

CAPITOLO VII

IL CALCOLO A ROTTURA DELLE PIASTRE

1. Generalità.

Si giunge alla crisi di una piastra quando si formano delle linee di frattura, lungo le quali il momento flettente distribuito attinge il valore limite m_0 , tali da conferire un grado di libertà a tutta la piastra o ad una sua parte. Il concetto di cerniera plastica, valevole per le strutture monodimensionali, cede così il posto a quello di *linea di frattura*, detta anche *cerniera lineare plastica*, rettilinea o curvilinea.

Il momento limite m_0 per una piastra di materiale caratterizzato da $\sigma'_0 = -\sigma''_0 = \sigma_0$, di spessore h , può essere assunto pari a

$$m'_0 = -m''_0 = m_0 = \sigma_0 \frac{h^2}{4}; \quad (1)$$

esso cioè si pone coincidente con il momento limite di una sezione rettangolare di larghezza b unitaria.

In una piastra di conglomerato, armata in due direzioni ortogonali x ed y con ferri le cui aree riferite all'unità di lunghezza siano rispettivamente $A'_x A'_y$ superiormente ed $A''_x A''_y$ inferiormente, i momenti limiti positivo e negativo m'_0 ed m''_0 su un elemento inclinato dell'angolo α sulla direzione x sono forniti (fig. 7-1) da

$$\begin{aligned} m'_0 &= (A'_x \operatorname{sen} \alpha + A'_y \operatorname{cos} \alpha) \sigma_{of} d' \\ m''_0 &= - (A''_x \operatorname{sen} \alpha + A''_y \operatorname{cos} \alpha) \sigma_{of} d'' \end{aligned} \quad (2)$$

dove d' e d'' sono i bracci della coppia limite interna nei due casi. Con buona approssimazione può porsi

$$d' = d'' = 0,9 h. \quad (3)$$

Si consideri per esempio una piastra in c.a. rettangolare armata secondo le due direzioni, incastrata ai quattro lati e caricata da un ca-

rico p ripartito. Se le cerniere lineari si formano secondo i quattro lati

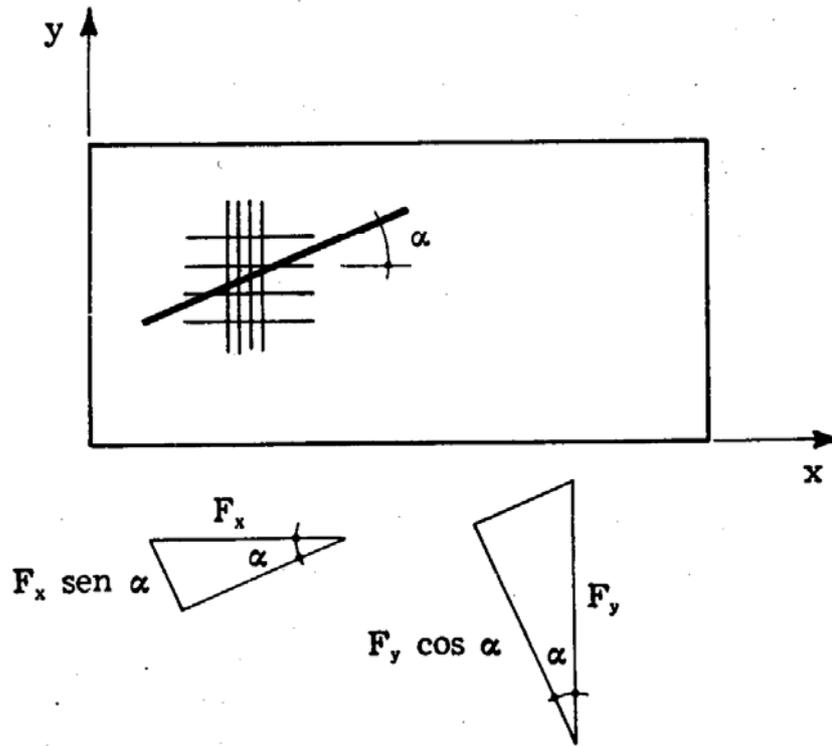


FIG. 7-1

(cerniere periferiche), e secondo quattro segmenti partenti dai vertici e

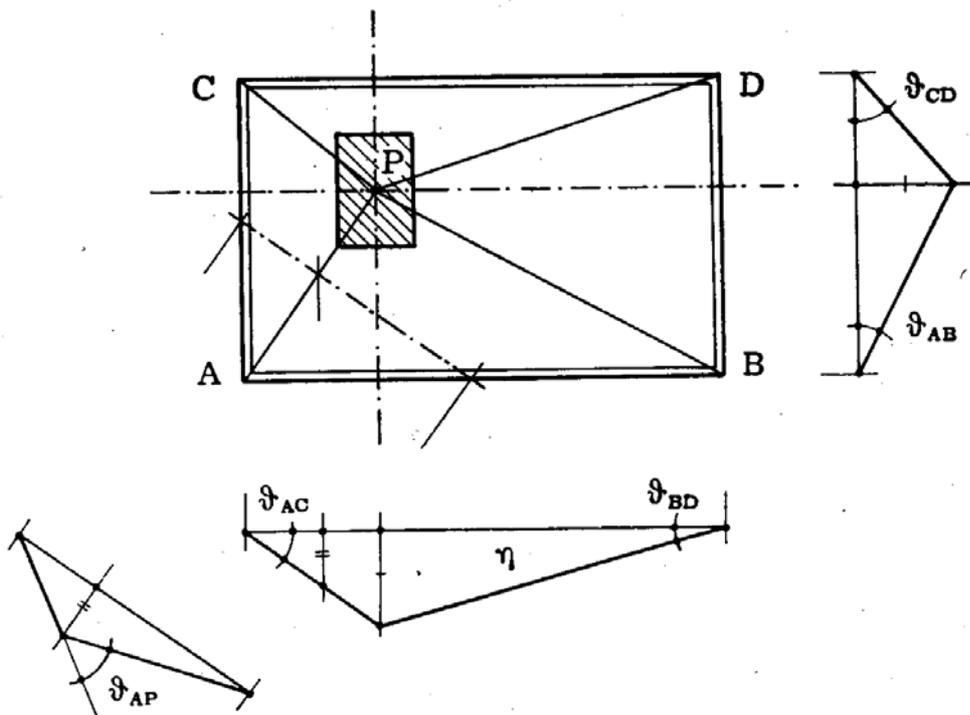


FIG. 7-2

concorrenti in un punto P (cerniere radiali), la deformata di rottura è quella della fig. 7-2. Chiamando η lo spostamento generico (che si sup-

pone così piccolo da poter confondere i segmenti sulla superficie deformata con le loro proiezioni sul piano xy della superficie originaria) il lavoro compiuto dal carico γp è fornito da

$$\gamma L_p = \gamma \int p \eta \, dA . \quad (a)$$

Il lavoro delle coppie limiti distribuite è fornito da

$$L_m = \int_{s'} m'_0 \vartheta \, ds + \int_{s''} m'' \vartheta \, ds \quad (b)$$

essendo il primo integrale esteso alle linee di frattura di momento positivo, il secondo a quelle di momento negativo. Gli angoli ϑ (angoli diedri formati tra le superfici unite dalla cerniera lineare) sono facilmente determinabili, come si osserva dalla figura 7-2. Si ha quindi

$$\gamma = - \frac{L_m}{L_p} . \quad (3)$$

Poichè è $L_p > 0$, $L_m < 0$, è pure $\gamma > 0$.

La (7-3) fornisce il coefficiente di sicurezza della piastra se le linee di frattura sono quelle vere; in caso contrario essa stabilisce una limitazione superiore per il coefficiente stesso.

2. Il caso del carico concentrato e del momento limite costante, su piastre poligonali appoggiate ai lati (appoggio bilaterale).

La trattazione che segue in questo e negli altri paragrafi è dovuta sostanzialmente al *Gvozdev*, ed è riportata in gran parte dal *Rjanitsyn*.

Si assumono come cerniere plastiche lineari i segmenti congiungenti il punto di applicazione P della forza F concentrata con i vertici del contorno. Considerata unitaria la freccia in corrispondenza della forza, il lavoro di questa in fase di rottura è pari a

$$\gamma F . \quad (c)$$

Chiamando l_i la lunghezza della generica cerniera, e ϑ_i l'angolo diedro corrispondente, il lavoro delle coppie limiti è fornito da

$$m_0 \sum \vartheta_i l_i . \quad (d)$$

Dalla fig. 7-3 si deduce (considerando come deformata quella di incipiente collasso, e come positivi i momenti m_0)

$$\vartheta_1 = - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

dove a e b sono i segmenti staccati, sulla normale per P alla cerniera l_1 ,

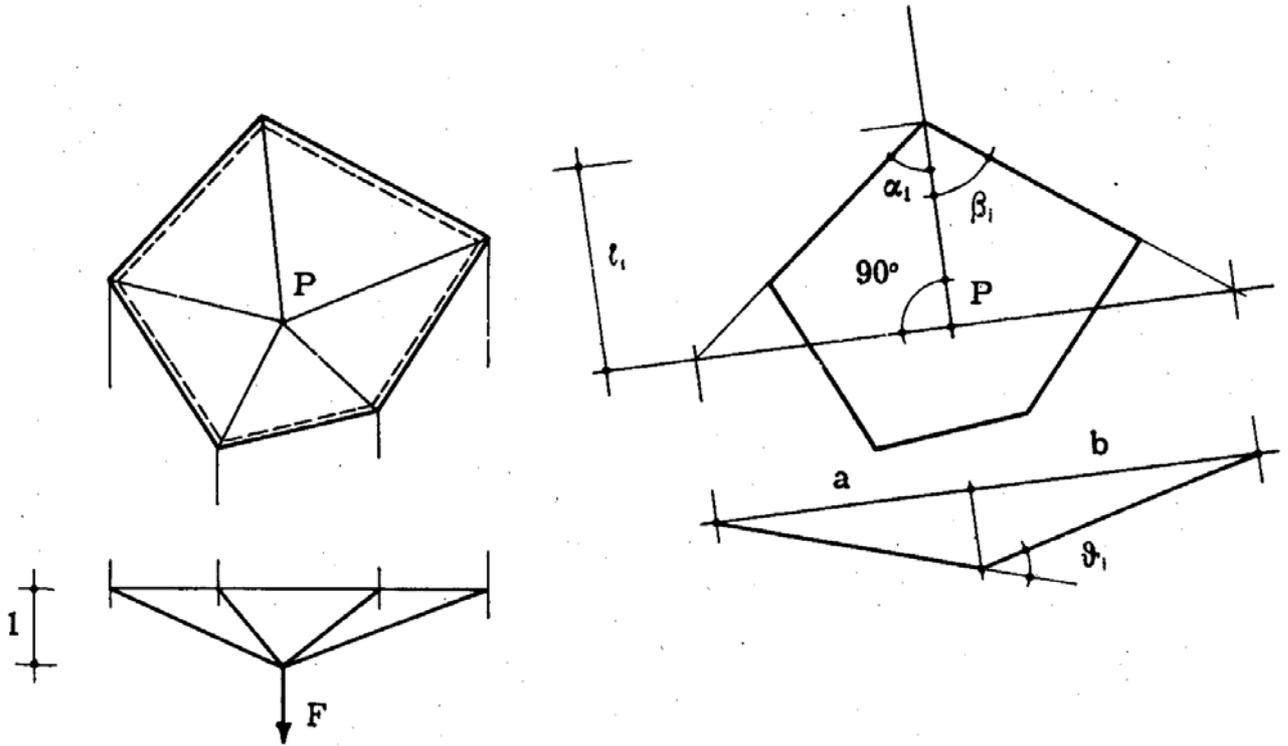


FIG. 7-3

dai due lati del contorno che si incontrano su l_1 , e dal punto P stesso. Poichè è pure

$$a = l_1 \operatorname{tg} \alpha_1$$

$$b = l_1 \operatorname{tg} \beta_1$$

si può scrivere

$$\vartheta_1 = - \frac{1}{l_1} (\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \beta_1) . \quad (e)$$

Si ha perciò

$$\gamma F = m_0 \Sigma (\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \beta_1) . \quad (4)$$

Se il contorno è un poligono regolare di k lati e la forza F è applicata al centro, si ha

$$\alpha_i = \beta_i = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{k}$$

e quindi la (7-4) si scrive

$$\gamma F = 2 m_o k \operatorname{tg} \frac{\pi}{k} \quad (5)$$

Si ha così per le varie figure

triangolo	$\gamma F = 10,39 m_o$	
quadrato	$\gamma F = 8 m_o$	
esagono	$\gamma F = 6,93 m_o$	(6)
cerchio	$\gamma F = 2 \pi m_o$	

Per un rettangolo di lati b ed h , caricato al centro, la (7-4) fornisce

$$\gamma F = 4 m_o \left(\frac{b}{h} + \frac{h}{b} \right) \quad (7)$$

che per $b = h$ coincide con la seconda delle (7-6). Per b/h molto elevato, la forma reale di rottura è certo diversa da quella presa in esame.

Nel paragrafo (7-7) si faranno alcune considerazioni critiche sulle formule di questo paragrafo.

3. Carico concentrato su piastre appoggiate a contorno curvilineo e momento limite costante.

In questo caso si assumono come cerniere plastiche tutti i raggi passanti per P ; la deformata ha la figura non più di una piramide, ma di un cono.

Si sostituisca il contorno curvilineo con una poligonale inscritta di numero infinito di lati e si consideri un settore APB (fig. 7-4), ove P è il punto di applicazione della forza F , di apertura $d\vartheta$. Il lavoro delle coppie limiti relativo al lato PA è fornito ancora dalla (e); poichè è

$$\alpha + d\alpha + \beta + d\beta = \pi$$

$$\beta = \pi - \alpha - d\alpha - d\vartheta$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} (\alpha + d\alpha + d\vartheta)$$

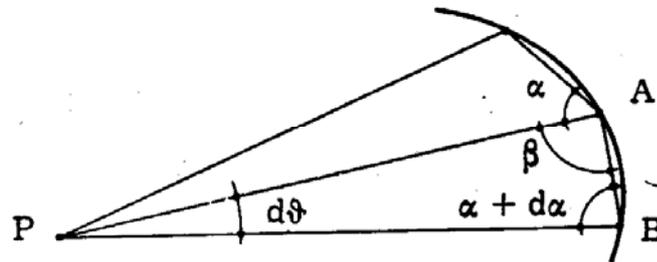


FIG. 7-4

si ha il seguente rapporto tra il lavoro delle coppie interne relativo alla cerniera PA e l'angolo $d\vartheta$

$$\frac{L_{PA}}{d\vartheta} = - m_0 \frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} (\alpha + d\alpha + d\vartheta)}{d\alpha + d\vartheta} \frac{d\alpha + d\vartheta}{d\vartheta} \quad (f)$$

Per $d\vartheta \rightarrow 0$, $d\alpha \rightarrow 0$, e la prima frazione della (f) tende alla derivata

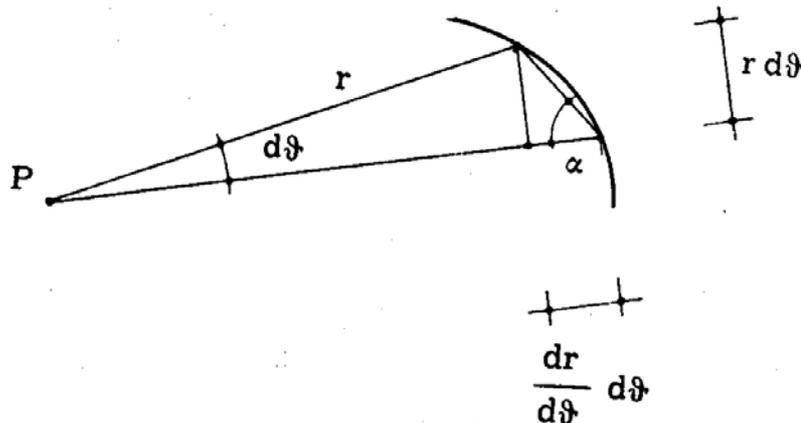


FIG. 7-5

di $\operatorname{ctg} \alpha$ cambiata di segno cioè a $1/\operatorname{sen}^2 \alpha$; la (f) si scrive quindi

$$\frac{L_{PA}}{d\vartheta} = - m_0 \left(1 + \frac{d\alpha}{d\vartheta} \right) \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} \quad (g)$$

Sia

$$r = r(\vartheta)$$

l'equazione del contorno in coordinate polari con polo P; è pure (fig. 7-5)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{r'} \quad (h)$$

ove l'apice indica — come nel seguito — la derivata rispetto a ϑ .

Dalla (h) si trae

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{r}{r'}$$

$$\alpha' = \frac{\frac{r'^2 - rr''}{r'^2}}{1 + \frac{r^2}{r'^2}} = \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}$$

$$1 + \alpha' = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 + \frac{r'^2}{r^2} .$$

E' perciò

$$(1 + \alpha') \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2} \frac{r^2 + r'^2}{r^2} = 1 + 2 \frac{r'^2}{r^2} - \frac{r'}{r}$$

Dalla

$$\gamma F = - \Sigma L_{PA} = \int_0^{2\pi} m_0 \left(1 + \frac{d\alpha}{d\vartheta} \right) \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} d\vartheta$$

si trae

$$\gamma F = m_0 \int_0^{2\pi} \left(1 + 2 \frac{r'^2}{r^2} - \frac{r''}{r} \right) d\vartheta . \quad (8)$$

Poichè la curvatura in coordinate polari è fornita da

$$\frac{1}{R} = \frac{r^2 - rr'' + 2r'^2}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} \quad (i)$$

la (7-8) può anche scriversi

$$\gamma F = m_0 \int_0^{2\pi} \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2} \frac{1}{R} d\vartheta . \quad (9)$$

Dalla (7-9) si trae che in corrispondenza dei tratti rettilinei del contorno, dove $\frac{1}{R} = 0$, è nullo il lavoro delle coppie interne; e infatti, se AB è un segmento del contorno, nelle ipotesi fatte il triangolo PAB si

mantiene indeformato nello spostamento di rottura. Se inoltre il contorno presenta tratti con raggi di curvatura di segno opposto (contorno non convesso) occorre per ognuno di questi tratti calcolare il lavoro delle coppie limiti introducendolo nella (7-9) sempre con il segno positivo.

Se il contorno è chiuso, la (7-8) può anche scriversi

$$\gamma F = m_0 \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} \right) d\vartheta ; \quad (10)$$

infatti è (Lvine)

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left(1 + 2 \frac{r'^2}{r^2} - \frac{r''}{r} \right) d\vartheta - \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} \right) d\vartheta = \\ & = \int_0^{2\pi} \frac{r'^2 - r'' r}{r^2} d\vartheta = \int_0^{2\pi} d \left(\frac{r'}{r} \right) = 0 . \end{aligned}$$

Utilizzando le formule precedenti, per la piastra a contorno ellittico di semiassi a b ($a > b$) caricata in un fuoco si ha

$$\gamma F = 2 \cdot \pi \frac{a}{b} m_0 ; \quad (11)$$

se la piastra è caricata nel centro si ha invece

$$\gamma F = \pi \frac{a^2 + b^2}{a b} m_0 .$$

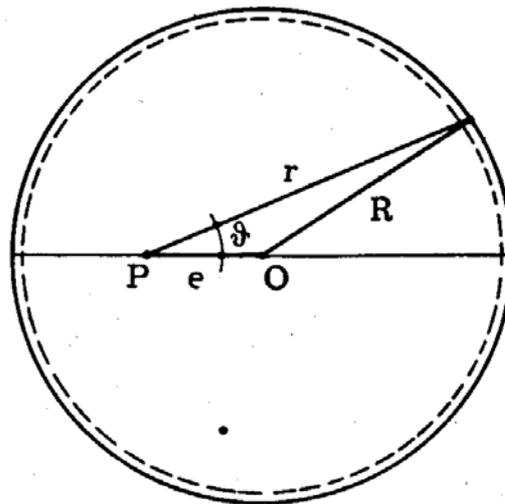


FIG. 7-6

Si consideri poi una piastra a contorno circolare di raggio R , caricata con eccentricità e rispetto al centro (fig. 7-6). L'equazione del cerchio rispetto al polo P è

$$r^2 + e^2 - 2 e r \cos \vartheta - R^2 = 0 ;$$

si ha perciò

$$r = e \cos \vartheta + \sqrt{R^2 - e^2 \sin^2 \vartheta}$$

da cui

$$1 + 2 \frac{r'^2}{r^2} - \frac{r''}{r} = \frac{R^2}{R^2 - e^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{e R^2 \cos \vartheta}{(R^2 - e^2 \sin^2 \vartheta)^{3/2}}$$

$$\gamma F = 2 \pi \frac{R}{\sqrt{R^2 - e^2}} m_0 . \quad (13)$$

Le (7-11) e (7-12) per $a = b$, e la (7-13) per $e = 0$, si riconducono alla quarta delle (7-6). Si avverte che se il rapporto a/b o l'eccentricità e superano un certo valore, le (7-11), (7-12) e (7-13) non hanno più valore, perchè la deformata è certamente diversa da quella presa in esame (§ 7-7).

4. Carico concentrato su una piastra appoggiata su una linea chiusa diversa dal suo contorno, ed a momento limite costante.

Una piastra il cui contorno (fig. 7-7) sia definito, con riferimento al

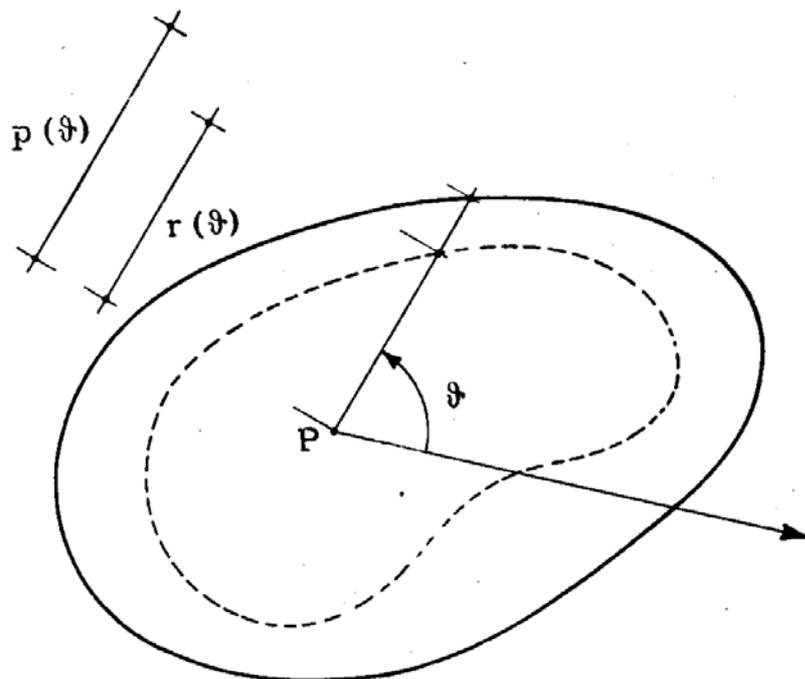


FIG. 7-7

punto P d'applicazione della forza concentrata F, dalla equazione

$$p = p(\vartheta) \quad (l)$$

sia appoggiata su una linea definita, rispetto allo stesso punto P, dall'equazione

$$r = r(\vartheta) . \quad (m)$$

Si ipotizzi anche nel caso in esame la rottura secondo cerniere lineari rettilinee convergenti in P; la deformata è quindi la stessa di una piastra il cui contorno coincida con l'appoggio, e lungo la generica cerniera il lavoro delle coppie limiti è dato da

$$- m_0 \left(1 + 2 \frac{r'^2}{r^2} - \frac{r''}{r} \right) \frac{p}{r} d\vartheta . \quad (n)$$

E' quindi

$$\gamma F = m_0 \int_0^{2\pi} \left(1 + 2 \frac{r'^2}{r^2} - \frac{r''}{r} \right) \frac{p}{r} d\vartheta . \quad (14)$$

Per esempio, in una piastra quadrata di lato $2a$ appoggiata secon-

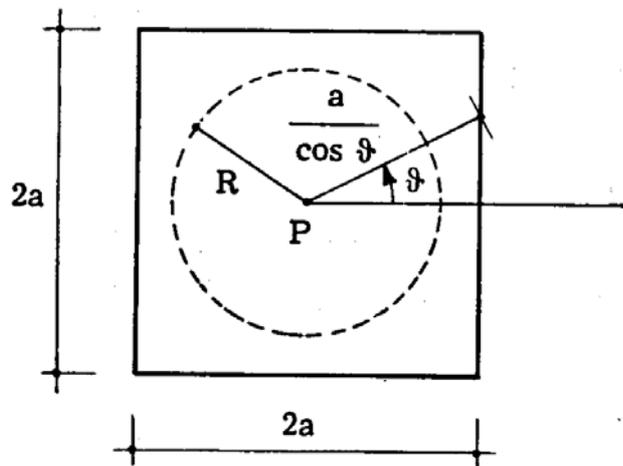


FIG. 7-8

do un cerchio di raggio R (fig. 7-8) l'equazione della linea di appoggio è

$$r = R$$

e quella del contorno

$$p = \frac{a}{\cos \vartheta} \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4} \right)$$

Si ha perciò

$$\begin{aligned}\gamma F &= 4 m_0 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{a}{R \cos \vartheta} d\vartheta = \\ &= 8 m_0 \frac{a}{R} \int_0^{\pi/4} \frac{d\vartheta}{\cos \vartheta} = 8 m_0 \frac{a}{R} \ln \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}\end{aligned}$$

e cioè

$$\gamma F = 7,05 \frac{a}{R} m_0 . \quad (15)$$

Per $a = r$ si ha $\gamma F = 7,05 m_0$, più piccolo del valore $8 m_0$ corrispondente all'appoggio lungo i lati; e cioè, nel caso in esame, pur diminuendo il perimetro di appoggio il carico di rottura risulta più basso.

5. Carico concentrato su una piastra appoggiata su una linea con chiusa, ed a momento limite costante.

Il caso di una piastra appoggiata su una linea non chiusa (e quindi con una parte del bordo libera) può ricondursi a quello di una piastra appoggiata ad una linea chiusa fittizia, costituita dai punti dove le cerniere plastiche disegnate sulla deformata di collasso intersecano il piano originario della piastra. Siano ancora

$$p = p(\vartheta)$$

$$r = r(\vartheta)$$

le equazioni in coordinate polari del contorno e della linea di appoggio rispetto al punto P di applicazione della forza concentrata F; l'espressione di γF è ancora la (7-14), e la funzione $r(\vartheta)$ nell'angolo ove non esiste appoggio si determina con la condizione di minimo di γF .

Chiamando con f l'espressione sotto integrale della 7-14, l'euleriana del problema

$$\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{d}{d\vartheta} \frac{\partial f}{\partial r'} + \frac{d^2}{d\vartheta^2} \frac{\partial f}{\partial r''} = 0$$

porta alla estrema (*)

(*)

$$f = \frac{p}{r} + 2 p \frac{r'^2}{r^3} - p \frac{r''}{r^2}$$

$$-\frac{p + p''}{r^2} = 0$$

e cioè alla condizione

$$r = \infty .$$

Quanto sopra vuol dire che per attingere il valore minimo di γ occorre che la linea fittizia di appoggio sia caratterizzata dai più elevati valori di r , compatibilmente con l'altra condizione che la stessa linea sia convessa; infatti è in tale ipotesi che la (7-14) è valida, in caso contrario l'integrale va spezzato in tante parti quanti sono i contorni $r(\vartheta)$ con curvatura dello stesso segno. Ne segue che la curva $r(\vartheta)$ deve essere formata

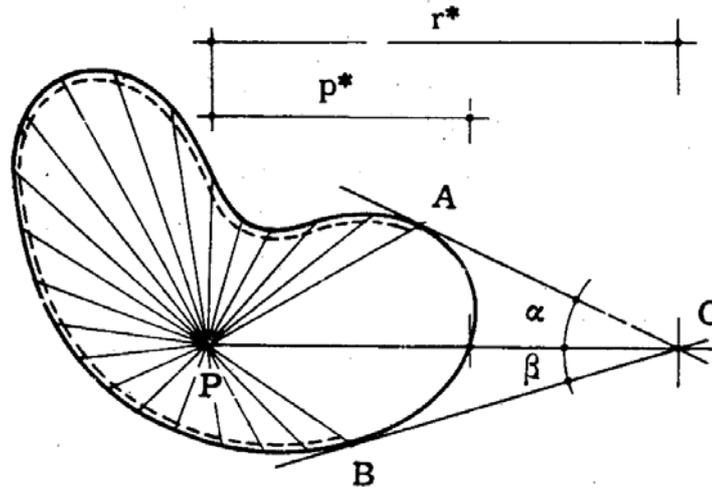


FIG. 7-9

dalle due tangenti alla linea di appoggio nei due punti ove questa ha termine (fig. 7-9); nella zona di piastra APB a contorno libero si forma ge-

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= -\frac{p}{r^2} - 6p \frac{r'^2}{r^4} + 2p \frac{r''}{r^3} \\ \frac{\partial f}{\partial r'} &= 4p \frac{r'}{r^3} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial r'}\right)' &= 4p' \frac{r'}{r^3} + 4p \frac{r''}{r^3} - 12p \frac{r'^2}{r^4} \\ \frac{\partial f}{\partial r''} &= -\frac{p}{r^2} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial r''}\right)' &= -\frac{p'}{r^2} + 2p \frac{r'}{r^3} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial r''}\right)'' &= -\frac{p''}{r^2} + 2p' \frac{r'}{r^3} + 2p' \frac{r'}{r^3} + 2p \frac{r''}{r^3} - 6p \frac{r'^2}{r^4} \\ \frac{\partial f}{\partial r} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial r'}\right)' + \left(\frac{\partial f}{\partial r''}\right)'' &= -\frac{p' + p''}{r^2} . \end{aligned}$$

neralmente, a rottura, una sola cerniera secondo la congiungente PC. Il lavoro delle coppie limiti relativo alla cerniera PC è

$$- m_0 \frac{p^*}{r^*} (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) \quad (o) \quad (15)$$

e quindi si ha

$$\begin{aligned} \gamma F &= m_0 \int_{BDA} \left(1 + 2 \frac{r'^2}{r^2} - \frac{r''}{r} \right) \frac{p}{r} d\vartheta + \\ &+ m_0 \frac{p^*}{r^*} (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta). \end{aligned} \quad (16)$$

Per una piastra circolare appoggiata sul bordo per l'angolo $2\pi - 2\varphi$

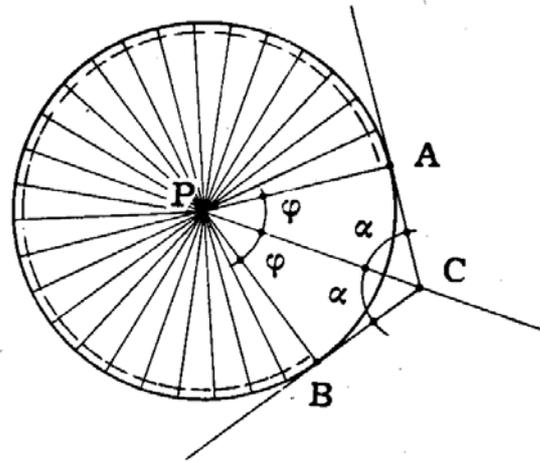


FIG. 7-10

(fig. 7-10) e caricata al centro, si ha

$$\begin{aligned} \gamma F &= m_0 \int_{\varphi}^{2\pi - \varphi} d\vartheta + m_0 R \frac{\cos \varphi}{R} 2 \operatorname{ctg} \alpha = \\ &= m_0 \int_{\varphi}^{2\pi - \varphi} d\vartheta + m_0 \cos \varphi 2 \operatorname{tg} \varphi \end{aligned}$$

e cioè

$$\gamma F = 2 m_0 (\pi - \varphi + \operatorname{sen} \varphi). \quad (17)$$

Per $\varphi = 0$ si ritrova $\gamma F = 2\pi m_0$; per $\varphi = \pi/2$ si ha

$$\gamma F = 2 m_0 \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right). \quad (18)$$

Se $\varphi > \pi/2$, si può avere un'altra forma di rottura; ipotizzando rottura se-

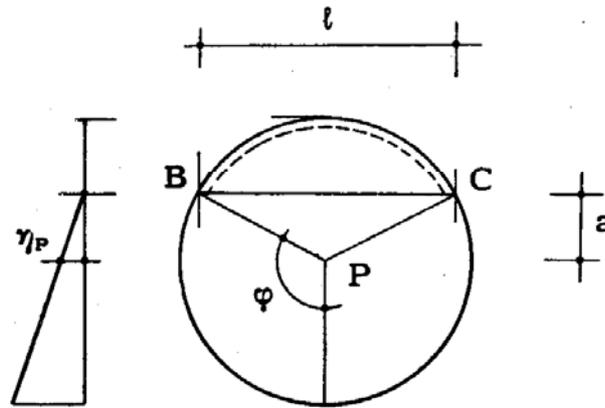


FIG. 7-11

condo la retta BC (fig. 7-11) si ha

$$\gamma F = m_o \frac{l}{a} = 2 m_o \operatorname{tg} \varphi \quad (19)$$

che fornisce un valore più piccolo della (7-17) per $\varphi > 116^\circ$.

Un esempio interessante è quello della fig. 7-12; la lastra ha il con-

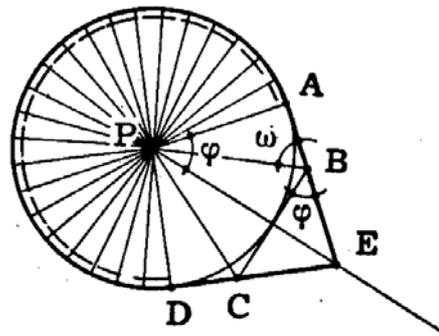


FIG. 7-12

torno libero AED costituito da due rette tangenti nei due punti esterni A e D al contorno circolare appoggiato di raggio R.

Le linee di frattura sono i segmenti PA e PD, ed i segmenti PB e PC simmetrici rispetto alla retta PE; il contorno fittizio di appoggio è la spezzata ABCD. L'angolo ω si determina con la condizione che sia minima l'espressione a fattore del lavoro delle coppie limiti:

$$f(\omega) = \operatorname{ctg} \widehat{ABP} + \operatorname{ctg} \widehat{CBP} = \operatorname{ctg} \omega + \operatorname{ctg} (\pi - \varphi - \omega)$$

da cui si trae

$$\frac{\partial f}{\partial \omega} = -\frac{1}{\text{sen}^2 \omega} + \frac{1}{\text{sen}^2 (\pi - \varphi - \omega)} = 0 \quad (p)$$

$$\omega = \pi - \varphi - \omega .$$

La (p) vuol dire che l'angolo \widehat{PBC} è pari all'angolo $\widehat{ABP} = \omega$, e cioè che la retta BC del contorno fittizio deve essere anch'essa tangente al cerchio di raggio R.

A prima vista i due esempi di cui sopra sembrano essere in contraddizione con il fatto che il contorno fittizio debba avere distanza massima da P compatibilmente con la condizione di convessità. Si tenga però presente che gli integrali come quello della formula (o) sono calcolati in corrispondenza dei punti angolosi del contorno fittizio, e purchè questi punti angolosi siano situati sul contorno di massima distanza da P l'integrale della (7-14) attinge sempre un valore minimo. Nei casi in esame (figg. 7-11 e 7-12) i punti B e C soddisfano tale condizione.

Se la piastra è appoggiata soltanto su punti, il contorno fittizio lineare di appoggio è una spezzata convessa passante per i punti di appoggio (fig. 7-13); le linee di frattura sono i segmenti congiungenti il punto P

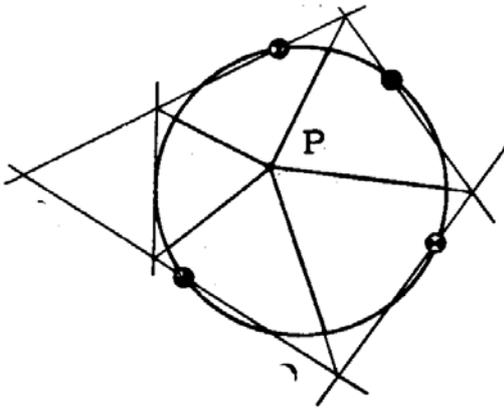


FIG. 7-13

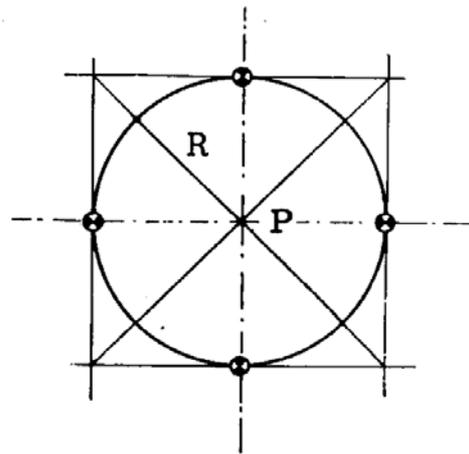


FIG. 7-14

d'applicazione della forza concentrata con i vertici di tale poligono. La vera configurazione del poligono d'appoggio corrisponde al minimo di γF . Per una piastra circolare caricata al centro e appoggiata in quattro punti simmetrici (fig. 7-14) si ha

$$\gamma F = m_0 \cdot 8 \text{ ctg } 45^\circ \frac{R}{R\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} m_0 . \quad (20)$$

6. Piastra incastrata e soggetta ad un carico concentrato, con momenti limiti costanti.

Il caso in esame differisce da quello studiato nei §§ da 1 a 5 per la necessità che si formino, onde sia conferita una labilità alla struttura, oltre alle cerniere radiali convergenti nel punto P di applicazione della forza concentrata, anche una cerniera periferica, che può coincidere con

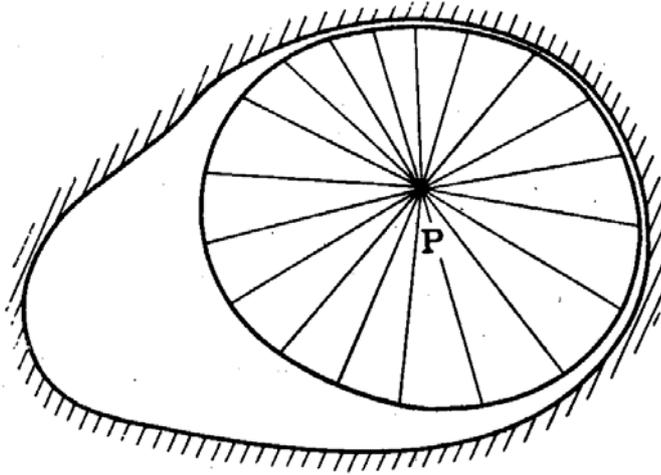


FIG. 7-15

il contorno della piastra, o essere situato all'interno di essa (fig. 7-15). Nella cerniera periferica il momento limite che entra in gioco è quello negativo, pari ad m''_0 . Se la cerniera periferica coincide con il contorno, e questo è poligonale, il lavoro del momento limite è fornito da

$$m''_0 \sum \frac{l_1}{d_1} \quad (q)$$

dove l_1 (fig. 7-16) è la lunghezza del lato generico, d_1 la sua distanza da P, $\frac{l_1}{d_1}$ l'angolo diedro corrispondente ad un abbassamento unitario in P. Risultata $m''_0 < 0$, $\frac{l_1}{d_1} > 0$, e quindi il lavoro è negativo.

Poichè è (fig. 7-16)

$$\frac{l_1}{d_1} = \text{ctg } \alpha_1 + \text{ctg } \beta_{1-1}$$

la (q) può scriversi

$$m''_0 \sum (\text{ctg } \alpha_1 + \text{ctg } \beta_{1-1}) ; \quad (r)$$

la sommatoria coincide con quella della (7-4) se la cerniera periferica è chiusa.

Se la cerniera periferica è invece curvilinea, in particolare interna al

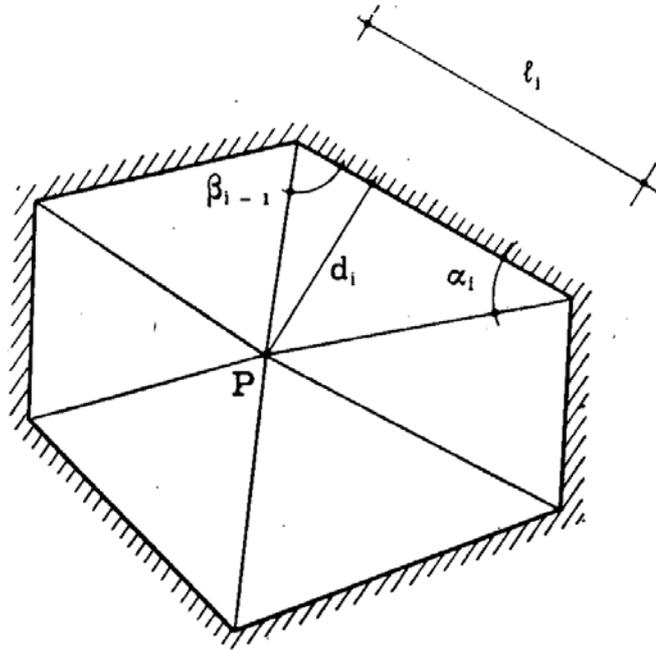


FIG. 7-16

contorno incastrato, e definita dall'equazione

$$r = r(\vartheta)$$

con riferimento al polo P, si consideri l'elemento di apertura $d\vartheta$ (fig. 7-17); l'angolo diedro di esso, per uno spostamento unitario di P, è

$$\frac{1}{r \operatorname{sen} \varphi}$$

essendo φ l'angolo tra la tangente alla curva $r(\vartheta)$ e la congiungente il punto di tangenza con P. La lunghezza dell'elemento è

$$ds = \frac{r d\vartheta}{\operatorname{sen} \varphi}.$$

Il lavoro del momento limite in ds è perciò

$$m''_0 \frac{1}{r \operatorname{sen} \varphi} \frac{r d\vartheta}{\operatorname{sen} \varphi} = m''_0 \frac{d\vartheta}{\operatorname{sen}^2 \varphi}. \quad (s)$$

Poichè si può scrivere (fig. 7-17)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{r}{r'}$$

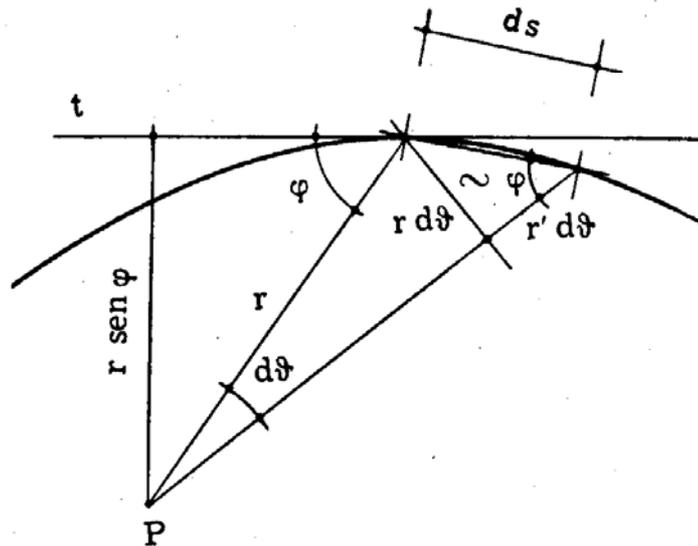


FIG. 7-17

la (s) si trasforma in

$$m''_0 \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} \right).$$

Il lavoro per tutta la cerniera periferica è perciò dato da

$$m''_0 \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} \right) d\vartheta, \quad (t)$$

e per la (7-8) si ha

$$\gamma F = m'_0 \int_0^{2\pi} \left(1 + 2 \frac{r'^2}{r^2} - \frac{r''}{r} \right) d\vartheta - m''_0 \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} \right) d\vartheta. \quad (21)$$

Nell'ipotesi

$$m'_0 = -m''_0 = m_0$$

la (7-21) si scrive

$$\gamma F = m_0 \int_0^{2\pi} \left(2 + 3 \frac{r'^2}{r^2} - \frac{r''}{r} \right) d\vartheta. \quad (22)$$

Se la cerniera periferica è chiusa, le (7-21) e (7-22) si scrivono, per la stessa osservazione del *Lvine* già specificata al § 3,

$$\gamma F = (m'_0 - m''_0) \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{r'^2}{r^2}\right) d\vartheta \quad (23)$$

$$\gamma F = 2 m_0 \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{r'^2}{r^2}\right) d\vartheta . \quad (24)$$

Per $m'_0 = -m''_0$, il termine γF è il doppio di quello della (7-10); e cioè, come ci si doveva attendere per estensione del caso dei contorni poligonali, il lavoro nella cerniera periferica è uguale a quello nelle cerniere radiali.

L'equazione della cerniera periferica si determina con la condizione di minimo della (7-21) o della (7-22).

Nell'ipotesi $m'_0 = -m''_0 = m_0$ (7-22), posto

$$f = 2 + 3 \frac{r'^2}{r^2} - \frac{r''}{r}$$

l'euleriana corrispondente è

$$\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{d}{d\vartheta} \frac{\partial f}{\partial r'} + \frac{d^2}{d\vartheta^2} \frac{\partial f}{\partial r''} = \frac{4}{r^3} (r'^2 - rr'') = 0$$

che porge l'estremale

$$r = C e^{k\vartheta} ; \quad (u)$$

C e k si determinano attraverso le condizioni ai limiti.

La (u) rappresenta le spirali logaritmiche con centro in P ; in particolare, per $k = 0$, le circonferenze di centro P .

Se la cerniera periferica è chiusa, questa è quindi un cerchio, per cui $f = 2$, e

$$\gamma F = m_0 \int_0^{2\pi} 2 d\vartheta = 4 \pi m_0 . \quad (25)$$

Per una piastra incastrata lungo tutto il contorno, quindi, la rottura non può verificarsi che entro la circonferenza di raggio massimo e centro P contenuta nell'area della piastra stessa (fig. 7-18).

Si osserva, a conferma di quanto sopra, che i carichi di rottura di piastre a contorno poligonale regolare incastrato dovrebbero essere, nell'ipotesi di cerniera

periferica coincidente con il contorno, il doppio di quelli forniti dalla formula 7-6; questi doppi sono tutti superiori a $4 \pi m_0$, fatta eccezione proprio per il cerchio.

Poichè per una piastra vincolata in qualsiasi altra maniera il carico di rottura è sempre minore di quello della piastra incastrata su tutto il

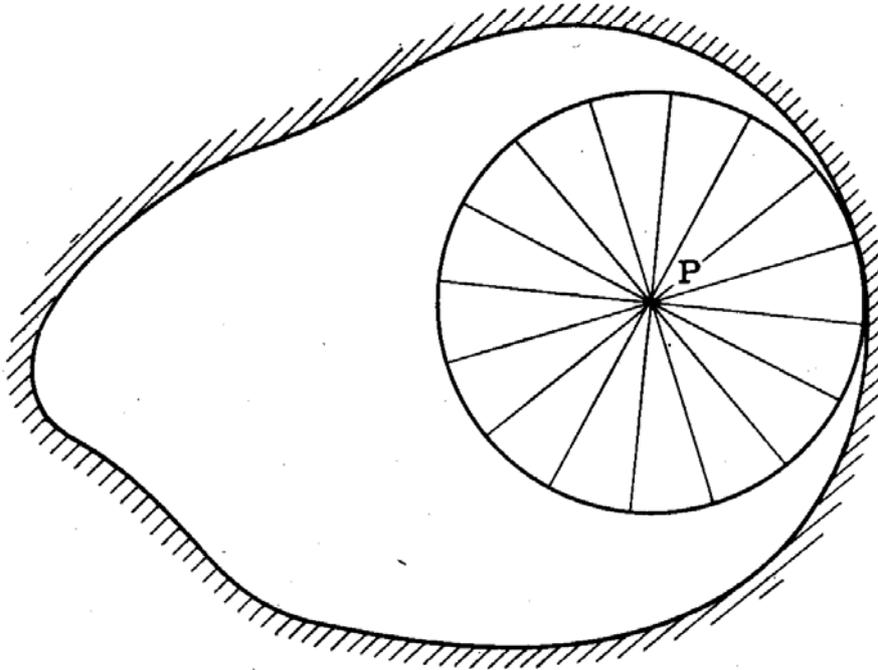


FIG. 7-18

perimetro, e la (7-25) rappresenta di per se un limite superiore, si può comunque scrivere

$$sF \leq 4 \pi m_0 . \quad (26)$$

Per una piastra con una parte del contorno appoggiata o libera, la rottura può aversi secondo una spirale logaritmica. In ogni caso vale la (7-21), o la (7-22), e la parte $\Delta \gamma F$ di γF , corrispondente al lavoro sia della cerniera periferica che delle cerniere radiali nel settore in cui la cerniera periferica è compresa, è fornita, nell'ipotesi $m'_0 = -m''_0 = m_0$, per la (7-22) e la (u), da

$$\Delta \gamma F = m_0 \int^{\beta} 2 (1 + k^2) d\vartheta = 2 m_0 (1 + k^2) \omega \quad (27)$$

dove ω è l'apertura del settore in cui la cerniera periferica logaritmica è compresa.

7. Il caso del carico concentrato molto prossimo al bordo appoggiato: momenti limiti costanti ed uguali.

Nel caso in cui il carico concentrato è molto più vicino ad un bordo appoggiato che non agli altri bordi (comunque vincolanti) si ha rottura per formazione di una cerniera periferica che è interrotta al bordo appoggiato. (Si ricordi che se invece il bordo è incastrato la rottura si ha per formazione di una cerniera periferica circolare tangente al bordo stesso).

Per la determinazione della forma di tale cerniera vale quanto detto nel paragrafo precedente. Nel caso della fig. 7-19, la cerniera deve essere simmetrica rispetto alla retta passante per P e normale al bordo; esclusa quindi la spirale, essa non può che essere circolare. L'apertura 2φ del set-

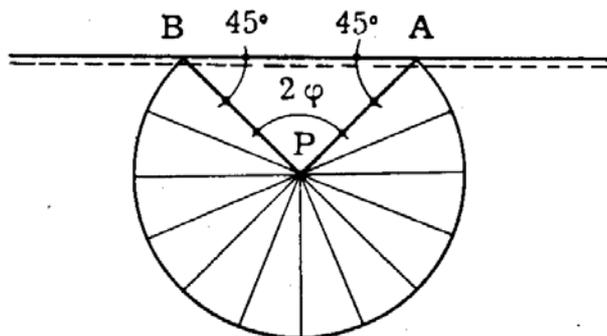


FIG. 7-19

tore che impegna l'appoggio è fornita dalla condizione di minimo dell'espressione di γF . Quest'ultima è data dalla somma della (7-27) per $k=0$ ed $\omega = 2\pi - 2\varphi$, e del lavoro relativo ai due lati PA e PB, i cui diedri di rotazione sono forniti dalla (e), ove si ponga $\alpha = 0$ per il lato PA e $\beta = 0$ per il lato PB. E' perciò, nell'ipotesi $m'_0 = -m''_0 = m_0$,

$$\begin{aligned} \gamma F &= 2 m_0 (2\pi - 2\varphi) + m_0 2 \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \\ &= 2 m_0 [2 (\pi - \varphi) + \operatorname{tg} \varphi] . \end{aligned}$$

Il minimo di γF è fornito da

$$-2 + \frac{1}{\cos^2 \varphi} = 0$$

da cui

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

La cerniera incontra perciò il bordo sotto due angoli di 45° ciascuno, ed il relativo carico di rottura è fornito da

$$\gamma F = 2 m_0 \left(\frac{3}{2} \pi + 1 \right) = 11,42 m_0 . \quad (28)$$

Questo risultato si presta ad essere generalizzato.

Il contorno appoggiato sia simmetrico rispetto ad una retta, sulla quale è situato il punto P di applicazione del carico concentrato F (fig. 7-20); sia

$$p = p(\vartheta)$$

l'equazione del contorno rispetto al polo P.

La cerniera anche in questo caso è per ragioni di simmetria costituita da uno o più archi di circonferenza con centro P.

Si esamini il primo caso (fig. 7-20 a).

Per le (7-27), (7-4) e (7-8) si ha, nell'ipotesi $m'_0 = -m''_0 = m_0$,

$$\begin{aligned} \gamma F &= 2 m_0 \left[2\pi - 2\varphi + \operatorname{ctg} 90^\circ + \operatorname{ctg} \alpha + \int_0^\varphi \left(1 + 2 \frac{p'^2}{p^2} - \frac{p''}{p} \right) d\vartheta \right] = \\ &= 2 m_0 \left[2\pi - 2\varphi + \frac{p'(\varphi)}{p(\varphi)} + \int_0^\varphi \left(1 + 2 \frac{p'^2}{p^2} - \frac{p''}{p} \right) d\vartheta \right]; \quad (v) \end{aligned}$$

infatti è (fig. 7-17), assumendo l'asse di simmetria con retta dalla quale si misurano gli angoli ϑ ,

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{p'(\varphi)}{p(\varphi)}$$

dove 2φ è l'apertura del settore che impegna il contorno, ed α è l'angolo che le tangenti in A e in B formano rispettivamente con i raggi vettori

PA e PB. Il minimo della (v) è fornito da $\frac{\partial \gamma F}{\partial \varphi} = 0$, e cioè da

$$-2 + \frac{p(\varphi) p''(\varphi) - p'^2(\varphi)}{p^2(\varphi)} + 1 + 2 \frac{p'^2(\varphi)}{p^2(\varphi)} - \frac{p''(\varphi)}{p(\varphi)} = 0$$

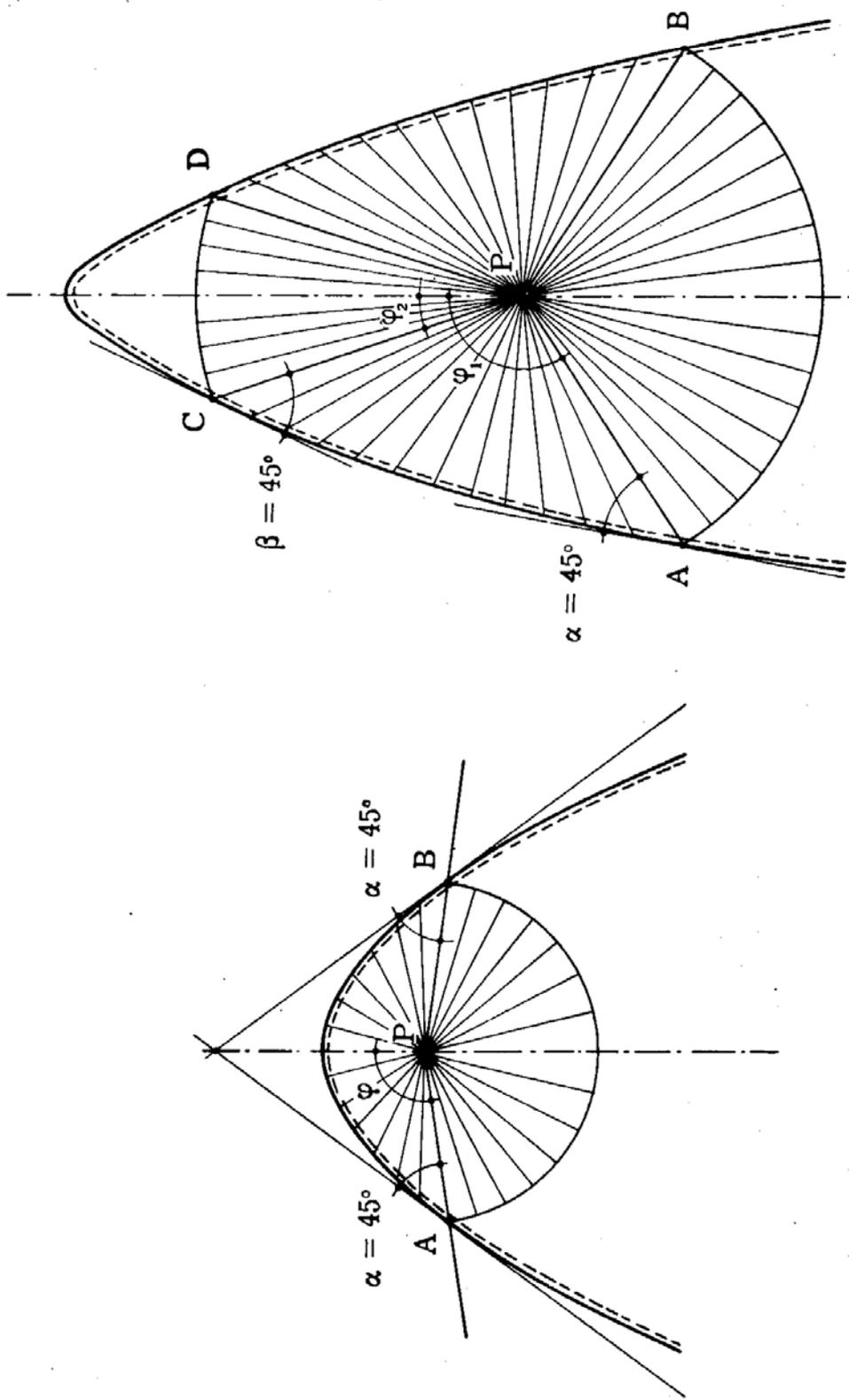


FIG. 7-20

da cui

$$-1 + \frac{p'^2(\varphi)}{p^2(\varphi)} = 0$$

$$\frac{p'(\varphi)}{p(\varphi)} = 1,$$

e poichè

$$\frac{p'(\varphi)}{p(\varphi)} = \operatorname{ctg} \alpha,$$

si ha

$$\alpha = 45^\circ.$$

Anche in questo caso più generale del precedente i raggi vettori PA e PB limitanti la cerniera periferica circolare tagliano il contorno secondo un angolo di 45° .

Analogo risultato si ottiene nel caso di formazione di due cerniere periferiche circolari (fig. 7-20 b) (*)

(*) In questo caso è

$$\begin{aligned} \gamma F &= 2 m_0 \left[2\pi - 2\varphi_1 + 2\varphi_2 + 2 \operatorname{ctg} 90^\circ + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \left(1 + 2 \frac{p'^2}{p^2} - \frac{p''}{p} \right) d\vartheta \right] = \\ &= 2 m_0 \left[2\pi - 2\varphi_1 + 2\varphi_2 + \frac{p'(\varphi_1)}{p(\varphi_1)} - \frac{p'(\varphi_2)}{p(\varphi_2)} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \left(1 + 2 \frac{p'^2}{p^2} - \frac{p''}{p} \right) d\vartheta \right]. \end{aligned}$$

La condizione

$$\frac{\partial \gamma F}{\partial \varphi_1} = 0$$

porta come prima ad $\alpha = 45^\circ$.

La condizione

$$\frac{\partial \gamma F}{\partial \varphi_2} = 0$$

fornisce

$$2 - \frac{p(\varphi_2) p''(\varphi_2) - p'^2(\varphi_2)}{p^2(\varphi_2)} - 1 - 2 \frac{p'^2(\varphi_2)}{p^2(\varphi_2)} + \frac{p''(\varphi_2)}{p(\varphi_2)} = 0$$

da cui ancora $\beta = 45^\circ$.

Svariate sono le particolarizzazioni dei due casi generali ora esami-

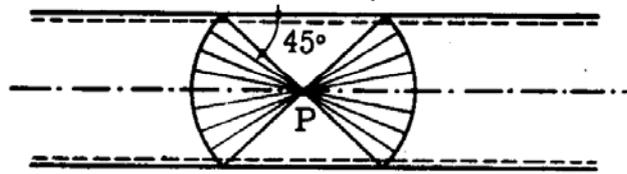


FIG. 7-21

nati. Per una piastra indefinita appoggiata su due rette parallele (fig. 7-21) si ha

$$\gamma F = m_0 (4 \operatorname{ctg} 45^\circ + 2 \pi) = 10,28 m_0 . \quad (29)$$

Per una piastra appoggiata su due rette non parallele (fig. 7-22) e sog-

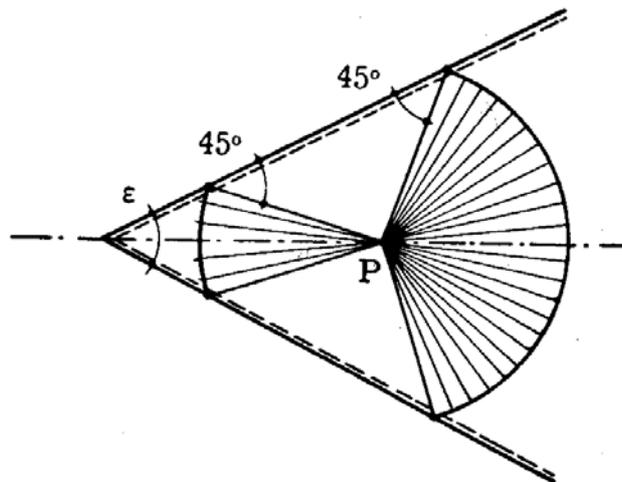


FIG. 7-22

getta ad un carico concentrato applicato in un punto della bisettrice si ha

$$\gamma F = m_0 [4 \operatorname{ctg} 45^\circ + 2 (\gamma_1 + \gamma_2)]$$

e poichè

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \pi$$

è

$$\gamma F = m_0 (4 + 2 \pi) = 10,28 m_0 \quad (30)$$

formula coincidente con la (7-29), perchè indipendente dall'apertura ϵ .

Se $\varepsilon = 90^\circ$ il settore interno si riduce ad una retta, e per $\varepsilon > 90^\circ$ la con-

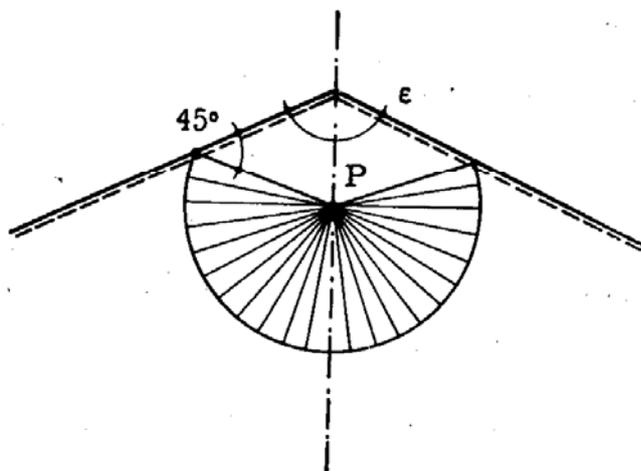


FIG. 7-23

figurazione di rottura è quella della fig. 7-23, e si ha

$$\gamma F = m_0 \left(2 \operatorname{ctg} 45^\circ + 2 \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} + 2 \varepsilon + \pi \right).$$

che per $\varepsilon = \pi$ ridà la (7-28).

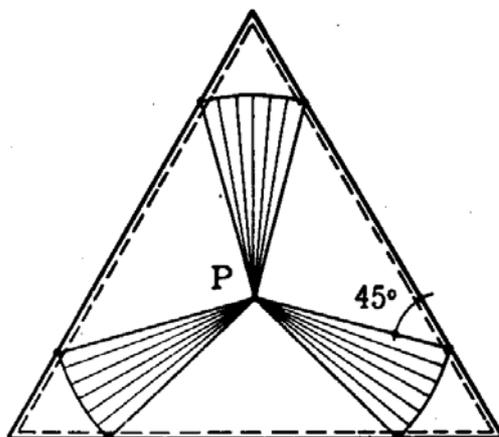


FIG. 7-24

Si esamini ora una piastra il cui contorno sia un triangolo equilatero (fig. 7-24); si ha

$$\gamma F = m_0 (6 \operatorname{ctg} 45^\circ + \pi) = 9,14 m_0 \quad (31)$$

valore inferiore a quello della (7-6).

Più in generale, la (7-4) fornisce valori certamente superiori al vero

se un angolo al vertice del poligono è inferiore a 90° , nel caso che la forza sia situata secondo la bisettrice di tale angolo; in tal caso la (7-4) va corretta ai lumi dei presenti risultati.

In genere i risultati tratti nel caso delle piastre appoggiate vanno modificati ogni volta che è possibile inserire degli archi di circonferenza di centro P che taglino il contorno secondo un angolo di 45° .

Per esempio si può dimostrare che la (7-12) non è più valida se il

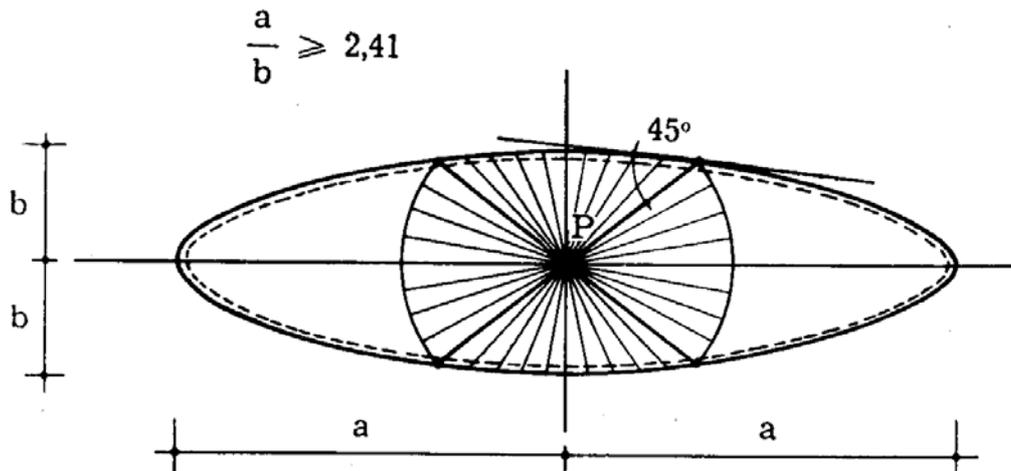


FIG. 7-25

rapporto dei due diametri supera il valore $1 + \sqrt{2} = 2,414$; se ciò si verifica la configurazione di rottura è quella della fig. 7-25.

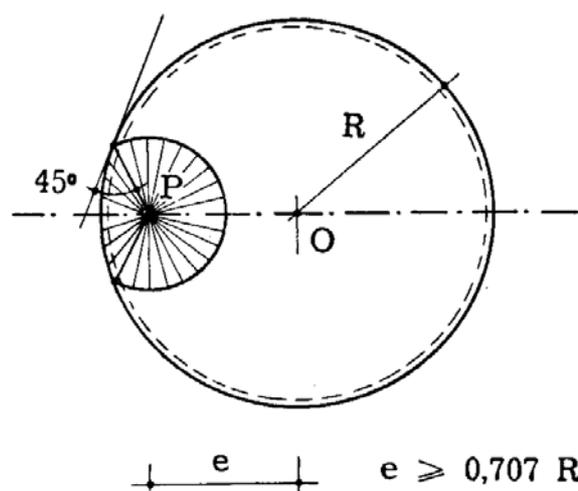


FIG. 7-26

Così pure la (7-13) non è più valida se $e > 0,707 R$, nel quale caso la configurazione di rottura è quella della fig. 7-26.