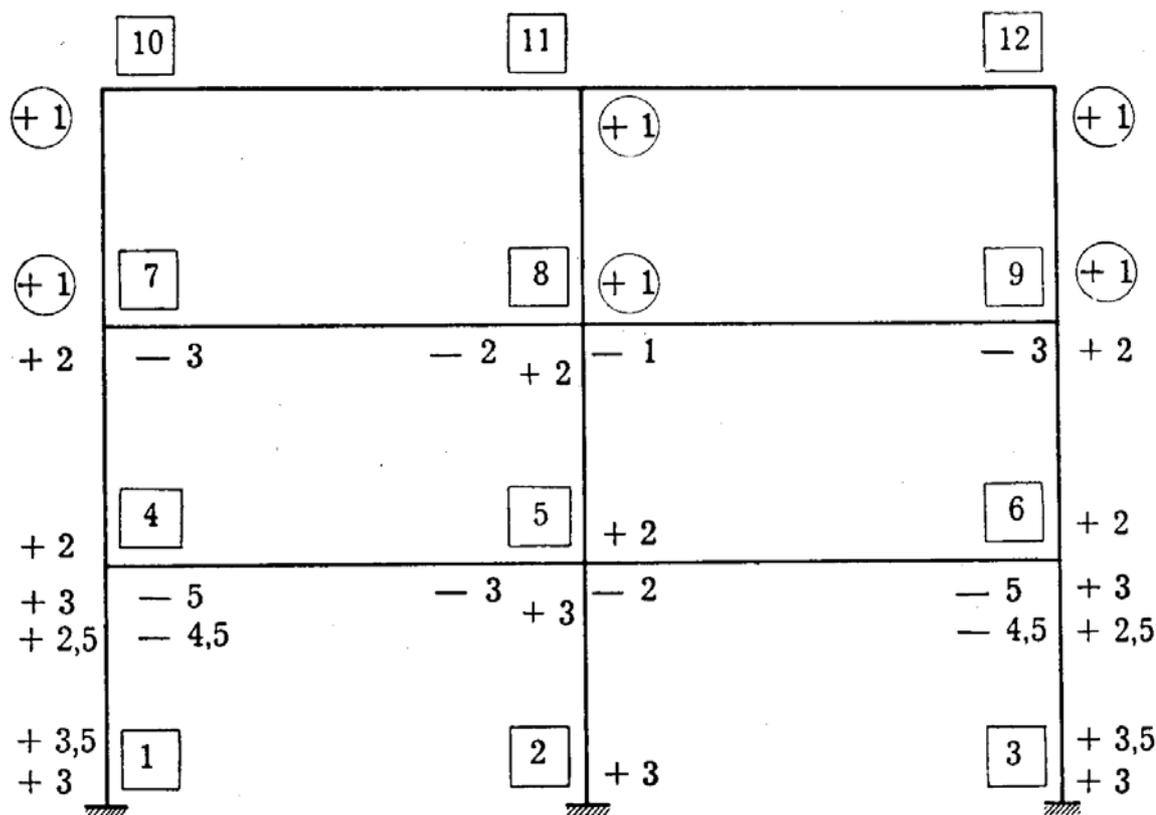
$$\gamma_a \frac{g l}{5} \varphi \frac{l}{2} = 6 M_o \varphi$$

da cui risulta

$$\gamma_a = 3 . \quad (n)$$

I momenti limiti agli estremi dei ritti del piano superiore si diffondono nella struttura secondo lo schema della fig. 3-42, dove sono riportate anche le equazioni di piano e di nodo; le convenzioni sui segni sono le stesse del Cross, e cioè i momenti si considerano positivi se, considerati agenti dal nodo sulla trave, sono antiorari. Il primo tentativo porta al

diagramma di momenti disegnato con linea continua nella fig. 3-43; le condizioni di plasticizzazione sono violate nella trave 4·5 e in quella 5·6.



$$M_4^{\uparrow} + M_7^{\downarrow} + M_5^{\uparrow} + M_8^{\downarrow} + M_6^{\uparrow} + M_9^{\downarrow} = 4 M_0$$

$$M_1 + M_4^{\downarrow} + M_2 + M_5^{\downarrow} + M_3 + M_6^{\downarrow} = 6 M_0$$

$$M_{11}^{\downarrow} + M_{11}^{\rightarrow} + M_{11}^{\leftarrow} = 0$$

$$M_8^{\downarrow} + M_8^{\rightarrow} + M_8^{\uparrow} + M_8^{\leftarrow} = 0$$

$$M_5^{\downarrow} + M_5^{\rightarrow} + M_5^{\uparrow} + M_5^{\leftarrow} = 0$$

$$M_{10}^{\downarrow} + M_{10}^{\rightarrow} = 0$$

$$M_7^{\downarrow} + M_7^{\rightarrow} + M_7^{\uparrow} = 0$$

$$M_4^{\downarrow} + M_4^{\rightarrow} + M_4^{\uparrow} = 0$$

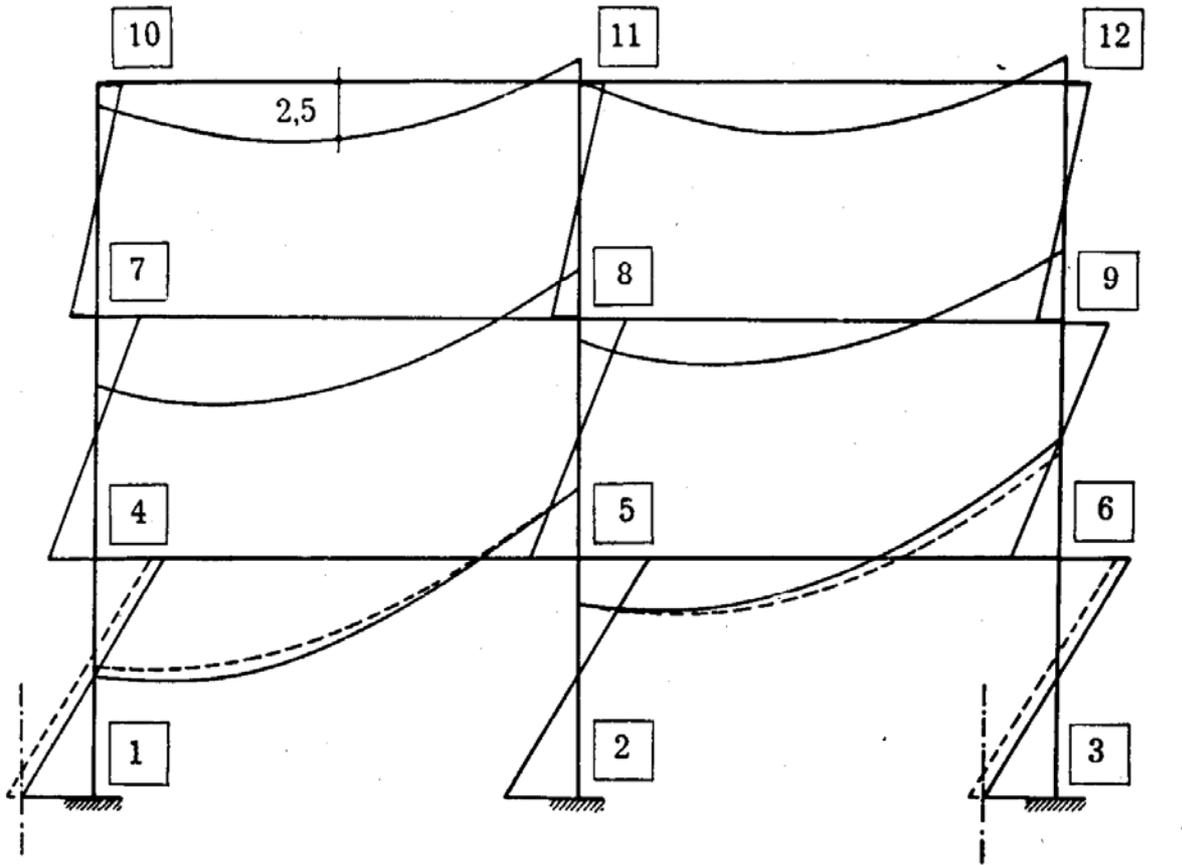
$$M_{12}^{\downarrow} + M_{12}^{\leftarrow} = 0$$

$$M_9^{\downarrow} + M_9^{\uparrow} + M_9^{\leftarrow} = 0$$

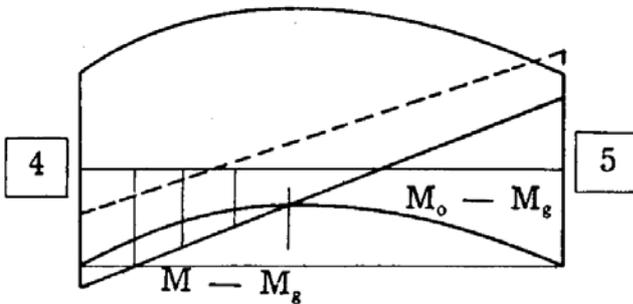
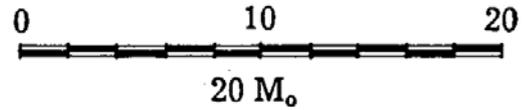
$$M_6^{\downarrow} + M_6^{\uparrow} + M_6^{\leftarrow} = 0$$

FIG. 3-42

Per la trave 4·5, che è quella dove maggiormente si superano i momenti limiti, si sono costruiti i diagrammi  $M - M_g$  ed  $M_0 - M_g$ , assumendo



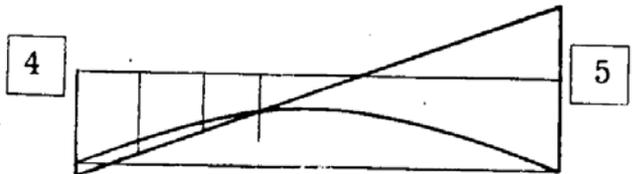
$M_o - M_g$



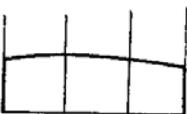
$$2,08 \leq s_a \leq 3$$



1,25  
1,34  
1,44  
1,34  
1



$$2,5 \leq s_a \leq 3$$



1,13  
1,20  
1,18  
1

nel ritto  $\frac{3,5}{3} = 1,17$

FIG. 3-43

per  $M_g$  il diagramma del momento da peso proprio corrispondente a momenti nulli nei nodi. Il più elevato  $\rho$  dei rapporti

$$\frac{M - M_g}{M_o - M_g}$$

vale 1,44, per cui può stabilirsi un primo intervallo

$$\frac{3}{1,44} \leq s_a \leq 3$$

e cioè

$$2,08 \leq s_a \leq 3 . \quad (o)$$

Prima di passare ad un secondo tentativo, conviene tentare di restringere l'intervallo (o), modificando il diagramma dei momenti in modo da far diminuire, se possibile, il valore di  $\rho$  e far aumentare quindi il valore di  $\psi_a$ . Questo secondo tentativo è riportato nella fig. 3-42, ed il diagramma dei momenti di secondo tentativo è disegnato con linea tratteggiata nella fig. 3-43; si sono incrementati di  $0,5 M_o$  i momenti in 1 e 3, ove si superano così i momenti limiti (linea a tratti e punti), allo scopo di diminuire gli scarti nella sezione 4 della trave 4·5 e nella sezione 6 della trave 5·6; infatti si può portare così  $M_4^{\rightarrow}$  da  $5 M_o$  a  $4,5 M_o$ , ed  $M_6^{\leftarrow}$  pur esso da  $5 M_o$  a  $4,5 M_o$ .

Nelle sezioni 1 e 3 si ha

$$\frac{M - M_g}{M_o - M_g} = \frac{M}{M_o} = \frac{3,5}{3} = 1,17 ;$$

si ricordi che  $M_g$  si è costruito nell'ipotesi di cerniera agli estremi dei traversi, e quindi è nullo nei ritti. I rapporti

$$\frac{M - M_g}{M_o - M_g}$$

per la trave 4·5, ove sono più elevati, sono riportati nella fig. 3-43; risulta così  $\rho = 1,20$ , e perciò l'intervallo (o) si restringe in

$$\frac{3}{1,20} \leq s_a \leq 3$$

e cioè in

$$2,50 \leq s_a \leq 3 . \quad (p)$$

Invece di fare ulteriori tentativi per restringere ancora l'intervallo (p), conviene ricominciare, cambiando meccanismo. Nel secondo meccanismo (fig. 3-44) converrà prevedere delle cerniere plastiche nelle sezioni

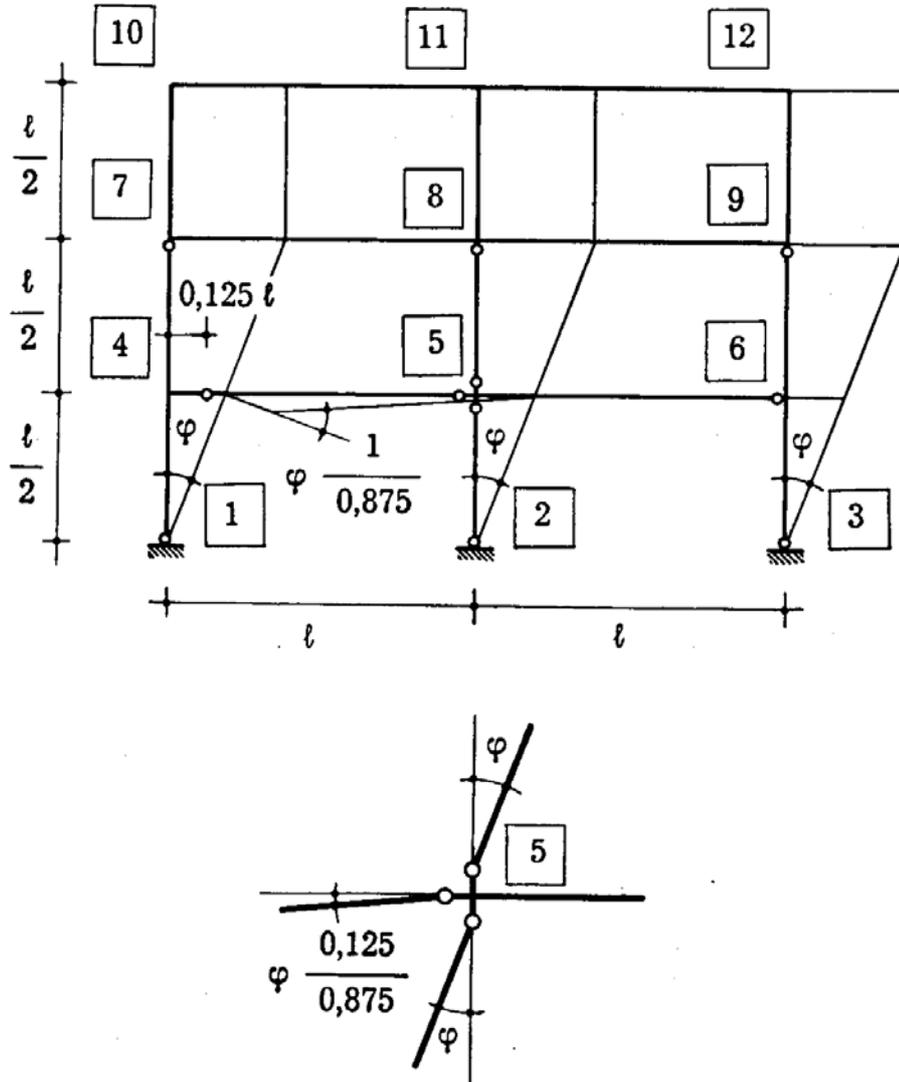


FIG. 3-44

ove, nel primo meccanismo (fig. 3-43), si verificano i maggiori sconfinamenti dalla zona plastica, e cioè nella sezione di ascissa  $0,125 \ell$  della trave 4-5, nella sezione 6 della trave 5-6, e nelle sezioni 1 e 3. Occorre aggiungere altre cerniere per realizzare un meccanismo che presenti rotazioni relative in corrispondenza delle sezioni ove sono state previste le nuove cerniere. Ciò può farsi in più modi, e ci si lascia guidare in genere dai seguenti criteri: prevedere le cerniere nelle zone ove nel primo tentativo si era più vicini alle condizioni di plasticizzazione, e, in corrispondenza di un nodo, in modo da minimizzare, a parità di deformata, il lavoro delle coppie limiti. Nel caso in esame si sono previste nuove cerniere

nella sezione 2, agli estremi 7, 8 e 9 dei ritti 4·7, 5·8 e 6·9, e, in omaggio al secondo criterio, negli estremi 5 dei ritti 5·8 e 2·5 invece che nel-

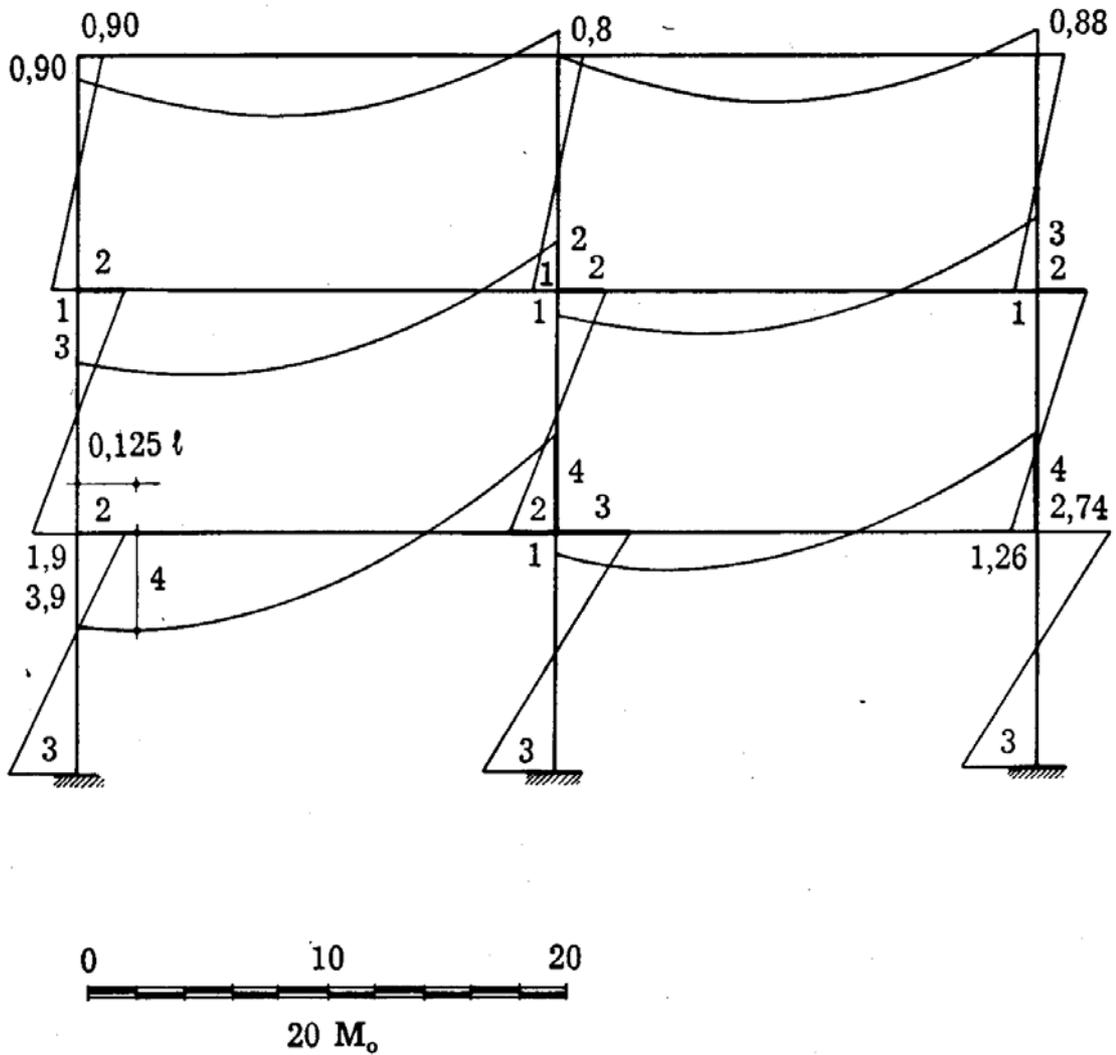


FIG. 3-45

l'estremo 5 della trave 5·6.

Si può scrivere, con i dati della fig. 3-44

$$\begin{aligned} & \gamma_a \frac{g l}{5} \left( \frac{l}{2} + l + l \right) \varphi + 0,125 \frac{l^2}{2} g \varphi = \\ & = 3 \cdot 3 M_0 \varphi + 4 M_0 \frac{1}{0,875} \varphi + 4 M_0 \frac{0,125}{0,875} \varphi + \\ & + 3 M_0 \varphi + 4 M_0 \varphi + 4 \cdot 2 M_0 \varphi \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{1}{2} \gamma_a g l^2 + \frac{0,125}{2} g l^2 = 29,14 M_0.$$

Poichè è  $g l^2 = 20 M_0$  (fig. 3-40) può scriversi pure

$$10 \gamma_a M_0 + 1,25 M_0 = 29,14 M_0 \quad (q)$$

da cui si ha

$$\gamma_a = \frac{27,89}{10} = 2,79 \quad (r)$$

Nella fig. 3-45 è riportato un diagramma di momenti flettenti compatibile con le coppie limiti ed i carichi  $g$  e  $\gamma_a F$ ; poichè in nessuna sezione sono superate le condizioni di plasticizzazione, può porsi

$$s_a = 2,79 \quad (s)$$

Sempre con riferimento alla struttura della fig. 3-40, si ricerca adesso il coefficiente di sicurezza per carico proporzionale. Con riferimento al

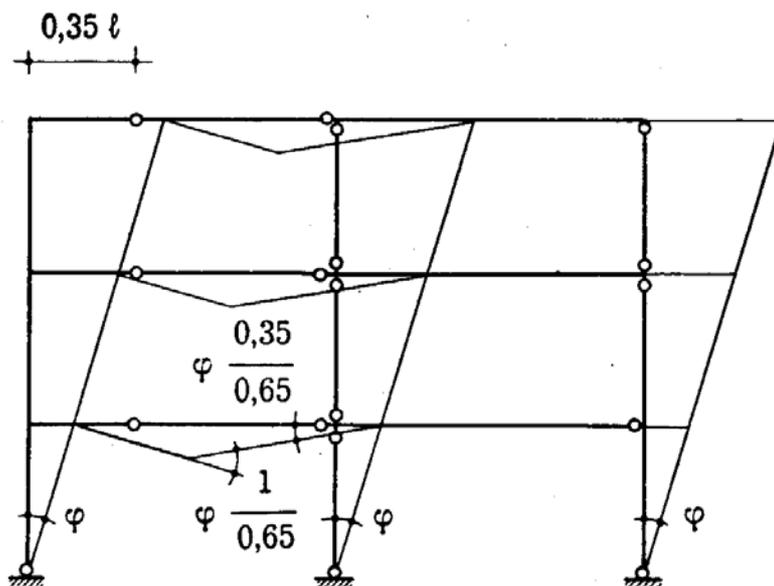


FIG. 3-46

meccanismo reale di rottura per carico non proporzionale (fig. 3-44) la (q) si scrive, nel caso attuale,

$$10 \gamma M_0 + 1,25 \gamma M_0 = 29,14 M_0$$

da cui si trae

$$\gamma = \frac{29,14}{11,25} = 2,59 \quad (t)$$

Il valore (t) di  $\gamma$  non è però un  $s$ , perchè si osserva subito che, disegnando un diagramma dei momenti compatibili con le coppie limiti e le



Nella fig. 3-47 è riportato un diagramma di momenti compatibili con le coppie limiti e con le forze  $\gamma g$  e  $\gamma F$ ; il massimo rapporto  $M/M_0$  si verifica nella trave 5·6, alla distanza  $0,39 \ell$  dall'estremo 5, e vale

$$\rho = \frac{4,43}{4} = 1,107 ,$$

da cui si ottiene

$$\frac{2,26}{1,107} \leq s \leq 2,26 ,$$

e cioè

$$2,04 \leq s \leq 2,26 . \quad (v)$$

Nel terzo tentativo si prende in esame il meccanismo della fig. 3-48, ove una cerniera è prevista nella sezione  $0,39 \ell$  del traverso 5·6; sono

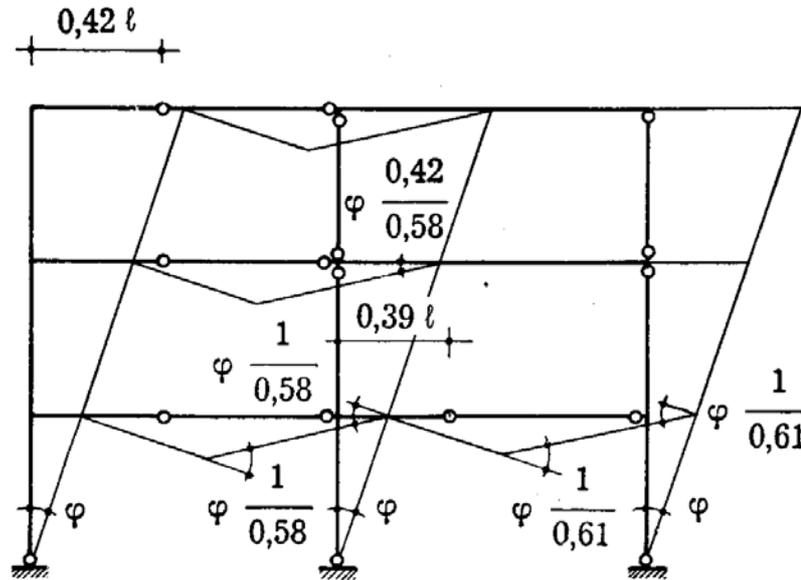


FIG. 3-48

soppresse poi le cerniere all'estremo 5 dei ritti 5·2 e 5·8, non più necessarie per raggiungere la labilità. Si ha

$$\begin{aligned} & \gamma \left[ \frac{3}{5} g \ell^2 + 3 \cdot 0,42 \frac{\ell^2}{2} g \varphi + 0,39 \frac{\ell^2}{2} g \varphi \right] = \\ & = 3 \cdot 3 M_0 \varphi + 3 \cdot 4 M_0 \varphi \frac{1}{0,58} + 4 M_0 \varphi \frac{1}{0,58} + \\ & + 2 \cdot 4 M_0 \varphi \frac{1}{0,61} + 2 \cdot 2 M_0 \varphi + 2 \cdot 4 M_0 \varphi \frac{0,42}{0,58} + 4 \cdot M_0 \varphi \end{aligned}$$

da cui

$$\gamma = \frac{63,49}{28,50} = 2,23 .$$

Nella fig. 3-49 è riportato un diagramma di momenti compatibile con

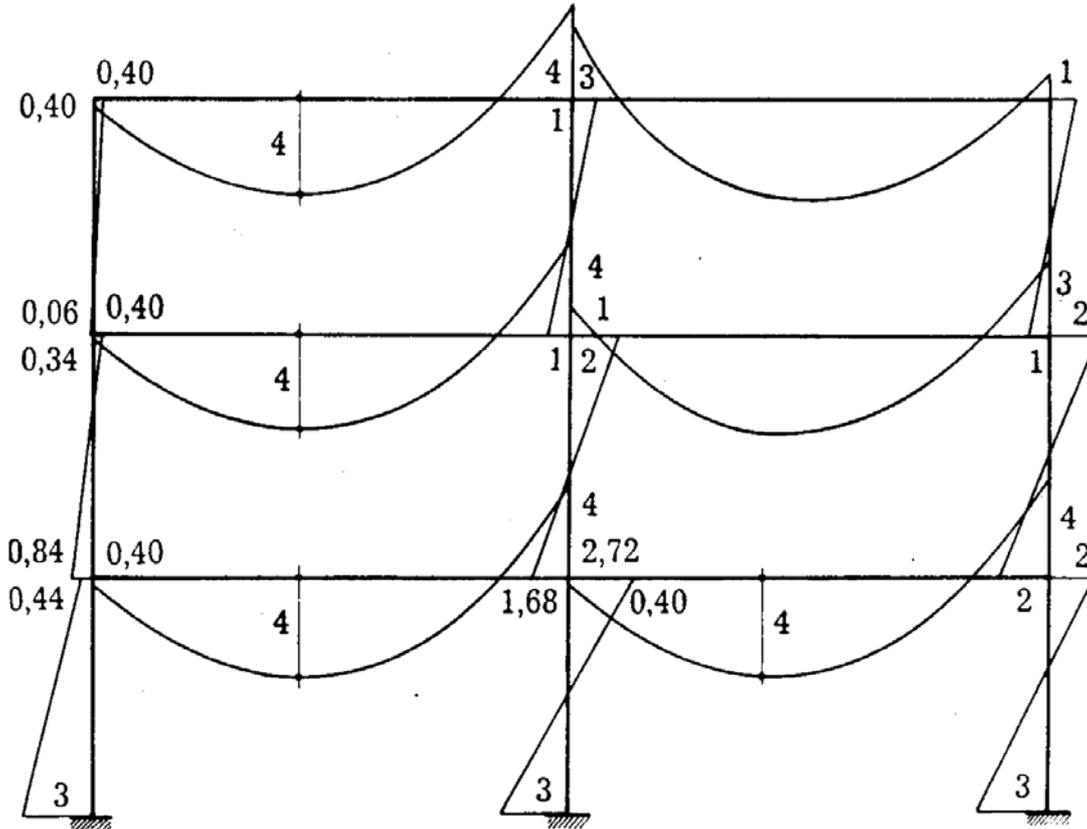


FIG. 3-49

le coppie limiti e le forze  $\gamma g$  e  $\gamma F$ , che in nessun punto supera il momento limite; può perciò scriversi

$$s = 2,23 . \quad (z)$$

Se il telaio della fig. 3-40 è soggetto alla sola condizione di carico verticale  $g$  (fig. 3-50) si intuisce che il meccanismo di rottura deve essere simmetrico, e perciò non può interessare che le travi; si può prevedere anche che le due travi dell'ultimo piano, incastrate ad un sol ritto ad un estremo, sono quelle che portano ad un  $\gamma$  più basso, e quindi ad  $s$ . Si può perciò scrivere, prevedendo la cerniera di mezzeria all'ascissa  $0,423 \ell$ , dove si verifica il massimo momento in fase elastica,

$$\gamma g \ell^2 \frac{0,423}{2} \varphi = 4 M_0 \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{0,577} + \frac{0,423}{0,577} \right) \varphi$$

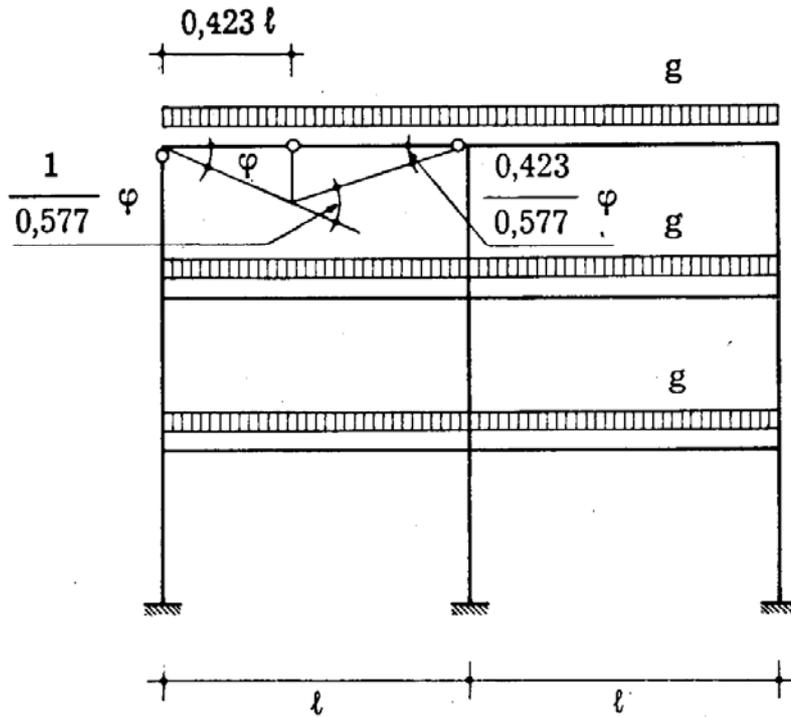


FIG. 3-50

da cui

$$\gamma = 2,58 .$$

Si verifica che il  $\gamma$  è pure un  $\phi$ , e perciò può scriversi

$$s = 2,58 . \quad (a')$$

### 7. Il metodo dei meccanismi combinati.

Può essere utile talvolta premettere al calcolo eseguito così come esposto al paragrafo precedente, una ricerca intesa ad abbreviare i tempi del calcolo stesso; questa ricerca va sotto il nome di *metodo dei meccanismi combinati* (Symonds e Neal, 1951), e consiste nel combinare fra loro in vari modi i *meccanismi elementari* (e cioè quelli corrispondenti ai tipi di collasso parziale più semplice) in modo da appurare se a qualche meccanismo di collasso parziale meno semplice non corrisponda un  $\gamma$  minore del più basso di quelli relativi ai meccanismi elementari. Si avverte esplicitamente fin d'ora, che, in presenza di forze concentrate (qualsiasi caso di forze distribuite può però trattarsi con approssimazione alla stessa stregua) e di momento limite costante a tratti, il meccanismo reale risulta sicuramente essere una delle possibili combinazioni dei meccanismi elementari. Parrebbe perciò sufficiente limitarsi a calcola-

re i  $\gamma$  relativi a tutte le possibili combinazioni suddette, per arrivare al valore di  $s$ , che coincide infatti con il più basso di tali  $\gamma$ ; ma ciò è in pratica impossibile, per l'enorme numero delle combinazioni da esaminare, non appena ci si scosti dai tipi di telai più elementari.

I meccanismi elementari sono di tre tipi, e sono irportati nella fig. 3-51 a) (Hodge).

Quelli del tipo  $b, c$  sono detti *meccanismi di piano*, quelli del tipo  $d, e$ , *meccanismi di trave*, quelli del tipo  $f, g$ , *meccanismi di nodo*. Nel caso in esame i momenti limiti sono costanti per ogni trave del telaio, e le forze concentrate agenti sulle travi sono solo due; quindi le sezioni di possibile localizzazione delle cerniere plastiche (*sezioni critiche*) sono quelle alle estremità dei traversi e dei ritti, e quelle corrispondenti alle forze applicate sulle travi, ed i meccanismi più semplici che da esse possono derivare sono i sei della fig. 3-51.

Si noti che il numero  $c$  di sezioni critiche è dodici, il grado di iperstaticità  $i$  è sei, e il numero  $m$  di meccanismi elementari (sei) risulta dalla differenza tra  $c$  ed  $i$ .

$$m = c - i ; \quad (17)$$

ciò risulta dal fatto che ad ogni meccanismo elementare può associarsi (attraverso il principio dei lavori virtuali valido per i sistemi olonomi) una relazione di equilibrio tra alcune delle  $c$  caratteristiche momenti flettenti, e queste relazioni, essendo tra loro indipendenti, devono, sottratte al numero  $c$ , fornire il grado di iperstaticità della struttura.

In genere, le sezioni critiche sono quelle di separazione tra due tratti a momento limite costante, e, in presenza di più forze concentrate, quelle sotto ognuna di queste; i meccanismi elementari perciò si moltiplicano in conseguenza.

Si osservi pure che tra i meccanismi elementari solo a quelli di piano e di trave è associato un coefficiente cinematicamente sufficiente; infatti per i meccanismi di nodo risulta  $L_e = 0$ .

Si badi, nel combinare i meccanismi, che un coefficiente  $\gamma$  più basso del minore tra quelli attinenti ai meccanismi elementari combinati può venir fuori solo se nella combinazione risulta diminuito il lavoro svolto nelle cerniere plastiche rispetto alla somma dei lavori relativi ai meccanismi combinati.

Infatti, se ciò non accade, chiamando  $\mathcal{L}'_1$  ed  $\mathcal{L}'_e$  i lavori interno ed esterno relativi al primo meccanismo,  $\mathcal{L}''_1$  ed  $\mathcal{L}''_e$  quelli relativi al secondo,  $\gamma'$  e  $\gamma''$  i coefficienti cinematicamente ammissibili ad essi collegati, e  $\gamma$  il

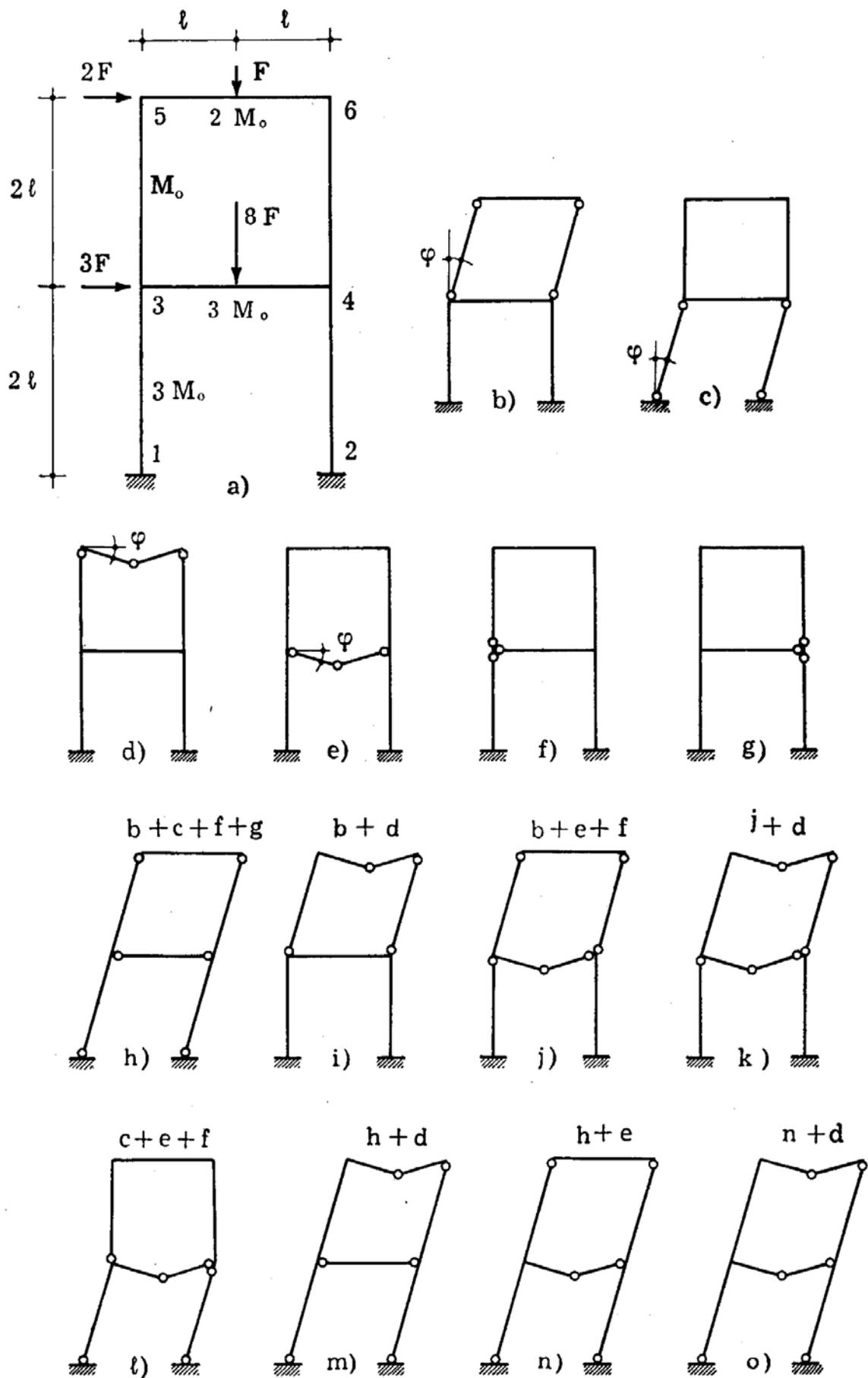


FIG. 3-51

coefficiente del meccanismo combinato, si ha

$$\gamma' = \frac{\mathcal{L}'_i}{\mathcal{L}'_e} \quad ; \quad \gamma'' = \frac{\mathcal{L}''_i}{\mathcal{L}''_e} \quad ; \quad \gamma = \frac{\mathcal{L}'_i + \mathcal{L}''_i}{\mathcal{L}'_e + \mathcal{L}''_e}$$

(il lavoro  $\mathcal{L}_e$  è sempre pari alla somma  $\mathcal{L}'_e + \mathcal{L}''_e$ ), e, se  $\gamma' < \gamma''$ , e cioè

$$\frac{\mathcal{L}'_i}{\mathcal{L}'_e} < \frac{\mathcal{L}''_i}{\mathcal{L}''_e} ,$$

risulta pure

$$\frac{\mathcal{L}'_i}{\mathcal{L}'_e} < \frac{\mathcal{L}'_i + \mathcal{L}''_i}{\mathcal{L}'_e + \mathcal{L}''_e} < \frac{\mathcal{L}''_i}{\mathcal{L}''_e}$$

Se è

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

si può scrivere pure

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d} ;$$

se  $c$  aumenta o  $d$  diminuisce, si ha

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} .$$

Con riferimento ai meccanismi elementari (fig. 3-51) si ha

$$\gamma \cdot 2 F \cdot 2 l \varphi = 4 M_o \varphi \qquad \gamma = \frac{M_o}{F l} \qquad (b)$$

$$\gamma (2 F + 3 F) \cdot 2 l \varphi = 12 M_o \varphi \qquad \gamma = 1,2 \frac{M_o}{F l} \qquad (c)$$

$$\gamma F l \varphi = 2 M_o \varphi + 2 M_o \cdot 2 \varphi \qquad \gamma = 6 \frac{M_o}{F l} \qquad (d)$$

$$\gamma \cdot 8 F l \varphi = 2 \cdot 3 M_o \cdot \varphi + 3 M_o \cdot 2 \varphi \qquad \gamma = 1,5 \frac{M_o}{F l} \qquad (e)$$

Come primo meccanismo combinato si considera quello della fig. 3-51 h, somma dei meccanismi di piano  $b$  e  $c$ , e dei meccanismi di nodo  $f$  e  $g$ .

Si osservi a tale proposito che la sola somma di  $b$  e  $c$  avrebbe portato ad un  $\gamma$  intermedio tra i valori di  $\gamma$  ad essi relativi, poichè nella somma di  $b$  e  $c$  il lavoro delle coppie limiti si somma anch'esso; e infatti si avrebbe

$$4 F l \gamma \varphi + 10 F l \gamma \varphi = 16 M_o \varphi$$

da cui

$$\gamma = 1,14 \frac{M_0}{F l} \quad (b + c)$$

intermedio tra i valori  $\frac{M_0}{F l}$  e  $1,2 \frac{M_0}{F l}$ .

Una rotazione  $\varphi$  del nodo 3 elimina le rotazioni relative che in  $b + c$  si avevano in corrispondenza degli estremi dei ritti in 3, e introduce una rotazione pari a  $\varphi$  in corrispondenza dell'estremo della trave in 3. Si ha perciò

$$\begin{aligned} 14 F l \gamma \varphi &= 16 M_0 \varphi - M_0 \varphi - 3 M_0 \varphi + 3 M_0 \varphi - \\ &- M_0 \varphi - 3 M_0 \varphi + 3 M_0 \varphi = 14 M_0 \varphi \end{aligned}$$

da cui

$$\gamma = \frac{M_0}{F l} \quad (b + c + f + g = h)$$

I meccanismi  $b$  ed  $h$  forniscono, tra quelli finora esaminati, il più basso dei  $\gamma$ ; tra i meccanismi di trave quello cui corrisponde il più basso  $\gamma$  è il meccanismo  $e$ . Convienne perciò combinare  $b$  con  $e$  ed  $h$  con  $e$ ; si ottengono così i meccanismi  $j$  ed  $n$  della fig. 51.

Nella combinazione  $b + e$  occorre però introdurre anche il meccanismo di nodo  $f$ , altrimenti il lavoro delle coppie interne non risulta diminuito rispetto alla somma dei lavori relativi a  $b$  e ad  $e$ .

Si ha così

$$12 \gamma F l \varphi = 16 M_0 \varphi - M_0 \varphi - 3 M_0 \varphi + 3 M_0 \varphi = 15 M_0 \varphi$$

da cui

$$\gamma = 1,25 \frac{M_0}{F l} \quad (b + e + f)$$

Nella combinazione  $h + e$  (fig. 3-51 n) si ha, considerando prima la deformata  $h$  e sovrapponendo ad essa quella  $e$ ,

$$22 \gamma F l \varphi = 14 M_0 \varphi + 9 M_0 \varphi - 3 M_0 \varphi = 20 M_0 \varphi$$

da cui

$$\gamma = 0,909 \frac{M_0}{F l} \quad (h + e = n)$$

Si combini adesso il meccanismo  $n$ , cui compete finora il più basso  $\gamma$ ,

con l'ultimo dei meccanismi elementari da utilizzare, *d*. Si ha così (meccanismo *o*)

$$23 \gamma F l \varphi = 20 M_o \varphi - M_o \varphi + 5 M_o \varphi = 24 M_o \varphi$$

da cui

$$\gamma = 1,042 \frac{M_o}{F l} . \quad (n + o)$$

Per gli altri possibili meccanismi ad un sol grado di libertà si ottiene:

$$5 \gamma F l \varphi = 4 M_o \varphi - M_o \varphi + 5 M_o \varphi = 8 M_o \varphi$$

$$\gamma = 1,6 \frac{M_o}{F l} ; \quad (b + d = i)$$

$$13 \gamma F l \varphi = 8 M_o \varphi + 12 M_o \varphi - 4 M_o \varphi + 3 M_o \varphi = 19 M_o \varphi$$

$$\gamma = 1,462 \frac{M_o}{F l} ; \quad (i + e + f = k)$$

$$18 \gamma F l \varphi = 12 M_o \varphi + 12 M_o \varphi - 6 M_o \varphi + M_o \varphi = 19 M_o \varphi$$

$$\gamma = 1,056 \frac{M_o}{F l} \quad (c + e + f = l)$$

$$15 \gamma F l \varphi = 14 M_o \varphi + 5 M_o \varphi - M_o \varphi = 18 M_o \varphi$$

$$\gamma = 1,2 \frac{M_o}{F l} . \quad (d + h = m)$$

Poichè si sono esaminate tutte le possibili combinazioni di meccanismi elementari, si può dire che il meccanismo di collasso è quello *n*, cui corrisponde il minimo  $\gamma$ , e quest'ultimo è il coefficiente di sicurezza:

$$s = 0,909 \frac{M_o}{F l} .$$

Come già accennato, però, in genere le combinazioni di meccanismi elementari sono talmente elevate in numero che non è possibile esaminarle tutte; conviene allora limitarsi a poche combinazioni, e partire da quella che fornisce il  $\gamma$  più basso per ottenere da quest'ultimo un  $\phi$ , secondo il metodo esposto al paragrafo precedente, e quindi un intervallo di definizione di *s*.

### 8. La ricerca del coefficiente di sicurezza in presenza di più condizioni di carico comunque alternantisi.

Se la struttura è soggetta a più condizioni di carico — e questo caso si presenta quasi sempre per qualsiasi costruzione, anche senza voler pensare alle strutture da ponte — può darsi che per un moltiplicatore dei valori dei carichi inferiore ai moltiplicatori corrispondenti alla crisi per le singole condizioni di carico si verifichi un tipo di crisi, sia pure diverso da quello finora considerato in questo paragrafo. E' il caso del collasso incrementale o della plasticizzazione alternata, già incontrati nel precedente capitolo. Può avvenire, cioè, che le diverse condizioni di carico, comunque alternantisi, e tutte caratterizzate da coefficiente di sicurezza al collasso statico maggiore di uno, provocando successivamente il raggiungimento del momento limite in alcune sezioni, inducano rotazioni relative concentrate di carattere plastico di segno tale, ed in sezioni di numero e ubicazione tali, da corrispondere ad un meccanismo che impegni tutta la struttura o una sua parte. Se ciò accade una volta, avverrà pure un numero indefinito di volte nella vita della struttura, ed ogni volta indurrà una deformata di carattere permanente. Dopo un certo tempo gli spostamenti saranno intollerabili; è questo il cosiddetto *collasso incrementale*. Può anche avvenire che in corrispondenza di una sezione si attingano successivamente i valori limiti di segno opposto  $M'$  ed  $M''$  del momento; e ciò porta, dopo alcune alternanze, dell'ordine del migliaio o addirittura del centinaio, alla rottura localizzata. E' questo il cosiddetto *collasso per plasticizzazione alternata*. In questi due nuovi tipi di collasso, come già detto, si pone quindi come parametro determinante la crisi il prodursi o meno di deformazioni plastiche in cicli indefiniti.

Altri modi di produzione indefinita di deformazioni permanenti non possono darsi; infatti i due casi contemplati sono le uniche possibilità che si offrono di distorsioni atensionali. Qualsiasi altro insieme di distorsioni indurrebbe variazioni nel regime statico della struttura, e quindi, a la longue, un aumento indefinito delle caratteristiche della sollecitazione, il che è inammissibile.

Siano  $C_g$  le condizioni di carico che si suppongono di valore invariabile,  $C_v$  quelle (comprese le distorsioni) il cui valore può incrementarsi secondo un moltiplicatore comune  $k_v$ . Si chiama *coefficiente di sicurezza*  $s_v$  quel valore di  $k_v$  per cui si raggiunge la possibilità del collasso incrementale o da plasticizzazione alternata. Per  $k_v < s_v$ , dopo un certo numero di cicli di carico non si può avere più produzione di distorsioni permanenti; ciò vuol dire che nella struttura è presente, dopo quel numero di cicli, che può essere anche infinito, un insieme di momenti flettenti dovuto a deformazioni permanenti, invariabile nel tempo, intorno

al quale i momenti dovuti ai carichi  $C_g + k_v C_v$  oscillano in fase elastica. Tale insieme si chiama *insieme residuo di stabilizzazione*; la struttura è stata stabilizzata da quest'insieme, o, con termine anglosassone, è in fase di *shake down*. Per  $k_v = s_v$  esiste ancora un insieme residuo di momenti di stabilizzazione  $\bar{M}$ , ma i diagrammi  $M_{a \max}^e$  ed  $M_{a \min}^e$  dei momenti massimi e minimi, calcolati in fase elastica, riportati a partire dal diagramma  $M + \bar{M}_g^e$ , debbono toccare quello dei momenti limiti  $M'_o$  od  $M''_o$  in corrispondenza di  $i$  sezioni di numero e ubicazione tali da rendere — ove in esse si inserissero delle cerniere — un grado di libertà a tutta la struttura o ad una sua parte (collasso incrementale), oppure debbono toccare in una sezione  $i$  ambedue i momenti limiti  $M'_{oi}$  ed  $M''_{oi}$ .

Nel primo caso si ha, in corrispondenza delle  $i$  sezioni del meccanismo di collasso incrementale,

$$M_{gi}^e + s_v M_{ai \max}^e + \bar{M}_i = M'_{oi} \quad (18)$$

oppure

$$M_{gi}^e + s_v M_{ai \min}^e + \bar{M}_i = M''_{oi} ,$$

e nelle altre sezioni invece si ha

$$M_g^e + s_v M_{a \max}^e + \bar{M} \leq M'_o \quad (19)$$

$$M''_o \leq M_g^e + s_v M_{a \min}^e + \bar{M} .$$

Nel secondo caso invece si ha, nella sezione  $i$ , contemporaneamente

$$M_{gi}^e + s_v M_{ai \max}^e + \bar{M}_i = M'_{oi} \quad (20)$$

$$M_{gi}^e + s_v M_{ai \min}^e + \bar{M}_i = M''_{oi} ,$$

mentre nelle altre sezioni si verificano sempre le (3-19).

Se è noto il meccanismo di collasso incrementale, il coefficiente di sicurezza  $s$  si ottiene considerando che il lavoro delle coppie  $\bar{M}_i$  per effetto della deformata consentita dal meccanismo è nullo, poichè le  $\bar{M}_i$  sono in equilibrio con forze esterne nulle. Si ha perciò dalle (3-18)

$$\begin{aligned} \sum_i M_{gi}^e \Delta\varphi_i + s_v [\sum_{i'} M_{ai \max}^e \Delta\varphi_i + \sum_{i''} M_{ai \min}^e \Delta\varphi_i] = \\ = \sum_{i'} M'_{oi} \Delta\varphi_i + \sum_{i''} M''_{oi} \Delta\varphi_i \end{aligned} \quad (21)$$

dove  $i'$  ed  $i''$  sono le sezioni plasticizzate per momento positivo o negativo.

Se è nota la sezione di plasticizzazione alternata, dalla (3-20) si ha invece

$$s_v = \frac{M'_{oi} - M''_{oi}}{M_{ai}^e{}_{\max} - M_{ai}^e{}_{\min}} . \quad (22)$$

In genere però il meccanismo di collasso incrementale non è conosciuto; in tal caso un teorema analogo a quello già enunciato al § 6 del Cap. II permette di giungere in un primo tentativo ad un intervallo in cui  $s_v$  è compreso, e di restringere a piacere questo intervallo nei tentativi successivi.

Un numero  $\psi_v$  si definisce *moltiplicatore staticamente ammissibile* delle condizioni  $C_v$  di carico se esiste almeno una distribuzione di momenti tale che in ogni sezione si abbia

$$M_g^e + \psi_v M_a^e{}_{\max} + \bar{M} \leq M'_o \quad (23)$$

$$M''_o \leq M_g^e + \psi_v M_a^e{}_{\min} + \bar{M} .$$

Un numero  $\gamma_v$  si definisce *moltiplicatore cinematicamente sufficiente* delle condizioni  $C_v$  di carico se è ottenuto come coefficiente di sicurezza da una qualsiasi scelta del meccanismo di collasso incrementale o della sezione di plasticizzazione alternata. Esso è perciò fornito da una relazione analoga alla (3-21), o alla (3-22).

Si avverte esplicitamente che nella (3-21) le cerniere  $i'$  ed  $i''$  si scelgono dopo aver fissato il segno della deformata del meccanismo: le cerniere  $i'$  sono nelle sezioni dove la fascia  $M_{\max} M_{\min}$  tocca il momento  $M'_o$ , le cerniere  $i''$  nelle sezioni dove la fascia tocca il momento  $M''_o$ . Il segno del secondo membro della (3-21) è negativo, il segno del fattore di  $s_v$  pur esso negativo.

Il teorema fondamentale si enuncia: un qualsiasi moltiplicatore  $\gamma_v$  cinematicamente sufficiente non può essere inferiore ad un qualsiasi moltiplicatore  $\psi_v$  staticamente ammissibile. Dati perciò un qualsiasi  $\psi_v$  ed un qualsiasi  $\gamma_v$ , si può scrivere

$$\psi_v \leq \gamma_v . \quad (24)$$

Se il  $\gamma_v$  deriva da un meccanismo di collasso incrementale, si ha, in relazione alla deformata consentita da tale meccanismo,

$$\begin{aligned} \sum_i M_{gi}^e \Delta\varphi_i + \gamma_v [\sum_{i'} M_{ai}^e{}_{\max} \Delta\varphi_i + \sum_{i''} M_{ai}^e{}_{\min} \Delta\varphi_i] = \\ = \sum_{i'} M'_{oi} \Delta\varphi_i + \sum_{i''} M''_{oi} \Delta\varphi_i . \end{aligned} \quad (b')$$

Siano  $\bar{M}$  i momenti residui connessi con  $\phi_v$  in rispetto della definizione di coefficiente staticamente ammissibile; poichè anche gli  $\bar{M}$  sono in equilibrio con forze esterne nulle, utilizzando lo stesso meccanismo che è servito per trovare  $\gamma_v$  si può scrivere

$$\sum_i \bar{M}_i \Delta\varphi_i = 0 \quad (c')$$

Si faccia la posizione

$$\begin{aligned} M_{\max} &= M_g^e + \phi_v M_{a\max}^e + \bar{M} \\ M_{\min} &= M_g^e + \phi_v M_{a\min}^e + \bar{M} ; \end{aligned}$$

dalla (c') si trae

$$\begin{aligned} \sum_i M_{gi}^e \Delta\varphi_i + \phi_v [\sum_{i'} M_{ai\max}^e \Delta\varphi_i + \sum_{i''} M_{ai\min}^e \Delta\varphi_i] &= \\ &= \sum_{i'} M_{i\max} \Delta\varphi_i + \sum_{i''} M_{i\min} \Delta\varphi_i . \end{aligned} \quad (d')$$

Si faccia l'ipotesi

$$\phi_v > \gamma_v ; \quad (e')$$

dal confronto tra la (b') e la (d') si trae, ricordando che il termine in parentesi quadra è negativo,

$$\sum_{i'} (M'_{oi} - M_{i\max}) \Delta\varphi_i + \sum_{i''} (M''_{oi} - M_{i\min}) \Delta\varphi_i > 0 . \quad (f')$$

Con riferimento alla prima sommatoria della (f') si ha

$$\begin{aligned} M'_{oi} - M_{i\max} &\geq 0 \\ \Delta\varphi_i &< 0 ; \end{aligned}$$

con riferimento alla seconda sommatoria si ha

$$\begin{aligned} M''_{oi} - M_{i\min} &\leq 0 \\ \Delta\varphi_i &> 0 . \end{aligned}$$

Tutti i termini della (f') sono perciò nulli o negativi, e la loro somma non può essere positiva. Si trae da ciò che la (c') è un assurdo, e quindi vale la (3-24).

Se il  $\gamma_v$  deriva dall'ipotesi di plasticizzazione alterna in una sezione  $i$ , esso è fornito da

$$\gamma_v = \frac{M'_{oi} - M''_{oi}}{M_{ai\max}^e - M_{ai\min}^e} ; \quad (g')$$