

CAPITOLO IX

TRAVI CONTINUE E TELAI

1. La trave continua: equazione dei tre momenti.

Si definisce *trave continua* la trave ad asse rettilineo su più appoggi; anche le travi Gerber rientrano in questa definizione, ma comunemente si intende per trave continua la trave ad asse rettilineo su più appoggi e priva di snodi interni. Come incognite iperstatiche possono essere scelte le reazioni di $n-2$ appoggi, se n è il numero degli appoggi e le estremità sono appoggiate, o libere; oppure le reazioni di $n-2$ appoggi ed i momenti di incastro, se le estremità sono incastrate. Le equazioni di congruenza che si scrivono in tal caso sono quelle già riportate nel § 4-4, e la ricerca dei coefficienti può essere semplificata secondo i suggerimenti del Müller-Breslau, esposti nella stessa sede.

Più spesso però si scelgono come incognite iperstatiche i momenti in corrispondenza delle sezioni di appoggio; così, come si osserverà tra breve, in presenza di cedimenti vincolari anelastici nulli, o noti, ogni equazione contiene al massimo tre incognite. Si considerino due generiche campate successive (fig. 9-1), la i , di luce l_i , compresa fra gli appoggi $i-1$ ed i , e la $i+1$ di luce l_{i+1} , compresa fra gli appoggi i ed $i+1$. Si rende isostatica la trave inserendo delle cerniere in corrispondenza degli appoggi, e si ripristinano le condizioni reali facendo agire sulle due facce unite da ciascuna cerniera due coppie uguali e contrarie, pari alla caratteristica momento presente in quella sezione prima dell'inserzione della cerniera. La condizione di congruenza in corrispondenza della cerniera sull'appoggio i è che l'angolo di cui ruota la sezione di destra della trave i sia uguale all'angolo di cui ruota la sezione di sinistra della trave $i+1$. Gli indici dei momenti sono riferiti agli appoggi, tutti gli altri indici si assumono con riferimento alle travi; nelle espressioni delle rotazioni dovute alle coppie si introducono i momenti invece delle coppie.

La condizione di congruenza si scrive così

$$\varphi_i^{od} - M_{i-1} \beta_i + M_i \alpha_i^d = \varphi_{i+1}^{os} - M_i \alpha_{i+1}^s + M_{i+1} \beta_{i+1}$$

oppure nell'altra forma

$$-M_{i-1}\beta_i + M_i(\alpha_i^d + \alpha_{i+1}^s) - M_{i+1}\beta_{i+1} = \varphi_{i+1}^{os} - \varphi_i^{od}, \quad (1)$$

ove φ_{i+1}^{os} e φ_i^{od} sono rispettivamente le rotazioni della sezione terminale di sinistra della trave $i+1$ e della sezione terminale di destra della tra-

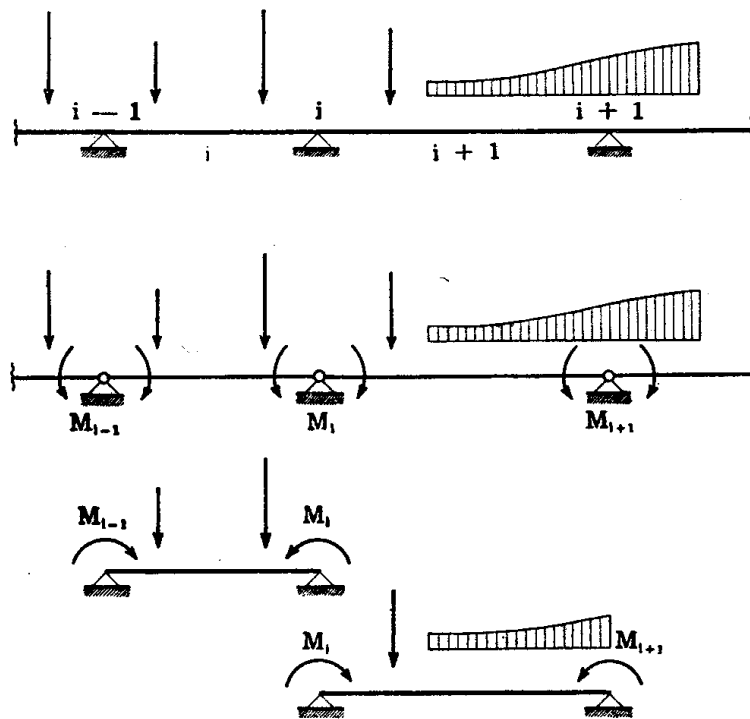


FIG. 9-1

ve i , considerate appoggiate agli estremi e soggette ai carichi ed alle distorsioni applicate.

Se in ogni campata la sezione è costante, la (9-1) si scrive

$$M_{i-1} \frac{l_i}{6 E_i I_i} + M_i \left(\frac{l_i}{3 E_i I_i} + \frac{l_{i+1}}{3 E_{i+1} I_{i+1}} \right) + M_{i+1} \frac{l_{i+1}}{6 E_{i+1} I_{i+1}} = \varphi_{i+1}^{os} - \varphi_i^{od}. \quad (2)$$

Indicando con il simbolo k il prodotto EI la (9-2) si scrive pure

$$M_{i-1} l_i + 2 M_i \left(l_i + l_{i+1} \frac{k_i}{k_{i+1}} \right) + M_{i+1} l_{i+1} \frac{k_i}{k_{i+1}} = 6 k_i (\varphi_{i+1}^{os} - \varphi_i^{od}). \quad (3)$$

Se il prodotto $EI = k$ è costante in tutte le campate, la (9-3) si semplifica nella seguente:

$$M_{i-1} l_i + 2 M_i (l_i + l_{i+1}) + M_{i+1} l_{i+1} = 6 k (\varphi_{i+1}^{os} - \varphi_i^{od}). \quad (4)$$

Utilizzando i risultati del Mohr (7-72), le (9-1), (9-3), e (9-4) si scrivono

$$-M_{i-1}\beta_i + M_i(\alpha_i^d + \alpha_{i+1}^s) - M_{i+1}\beta_{i+1} = A_{i+1}^* + B_i^*,$$

$$M_{i-1}l_i + 2M_i\left(l_i + l_{i+1}\frac{k_i}{k_{i+1}}\right) + M_{i+1}l_{i+1}\frac{k_i}{k_{i+1}} = 6k_i(A_{i+1}^* + B_i^*),$$

$$M_{i-1}l_i + 2M_i(l_i + l_{i+1}) + M_{i+1}l_{i+1} = 6k(A_{i+1}^* + B_i^*),$$

dove B_i^* e A_{i+1}^* sono le reazioni indotte sull'appoggio di destra della trave appoggiata di luce l_i e sull'appoggio di sinistra della trave appoggiata di luce l_{i+1} dal carico distribuito fittizio $q^* = \frac{M^o}{EI} - \mu$ e dalle coppie distribuite fittizie $m^* = -\chi \frac{T^o}{GA} + \vartheta$.

I cedimenti degli appoggi fanno sentire la loro influenza attraverso i φ_{i+1}^{os} e φ_i^{od} . Si indica (fig. 9-2) con il simbolo δ_i la differenza tra il

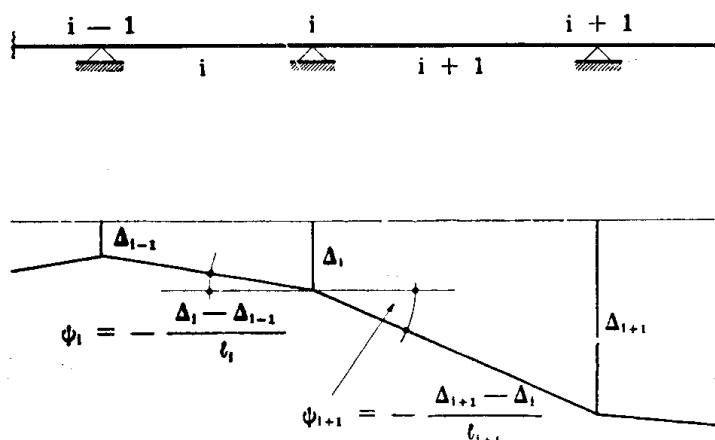


FIG. 9-2

cedimento dell'appoggio di destra e quello dell'appoggio di sinistra della campata i ; nella struttura resa isostatica al δ_i si accompagna una

rotazione $\phi_i = -\frac{\delta_i}{l_i}$ delle sezioni di estremità della campata i .

E' perciò

$$\varphi_i^{od} = \phi_i = -\frac{\delta_i}{l_i}, \quad \varphi_{i+1}^{os} = \phi_{i+1} = -\frac{\delta_{i+1}}{l_{i+1}}$$

e la (9-1) si scrive

$$-M_{i-1}\beta_i + M_i(\alpha_i^d + \alpha_{i+1}^s) - M_{i+1}\beta_{i+1} = \phi_{i+1} - \phi_i. \quad (5)$$

Se in ogni campata la sezione è costante, la (9-5) si scrive

$$M_{i-1} \ell_i + 2 M_i \left(\ell_i + \ell_{i+1} \frac{k_i}{k_{i+1}} \right) + M_{i+1} \ell_{i+1} \frac{k_i}{k_{i+1}} = 6 k_i (\psi_{i+1} - \psi_i) . \quad (6)$$

Se il prodotto $EI = k$ è costante in tutte le campate, la (9-6) si scrive

$$M_{i-1} \ell_i + 2 M_i (\ell_i + \ell_{i+1}) + M_{i+1} \ell_{i+1} = 6 k (\psi_{i+1} - \psi_i) . \quad (7)$$

L'equazione (9-1), e così le altre da essa derivate, contiene soltanto tre incognite se i ψ sono noti; essa prende nome di *equazione dei tre momenti* (Clapeyron, 1857).

Se le campate di estremità sono incastrate, alle equazioni del tipo già esposto, relative a due campate successive, si aggiungono due equazioni, relative una alla prima ed una all'ultima campata, e contenenti due

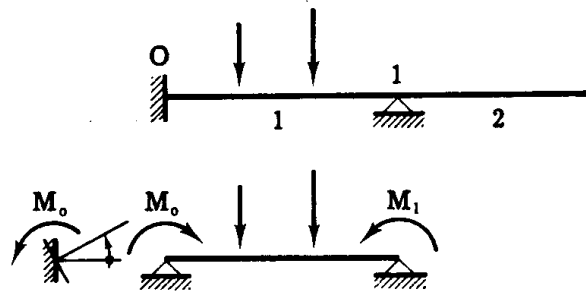


FIG. 9-3

sole incognite ciascuna. La prima equazione è quella di congruenza nell'incastro di sinistra, e si scrive, se ϵ_0 è la cedibilità angolare elastica dell'incastro (fig. 9-3)

$$- M_0 \alpha_1^s + M_1 \beta_1 + \varphi_1^{os} = M_0 \epsilon_0$$

da cui si ottiene

$$M_0 (\epsilon_0 + \alpha_1^s) - M_1 \beta_1 = \varphi_1^{os} . \quad (8)$$

Nello scrivere la (9-8) si è assunto che il segno di M_0 ed M_1 sia quello che a loro spetta considerandoli come caratteristiche della sollecitazione interna, cioè come momenti flettenti, e non come coppie. La (9-8) può anche ritrovarsi dalla (9-1) considerando l'incastro come una campata scarica appoggiata all'estremo di sinistra, e che precede la campata 1; e cioè la (9-8) può trarsi dalla (9-1) ponendo

$$\begin{aligned} M_{i-1} &= 0 & , & & M_i &= M_0 & , & & \alpha_i^d &= \epsilon_0 & , & & \alpha_{i+1}^s &= \alpha_1^s & , \\ M_{i+1} &= M_1 & , & & \beta_{i+1} &= \beta_1 & , & & \varphi_{i+1}^{os} &= \varphi_1^{os} & , & & \varphi_i^{od} &= 0 . \end{aligned}$$

La seconda equazione si scrive (fig. 9-4)

$$- M_{h-1} \beta_h + M_h \alpha_h^d + \varphi_h^{od} = - M_h \varepsilon_h ,$$

da cui si trae

$$- M_{h-1} \beta_h + M_h (\alpha_h^d + \varepsilon_h) = - \varphi_h^{od} . \quad (9)$$

Anche nelle (9-8) e (9-9) i cedimenti degli appoggi compaiono nelle rotazioni φ_i^{os} e φ_h^{od} , come nella (9-1).

Se i cedimenti sono noti, le (9-1) contengono tre sole incognite, le

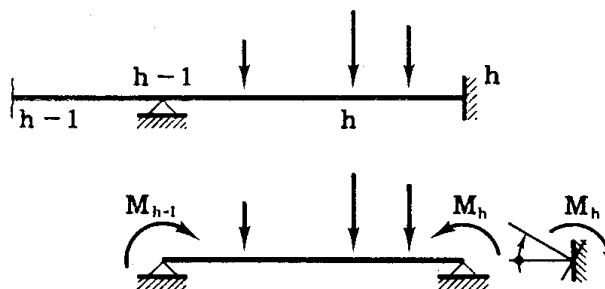


FIG. 9-4

(9-8) e (9-9) due. Se invece i cedimenti sono di carattere elastico, e quindi a priori incogniti, δ_i è funzione, attraverso R_{i-1} ed R_i , di M_{i-2} , M_{i-1} , M_i ed M_{i+1} , e δ_{i+1} è funzione, attraverso R_i ed R_{i+1} , di M_{i-1} , M_i , M_{i+1} , M_{i+2} ; sostituendo questi valori nella (9-1), si perviene ad una equazione in cinque momenti incogniti (*equazione dei cinque momenti*).

2. Il calcolo delle reazioni degli appoggi; i diagrammi del momento, del taglio, degli spostamenti.

La reazione R_i del generico appoggio i si calcola come somma della reazione R_i^d in i della trave appoggiata i soggetta ai carichi applicati ed alle coppie M_{i-1} ed M_i , e della reazione R_{i+1}^s in i della trave appoggiata $i+1$ soggetta ai carichi applicati ed alle coppie M_i ed M_{i+1} (fig. 9-1). Il segno delle coppie M è quello che loro spetta considerandole come momenti; si ha perciò

$$\begin{aligned} R_i^d &= R_i^{od} - \frac{M_{i-1}}{\ell_i} + \frac{M_i}{\ell_i} \\ R_{i+1}^s &= R_{i+1}^{os} + \frac{M_i}{\ell_{i+1}} - \frac{M_{i+1}}{\ell_{i+1}} \\ R_i &= R_i^{od} - \frac{M_{i-1}}{\ell_i} + \frac{M_i}{\ell_i} + R_{i+1}^{os} + \frac{M_i}{\ell_{i+1}} - \frac{M_{i+1}}{\ell_{i+1}} \end{aligned} \quad (10)$$

dove R_i^{od} ed R_{i+1}^{os} sono le reazioni indotte dai carichi applicati sull'appoggio i rispettivamente delle due travi i ed $i+1$ considerate appoggiate agli estremi.

Lo studio della trave continua si completa disegnando i diagrammi del taglio e del momento flettente e, se necessario, degli spostamenti.

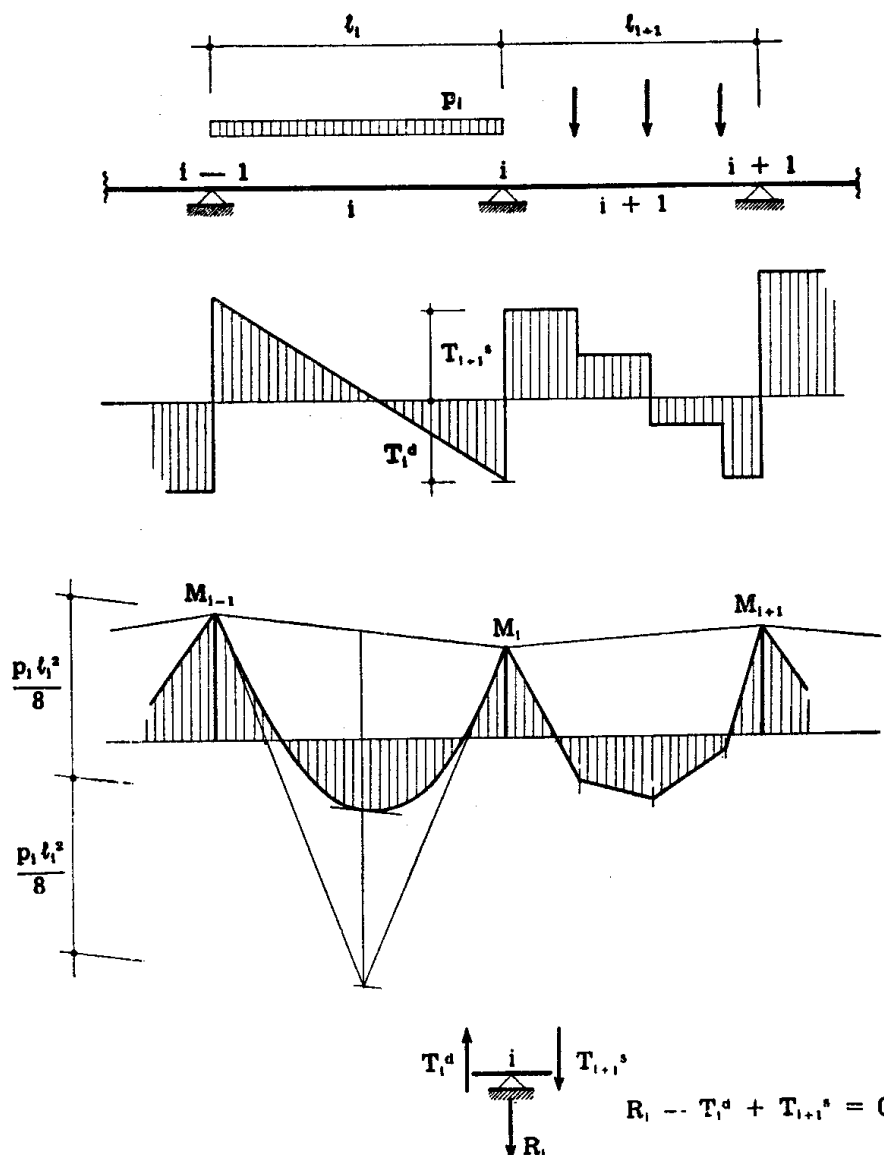


FIG. 9-5

Il diagramma del taglio si ottiene ricavando per ogni appoggio i valori del taglio T_i^d e T_{i+1}^s a sinistra e a destra di esso; questi valori sono forniti dalla prime due delle (9-10), e precisamente

$$\begin{aligned} T_i^d &= R_i^d \\ T_{i+1}^s &= -R_{i+1}^s. \end{aligned} \quad (11)$$

Per ciascuna campata, si disegna poi il diagramma del taglio (fig. 9-5) a partire dal valore di sinistra e sottraendo le forze che si incontrano procedendo verso destra; alla fine della campata i si deve, così operando, ritrovare come valore del taglio quello T_i^d fornito dalla (9-11).

Si osservi che risulta (fig. 9-5)

$$R_i = T_i^d - T_{i+1}^s \quad (12)$$

Il diagramma del momento flettente si ottiene riportando in corrispondenza di ogni appoggio il valore del momento flettente, e disegnando per ciascuna campata la superficie semplice dei momenti avente per fondamentale la congiungente gli estremi dei momenti sui due appoggi che la limitano (fig. 9-5).

Il diagramma degli spostamenti si disegna utilizzando qualsiasi procedimento valido per le travi appoggiate, considerando ciascuna campata come una trave appoggiata e soggetta al diagramma dei momenti effettivi; dovranno alla fine risultare uguali gli angoli di rotazione delle sezioni estreme corrispondenti.

3. L'equazione dei quattro momenti.

Se la trave è flessionalmente solidale con i ritto sui quali poggia — *trave solidale con i piedritti* — il momento flettente nella sezione a sinistra di un ritto non coincide con quello nella sezione di destra; pertanto l'equazione (9-1) non è più valida. Convienne in questo caso scegliere come incognite non più i momenti flettenti sugli appoggi, ma le coppie di incastro alle estremità delle travi; la differenza è solo nel segno, poichè le coppie di incastro sono in ogni caso positive se, considerate agenti dal vincolo sulla trave, hanno verso antiorario.

L'equazione di congruenza in corrispondenza del piedritto i (fig. 9-6) si scrive in questo caso come segue:

$$\varphi_i^{od} + \mathfrak{M}_{i-1, i} \beta_i + \mathfrak{M}_{i, i-1} \alpha_i^d = \varphi_{i+1}^{os} + \mathfrak{M}_{i, i+1} \alpha_{i+1}^s + \mathfrak{M}_{i+1, i} \beta_{i+1}$$

oppure nell'altra forma

$$\mathfrak{M}_{i-1, i} \beta_i + \mathfrak{M}_{i, i-1} \alpha_i^d - \mathfrak{M}_{i, i+1} \alpha_{i+1}^s - \mathfrak{M}_{i+1, i} \beta_{i+1} = \varphi_{i+1}^{os} - \varphi_i^{od}. \quad (13)$$

La (9-13) è la cosiddetta *equazione dei quattro momenti*; meglio andrebbe chiamata *equazione delle quattro coppie*. Nella (9-13) si è indicata con $\mathfrak{M}_{i-1, i}$ la coppia di incastro nella sezione $i-1$ della trave compresa tra i nodi $i-1$ ed i .

Sovente alla (9-13) si dà una forma più elegante utilizzando le coppie di incastro perfetto. Poichè infatti è

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{M}}_{i-1, i} \beta_i + \overline{\mathfrak{M}}_{i, i-1} \alpha_i^d &= -\varphi_i^{od} \\ \overline{\mathfrak{M}}_{i, i+1} \alpha_{i+1}^s + \overline{\mathfrak{M}}_{i+1, i} \beta_{i+1} &= -\varphi_{i+1}^{os},\end{aligned}$$

la (9-13) può scriversi

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_{i-1, i} \beta_i + \mathfrak{M}_{i, i-1} \alpha_i^d - \mathfrak{M}_{i, i+1} \alpha_{i+1}^s - \mathfrak{M}_{i+1, i} \beta_{i+1} &= \\ = \overline{\mathfrak{M}}_{i-1, i} \beta_i + \overline{\mathfrak{M}}_{i, i-1} \alpha_i^d - \overline{\mathfrak{M}}_{i, i+1} \alpha_{i+1}^s - \overline{\mathfrak{M}}_{i+1, i} \beta_{i+1}.\end{aligned}\quad (14)$$

I cedimenti degli appoggi compaiono nelle rotazioni φ^o , o nelle coppie d'incastro perfetto $\overline{\mathfrak{M}}$, in modo del tutto analogo a quanto già detto nel § 9-1. Si osservi che l'equazione (9-13) o (9-14) può essere scritta anche per la trave i ed il ritto $i-1$ che lo precede, o il ritto i che lo segue (fig. 9-6); le convenzioni sui segni di $\mathfrak{M}$, $\overline{\mathfrak{M}}$, φ e ψ restano invariate, dipendendo

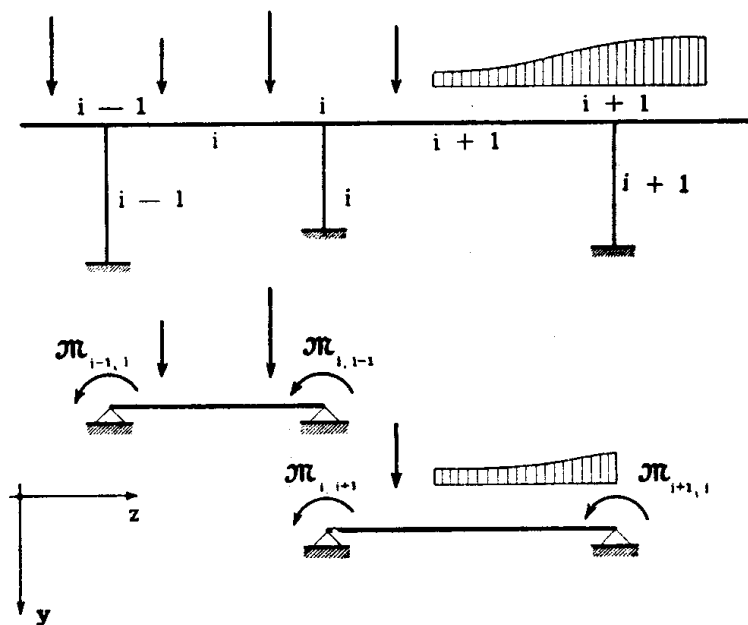


FIG. 9-6

soltanto dall'orientamento degli assi yz nel piano; in particolare, il segno dei ψ per i ritti è, come per le travi, positivo quando corrisponde ad una rotazione positiva, e cioè antioraria (fig. 9-2).

Si osserva che, scritte le equazioni dei quattro momenti per la trave i ed il ritto i , e per le travi i ed $i+1$, l'equazione relativa al ritto i ed alla trave $i+1$ è conseguenza delle prime due. Si osservi pure che per ogni

nodo i si può scrivere la relazione di equilibrio

$$\sum_h \mathcal{M}_{ih} = 0 \quad (15)$$

e cioè in ogni nodo il numero di coppie incognite è uguale al numero delle aste concorrenti diminuito dell'unità. Se quindi le ϕ per le travi e per i ritzi, e cioè gli spostamenti dei nodi, sono nulli, o per lo meno noti, le equazioni del tipo (9-14) e (9-8) sono in numero pari a quello dei momenti incogniti; per esempio nella trave della fig. 9-7, i momenti inco-

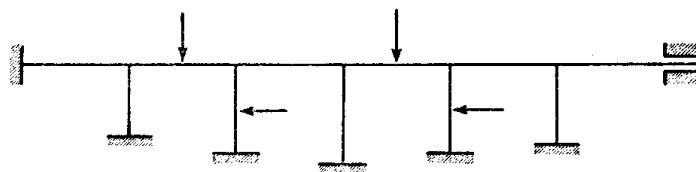


FIG. 9-7

gniti sono 17, mentre possono scriversi 10 equazioni del tipo (9-14), e 7 del tipo (9-8) (*).

Le cose si complicano assai se gli spostamenti dei nodi sono incogniti; se cioè la struttura è tale che per effetto delle forze i nodi subiscono degli spostamenti.

A tale riguardo si precisa che, se si tiene conto delle deformazioni da sforzo assiale, tutte le strutture sono di tale tipo, ad eccezione della trave continua su appoggi fissi studiata nel primo paragrafo. Se si trascurano invece le deformazioni da sforzo assiale, si dà spesso il caso di strutture

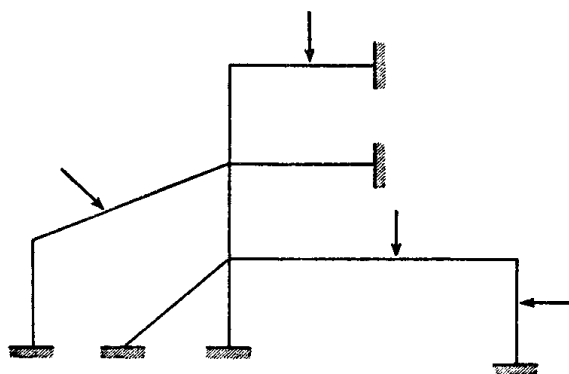


FIG. 9-8

i cui nodi non si spostano per effetto dei carichi; ciò può accadere o per la disposizione dei vincoli, che comunque impediscono gli spostamenti dei

(*) In un nodo in cui concorrono h aste sono presenti $h-1$ incognite, e si possono scrivere $h-1$ equazioni del tipo (9-14), relative all'accoppiamento $1 \cdot 2$, $1 \cdot 3$, $1 \cdot 4$, ... $1 \cdot h$.

nodi (figg. 9-7 e 9-8), o per particolari condizioni di simmetria di struttura e di carichi applicati, come negli esempi delle figg. 9-9 e 9-10. Esplicitamente si avverte che non sempre simmetria di struttura e di carichi

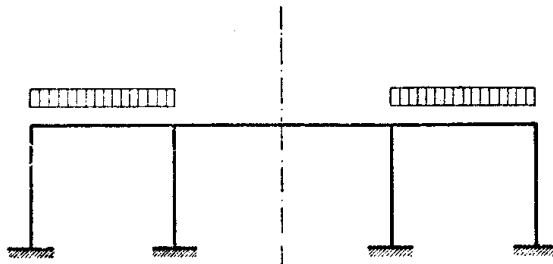


FIG. 9-9

comportano inamovibilità dei nodi; esempio classico è quello della fig. 9-11 (*telaio cattedrale*) in cui i due traversi più bassi presentano, per carichi simmetrici, due spostamenti orizzontali uguali e contrari.

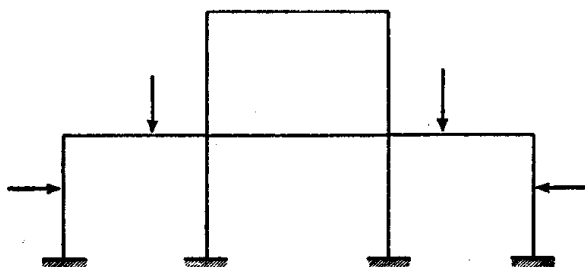


FIG. 9-10

La valutazione della traslabilità dei nodi, e dei parametri indipendenti da cui gli spostamenti dei nodi dipendono, si può effettuare come

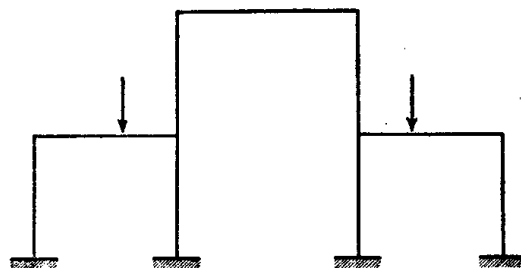


FIG. 9-11

segue. Poichè si trascurano le variazioni di lunghezza delle travi per effetto degli sforzi assiali, gli estremi degli assi di ogni tratto rettilineo

In presenza di carichi simmetrici, la possibilità di spostamenti è limitata dalla condizione di simmetria; quindi le strutture delle figg. 9-9 e 9-10 caricate come in figura sono da considerarsi a nodi fissi; quella della fig 9-11 a nodi spostabili, ed i parametri da cui dipendono le rotazioni ψ si riducono ad uno ($\Delta_1 = -\Delta_3$, $\Delta_2 = 0$).

Se la struttura è a nodi spostabili, occorre nelle equazioni del tipo (9-14) e (9-8) esprimere i momenti $\overline{\mathcal{M}}$ attraverso gli angoli ψ , che sono a priori incogniti; alle equazioni del tipo (9-14) e (9-8), che sono in numero pari a quello delle coppie $\mathcal{M}$ incognite, occorre aggiungere altre equazioni in numero pari a quello dei parametri da cui dipendono gli angoli ψ . Tali equazioni possono ottenersi esprimendo condizioni di equilibrio di parti della struttura ottenute sezionando quest'ultima in modo opportuno. Si consideri per esempio la struttura della fig. 9-14; per essa

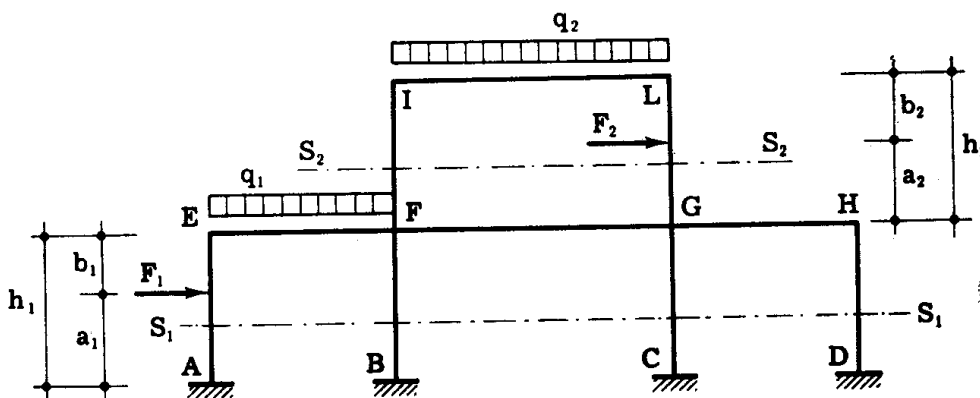


FIG. 9-14

possono scriversi 10 equazioni indipendenti del tipo (9-14) e 4 del tipo (9-8), e cioè in complesso 14 equazioni. I momenti incogniti che compaiono in tali equazioni sono 14; però come incognite compaiono pure, attraverso gli angoli ψ , le traslazioni Δ_1 e Δ_2 dei traversi. Occorrono quindi altre due equazioni. Si effettui un taglio della struttura secondo un piano orizzontale $S_1 S_1$ che impegni i quattro ritti inferiori; l'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale della parte di struttura ubicata al disopra del piano $S_1 S_1$ si scrive

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{M}_{AE} + \mathcal{M}_{EA}}{h_1} + F_1 \frac{b_1}{h_1} + \frac{\mathcal{M}_{BF} + \mathcal{M}_{FB}}{h_1} + \\ + \frac{\mathcal{M}_{CG} + \mathcal{M}_{GC}}{h_1} + \frac{\mathcal{M}_{DH} + \mathcal{M}_{HD}}{h_1} = F_1 + F_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Si effettui poi un taglio secondo un piano $S_2 S_2$ che impegni i due ritti superiori; l'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale della parte

di struttura al disopra del piano $S_2 S_2$ si scrive

$$\frac{\mathcal{M}_{FI} + \mathcal{M}_{IF}}{h_2} + \frac{\mathcal{M}_{GL} + \mathcal{M}_{LG}}{h_2} + F_2 \frac{b_2}{h_2} = F_2 . \quad (16')$$

Le equazioni (16) e (16') sono le altre due equazioni necessarie per ottenere le 16 incognite $\mathcal{M}$ e Δ .

Si osservi, sempre con riferimento alla struttura della fig. 9-14, che il grado di iperstaticità è 12; le incognite del problema, secondo la via ora esposta, sono invece 16.

Si osservi pure che delle 16 equazioni utilizzate 14 sono di congruenza, e 2 di equilibrio.

Tutto ciò è in accordo con il metodo generale di soluzione delle strutture iperstatiche, per cui si può adottare come struttura principale una struttura derivata dalla prima introducendo in essa un numero i di snodi semplici (o equivalenti) pari al grado di iperstaticità (metodo usuale, già adottato nel § 2-7) oppure una struttura derivata dalla prima introducendo in essa un numero s di snodi semplici, superiore ad i , ed un numero di vincoli semplici (o equivalenti) pari alla differenza $s - i$. In tal caso occorre, per ricondursi alla struttura reale, applicare reazioni in corrispondenza degli snodi e spostamenti in corrispondenza dei vincoli.

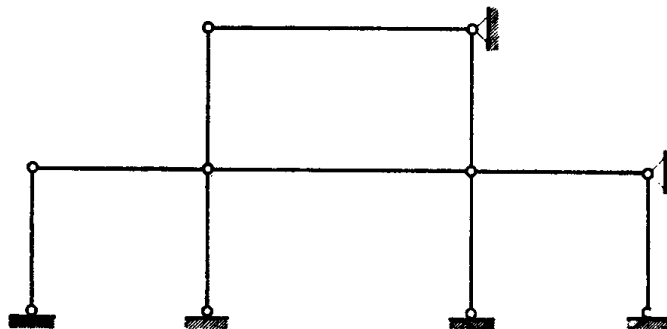


FIG. 9-15

Mentre nel primo caso si scrivono i equazioni di congruenza, nel secondo caso si scrivono invece s equazioni di congruenza ed $s - i$ di equilibrio; infatti si deve

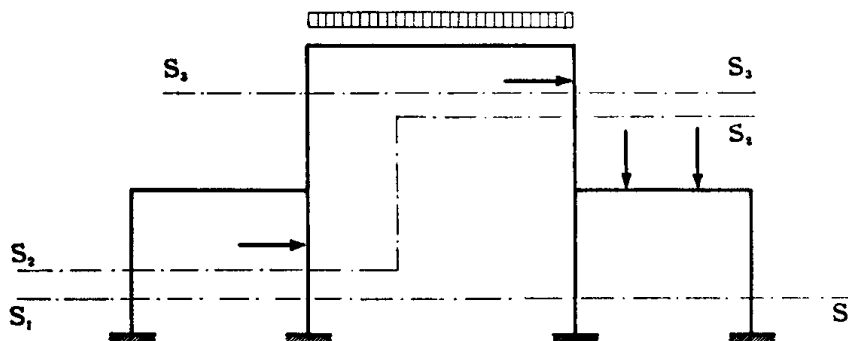


FIG. 9-16

imporre la condizione che in corrispondenza degli snodi introdotti siano nulli gli spostamenti (relativi o assoluti), e che in corrispondenza dei vincoli introdotti siano

nulle le reazioni. Le incognite, nel secondo caso, sono le s reazioni corrispondenti agli s snodi, e gli $s - i$ spostamenti corrispondenti agli $s - i$ vincoli. Nel caso della fig. 9-14 la struttura principale è quella della fig. 9-15; risulta $i = 12$, $s = 14$; le equazioni che si scrivono sono 14 di congruenza e 2 di equilibrio; le incognite sono 14 momenti e 2 spostamenti. Nel caso della fig. 9-16 la struttura principale è quella della fig. 9-17; è $i = 9$, $s = 12$; le equazioni sono 12 di congruenza e 3 di equilibrio (equazioni di equilibrio alla traslazione delle parti situate al

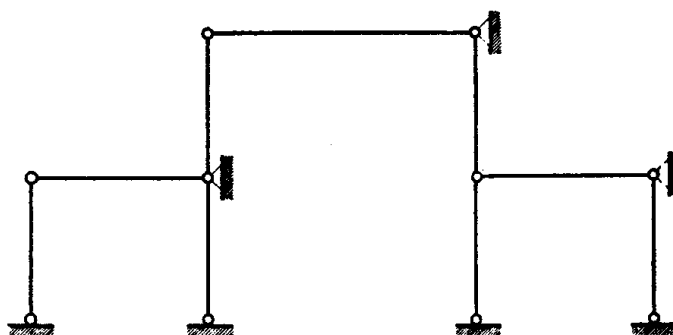


FIG. 9-17

za e 3 di equilibrio (equazioni di equilibrio alla traslazione delle parti situate al disopra delle sezioni $S_1 S_1$, $S_2 S_2$, $S_3 S_3$ della fig. 9-16, equivalenti alla condizione di reazione nulla nei tre appoggi supplementari); le incognite sono 12 momenti e 3 spostamenti.

Si avverte esplicitamente che le equazioni del tipo (9-13), o (9-14) e (9-16) possono scriversi per qualsiasi insieme di travi collegate alle estremità.

4. L'equazione delle cinque rotazioni.

Si dà spesso il caso che sia più agevole condurre la ricerca delle incognite iperstatiche operando su una struttura iperstatica, anziché isostatica, a volte addirittura più iperstatica di quella reale. La trattazione che si

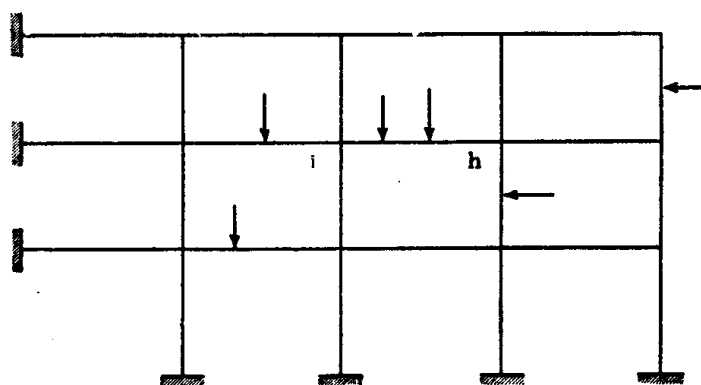


FIG. 9-18

svolgerà in questo paragrafo è un esempio classico in merito. Si consideri un telaio a nodi fissi, i volte iperstatico (fig. 9-18); esso andrebbe risolto

scrivendo i equazioni del tipo (9-14) e (9-8). Si operi invece sulla struttura derivata da quella reale imponendo n vincoli che possono imprimere rotazioni φ anelastiche agli n nodi; la struttura risulta così $i + n$ volte iperstatica, le incognite sono le n rotazioni φ_i , e il problema va risolto scrivendo n equazioni di equilibrio. Queste ultime esprimono le condizioni che i vincoli aggiunti in corrispondenza degli n nodi non sviluppino reazioni, e cioè che le somme delle coppie di incastro in ogni nodo siano nulle. Con riferimento al generico nodo i si scrive perciò la seguente equazione:

$$\sum_h \overline{\mathcal{M}}_{ih} + \varphi_i \sum_h \rho_{ih} + \sum_h \varphi_h t_{hi} \rho_{hi} = 0. \quad (17)$$

Nella (9-17) si è indicato con φ_i la rotazione del nodo i , con h uno dei nodi adiacenti ad i ; $\overline{\mathcal{M}}_{ih}$ è la coppia di incastro nell'estremo i della trave ih perfettamente incastrata alle estremità, provocata dai carichi e dalle distorsioni agenti sulla trave ih (*coppia d'incastro perfetto*). La quantità (vedi 8-25)

$$\varphi_i \rho_{ih} = \frac{\varphi_i}{\gamma_{ih}}$$

è la coppia nell'estremo i della trave ih perfettamente incastrata in h e connessa con la rotazione angolare φ_i dell'estremo i .

La quantità

$$\rho_{ih} = \frac{1}{\gamma_{ih}} \quad (18)$$

rappresentante la coppia in i connessa con la rotazione angolare unitaria in i e nell'ipotesi che h non ruoti, prende nome di *rigidità* in i della trave ih . Analoga definizione vale per la rigidità ρ_{hi} in h della trave ih .

La quantità (vedi form. 8-21)

$$t_{hi} \rho_{hi} = - \frac{\beta}{\gamma_{hi} \alpha_{ih}}$$

è (fig. 9-19) la coppia d'incastro nell'estremo i della trave ih perfettamente incastrata in i , connessa con la rotazione angolare unitaria dell'estremo h .

La quantità

$$t_{hi} = - \frac{\beta}{\alpha_{ih}}, \quad (19)$$

rapporto tra i valori della coppia in h e della coppia d'incastro in i connesse con una qualsiasi rotazione angolare in h e nell'ipotesi che i non

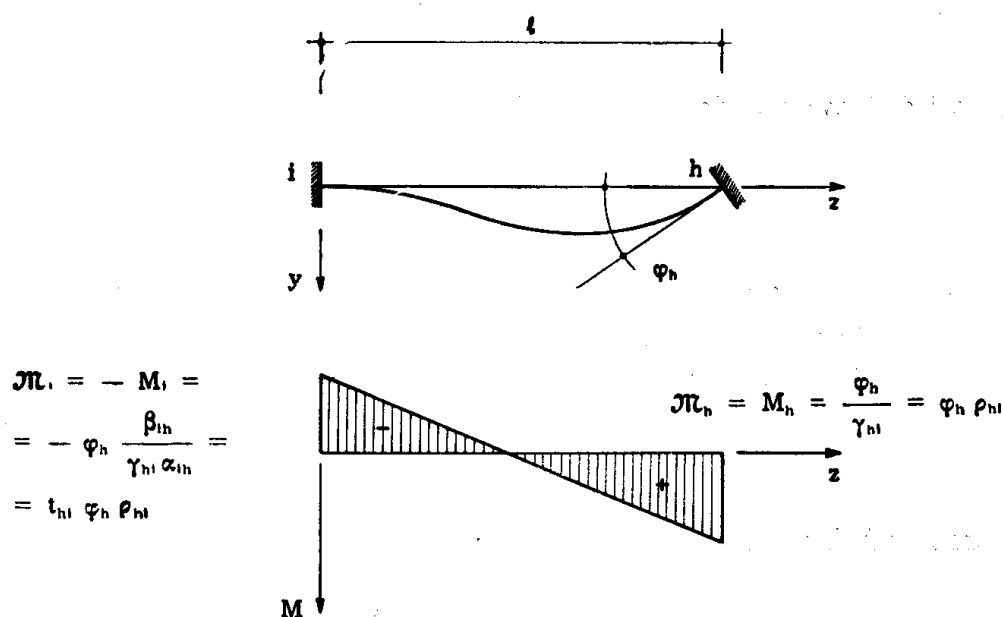


FIG. 9-19

ruoti prende nome di *coefficiente di trasmissione* da h ad i ; analogamente si definisce il coefficiente di trasmissione t_{ih} da i ad h .

Si verifica l'uguaglianza

$$\rho_{ih} t_{ih} = \rho_{hi} t_{hi} ; \quad (20)$$

essa esprime l'uguaglianza dei lavori mutui connessi con due distorsioni angolari uguali agenti in i ed in h , e deriva dal teorema di Volterra.

Se le travi sono a sezione costante, è

$$\rho_{ih} = \rho_{hi} = \frac{4 EI}{l} \quad (21)$$

$$t_{ih} = t_{hi} = \frac{1}{2}$$

e la (9-17) si scrive

$$\sum_h \overline{\mathcal{M}}_{ih} + \varphi_i \sum_h \rho_{ih} + \frac{1}{2} \sum_h \varphi_h \rho_{hi} = 0 \quad (22)$$

Le (9-17) e (9-22) sono state scritte nell'ipotesi che in tutti i nodi h esistano incastri. Se la trave ih è incernierata in h , (cioè in genere può capitare

solo se h è un vincolo al suolo) il termine corrispondente nella terza sommatoria della (9-17) si annulla, e il corrispondente valore di ρ_{ih} è fornito da

$$\rho_{ih} = \frac{1}{\alpha_{ih}} ; \quad (23)$$

nell'ipotesi di trave a sezione costante è in tal caso

$$\rho_{ih} = \frac{3 E I}{l} . \quad (24)$$

Le equazioni (9-17), o (9-22), sono in numero pari a quello dei nodi, e forniscono le rotazioni φ_i di questi ultimi. Dai valori φ_i si risale alle coppie d'incastro attraverso la relazione

$$\mathfrak{M}_{ih} = \overline{\mathfrak{M}}_{ih} + \varphi_i \rho_{ih} + \varphi_h t_{hi} \rho_{hi} ; \quad (25)$$

se la trave ih è a sezione costante, la (9-25) si scrive

$$\mathfrak{M}_{ih} = \overline{\mathfrak{M}}_{ih} + \varphi_i \rho_{ih} + \frac{1}{2} \varphi_h \rho_{hi} ; \quad (26)$$

se in h la trave ih è incernierata, la (9-25) si scrive

$$\mathfrak{M}_{ih} = \overline{\mathfrak{M}}_{ih} + \varphi_i \rho_{ih} . \quad (27)$$

La convenienza di operare su una struttura più vincolata di quella reale, dipende dal fatto che in una struttura siffatta le relazioni che legano le reazioni vincolari ai carichi, alle distorsioni ed ai cedimenti dei vincoli — ivi inclusi quelli aggiunti — sono di scrittura immediata; inoltre il numero n dei nodi, e quindi l'ordine del sistema da risolvere, è in genere nel caso dei telai molto inferiore al grado di iperstaticità della struttura. Le equazioni del tipo (9-17) si chiamano *equazioni delle cinque rotazioni*, perchè in ciascuna di esse compaiono in genere non più di cinque incognite, e prendono nome da W. Gehler (1916).

Se il telaio è a nodi spostabili le (9-17) vanno modificate; si opera in tal caso sulla struttura derivata da quella reale imponendole, oltre ai vincoli che imprimono le rotazioni dei nodi, altri che imprimono gli spostamenti; questi ultimi equivalgono a tanti vincoli semplici quanti sono gli m parametri Δ da cui dipendono gli spostamenti dei nodi stessi. Alle n equazioni di equilibrio relative ai vincoli che imprimono le rotazioni dei nodi si affiancano perciò le m equazioni di equilibrio relative ai vincoli che imprimono gli spostamenti; queste esprimono la condizione che siano nulle le reazioni corrispondenti ai Δ .

Il caso dei telai a ritte verticali e traversi orizzontali continui, che è di gran lunga il più frequente, è anche, per fortuna, quello di più semplice soluzione (fig. 9-20). I parametri Δ sono gli spostamenti dei trasversi,

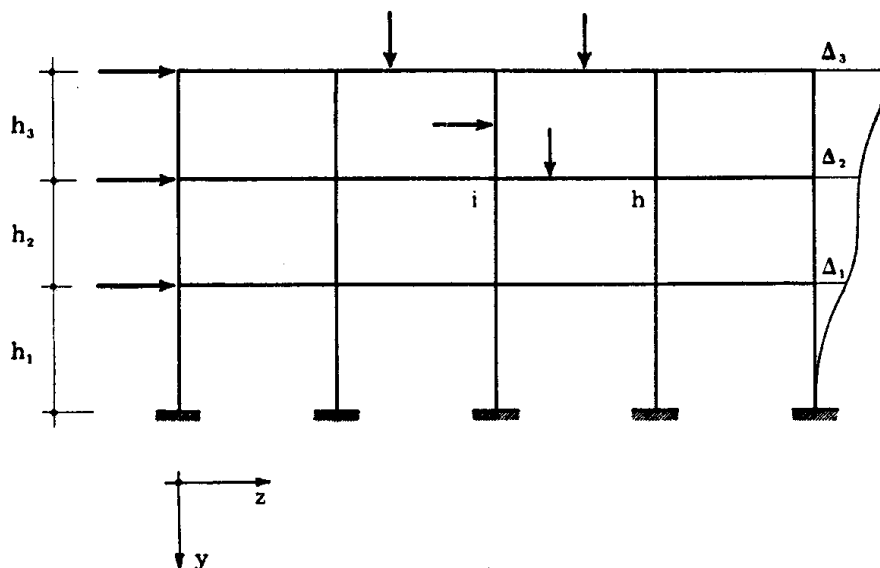


FIG. 9-20

considerati positivi se diretti verso destra, e sono in numero pari a quello dei trasversi stessi; le rotazioni ψ sono nulle per i trasversi, ed uguali per tutti i ritte di un piano; in particolare, per i ritte del piano compresi tra il trasverso r inferiore e quello s superiore è

$$\psi_{rs} = - \frac{\Delta_s - \Delta_r}{l_{rs}}, \quad (28)$$

ove l_{rs} è l'altezza del piano. La ψ è positiva se antioraria.

Nell'espressione (9-25) della coppia d'incastro $\mathcal{M}_{ih}$ occorre perciò aggiungere il termine dovuto alla ψ_{ih} , se ih è un ritto; questo termine è fornito da

$$- \psi_{ih} \rho_{ih} - \psi_{ih} \rho_{hi} t_{hi},$$

e cioè, per le (9-20), da

$$- \psi_{ih} \rho_{ih} (1 + t_{ih}).$$

Si ha così, in luogo della (9-25),

$$\mathcal{M}_{ih} = \overline{\mathcal{M}}_{ih} + \varphi_i \rho_{ih} + \varphi_h \rho_{hi} t_{hi} - \psi_{ih} \rho_{ih} (1 + t_{ih}). \quad (a)$$

Adottando la simbologia

$$\xi_{ih} = \rho_{ih} (1 + t_{ih}) \quad (29)$$

la (a) si scrive

$$\mathfrak{M}_{ih} = \overline{\mathfrak{M}}_{ih} + \varphi_i \rho_{ih} + \varphi_h \rho_{hi} t_{hi} - \psi_{ih} \xi_{ih} . \quad (30)$$

Per trave di sezione costante è

$$\xi_{ih} = \xi_{hi} = \frac{3}{2} \rho_{ih} = \frac{6 EI}{l} .$$

Il taglio nel ritto ih è fornito da

$$T_{ih} = T_{ih}^{\circ} + \frac{\mathfrak{M}_{ih} + \mathfrak{M}_{hi}}{l_{ih}} , \quad (b)$$

dove con T_{ih}° si indica il taglio nel ritto appoggiato. Attraverso le (9-30) la (b) si scrive

$$T_{ih} = \overline{T}_{ih} + \varphi_i \frac{\xi_{ih}}{l_{ih}} + \varphi_h \frac{\xi_{hi}}{l_{ih}} - \psi_{ih} \frac{\xi_{ih} + \xi_{hi}}{l_{ih}} , \quad (c)$$

dove $\overline{T}_{ih}$ è il taglio provocato sul ritto dai carichi su esso agenti, nelle condizioni di incastro perfetto.

Adottando la simbologia

$$k_{ih} = \frac{\xi_{ih}}{l_{ih}} \quad (31)$$

la (c) si scrive

$$T_{ih} = \overline{T}_{ih} + \varphi_i k_{ih} + \varphi_h k_{hi} - \psi_{ih} (k_{ih} + k_{hi}) . \quad (32)$$

L'equazione (9-17) di equilibrio in corrispondenza del nodo i si modifica perciò come segue:

$$\Sigma_h \overline{\mathfrak{M}}_{ih} + \varphi_i \Sigma_h \rho_{ih} + \Sigma_h \varphi_h t_{hi} \rho_{hi} - \Sigma_h \psi_{ih} \xi_{ih} = 0 ; \quad (33)$$

l'ultima sommatoria è estesa solo ai ritti che concorrono in i .

Le equazioni esprimenti essere nulle le reazioni dei vincoli che impediscono le traslazioni dei traversi equivalgono a quelle esprimenti essere la somma dei tagli ai ritti di un piano uguale alla somma $\Sigma_t H$ delle componenti orizzontali delle forze agenti al disopra della sezione rispetto alla quale sono stati calcolati i tagli. Tale equazione si scrive (le sommatorie sono limitate ai ritti tagliati dalla sezione)

$$\Sigma_t \overline{T}_{ih} + \Sigma_t (\varphi_i k_{ih} + \varphi_h k_{hi}) - \psi_{ih} \Sigma_t (k_{ih} + k_{hi}) - \Sigma_t H = 0 . \quad (34)$$

Si avverte che il taglio è positivo se, agente sulla faccia al disopra della sezione, è diretto verso sinistra; una forza H è positiva se diretta verso destra. Infatti il verso delle forze e delle coppie è collegato a quello degli assi y e z , il verso delle caratteristiche a quello di n e t (§ 6-3), tenuto conto che m è orientato verso l'osservatore, e quindi il verso nt è antiorario. Se il verso positivo di t è verso l'alto (ascissa crescente verso l'alto) n è orientato verso destra. Si ricorda che il segno di T non cambia (a sinistra sulla faccia superiore) cambiando verso a t .

Le equazioni (9-33) e (9-34) risolvono il problema; esse si chiamano sovente *equazioni dei nodi* ed *equazioni dei piani*.

5. La risoluzione per successive approssimazioni delle equazioni dei nodi e dei piani.

La risoluzione del sistema delle equazioni (9-33) e (9-34) può essere condotta per iterazione (*Sparacio*) [17]; la convergenza è buona, perchè i coefficienti della diagonale principale del sistema sono preponderanti. Convienne operare sullo stesso schema del telaio; nel seguito si fornisce qualche esempio in merito.

Si consideri il telaio a due ritti e due traversi della fig. 9-21: le quantità $\overline{M}$, ρ , ξ , k sono consegnate nella tabella. Le operazioni di iterazione sono condotte sullo schema della fig. 9-22 a. Si inizia dal nodo A, e si calcola φ_A ponendo $\varphi_B = \varphi_C = 0$, $\psi_1 = 0$; si ha così dalla (9-33)

$$10^6 \cdot \varphi_A = - \frac{\sum \overline{M}_{Ah}}{(\rho_{AB} + \rho_{AC}) 10^{-6}} = - \frac{12.000}{40} = - 300 .$$

Si passa poi al nodo B, e si calcola φ_B ponendo $\varphi_A = - 300$, $\varphi_D = 0$, $\psi_1 = 0$; si ha così, sempre a meno di 10^{-6} ,

$$10^6 \cdot \varphi_B = \frac{- \sum \overline{M}_{Bh} - \frac{1}{2} \varphi_A \rho_{BA}}{(\rho_{BA} + \rho_{BD}) 10^{-6}} = \frac{12.000 + 4.500}{46} = 358,6 .$$

In D si ha

$$10^6 \cdot \varphi_D = \frac{12.000 - \frac{1}{2} \cdot 358,6 \cdot 16}{20 + 40 + 16} = 120,1 .$$

In C si ha infine

$$10^6 \cdot \varphi_C = \frac{-12.000 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 300 - \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 120,1}{10 + 40 + 16} = -195,4 .$$

Calcolate tutte le rotazioni φ in prima approssimazione, si passa al cal-

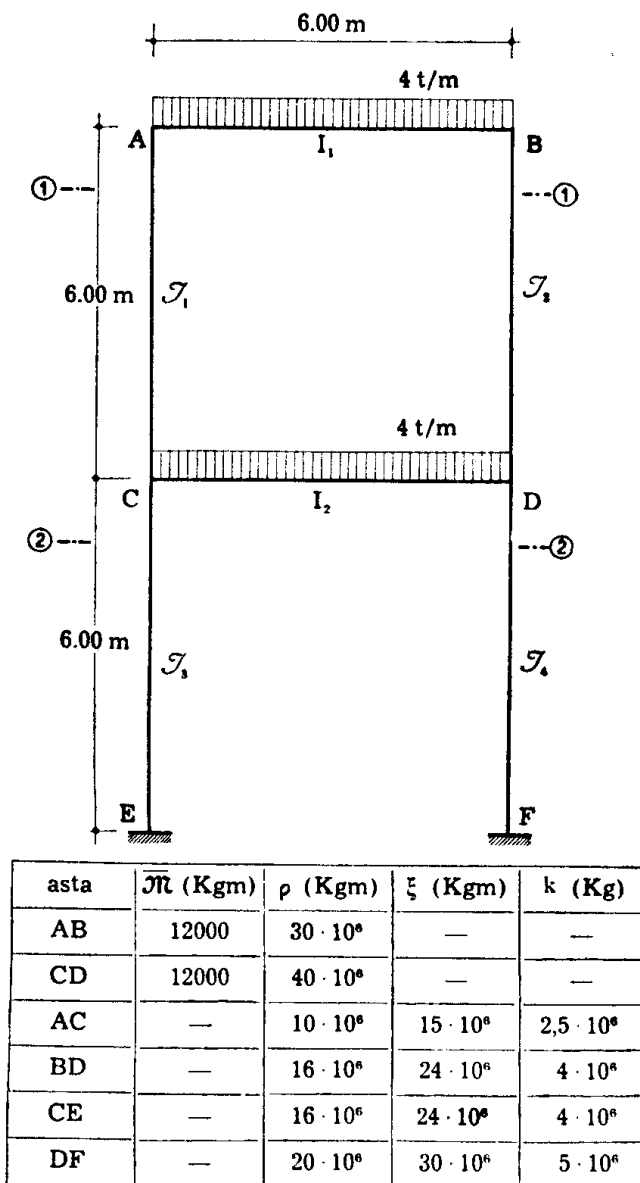


FIG. 9-21

colo in prima approssimazione delle ϕ attraverso le (9-34); si ha così, per

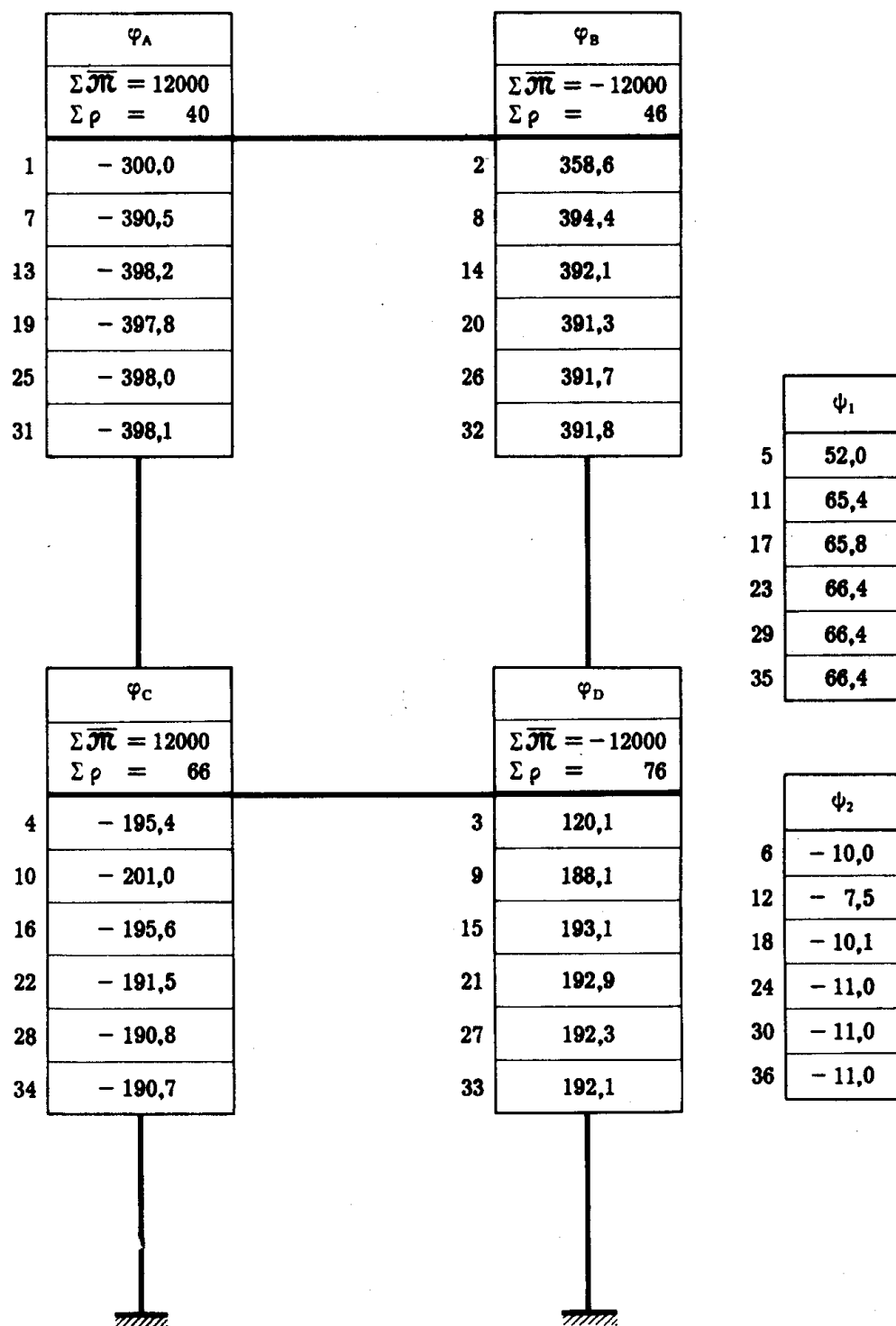


FIG. 9-22 a

il piano superiore,

$$\begin{aligned} 10^6 \cdot \psi_1 &= \frac{(\varphi_A + \varphi_C) k_{AC} + (\varphi_B + \varphi_D) k_{BD}}{(2 k_{AC} + 2 k_{BD}) 10^{-6}} = \\ &= \frac{-495,4 \cdot 2,5 + 478,7 \cdot 4}{13} = 52, \end{aligned}$$

e per il piano inferiore

$$\begin{aligned} 10^6 \cdot \psi_2 &= \frac{\varphi_C k_{CE} + \varphi_D k_{DF}}{(2 k_{CE} + 2 k_{DF}) 10^{-6}} = \\ &= \frac{-135,4 \cdot 4 + 120,1 \cdot 5}{18} = -10. \end{aligned}$$

Completato così un primo ciclo, si inizia un secondo, calcolando φ_A in seconda approssimazione attraverso i valori di prima approssimazione di φ_B , φ_C e ψ_1 :

$$\varphi_A = \frac{-12.000 - 358,6 \cdot 15 + 195,4 \cdot 5 + 52 \cdot 15}{40} = -390,5.$$

Calcolate così φ_B , φ_D , φ_C , ψ_1 , ψ_2 , si ripete ancora il ciclo, e questo tante volte finchè si consegue la voluta approssimazione. I valori finali delle φ e ψ forniscono attraverso le (9-30) i valori delle coppie di incastro; per esempio si ha

$$\mathcal{M}_{AB} = 12.000 - 398,1 \cdot 30 + 391,8 \cdot 15 = 5.934 \text{ Kgm}$$

$$\mathcal{M}_{AC} = -398,1 \cdot 10 - 190,7 \cdot 5 - 66,4 \cdot 15 = -5.934 \text{ Kgm}.$$

Per gli altri nodi si ha

$$\mathcal{M}_{BA} = -6.218 \text{ Kgm}$$

$$\mathcal{M}_{DB} = 4.614 \text{ Kgm}$$

$$\mathcal{M}_{BD} = 6.212 \quad \gg$$

$$\mathcal{M}_{DC} = -8.130 \quad \gg$$

$$\mathcal{M}_{CA} = -4.894 \quad \gg$$

$$\mathcal{M}_{DF} = 3.512 \quad \gg$$

$$\mathcal{M}_{CD} = 8.214 \quad \gg$$

$$\mathcal{M}_{EC} = -1.790 \quad \gg$$

$$\mathcal{M}_{CE} = -3.316 \quad \gg$$

$$\mathcal{M}_{FD} = 1.591 \quad \gg.$$

Si verifica che in ogni nodo la somma delle coppie di incastro è nulla. Il diagramma dei momenti è quello della fig. 9-22 b.

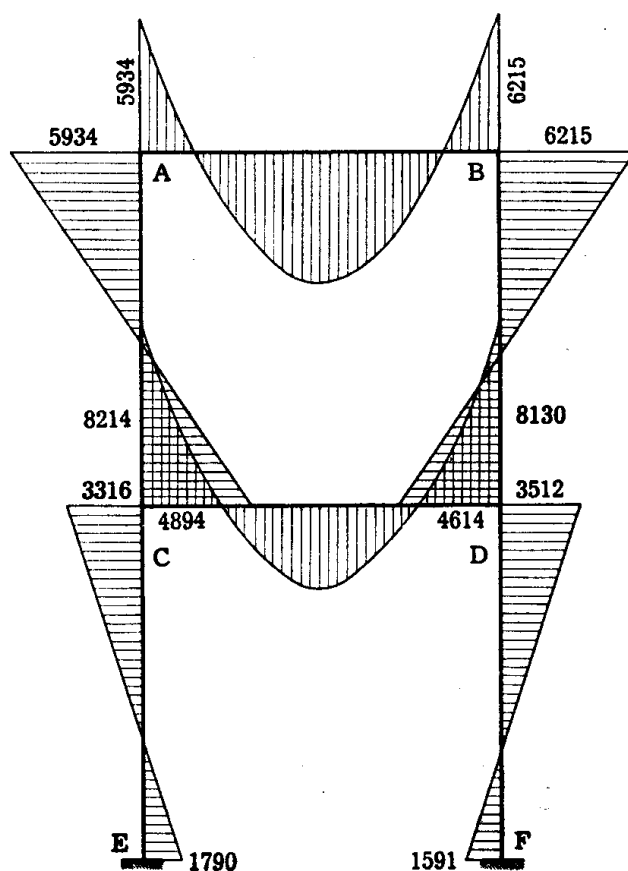


FIG. 9-22 b

Si consideri adesso la trave Vierendeel della fig. 9-23; le operazioni di iterazione sono condotte sullo schema della fig. 9-24. Si comincia con il calcolare in prima approssimazione i valori delle ϕ , ponendo le φ pari a zero. Per la sezione 1-1 risulta

$$10^6 \cdot \phi_1 = - \frac{\Sigma_t H}{\Sigma_t (k_{ih} + k_{hi}) 10^{-6}} = - \frac{6000}{2 \cdot 18,75} = - 160 ;$$

analogamente si calcolano i valori di ϕ_2 , ϕ_3 e ϕ_4 . Nel primo ciclo risulta $\phi_4 = 0$. I valori delle coppie d'incastro sono riportati di seguito:

$$\mathcal{M}_{AB} = 6.780 \text{ Kgm}$$

$$\mathcal{M}_{CB} = 9.165 \text{ Kgm}$$

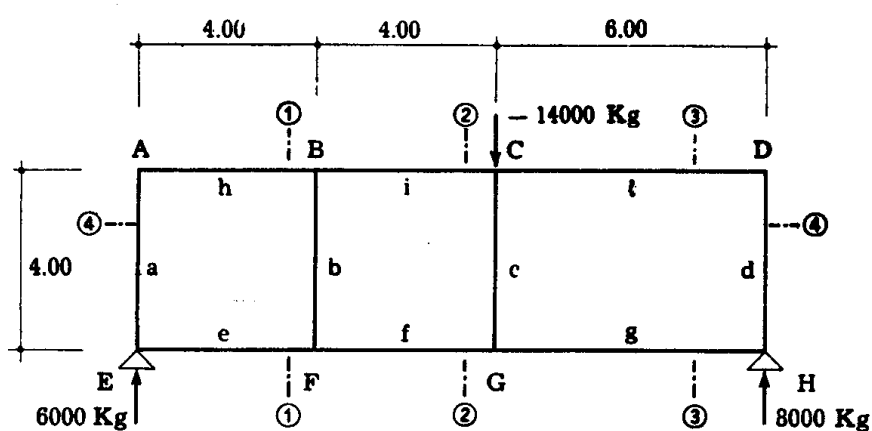
$$\mathcal{M}_{AE} = - 6.780 \text{ »}$$

$$\mathcal{M}_{CG} = 4.620 \text{ »}$$

$$\mathcal{M}_{BA} = 5.730 \text{ »}$$

$$\mathcal{M}_{CD} = - 13.730 \text{ »}$$

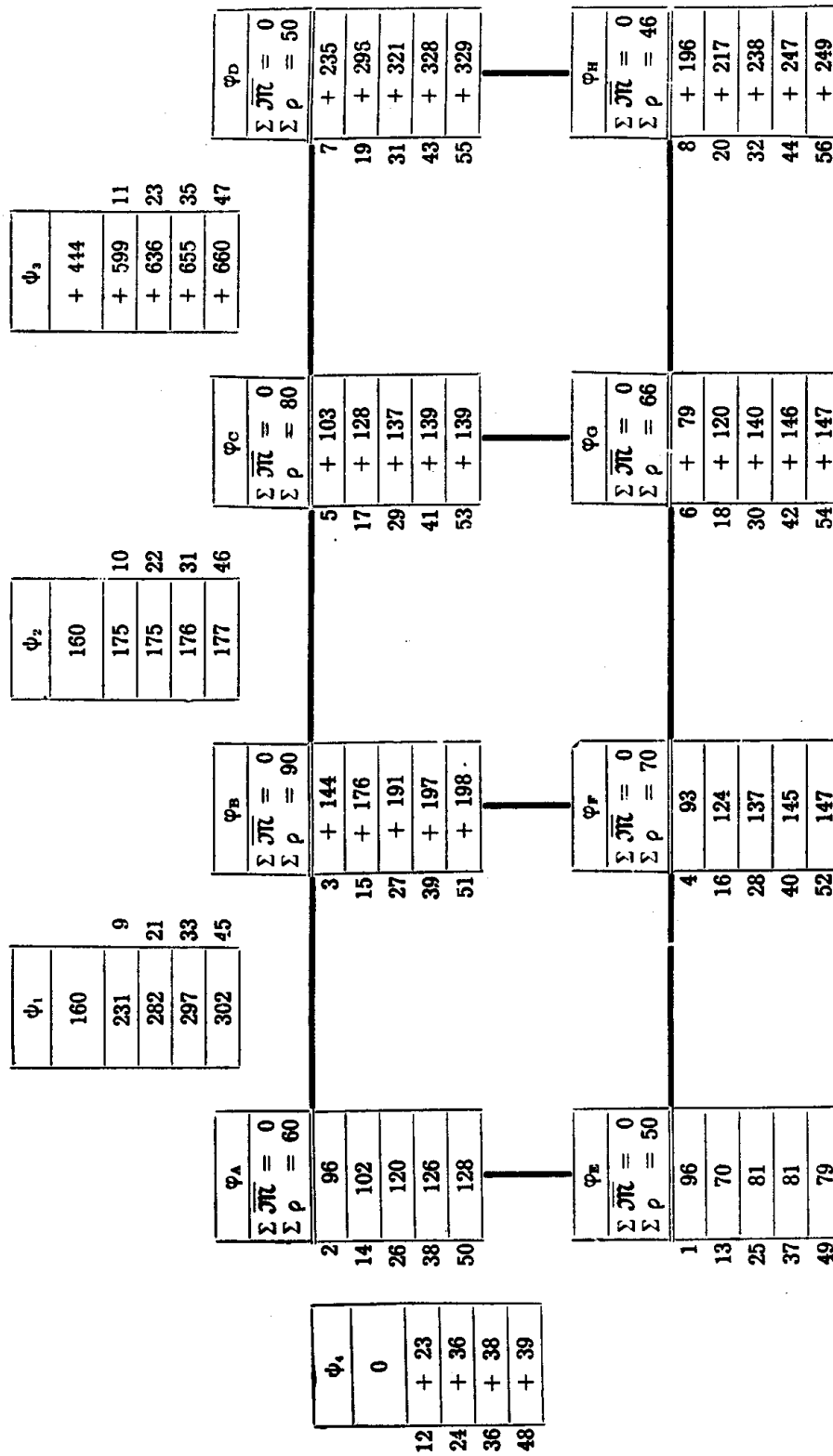
$$\begin{array}{ll}
 \mathcal{M}_{BF} = -9.900 \text{ Kgm} & \mathcal{M}_{DC} = -11.830 \text{ Kgm} \\
 \mathcal{M}_{BC} = 4.110 \text{ »} & \mathcal{M}_{DH} = 11.850 \text{ »} \\
 \mathcal{M}_{EA} = -6.045 \text{ »} & \mathcal{M}_{GF} = 6.780 \text{ »} \\
 \mathcal{M}_{EF} = 6.010 \text{ »} & \mathcal{M}_{GC} = 4.740 \text{ »} \\
 \mathcal{M}_{FE} = 5.330 \text{ »} & \mathcal{M}_{GH} = -11.496 \text{ »} \\
 \mathcal{M}_{FB} = -9.135 \text{ »} & \mathcal{M}_{HG} = -10.680 \text{ »} \\
 \mathcal{M}_{FG} = 3.840 \text{ »} & \mathcal{M}_{HD} = 10.650 \text{ »}
 \end{array}$$



asta	ρ (Kgm)	ξ (Kgm)	k (Kg)
a.b.c.d.h.i	30×10^6	45×10^6	$11,25 \times 10^6$
e.f	20×10^6	30×10^6	$7,50 \times 10^6$
g	20×10^6	30×10^6	$5,00 \times 10^6$
t	16×10^6	24×10^6	$4,00 \times 10^6$

FIG. 9-23

Si prenda infine in esame la trave continua della fig. 9-25; i coefficienti relativi ad essa sono riportati nella fig. 9-26. Si voglia tracciare la linea d'influenza del momento flettente in A per una forza verticale viaggiante. Le tre campate sono uguali, e presentano le seguenti caratteristiche:



luce	m	30
altezza agli estremi	m	3
altezza in mezzeria	m	1
momento d'inerzia agli estremi	m ⁴	1
momento d'inerzia in mezzeria	m ⁴	0,1
ρ	tm	$1,352 \cdot 10^5$
t		0,712 .

Le coppie d'incastro perfetto indotte in 1 e B da una distorsione uni-

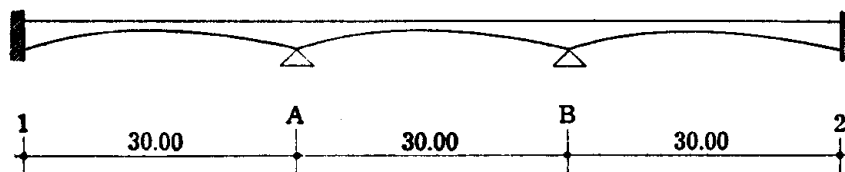


FIG. 9-25

taria negativa in A sono fornite da (9-30)

$$\overline{\mathcal{M}}_{1A} = -\overline{\mathcal{M}}_{1B} = -0,5 \cdot 1,352 \cdot 10^5 \cdot 0,712 = -0,48 \cdot 10^5 \text{ tm} ;$$

le coppie d'incastro perfetto indotte in A da una distorsione in A stesso sono uguali e contrarie, e quindi in A è $\Sigma \overline{\mathcal{M}} = 0$.

1	A	B	2
$\varphi_1 = 0$	φ_A	φ_B	$\varphi_2 = 0$
	$\Sigma \overline{\mathcal{M}} = 0$	$\Sigma \overline{\mathcal{M}} = 0,48 \times 10^5$	
	$\Sigma \rho = 2,704 \times 10^5$	$\Sigma \rho = 2,704 \times 10^5$	
	2 + 0.063	1 - 0.177	
	4 + 0.071	3 - 0.199	
	6 + 0.071	5 - 0.202	

FIG. 9-26

Dopo aver eseguito i successivi cicli di operazioni, risulta $\varphi_A = 0,071$, $\varphi_B = -0,202$; dunque la rotazione della sezione a sinistra di A è pari a $-0,5 + 0,07 = -0,43$, e la rotazione della sezione di destra è pari a

$+ 0,5 + 0,07 = 0,57$. Le rotazioni φ_1 e φ_2 sono nulle. La linea d'influenza

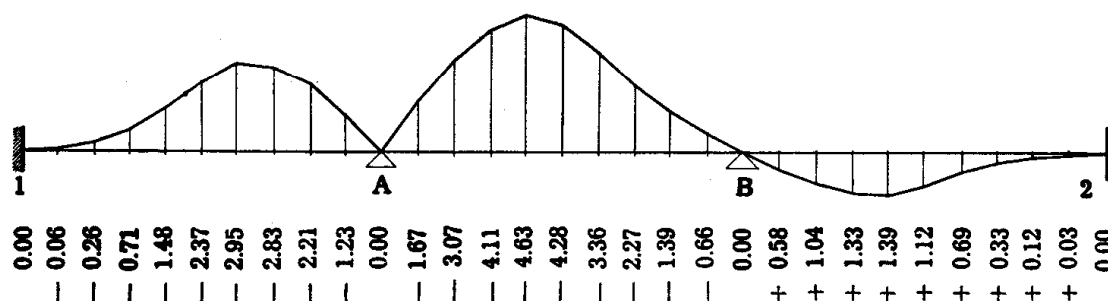


FIG. 9-27

(fig. 9-27) si è tracciata sfruttando i dati in appendice, attraverso il procedimento già esposto nel § 8-9.

6. Il procedimento di Kani.

Nella risoluzione per successive approssimazioni delle equazioni dei nodi e dei piani le coppie di incastro si calcolano attraverso le (9-30) alla fine del procedimento, dopo aver ottenuto i valori delle φ e ψ con l'approssimazione desiderata. E' possibile però calcolare le coppie di incastro in tutte le fasi del procedimento di successive approssimazioni; a questo si riduce in ultima analisi il procedimento di G. Kani (1958). E' interessante però la pratica operativa del Kani; essa si esporrà con riferimento ad alcuni esempi concreti.

a) Telai a nodi fissi formati da travi di sezione costante.

La (9-30) si scrive, nel caso in esame,

$$\mathfrak{M}_{ih} = \overline{\mathfrak{M}}_{ih} + \varphi_i \rho_{ih} + \frac{1}{2} \varphi_h \rho_{ih} ; \quad (35)$$

se si chiama

$$2 \mathfrak{M}'_{ih} = \varphi_i \rho_{ih} \quad (36)$$

la coppia generata in i da un cedimento angolare φ_i , la (9-35) si scrive

$$\mathfrak{M}_{ih} = \overline{\mathfrak{M}}_{ih} + 2 \mathfrak{M}'_{ih} + \mathfrak{M}'_{hi} . \quad (37)$$

Dalle (9-37), sommando i termini relativi a tutte le travi che concorrono nel nodo i , si ha

$$2 \sum_i \mathfrak{M}'_{ih} = - \sum_i \overline{\mathfrak{M}}_{ih} - \sum_i \mathfrak{M}'_{hi} ; \quad (38)$$

infatti è $\Sigma_i \mathcal{M}_{ih} = 0$. La (9-38) mostra che, una volta conosciute le rotazioni φ_h dei nodi adiacenti ad i , e quindi le coppie $\mathcal{M}'_{hi}$, è nota anche la somma delle coppie generate in i dalla rotazione φ_i . Conosciuta questa somma, le coppie $2 \mathcal{M}'_{ih}$ che interessano le singole travi si ottengono suddividendo la $2 \Sigma_i \mathcal{M}'_{ih}$ in parti proporzionali alle rigidità ρ_{ih} ; infatti è (9-36)

$$\frac{2 \mathcal{M}'_{ih}}{\rho_{ih}} = \varphi_i = \text{cost}$$

da cui si trae

$$\begin{aligned} \frac{2 \mathcal{M}'_{ih}}{\rho_{ih}} &= 2 \frac{\Sigma_i \mathcal{M}'_{ih}}{\Sigma_i \rho_{ih}} \\ 2 \mathcal{M}'_{ih} &= 2 \Sigma_i \mathcal{M}'_{ih} \frac{\rho_{ih}}{\Sigma_i \rho_{ih}}. \end{aligned} \quad (39)$$

I numeri

$$- \frac{1}{2} \frac{\rho_{ih}}{\Sigma_i \rho_{ih}} \quad (40)$$

si chiamano *fattori di rotazione*, e la loro somma in ogni nodo è pari a $-1/2$; per ottenere la coppia $\mathcal{M}'_{ih}$ basta perciò calcolare la somma

$$\Sigma_i \overline{\mathcal{M}}_{ih} + \Sigma_i \mathcal{M}'_{hi}, \quad (41)$$

e moltiplicarla per il fattore di rotazione relativo all'asta ih . Se i valori di φ_h sono esatti, risultano anche esatti quelli di $\mathcal{M}'_{ih}$; se i valori di φ_h sono approssimati, lo sono anche quelli di $\mathcal{M}'_{ih}$, ma poichè nell'espressione (9-41) la prima sommatoria è esatta, e nella seconda gli errori in genere si compensano, i valori di $\mathcal{M}'_{ih}$ sono molto più vicini al vero di quelli delle φ_h .

Si procede perciò assegnando un certo insieme di valori φ di prima approssimazione, più o meno vicini al vero; in mancanza di questi dati, che possono essere suggeriti dall'intuito o dalla esperienza, si possono assegnare alle φ , in prima approssimazione, valori nulli. Si parte poi da un nodo qualsiasi; in esso, se le φ di prima approssimazione sono nulle, si ripartisce la $\Sigma_i \overline{\mathcal{M}}_{ih}$ secondo i fattori di rotazione. Passando poi ad un nodo k adiacente al primo, si trova per esso il solo $\mathcal{M}'_{ik}$ diverso da zero: quello relativo al primo nodo, ottenuto nella ripartizione precedente; nel nodo k perciò si ripartisce la somma $\Sigma_k \overline{\mathcal{M}}_{kh} + \mathcal{M}'_{ik}$ secondo i fattori di rotazione. Dopo aver così considerato tutti i nodi, si è compiuto un ciclo intero di ripartizioni. Il ciclo si ripete tante volte finchè le differenze tra

gli $\mathcal{M}'_{lh}$ del penultimo e dell'ultimo ciclo sono trascurabili nell'ordine di approssimazione desiderato. Dalla (9-37) si ottengono infine i valori delle coppie d'incastro.

Si consideri il telaio della fig. 9-21, e si trascurino gli effetti degli spostamenti orizzontali dei nodi. Si traccia uno schema del telaio, ove in

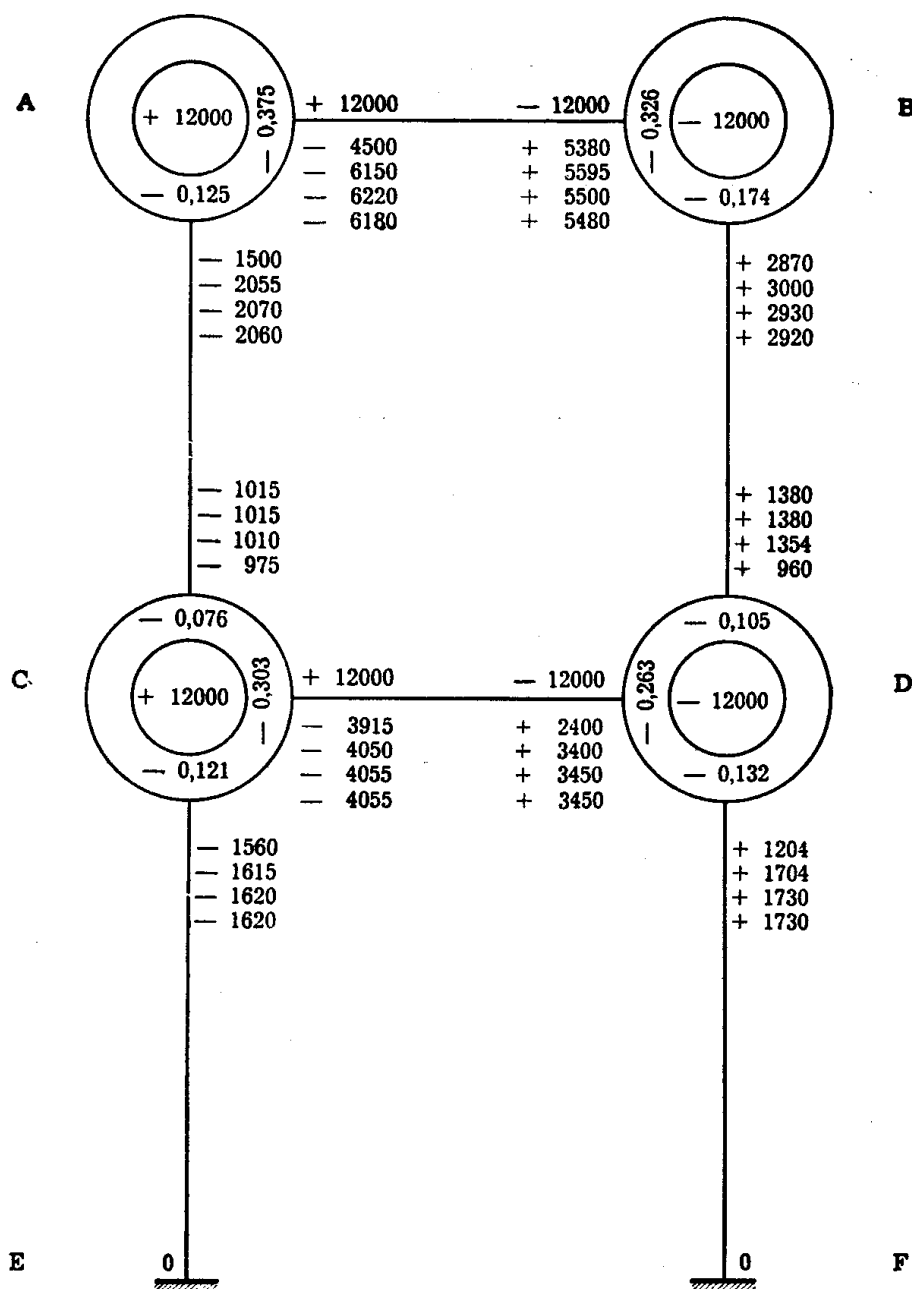


FIG. 9-28

corrispondenza di ogni nodo sono disegnati due cerchi concentrici (fig. 9-28); nel cerchio interno si scrive il valore della $\Sigma_1 \mathcal{M}_{lh}$ relativa al nodo, nella corona circolare i valori dei fattori di rotazione (9-40).

In corrispondenza degli estremi delle travi si riportano i valori delle coppie d'incastro perfetto. Per le travate si consiglia di scrivere questi valori al disopra dell'asse.

In C è, per esempio,

$$\rho_{CA} = 10 \cdot 10^6 \text{ Kgm}$$

$$\rho_{CD} = 40 \cdot 10^6 \quad \gg$$

$$\rho_{CE} = 16 \cdot 10^6 \quad \gg$$

e quindi i fattori di rotazione sono rispettivamente

$$- 0,5 \frac{10}{66} = - 0,076$$

$$- 0,5 \frac{40}{66} = - 0,303$$

$$- 0,5 \frac{16}{66} = - 0,121 ;$$

le coppie d'incastro perfetto si hanno alle estremità dei traversi, e sono pari a

$$\pm 4000 \frac{36}{12} = \pm 12.000 \text{ Kgm} .$$

Si inizia il calcolo da un nodo qualsiasi, per esempio dal nodo A. Si parte da valori nulli per le φ , quindi la sommatoria (9-41) in A si limita alla coppia $+ 12.000 \text{ tm}$; essa si suddivide secondo i due fattori di rotazione in A, e i valori $- 4.500 \text{ Kgm}$ e $- 1.500 \text{ Kgm}$ che ne risultano si scrivono in corrispondenza delle estremità delle travi; per la travata essi si riportano al disotto dell'asse.

Si passa poi al nodo B; qui è

$$\begin{aligned} \Sigma_i \overline{\mathcal{M}}_{ih} + \Sigma_i \mathcal{M}'_{hi} = \\ = - 12.000 - 4.500 = - 16.500 \text{ Kgm} ; \end{aligned}$$

questa somma si ripartisce secondo i fattori di rotazione in B, ottenendo $+ 5.380$ per la trave BA e $+ 2.870$ per la trave BD.

Si sono eseguite le stesse operazioni prima in D e poi in C, e così un ciclo è compiuto.

Lo stesso ciclo si è ripetuto altre volte, finchè cioè i valori delle $\mathcal{M}'$ si sono potuti reputare coincidenti, nell'ordine di approssimazione voluto (terza cifra significativa, nel caso in esame), con quelli del prece-

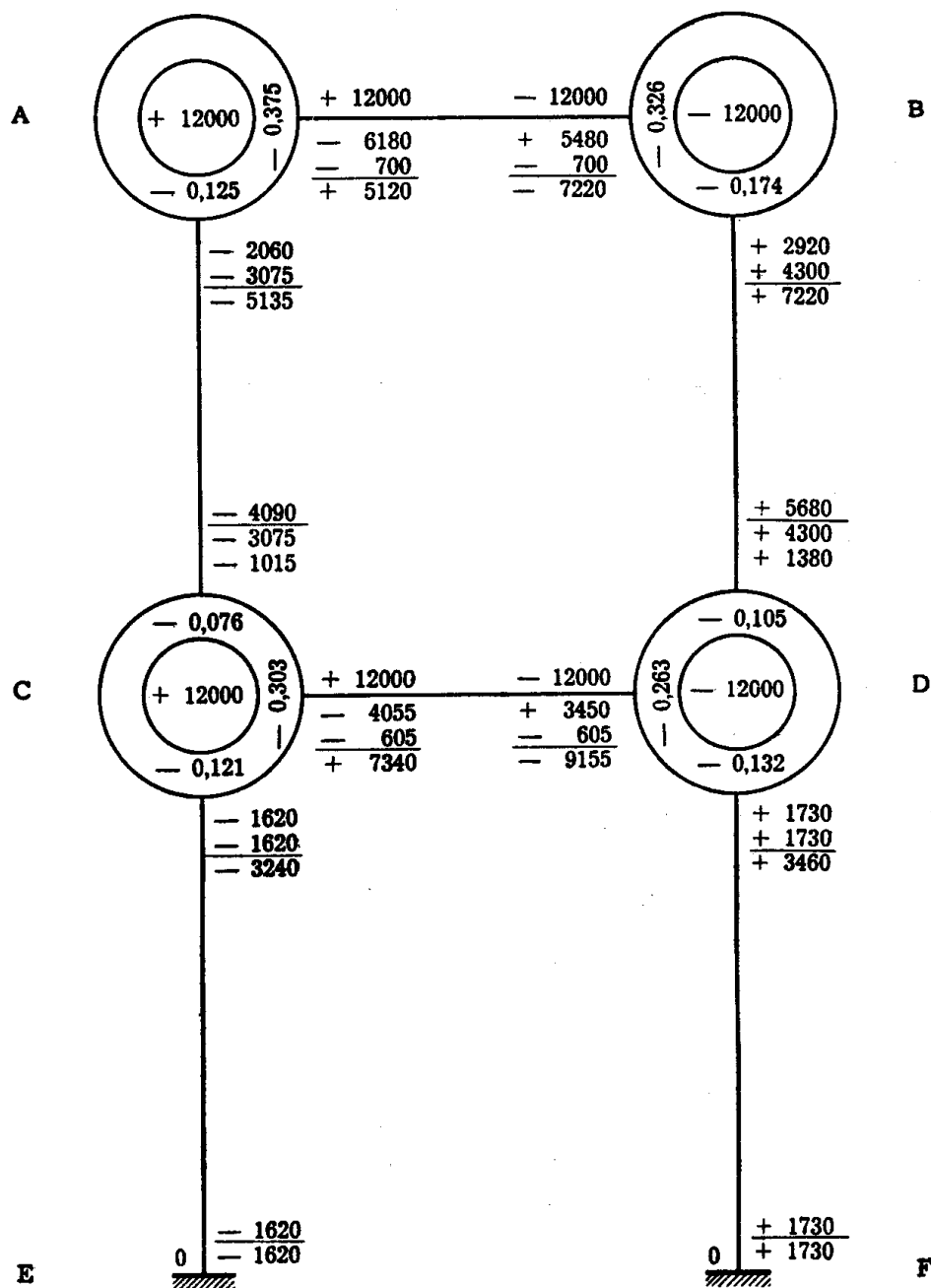


FIG. 9-29

dente ciclo. Il calcolo delle coppie effettive si può esprimere quindi sullo stesso schema; per chiarezza esso si riporta però in schema a parte (fig. 9-29), ove sono scritti solo i valori finali delle $\mathcal{M}'$. Poichè la coppia $\mathcal{M}_{th}$ è

fornita dalla (9-37), per ogni trave ih si sommano i due valori $\mathcal{M}'_{ih}$ ed $\mathcal{M}'_{hi}$ di $\mathcal{M}'$ alle estremità, e si trascrive questa somma alle estremità stesse; si sommano poi in ogni estremo il valore della coppia d'incastro perfetto $\overline{\mathcal{M}}_{ih}$, quello di $\mathcal{M}'_{ih}$, e la somma $\mathcal{M}'_{ih} + \mathcal{M}'_{hi}$, ottenendo la coppia effettiva $\mathcal{M}_{ih}$.

b) *Telai a nodi spostabili formati da travi di sezione costante, in presenza di soli carichi verticali.*

Lo spostamento relativo $\Delta_s - \Delta_r$ tra i due traversi delimitanti il generico piano t , non accompagnato da rotazioni dei nodi, induce agli estremi dei ritti del piano stesso delle coppie d'incastro $\mathcal{M}''_{ih}$; nel caso di ritti a sezione costante è $\mathcal{M}''_{ih} = \mathcal{M}''_{hi}$. La (9-37) si modifica perciò nell'altra.

$$\mathcal{M}_{ih} = \overline{\mathcal{M}}_{ih} + 2\mathcal{M}'_{ih} + \mathcal{M}'_{hi} + \mathcal{M}''_{ih}; \quad (42)$$

il termine $\overline{\mathcal{M}}_{ih}$ tiene conto dei carichi applicati, i termini $\mathcal{M}'$ delle rotazioni dei nodi, il termine $\mathcal{M}''$ degli spostamenti dei trasversi. La (9-38) si modifica nell'altra

$$2 \sum_i \mathcal{M}'_{ih} = - \sum_i \overline{\mathcal{M}}_{ih} - \sum_i (\mathcal{M}'_{hi} + \mathcal{M}''_{ih}); \quad (43)$$

conosciuti perciò i valori di $\mathcal{M}'_{hi}$ e di $\mathcal{M}''_{ih}$ è possibile calcolare gli $\mathcal{M}'_{ih}$ ripartendo la somma $\sum_i \overline{\mathcal{M}}_{ih} + \sum_i (\mathcal{M}'_{hi} + \mathcal{M}''_{ih})$ secondo i fattori di rotazione (9-40)

I valori delle $\mathcal{M}''_{ih}$ relative ai ritti del piano t si ottengono scrivendo l'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale della parte del telaio al disopra di una sezione che tagli tutti i ritti del piano t (fig. 9-30)

$$\sum_i T_{ih} = 0. \quad (44)$$

Poichè è, in presenza di soli carichi verticali,

$$T_{ih} = \frac{\mathcal{M}_{ih} + \mathcal{M}_{hi}}{\ell_{ih}}$$

la (9-44) si scrive, se i ritti sono tutti della stessa altezza (nella fatta ipotesi le coppie d'incastro perfetto sono nulle nei ritti)

$$\sum_i (2\mathcal{M}'_{ih} + \mathcal{M}'_{hi} + \mathcal{M}''_{ih} + 2\mathcal{M}'_{hi} + \mathcal{M}'_{ih} + \mathcal{M}''_{hi}) = 0.$$

Poichè è $\mathcal{M}''_{ih} = \mathcal{M}''_{hi}$, si ha ancora

$$\sum_i [3(\mathcal{M}'_{ih} + \mathcal{M}'_{hi}) + 2\mathcal{M}''_{ih}] = 0$$

e quindi

$$\Sigma_t \mathfrak{M}''_{ih} = -\frac{3}{2} \Sigma_t (\mathfrak{M}'_{ih} + \mathfrak{M}'_{hi}) . \quad (45)$$

Per ottenere la somma delle $\mathfrak{M}''$ relative ai ritti di un piano t generico basta perciò sommare le coppie $\mathfrak{M}'$ agli estremi dei ritti stessi e moltiplicare tale somma per $-3/2$.

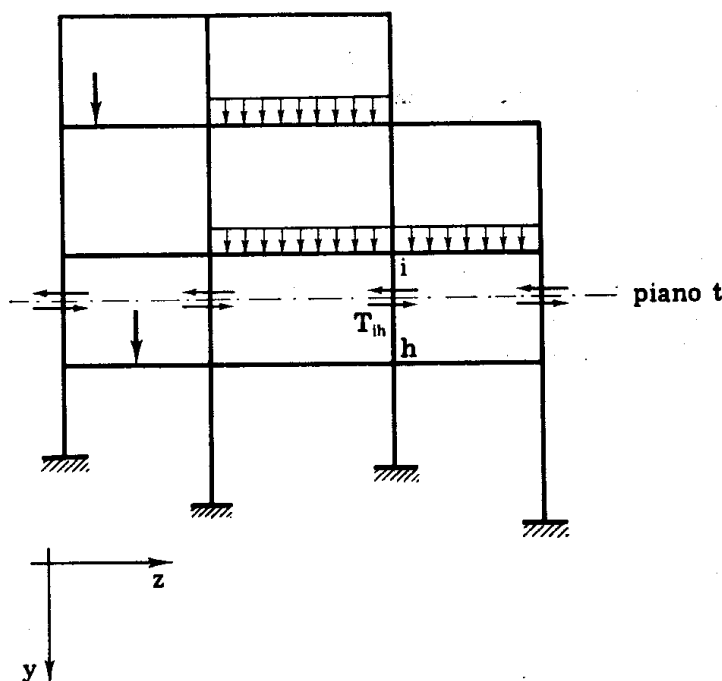


FIG. 9-30

Per suddividere la $\Sigma_t \mathfrak{M}''_{ih}$ tra i ritti del piano t si consideri che lo spostamento δ_t tra le estremità di tali ritti è lo stesso, e quindi può scriversi (8-51)

$$\delta_t = \Delta_s - \Delta_r = \frac{\mathfrak{M}''_{ih} \ell_{ih}^2}{6 E_{ih} I_{ih}} \quad (46)$$

da cui si trae, essendo i ritti tutti della stessa altezza,

$$\mathfrak{M}''_{ih} = \Sigma_t \mathfrak{M}''_{ih} \frac{\rho_{ih}}{\Sigma_t \rho_{ih}} = -\frac{3}{2} \frac{\rho_{ih}}{\Sigma_t \rho_{ih}} \Sigma_t (\mathfrak{M}'_{ih} + \mathfrak{M}'_{hi}) . \quad (47)$$

I numeri

$$-\frac{3}{2} \frac{\rho_{ih}}{\Sigma_t \rho_{ih}} \quad (48)$$

si chiamano *fattori di spostamento* relativi al piano generico t ; la loro somma è pari a $-3/2$.

Se i ritti sono di altezza diversa, le (9-45) e (9-47) si scrivono:

$$\Sigma_t \frac{\mathfrak{N}''_{ih}}{\ell_{ih}} = - \frac{3}{2} \Sigma_t \left(\frac{\mathfrak{N}'_{ih} + \mathfrak{N}'_{hi}}{\ell_{ih}} \right) \quad (45')$$

$$\mathfrak{N}''_{ih} = \Sigma_t \left(\mathfrak{N}''_{ih} \frac{\ell}{\ell_{ih}} \right) \frac{\rho_{ih} \frac{\ell}{\ell_{ih}}}{\Sigma \left(\rho_{ih} \frac{\ell}{\ell_{ih}} \right)} \quad (47')$$

ove ℓ è una lunghezza di riferimento.

Le (9-45) (9-45') valgono se i ritti del piano t sono incastrati in ambedue gli estremi; se invece tutti i ritti del piano t sono incernierati ad un estremo (cioè in genere può accadere per i ritti del piano terra) è

$$T_{ih} = \frac{\mathfrak{N}_{ih}}{\ell_{ih}}$$

da cui si trae, per ritti tutti della stessa altezza,

$$\Sigma_t (2 \mathfrak{N}'_{ih} + \mathfrak{N}''_{ih}) = 0$$

$$\Sigma_t \mathfrak{N}''_{ih} = - 2 \Sigma_t \mathfrak{N}'_{ih} .$$

In tal caso i fattori di spostamento sono forniti da

$$- 2 \frac{\rho_{ih}}{\Sigma_t \rho_{ih}} .$$

Nella fig. 9-31 è riportato il calcolo del telaio già trattato trascurando l'effetto degli spostamenti dei nodi; i fattori di spostamento sono riportati lungo i ritti, sulla sinistra di ciascuno. Per i due ritti superiori si hanno, per esempio, i due fattori

$$- \frac{3}{2} \frac{10}{26} = - 0,578$$

$$- \frac{3}{2} \frac{16}{26} = - 0,922 .$$

Effettuando un primo calcolo delle coppie $\mathfrak{M}'$ — e questo coincide con il ciclo della fig. 9-28 — si sono tratte in prima approssimazione le

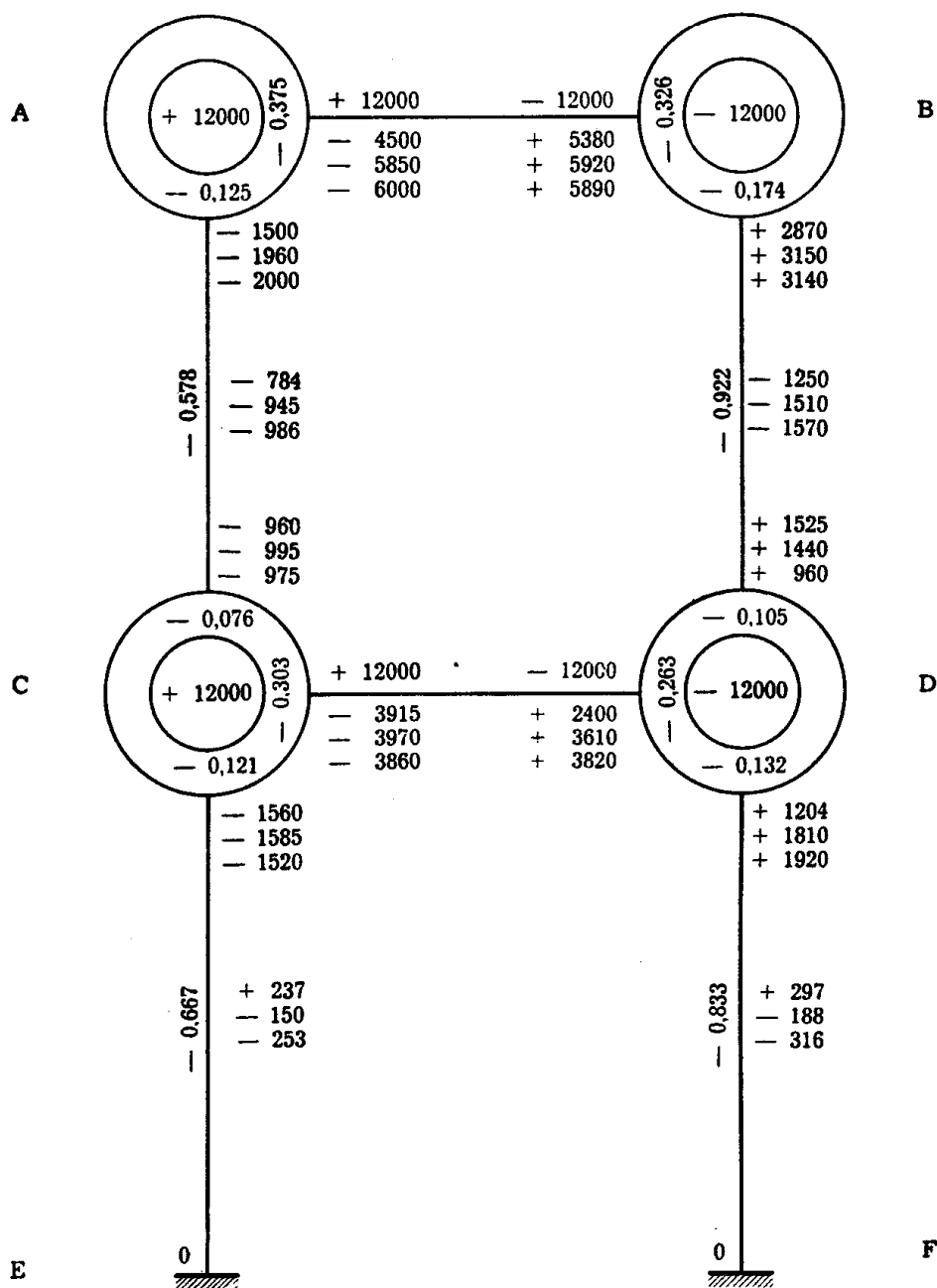


FIG. 9-31

coppie $\mathfrak{M}''$. Per i due ritti superiori, per esempio, risulta

$$\Sigma_t (\mathfrak{M}'_{ih} + \mathfrak{M}'_{hl}) = + 1355 \text{ tm} ,$$

e quindi le due coppie $\mathfrak{M}''$ sono rispettivamente pari a -784 tm per il

ritto di sinistra e -1250 per quello di destra; questi valori si scrivono al centro del ritto relativo, sulla destra.

Si calcolano così gli $\mathcal{M}''$ anche per i due ritti inferiori; poi si esegue

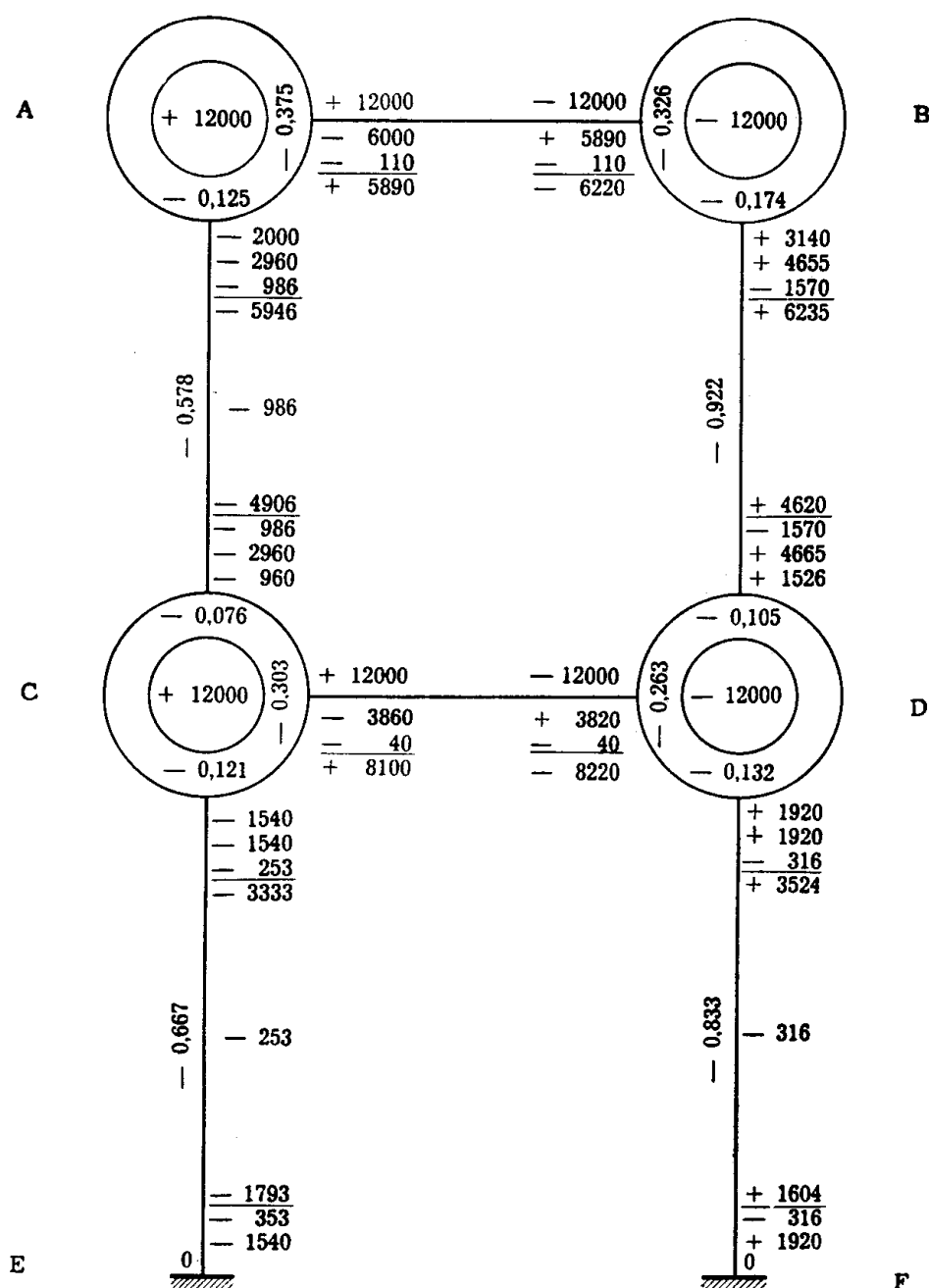


FIG. 9-32

un secondo ciclo di calcolo degli $\mathcal{M}'$ attraverso la (9-43); poi un secondo ciclo di calcolo degli $\mathcal{M}''$; il procedimento si è arrestato al terzo ciclo. Il calcolo delle coppie finali è riportato nella fig. 9-32; esso è analogo a quanto eseguito nella fig. 9-29 per quel che riguarda i traversi, mentre per i ritti si è considerata, nella somma, anche la coppia $\mathcal{M}''$.

c) *Telai con nodi spostabili formati da travi di sezione costante, in presenza di carichi qualsiasi: principio di equivalenza.*

Si precisa innanzitutto che le rotazioni φ dei nodi e gli spostamenti Δ dei traversi in un telaio non variano se ai carichi effettivi si sostituiscono le coppie $\overline{\mathcal{M}}$ e le reazioni $\overline{R}$ di incastro perfetto cambiate di segno. E infatti se i nodi sono costretti, da vincoli aggiunti, all'immobilità, le φ e i Δ sono nulli, mentre i vincoli esercitano sul nodo le reazioni $\overline{\mathcal{M}}$ ed $\overline{R}$; la condizione reale è data dalla somma di questa ora descritta, e di quella connessa con le coppie $-\Sigma_i \overline{\mathcal{M}}_{ih}$ e con le forze $-\Sigma_i \overline{R}_i$ agenti nei nodi, e solo a quest'ultima sono dovuti i φ e i Δ , nulli nella prima. E' questo il cosiddetto *principio di equivalenza*. Si sostituiscono perciò ai carichi effettivi agenti sul telaio (fig. 9-33) le coppie $-\overline{\mathcal{M}}_{ih}$ e le forze $-\overline{R}_i$ agenti

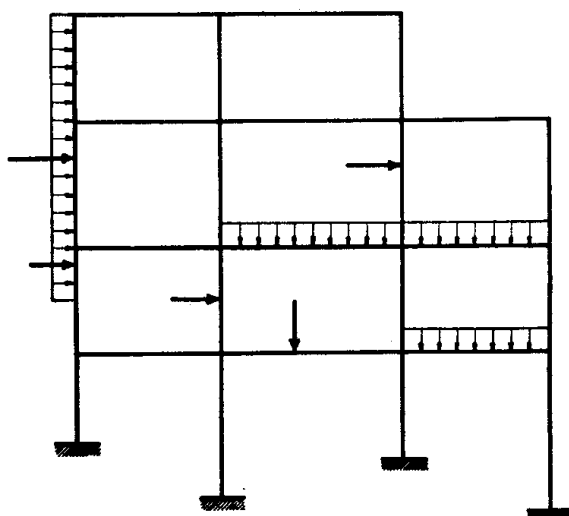


FIG. 9-33

in adiacenza dei nodi i sui traversi r (fig. 9-34); nel caso in esame le reazioni verticali non hanno influenza sui valori di φ e Δ , perchè si trascura la variazione di lunghezza delle aste, e per lo stesso motivo tutte le $-\overline{R}_i$ relative ad un traverso r possono sommarsi tra loro e con la forza eventualmente applicata al traverso stesso, e la somma $\overline{H}_r$ può suppersi agente in un punto generico dell'asse del traverso stesso (*).

La (9-44) si muta nell'altra

$$\Sigma_t T_{ih} = \Sigma_{r=1}^t \overline{H}_r . \quad (49)$$

(*) Si osservi che alla coppia $-\overline{\mathcal{M}}_i$ applicata sulla trave in adiacenza dell'incastro corrisponde una coppia di incastro perfetto pari a $\overline{\mathcal{M}}_i$; è quindi sempre $\overline{\mathcal{M}}_i$ che occorre scrivere all'estremo della trave prima di iniziare il calcolo.

La somma delle reazioni $\bar{H}_r$ dei traversi situati al disopra del piano t si chiama *taglio relativo al piano t* , e si indica con il simbolo T_t :

$$\sum_{r=1}^t \bar{H}_r = T_t . \quad (50)$$

La (9-49) si scrive perciò

$$\sum_t T_{ih} = T_t . \quad (51)$$

Dalla (9-51) si trae, se tutti i ritti del generico piano t hanno la stessa altezza l_t ,

$$T_t l_t = \sum_t (\mathfrak{M}_{ih} + \mathfrak{M}_{hl}) = \sum_t [3 (\mathfrak{M}'_{ih} + \mathfrak{M}'_{hl}) + 2 \mathfrak{M}''_{ih}] ;$$

è perciò

$$\sum_t \mathfrak{M}''_{ih} = - \frac{3}{2} \left[- \frac{T_t l_t}{3} + \sum_t (\mathfrak{M}'_{ih} + \mathfrak{M}'_{hl}) \right] . \quad (52)$$

Il procedimento da seguire è identico a quello esposto al numero prece-

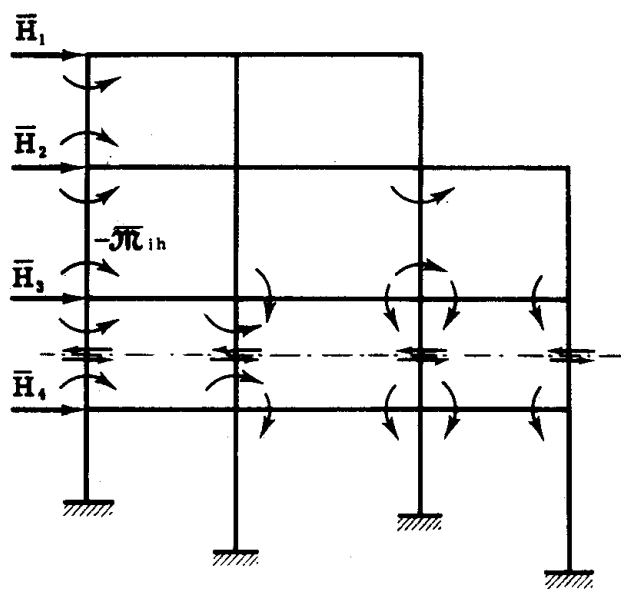


FIG. 9-34

dente, con la sola differenza che, nella determinazione delle coppie dovute allo spostamento, è necessario aggiungere alla somma delle coppie $\mathfrak{M}'$ relative alle estremità dei ritti del piano t , il momento $-\frac{T_t l_t}{3}$, che si chiama comunemente *momento di piano* relativo al piano t .

Si consideri il telaio già preso in esame negli esempi precedenti, caricato da una forza orizzontale di 3 t in corrispondenza del traverso superiore

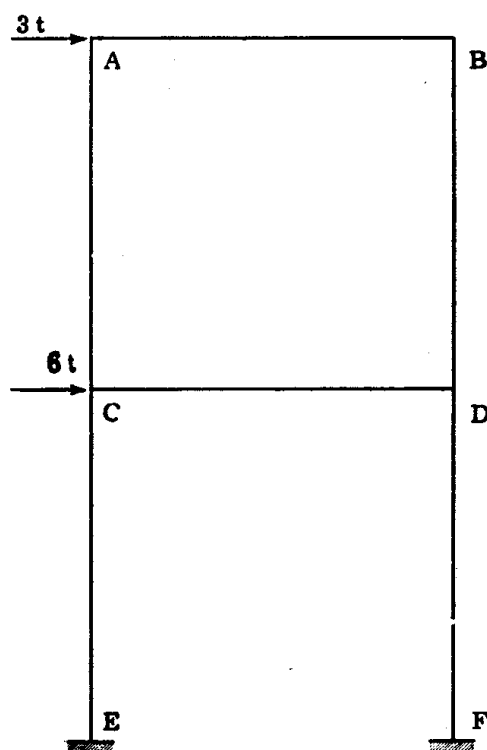


FIG. 9-35

periore, e da una forza orizzontale di 6 t in corrispondenza del traverso inferiore (fig. 9-35); risultano tutte le $\overline{M}_{ih}$ nulle, e $\overline{H}_1 = 3 t$, $\overline{H}_2 = 6 t$. E' perciò

$$T_1 = 3 t$$

$$T_2 = 9 t ,$$

ed i momenti di piano valgono rispettivamente

$$- \frac{3 \cdot 6}{3} = - 6 \text{ tm}$$

$$- \frac{9 \cdot 6}{3} = - 18 \text{ tm} .$$

Questi momenti si segnano, chiusi in un rettangolo, sulla sinistra del telaio, in corrispondenza di ciascun piano (fig. 9-36). Si determinano prima gli $\mathcal{M}''$, iniziando dai ritti del piano superiore; poichè all'inizio del proce-

dimento gli $\mathcal{M}'$ sono nulli, si ripartisce il momento di piano — 6 tm, secondo i coefficienti — 0,578 e — 0,922, ottenendo + 3470 Kgm per il ritto di sinistra, e + 5530 Kgm per il ritto di destra. Analogamente si opera per

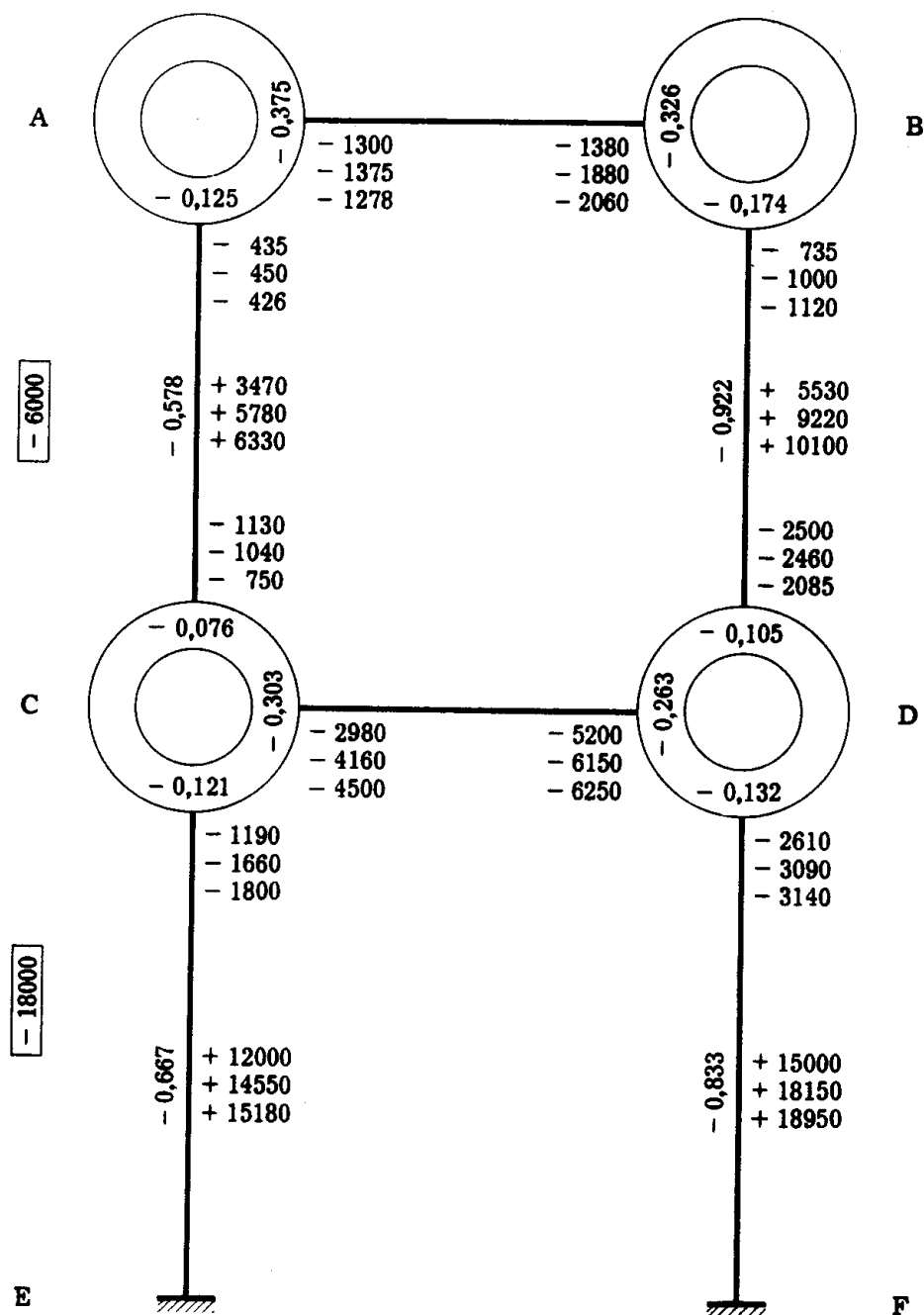


FIG. 9-36

il piano inferiore. Ottenuti così in prima approssimazione i valori degli $\mathcal{M}''$, si passa al calcolo in prima approssimazione degli $\mathcal{M}'$. Si inizia dal nodo A, ripartendo il momento 3470 Kgm secondo i coefficienti — 0,375

e $-0,125$; si ottiene così -1300 Kgm per il traverso e -435 per il ritto. Si passa poi al nodo B, ripartendo la somma $+5530 - 1300 = 4230$ Kgm secondo i coefficienti $-0,326$ e $-0,174$; si ottiene -1380 Kgm per il traverso e -735 Kgm per il ritto. Calcolati in prima approssimazione

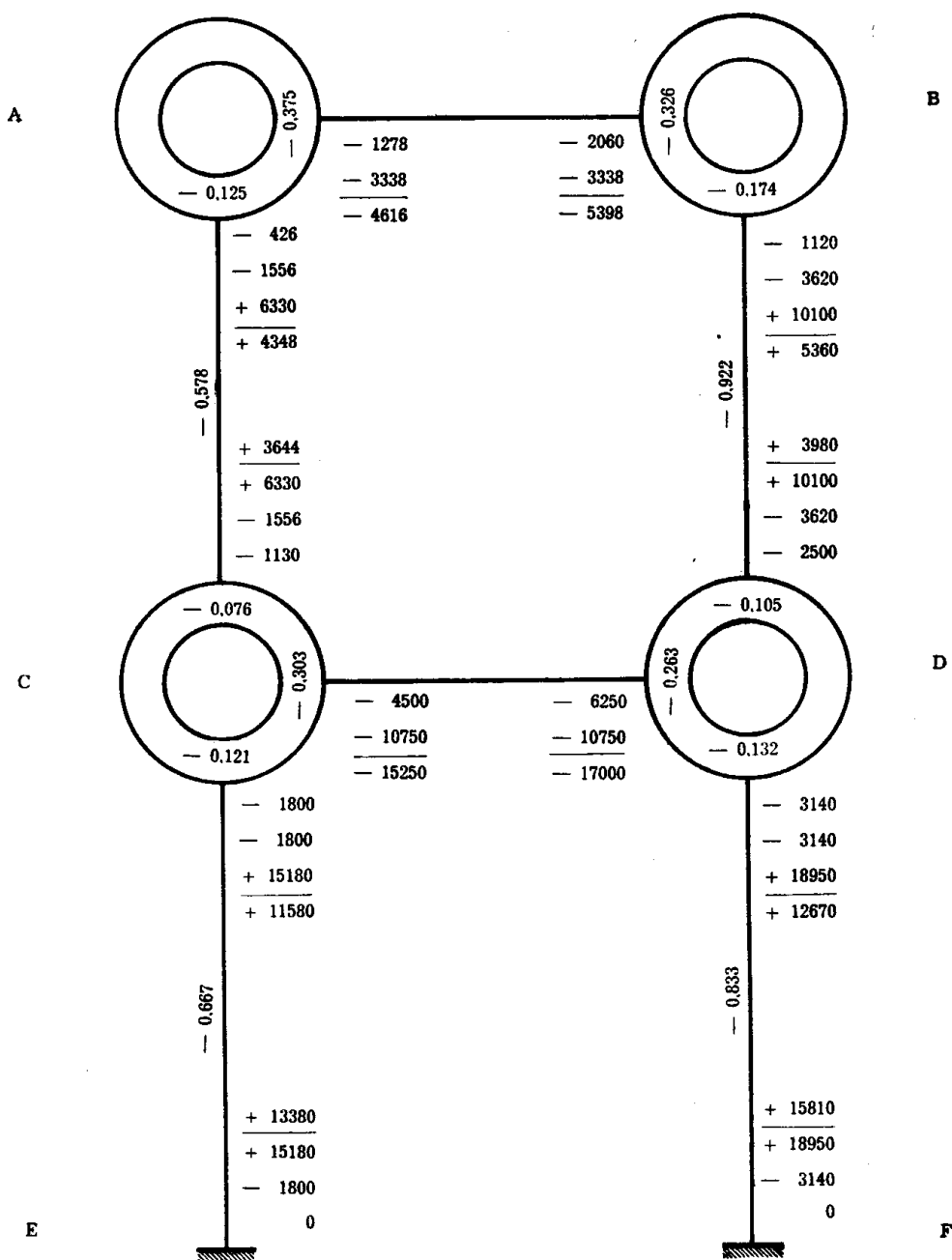


FIG. 9-37

gli $\mathcal{M}'$ anche nei nodi D e C, si esegue il calcolo degli $\mathcal{M}''$ in seconda approssimazione, utilizzando in questa fase gli $\mathcal{M}'$; per il piano superiore; per esempio, la somma $-6000 - 435 - 750 - 735 - 2085 = -10.005$ Kgm

si ripartisce tra i due ritto ottenendo $+ 5780$ per il ritto di sinistra e $+ 9220$ per il ritto di destra. Giunti all'approssimazione voluta, si determinano le coppie di incastro come negli esercizi precedenti (fig. 9-37); nella fig. 9-38 è riportato il diagramma del momento.

Del tutto analogo a quelli ora esaminati è il caso dei telai formati da travi di sezione variabile; per esso però si rimanda alla pubblicazione originale, o alla sua ottima traduzione in francese [18].

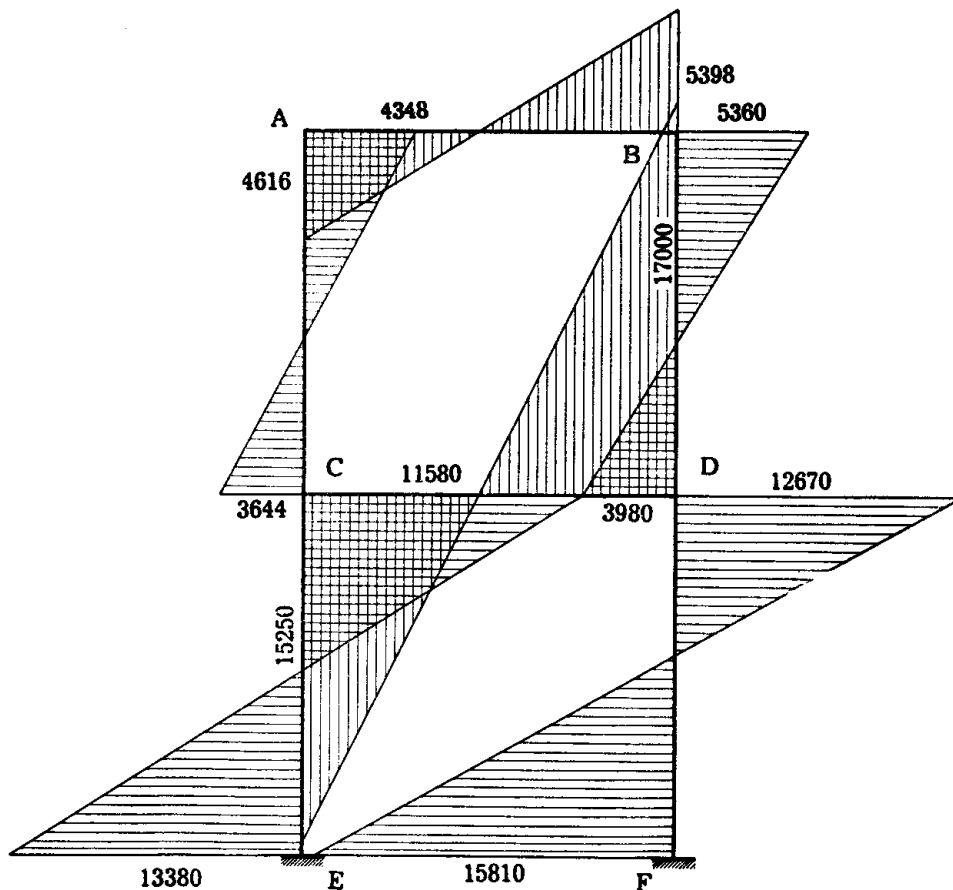


FIG. 9-38

Vantaggio precipuo del procedimento del Kani è la automaticità molto spinta, e la possibilità di eliminare un eventuale errore nel corso del ciclo seguente a quello in cui l'errore è stato commesso. Inoltre, se si parte da valori non nulli, e piuttosto prossimi al vero, delle coppie M' ed M'' , il procedimento di calcolo diviene molto più rapido; ciò si verifica per esempio se si modificano le sezioni di qualche trave dopo aver già eseguito il calcolo del telaio. Infine, la verifica del procedimento può essere fatta sui soli valori finali, ai quali perciò si limita l'elaborato di progetto.

7. Il procedimento di Cross.

Il metodo di *Hardy Cross* (1930) può intendersi anch'esso come un procedimento di risoluzione per successive approssimazioni delle equazioni di equilibrio di Gehler; esso però, a differenza del procedimento di Kani, si giustifica attraverso uno schema di immediata intuizione. Il metodo di Cross è un caso particolare del più generale « *metodo del rilassamento* » del *Southwell*; in esso ogni operazione numerica ha un chiaro significato fisico.

a) Telai a nodi fissi.

Si bloccano tutti i nodi con morsetti fittizi che ne impediscono le rotazioni. Nel telaio così vincolato le coppie di reazione alle estremità delle travi $i h$ sono quelle di incastro perfetto $\overline{\mathcal{M}}_{ih}$ ed $\overline{\mathcal{M}}_{hi}$ dovute a carichi e distorsioni; il generico morsetto i -esimo è soggetto alla coppia $\mathcal{M}_i = -\sum_h \overline{\mathcal{M}}_{ih}$. Per ricondursi al telaio effettivo occorre rimuovere i morsetti; questa operazione si effettua nella maniera che segue. Si consideri il generico morsetto i ; si rimuova soltanto questo, in modo che in tutti gli altri nodi sia ancora impedita la rotazione. Rimuovendo il morsetto i oc-

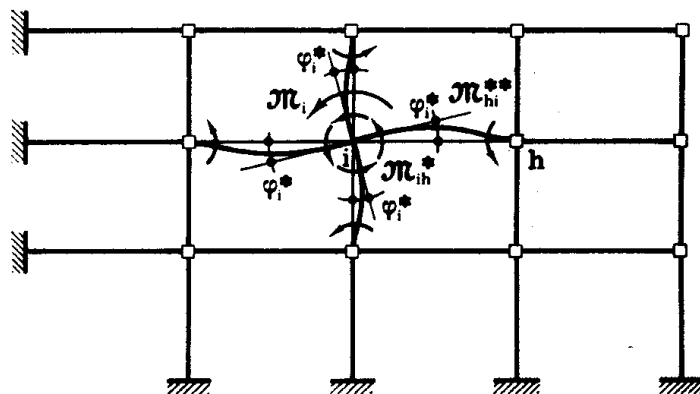


FIG. 9-39

corre applicare al nodo i la coppia $\mathcal{M}_i$ che prima era supportata dal morsetto; il nodo i ruota di un angolo φ_i^* , e agli estremi i delle travi $i h$ concorrenti in i si destano per effetto di φ_i^* le coppie $\mathcal{M}_{ih}^*$ (fig. 9-39). Poiché si ha

$$\frac{\mathcal{M}_{ih}^*}{\rho_{ih}} = \varphi_i^* = \text{cost}$$

$$\sum_i \mathcal{M}_{ih}^* = \mathcal{M}_i$$

si trae

$$\frac{\mathcal{M}_{ih}^*}{\rho_{ih}} = \frac{\sum_i \mathcal{M}_{ih}^*}{\sum_i \rho_{ih}} = \frac{\mathcal{M}_i}{\sum_i \rho_{ih}}$$

da cui

$$\mathcal{M}_{ih}^* = \mathcal{M}_i \frac{\rho_{ih}}{\sum_i \rho_{ih}} . \quad (53)$$

La quantità

$$\tau_{ih} = \frac{\rho_{ih}}{\sum_i \rho_{ih}} \quad (54)$$

si chiama *coefficiente di ripartizione* relativo al nodo i ed alla trave ih ; è perciò

$$\mathcal{M}_{ih}^* = \mathcal{M}_i \tau_{ih} . \quad (55)$$

La somma dei coefficienti di ripartizione relativi al generico nodo i è pari all'unità. Assieme alle coppie $\mathcal{M}_{ih}^*$ in corrispondenza delle sezioni adiacenti ad i , sorgono le coppie $\mathcal{M}_{hi}^{**}$ in corrispondenza delle sezioni h opposte ad i ; si è già tratto (§ 9-4)

$$\mathcal{M}_{hi}^{**} = \mathcal{M}_{ih}^* t_{ih} , \quad (56)$$

ove t_{ih} è il *coefficiente di trasmissione* da i ad h .

Le coppie $\mathcal{M}^*$ si chiamano *coppie ripartite*, le coppie $\mathcal{M}^{**}$ *coppie trasmesse*.

Effettuate le suddette operazioni sul nodo i , si blocca di nuovo i , e si passa ad un altro nodo, per esempio quello adiacente h (fig. 6-39). Il morsetto in h è soggetto alla coppia

$$\mathcal{M}_h = - \sum_k \overline{\mathcal{M}}_{hk} - \mathcal{M}_{hi}^{**} ;$$

tale coppia deve ripartirsi secondo i coefficienti di ripartizione τ_{hk} in h , ripetendo le stesse operazioni già effettuate in i .

Si blocca poi il nodo h , e si passa ad un altro nodo, ripetendo le stesse operazioni di ripartizione e di trasmissione.

Si opera così successivamente, sbloccando un nodo alla volta, e ripartendo in ogni nodo la somma cambiata di segno delle coppie $\overline{\mathcal{M}}$ ed $\mathcal{M}^{**}$ relative al nodo stesso, e non ancora ripartite.

Il procedimento si arresta quando le coppie $\mathcal{M}^{**}$ risultano sufficien-

temente piccole rispetto alle $\mathcal{M}$ effettive, in relazione al desiderato grado di approssimazione.

Si riporta come esempio la stessa struttura della fig. 9-21, considerata a nodi fissi; i coefficienti di ripartizione sono scritti nella fig. 9-40, nella quale è riportato lo schema del telaio; sullo stesso schema sono riportate le coppie di incastro perfetto ± 12.000 Kgm agli estremi dei traversi AB e CD. Si inizia dal nodo A, ripartendo la coppia $\mathcal{M}_A =$

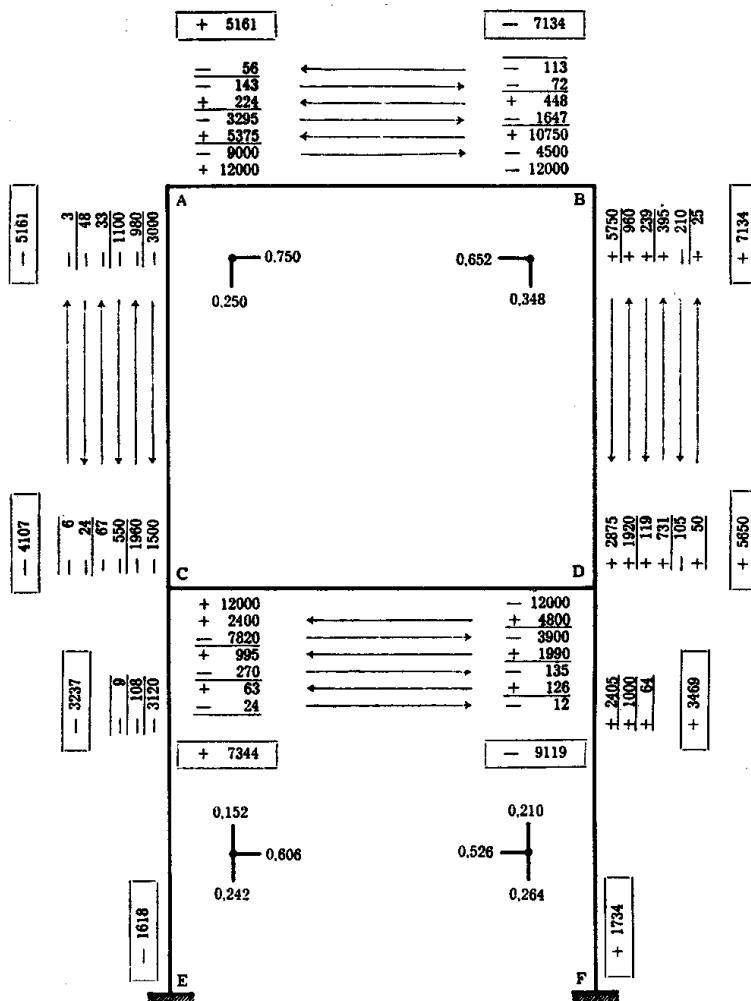


FIG. 9-40

$= -12.000$ Kgm secondo i coefficienti $0,750$ e $0,250$; si ottengono così le coppie ripartite $\mathcal{M}_{AC}^* = -3.000$ per il ritto ed $\mathcal{M}_{AB}^* = -9.000$ per il traverso. La coppia -9.000 si segna sulla coppia $+12.000$, la coppia -3.000 si segna in verticale. Al disopra di -9.000 e -3.000 si segna un tratto, per indicare che l'operazione di ripartizione in A è stata eseguita; nei futuri cicli, in A non dovranno più ripartirsi le coppie al disotto dei tratti. Contemporaneamente sorgono in B e C le coppie trasmesse. Nel caso in esa-

me, poichè le travi sono di sezione costante tra nodo e nodo, è ovunque $t_{lh} = t_{hl} = 1/2$, e non c'è bisogno di scrivere questi valori — come invece è uso fare trattando schemi con travi a sezione variabile — in corrispondenza delle travi cui si riferiscono. E' perciò

$$\mathcal{M}_{CA}^{**} = - \frac{3.000}{2} = - 1.500 \text{ kgm}$$

$$\mathcal{M}_{BA}^{**} = - \frac{9.000}{2} = - 4.500 \text{ kgm} ;$$

questi valori si segnano in corrispondenza degli estremi corrispondenti, in verticale il primo e in orizzontale il secondo; spesso una freccia indica la coppia $\mathcal{M}^*$ da cui la $\mathcal{M}^{**}$ proviene; il verso della freccia è quello $\mathcal{M}^* \mathcal{M}^{**}$.

Si passa poi al nodo B, ove va ripartita la coppia $\mathcal{M}_A = - (-12.000 - 4.500) = +16.500$ Kgm secondo i coefficienti di 0,652 e 0,348, ottenendo $\mathcal{M}_{BA}^* = +10.750$ Kgm ed $\mathcal{M}_{BD}^* = +5.750$ Kgm; eseguita la ripartizione, si segnano al solito dei tratti; poi si scrivono i valori delle coppie trasmesse $\mathcal{M}_{AB}^{**} = +5.375$ Kgm ed $\mathcal{M}_{DB}^{**} = +2.875$ Kgm. Si ripartisce poi in D la coppia $\mathcal{M}_D = - (-12.000 + 2.875) = +9.125$ Kgm, ottenendo $\mathcal{M}_{DB}^* = +1.920$ Kgm, $\mathcal{M}_{DC}^* = +4.800$ Kgm, $\mathcal{M}_{DF}^* = +2.405$ Kgm, ed $\mathcal{M}_{BD}^{**} = +960$ Kgm, $\mathcal{M}_{CD}^{**} = +2.400$ Kgm; è inutile segnare $\mathcal{M}_{FD}^{**} = +1.202$, perchè in F non si devono eseguire ripartizioni.

Infine si ripartisce in C la coppia $\mathcal{M}_C = - (+12.000 + 2.400 - 1.500) = -12.900$ Kgm, ottenendo $\mathcal{M}_{CA}^* = -1.960$ Kgm, $\mathcal{M}_{CD}^* = -7.820$ Kgm, $\mathcal{M}_{CE}^* = -3.120$ Kgm, ed $\mathcal{M}_{AC}^{**} = -980$ Kgm, $\mathcal{M}_{DC}^{**} = -3.900$ Kgm.

E' così compiuto un primo ciclo di ripartizioni. Nel secondo ciclo si ricomincia dal nodo A; è opportuno, ma non necessario, ripercorrere nei cicli successivi i nodi sempre nello stesso ordine. In A si ripartisce la coppia $\mathcal{M}_A = - (+5.375 - 980) = -4.395$ Kgm; si ha così $\mathcal{M}_{AB}^* = -3.295$ Kgm, $\mathcal{M}_{AC}^* = -1.100$ Kgm, ed $\mathcal{M}_{BA}^{**} = -1.647$ Kgm, $\mathcal{M}_{CA}^{**} = -550$ Kgm. Si procede così, come nel primo ciclo, completandone un secondo ed un terzo; ci si ferma al terzo, perchè le coppie $\mathcal{M}_{lh}^{**}$ diventano trascurabili rispetto alle $\mathcal{M}_{lh}$ effettive. Per ottenere i valori delle coppie $\mathcal{M}_{lh}$ effettive basta sommare ad ogni estremo i valori della $\overline{\mathcal{M}}_{lh}$, delle $\mathcal{M}_{lh}^*$ e delle $\mathcal{M}_{lh}^{**}$, che già si trovano incolonnate.

b) Telai a nodi spostabili.

Molti sono i procedimenti proposti per estendere il procedimento di Cross ai telai con nodi spostabili; di essi il più generale, e di più immediata percezione fisica, ci sembra quello cosiddetto dei *vincoli supplemen-*

Si imprima il cedimento Δ al vincolo in B; nella ipotesi che i nodi siano

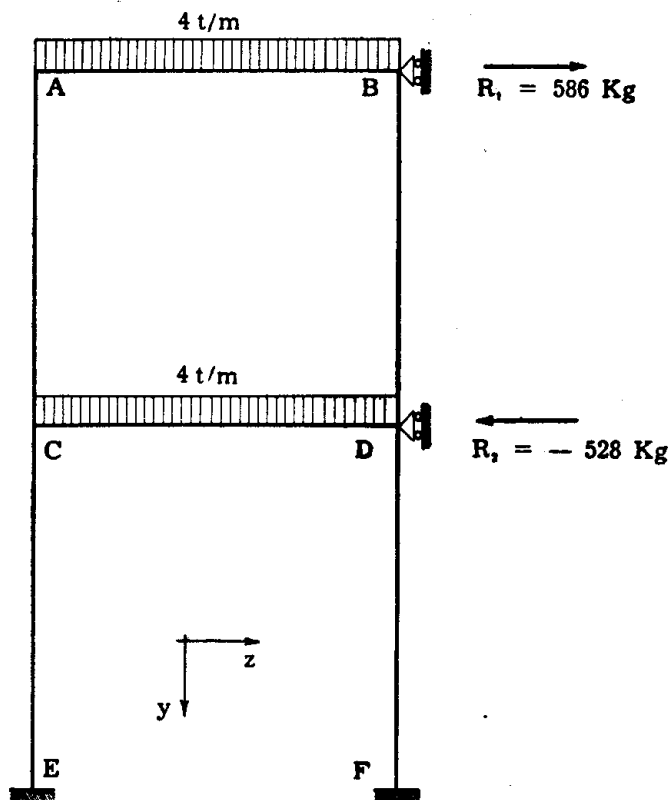


FIG. 9-41

impediti di ruotare, alle estremità del ritto AC sorgono le coppie di incastro

$$\frac{6 EI \Delta}{l^2} = \pm \rho \frac{3}{2l} \Delta = 2,5 \cdot 10^6 \Delta \text{ Kgm} ,$$

ed alle estremità del ritto BD le coppie

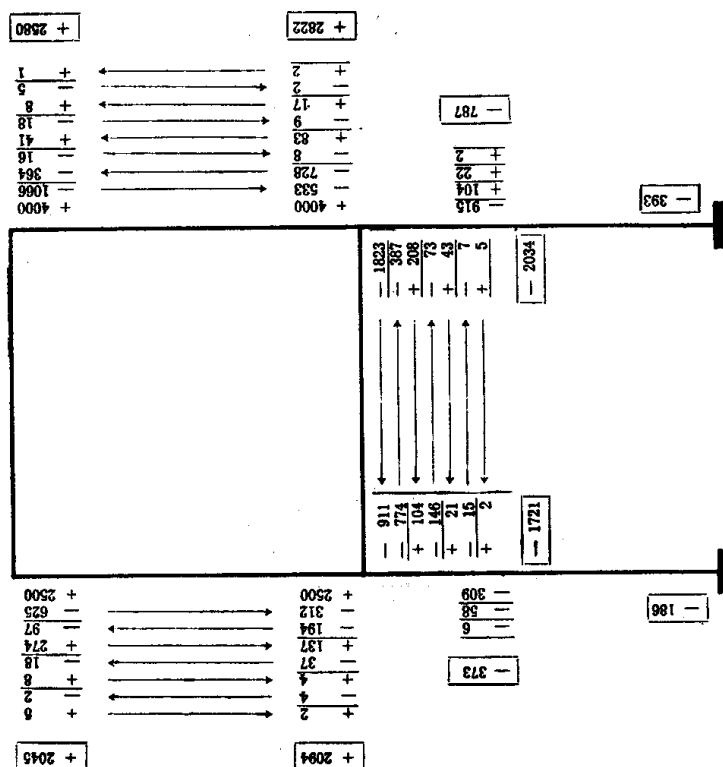
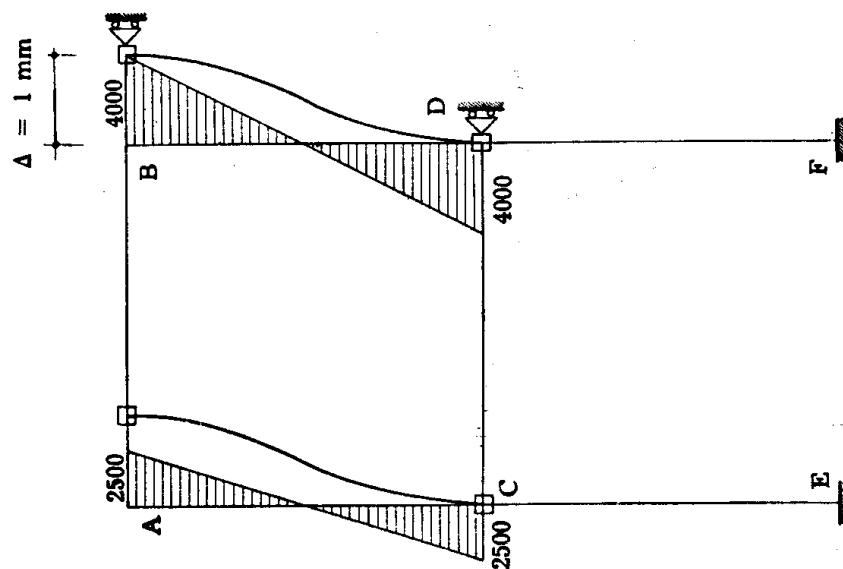
$$4 \cdot 10^6 \Delta \text{ Kgm} .$$

Nell'ipotesi $\Delta = 1 \text{ mm}$ (fig. 9-42) risulta

$$\mathcal{M}_{AC} = \mathcal{M}_{CA} = 2.500 \text{ Kgm}$$

$$\mathcal{M}_{BD} = \mathcal{M}_{DB} = 4.000 \text{ Kgm} .$$

Diffondendo tali coppie alla Cross (fig. 9-43) si ottengono le coppie dovute al cedimento $\Delta = 1 \text{ mm}$ in B; i relativi momenti sono riportati nella fig. 9-44. Le reazioni R_{11} ed R_{21} , calcolate come nel precedente caso,



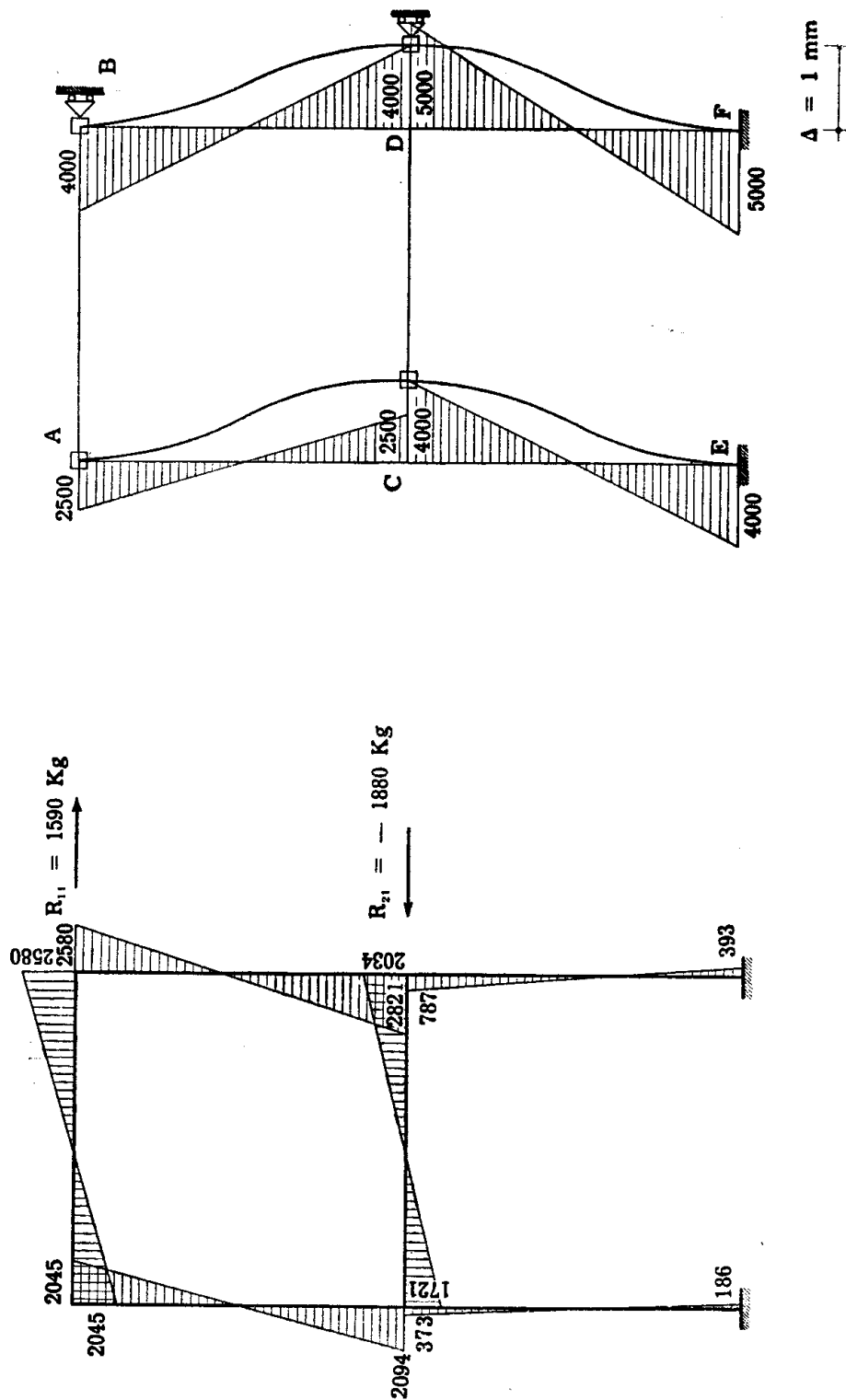


FIG. 9-45

sono fornite da

$$R_{11} = 1.590 \text{ Kg}$$

$$R_{21} = -1.880 \text{ Kg}.$$

Si imprime poi il cedimento $\Delta = 1 \text{ mm}$ al vincolo in D; nell'ipotesi di nodi impediti di ruotare sorgono le coppie (fig. 9-45)

$$\mathcal{M}_{AC} = \mathcal{M}_{CA} = -2.500 \text{ Kgm}$$

$$\mathcal{M}_{BD} = \mathcal{M}_{DB} = -4.000 \text{ »}$$

$$\mathcal{M}_{CE} = \mathcal{M}_{EC} = 4.000 \text{ »}$$

$$\mathcal{M}_{DF} = \mathcal{M}_{FD} = 5.000 \text{ »}.$$

Si diffondono tali coppie alla Cross (fig. 9-46) ottenendo le coppie dovute

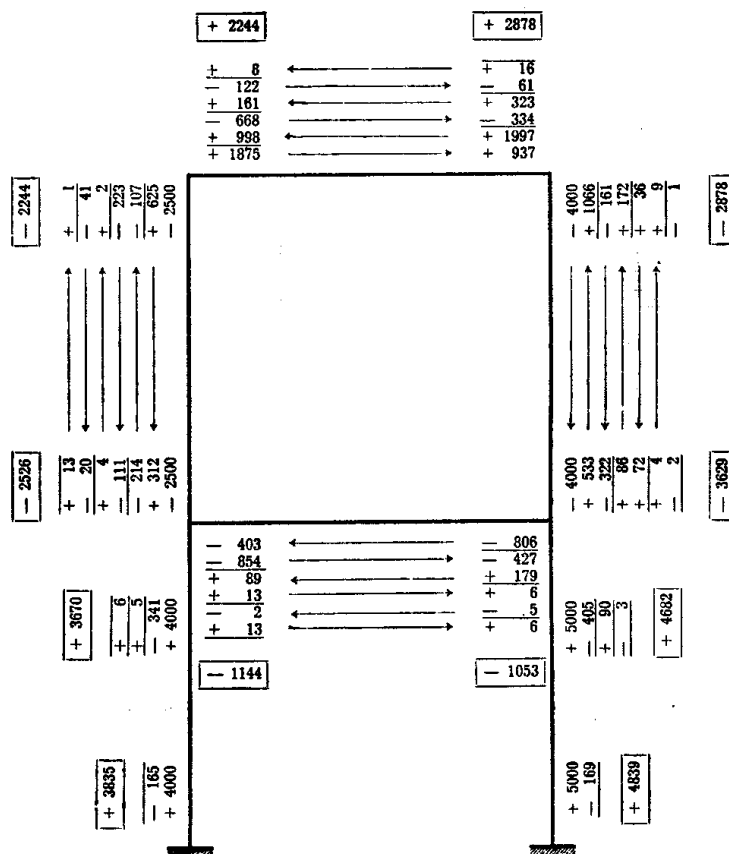


FIG. 9-46

al cedimento $\Delta = 1 \text{ mm}$ in D; i relativi momenti sono riportati nella fig. 9-47. Le reazioni R_{12} ed R_{22} sono

$$R_{12} = -1.880 \text{ Kg}$$

$$R_{22} = 4.717 \text{ Kg}.$$

Il sistema (9-57) si scrive

$$\alpha_1 1.590 - \alpha_2 1.880 = - 586$$

$$- \alpha_1 1.880 + \alpha_2 4.717 = 528$$

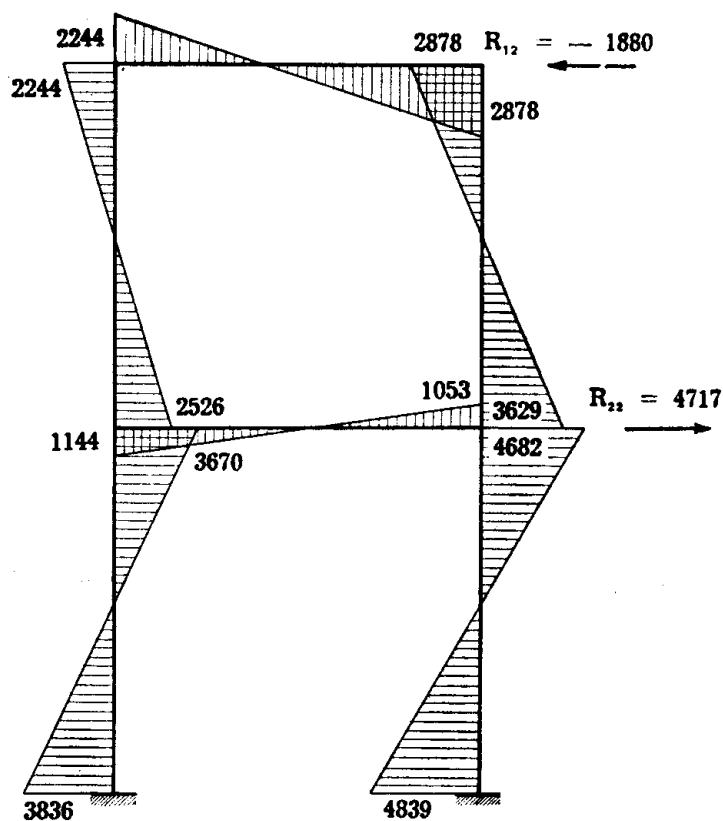


FIG. 9-47

la cui soluzione è

$$\alpha_1 = - 0,4467$$

$$\alpha_2 = - 0,0661$$

Le coppie d'incastro hanno perciò i valori che seguono

$$\mathcal{M}_{AB} = + 5.161 + 913 - 148 = + 5.926 \text{ Kgm}$$

$$\mathcal{M}_{AC} = - 5.161 - 913 + 148 = - 5.926 \text{ »}$$

$$\mathcal{M}_{BA} = - 7.134 + 1.152 - 190 = - 6.172 \text{ »}$$

$$\mathcal{M}_{BD} = + 7.134 - 1.152 + 190 = + 6.172 \text{ »}$$

$$\mathcal{M}_{CA} = - 4.107 - 935 + 167 = - 4.875 \text{ »}$$

$$\mathcal{M}_{CD} = + 7.344 - 768 + 76 = + 8.188 \text{ »}$$

$$\mathcal{M}_{CE} = - 3.237 + 167 - 242 = - 3.312 \text{ »}$$

$$\mathcal{M}_{DB} = + 5.650 - 1.260 + 240 = + 4.630 \text{ Kgm}$$

$$\mathcal{M}_{DC} = - 9.119 + 908 + 69 = - 8.142 \quad »$$

$$\mathcal{M}_{DF} = + 3.469 + 351 - 309 = + 3.511 \quad »$$

$$\mathcal{M}_{EC} = - 1.618 + 83 - 253 = - 1.788 \quad »$$

$$\mathcal{M}_{FD} = + 1.734 + 176 - 319 = + 1.591 \quad » \quad .$$

Il diagramma finale dei momenti è quello già riportato nella fig. 9-22 b.

Se lo stesso telaio è caricato da forze orizzontali, come nella fig. 9-35, le coppie nel telaio considerato a nodi fissi sono nulle, e le reazioni degli appoggi fittizi sono

$$R_1 = - 3.000 \text{ Kg}$$

$$R_2 = - 6.000 \text{ Kg} .$$

Il sistema (9-57) si scrive perciò

$$\alpha_1 1.590 - \alpha_2 1.880 = 3.000$$

$$- \alpha_1 1.880 + \alpha_2 4.717 = 6.000$$

la cui soluzione è

$$\alpha_1 = 6,413$$

$$\alpha_2 = 3,828 .$$

Le coppie d'incastro sono quelle che in seguito si riportano:

$$\mathcal{M}_{AB} = - 13.114 + 8.589 = - 4.525 \text{ Kgm}$$

$$\mathcal{M}_{AC} = + 13.114 - 8.589 = + 4.525 \quad »$$

$$\mathcal{M}_{BA} = - 16.545 + 11.016 = - 5.529 \quad »$$

$$\mathcal{M}_{BD} = + 16.545 - 11.016 = + 5.529 \quad »$$

$$\mathcal{M}_{CA} = + 13.428 - 9.669 = + 3.759 \quad »$$

$$\mathcal{M}_{CD} = - 11.036 - 4.379 = + 15.415 \quad »$$

$$\mathcal{M}_{CE} = - 2.392 + 14.048 = + 11.656 \quad »$$

$$\mathcal{M}_{DB} = + 18.097 - 13.891 = + 4.206 \quad »$$

$$\mathcal{M}_{DC} = - 13.044 - 4.031 = - 17.075 \quad »$$

$$\mathcal{M}_{DF} = - 5.047 + 17.922 = + 12.875 \quad »$$

$$\mathcal{M}_{EC} = - 1.193 + 14.680 = + 13.487 \quad »$$

$$\mathcal{M}_{FD} = - 2.520 + 18.523 = + 16.003 \quad » \quad .$$

Il diagramma finale dei momenti è quello già riportato nella fig. 9-38.

Come secondo esempio si prenda in esame il portale della fig. 9-48 riportato dallo Hirschfeld (*).

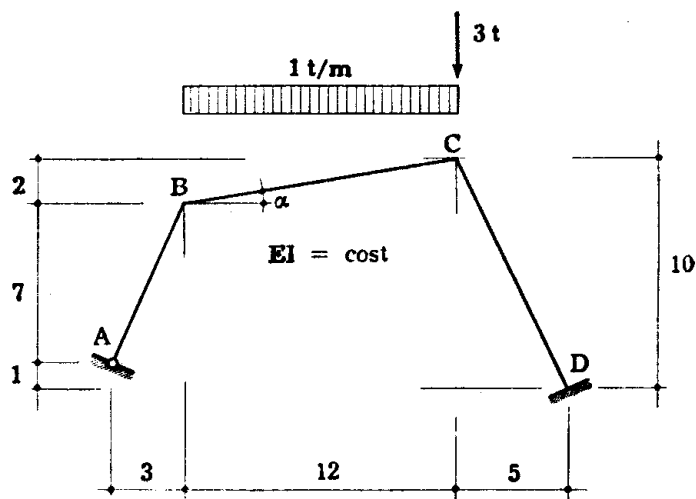


FIG. 9-48

Le lunghezze delle travi sono

$$l_{AB} = 7,62 \text{ m}$$

$$l_{BC} = 12,17 \text{ m}$$

$$l_{CD} = 11,18 \text{ m} ;$$

il momento d'inerzia e il modulo di elasticità sono costanti, perciò le rigidità sono proporzionali rispettivamente a

$$\frac{3}{4 l_{AB}} , \quad \frac{1}{l_{BC}} , \quad \frac{1}{l_{CD}} ;$$

infatti l'asta AB è incernierata in A, e quindi è $\rho_{BA} = \frac{l}{3 EI}$. Si hanno quindi i coefficienti di ripartizione indicati nella fig. 9-49:

$$\tau_{BA} = 0,545 \quad \tau_{CB} = 0,479$$

$$\tau_{BC} = 0,455 \quad \tau_{CD} = 0,521 .$$

Le coppie di incastro perfetto $\overline{\mathcal{M}}_{BC}$ ed $\overline{\mathcal{M}}_{CB}$ sono fornite da

$$\overline{\mathcal{M}}_{BC} = - \overline{\mathcal{M}}_{CB} = \frac{1.000 \cdot 12^2}{12} = 12.000 \text{ Kgm} .$$

(*) K. Hirschfeld - Baustatik - Springer - Berlino, 1959.

Si osservi che sull'elemento ds di trave BC agisce la forza normale all'asse $q \, dz \cos \alpha$, ove $dz = ds \cos \alpha$ è la proiezione orizzontale di ds . Il carico unitario normale all'asse è perciò

$$q' = \frac{q \, dz \cos \alpha}{ds} = q \cos^2 \alpha ,$$

e le coppie d'incastro in B e C sono

$$\overline{M}_{BC} = - \overline{M}_{CB} = \frac{q' \, l_{BC}^2}{12} = \frac{q \, (l_{BC} \cos \alpha)^2}{12} .$$

Nella fig. 9-49 è riportata la diffusione alla Cross di tali coppie nell'ipotesi che il nodo C sia bloccato da un appoggio fittizio con il piano di

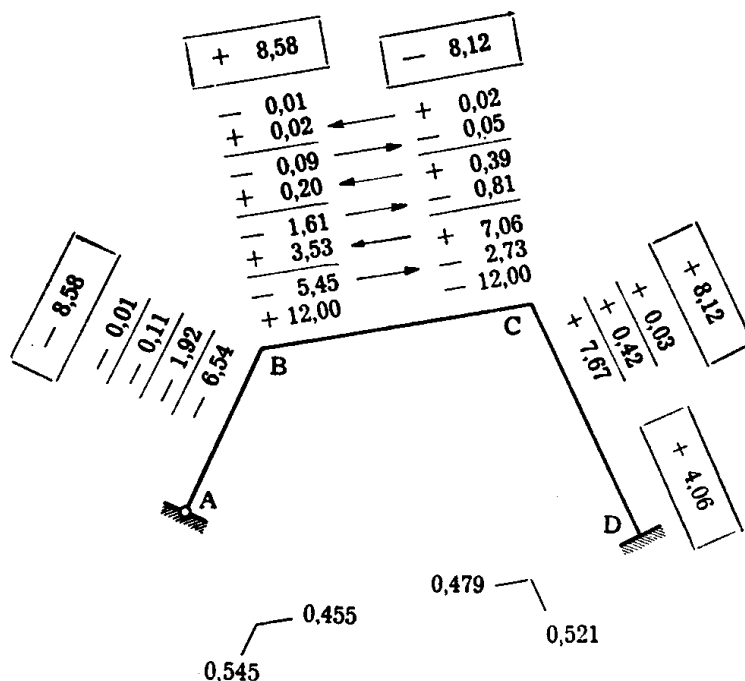


FIG. 9-49

scorrimento parallelo all'asse della trave CD ; il relativo diagramma dei momenti è disegnato nella fig. 9-50.

La reazione dell'appoggio fittizio si calcola disegnando prima il poligono di equilibrio delle forze agenti sul nodo B (fig. 9-50); il taglio T_{BA} è fornito da

$$T_{BA} = - \frac{8,58}{7,62} = - 1,12 \, t$$

e quello T_{BC} da

$$T_{BC} = \frac{1 \cdot 12}{2} \cos \alpha + \frac{8,58 - 8,12}{12,17} = 5,95 \text{ t} ;$$

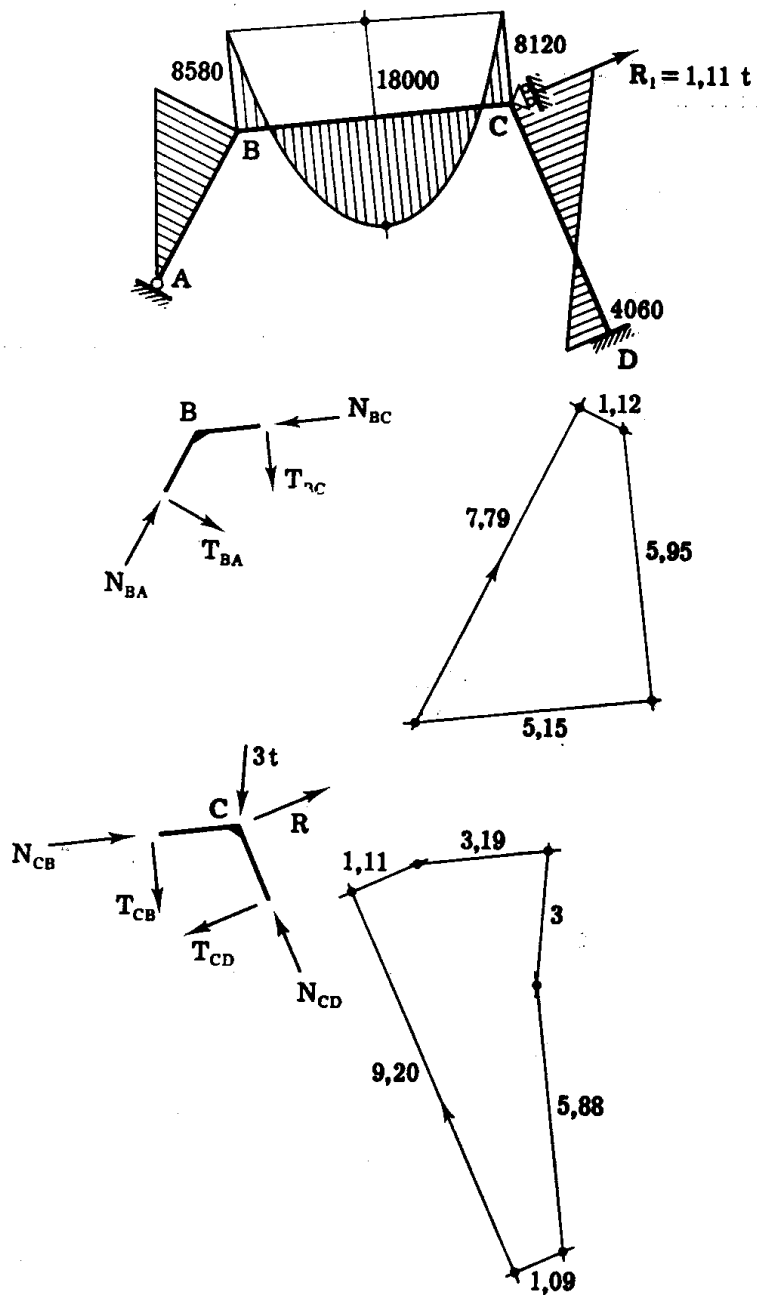


FIG. 9-50

dal poligono di equilibrio del nodo B risulta

$$N_{BA} = - 7,79 \text{ t}$$

$$N_{BC} = - 5,15 \text{ t} .$$

Si passa poi al nodo C, ove è

$$T_{CB} = - \frac{1 \cdot 12}{2} \cos \alpha + \frac{8,58 - 8,12}{12,17} = - 5,88 \text{ t}$$

$$N_{CB} = - 5,15 + q l_{BC} \cos \alpha \sin \alpha = - 3,19 \text{ t}$$

$$T_{CD} = \frac{4,06 + 8,12}{11,18} = 1,09 \text{ t} ;$$

dal poligono di equilibrio del nodo C risulta (fig. 9-50)

$$N_{CD} = - 9,20 \text{ t}$$

$$R = 1,11 \text{ t} .$$

Si devono calcolare poi le coppie indotte da un cedimento dell'appoggio fittizio; a ciò fare si calcolano prima le rotazioni ψ indotte dal ce-

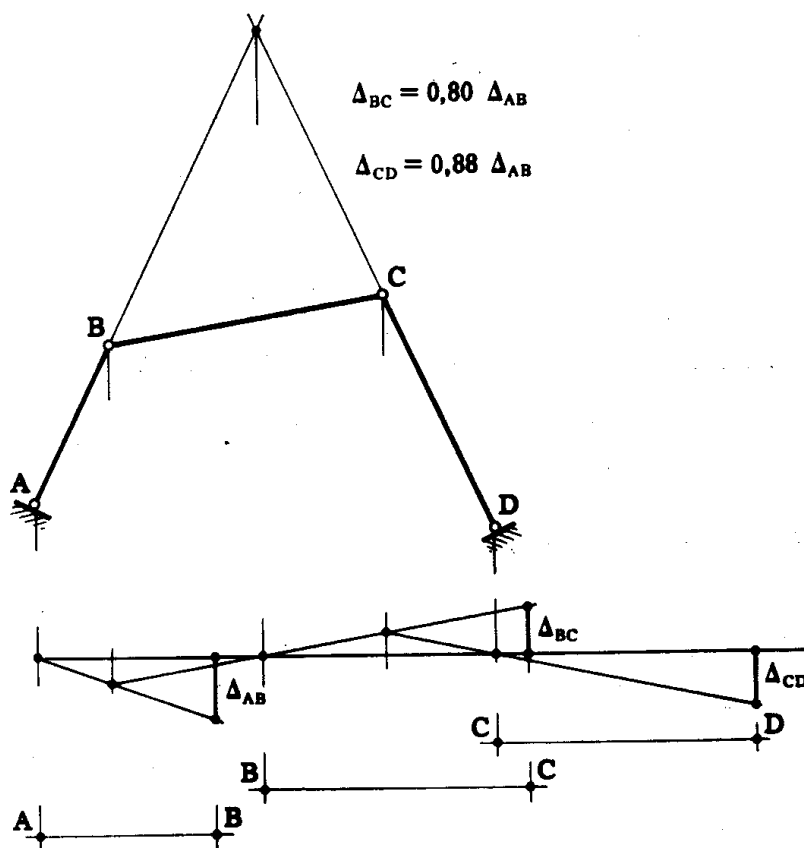


FIG. 9-51

dimento nelle varie aste della struttura. Si è già fatto osservare che, poiché si trascura la variazione di lunghezza delle travi dovuta allo sforzo normale, gli angoli ψ dovuti ad un cedimento del vincolo sono gli stessi

sia nella struttura snodata in B C D che in quella avente in B C D morsetti impedenti la rotazione, o in quella effettiva. Si utilizza perciò il procedimento delle catene cinematiche, operando sulla struttura snodata (fig. 9-51). Gli angoli ψ sono quelli che i tratti del diagramma delle componenti dello spostamento formano con la fondamentale; le componenti normali agli assi degli spostamenti relativi delle estremità delle singole travi si ottengono dalla costruzione ovvia della figura; risulta

$$\Delta_{BC} = -0,80 \Delta_{AB}$$

$$\Delta_{CD} = 0,88 \Delta_{AB} .$$

La quantità Δ_{CD} coincide con il cedimento del vincolo. Spesso si usa la costruzione, altrettanto ovvia, della fig. 9-52.

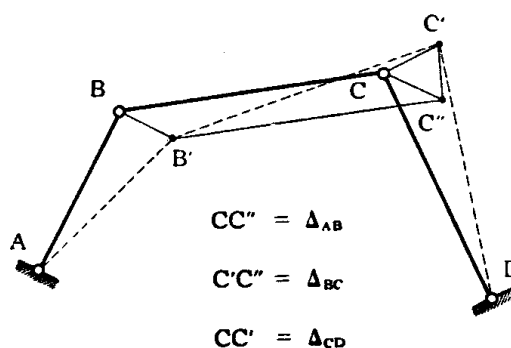


FIG. 9-52

Nell'asta AB, incernierata in A, è $\rho = 3EI/l$, e quindi la coppia generata in B da un cedimento relativo Δ tra gli estremi è

$$\overline{M} = \frac{3EI}{l^2} \Delta = \rho \frac{\Delta}{l} ;$$

nelle aste BC e CD è invece

$$\overline{M} = \frac{6EI \Delta}{l^2} = \frac{3}{2} \rho \frac{\Delta}{l} .$$

Le coppie $\overline{M}_{BA}$, $\overline{M}_{BC} = -\overline{M}_{CB}$, ed $\overline{M}_{CD} = -\overline{M}_{DC}$ dovute ad un cedimento dell'appoggio sono proporzionali perciò alle quantità

$$\frac{\rho_{AB}}{l_{AB}} \Delta_{AB} , \quad \frac{3}{2} \frac{\rho_{BC}}{l_{BC}} \Delta_{BC} , \quad \frac{3}{2} \frac{\rho_{CD}}{l_{CD}} \Delta_{CD} ,$$

e cioè alle quantità

$$1 , \quad 2 \left(\frac{l_{AB}}{l_{BC}} \right)^2 \frac{\Delta_{BC}}{\Delta_{BA}} , \quad 2 \left(\frac{l_{AB}}{l_{CD}} \right)^2 \frac{\Delta_{CD}}{\Delta_{BA}} .$$

Assunto perciò $\overline{M}_{BA} = +10$ tm, risulta

$$\overline{M}_{BC} = \overline{M}_{CB} = -6,27 \text{ tm}$$

$$\overline{M}_{CD} = \overline{M}_{DC} = +8,18 \text{ tm}.$$

Tali coppie si distribuiscono alla Cross (fig. 9-53); nella fig. 9-54 è ri-

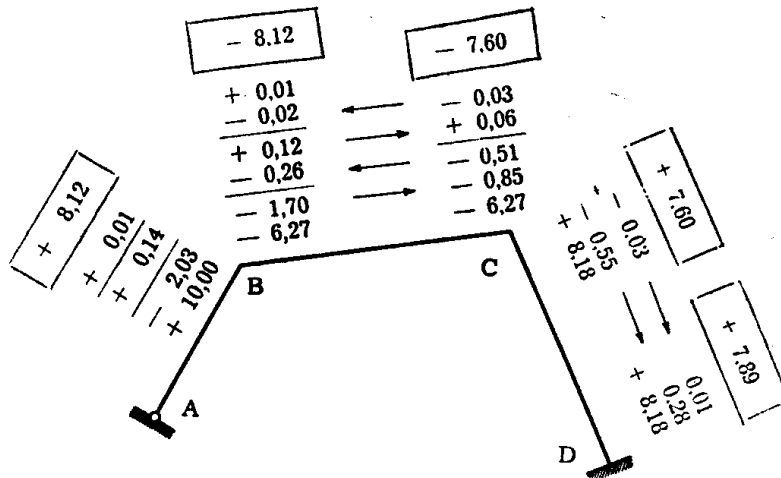


FIG. 9-53

portato il relativo diagramma dei momenti, ed il calcolo della R_{11} svilup-

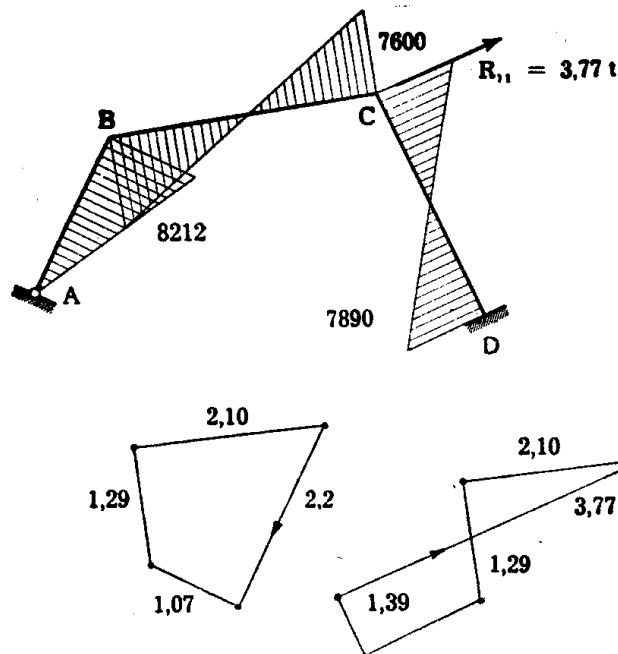


FIG. 9-54

pata dal vincolo fittizio, che risulta pari a 3,77 t. Il sistema (9-57) si ri-

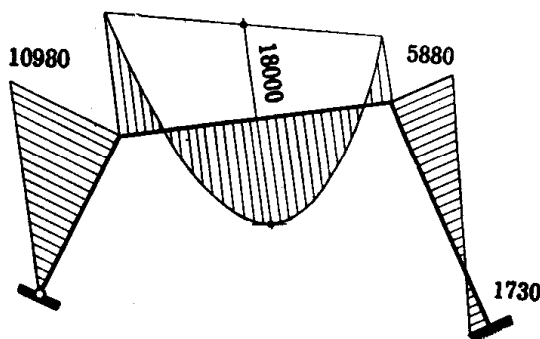


FIG. 9-55

duce all'equazione

$$\alpha \cdot 3,77 = -1,11$$

da cui risulta

$$\alpha = -0,295$$

Il diagramma finale dei momenti è riportato nella fig. 9-55.

8. Un metodo per successive approssimazioni di rapida convergenza per il calcolo dei telai a nodi spostabili.

Il metodo [20] [21] presenta rispetto a quello del § 9-7 b il vantaggio di operare su un solo schema di telaio; la convergenza è notevolmente rapida, come appare dall'esempio sviluppato, dove già alla seconda diffusione si ottengono approssimazioni soddisfacenti. Il procedimento è identico a quello di Cross. Considerando spostabili i nodi, la rigidità del ritto diviene funzione di tutti i ritti del piano. Così varia pure il coefficiente di trasmissione, che è inferiore a 1/2, oscillando tra 1/2 e -1, anch'esso funzione di tutti i ritti del piano. Sono inoltre introdotti, per ogni nodo, altri due coefficienti, atti a fornire le coppie generate dall'equilibramento del nodo alle estremità dei ritti dei due piani tra cui esso giace, e che possono chiamarsi, per distinguerle dalle coppie ripartite e trasmesse, *coppie indotte*.

Si consideri la trave di sezione costante di fig. 9-56: l'incastro B è angularmente perfetto, ma cedevole verticalmente con costante elastica k. Dalla condizione di congruenza in A

$$\frac{\mathcal{M} \ell^2}{2 EI} + \frac{R_A \ell^3}{3 EI} = -k R_A$$

risulta

$$R_B = -R_A = \frac{\mathcal{M} \ell^2}{2 EI h} \quad (58)$$

dove

$$h = k + \frac{\ell^3}{3 EI}, \quad (59)$$

$$\varphi_A = \frac{\mathcal{M} \ell}{4 EI} \left(4 - \frac{\ell^3}{EI h} \right) \quad (60)$$

$$\mathcal{M}_B = -\mathcal{M} \left(1 - \frac{\ell^3}{2 EI h} \right). \quad (61)$$

Si verifica subito che per $k=0$

$$\varphi_A = \frac{\mathcal{M} \ell}{4 EI}; \quad \mathcal{M}_B = \frac{\mathcal{M}}{2}$$

e per $k=\infty$ (comportamento a mensola)

$$\varphi_A = \frac{\mathcal{M} \ell}{EI}; \quad \mathcal{M}_B = -\mathcal{M}.$$

La fig. 9-57, dove il traverso HF è infinitamente rigido, si può ricon-

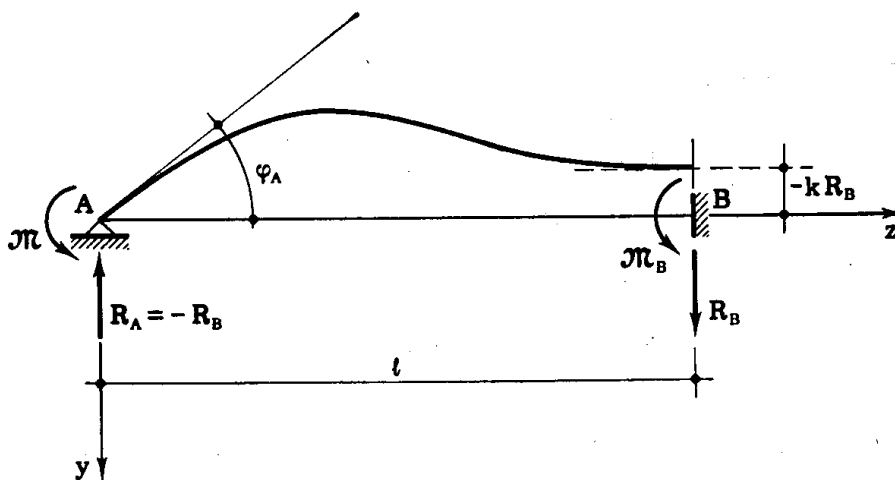


FIG. 9-56

durre alla fig. 9-56, ove si ponga

$$\frac{1}{k} = \sum \frac{12 EI}{\ell^3} = 3 \sum \frac{\rho_{ih}}{\ell_{ih}^2}$$

essendo la sommatoria estesa a tutti i ritzi, escluso AB.

Se i ritti sono tutti uguali e il loro numero complessivo è n , risulta:

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{\ell^3}{12 (n - 1) EI} \\
 h &= \ell^3 \frac{4n - 3}{12 (n - 1) EI} \\
 \varphi_A &= \frac{\mathcal{M} \ell}{4 EI} \frac{4n}{4n - 3} .
 \end{aligned} \tag{62}$$

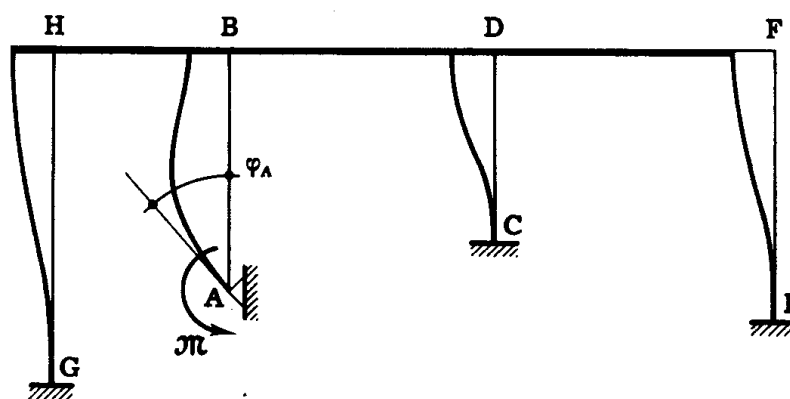


FIG. 9-57

Si verifica che, per $n = 1$

$$k = \infty \quad ; \quad \varphi_A = \frac{\mathcal{M} \ell}{EI}$$

e per $n = \infty$

$$k = 0 \quad ; \quad \varphi_A = \frac{\mathcal{M} \ell}{4 EI} .$$

Dall'espressione (9-62) di φ_A si ricava la rigidità del ritto AB

$$\rho_{AB} = \frac{4 EI}{\ell} \frac{4n - 3}{4n} \tag{63}$$

funzione del numero n e delle caratteristiche dei ritti.

Per ottenere le coppie alle estremità dei ritti paralleli ad AB, si divide la R tra essi (escluso AB) in parti proporzionali alle quantità EI/ℓ^3 e si moltiplicano queste per $\ell/2$.

Nel caso di ritti uguali, è

$$R = \frac{\mathcal{M}}{l} \frac{6(n-1)}{4n-3}$$

(si verifica che, per $n=1$, $R=0$; e, per $n=\infty$, $R=\frac{3}{2} \frac{\mathcal{M}}{l}$) e le coppie alle estremità dei ritti sono

$$\mathcal{M}_C = - \mathcal{M} \frac{3}{4n-3}.$$

La coppia $\mathcal{M}_B$ trasmessa in B è

$$\mathcal{M}_B = - \mathcal{M} \frac{3-2n}{4n-3},$$

cioè il coefficiente di trasmissione è

$$t = - \frac{3-2n}{4n-3} \quad (64)$$

e quello, che può dirsi di induzione, è

$$i = - \frac{3}{4n-3}. \quad (65)$$

Passando al telaio, si considerino i nodi vincolati con pattini anzichè con morsetti, in modo che sia loro consentito traslare, ma non ruotare. Per il principio di equivalenza (§ 9-6 c) si sostituiscono i carichi con le coppie e le reazioni di incastro perfetto cambiate di segno, $-\overline{\mathcal{M}}_{ih}$ e $-\overline{R}_{ih}$. Le reazioni verticali non hanno influenza; quelle orizzontali agenti sul generico traverso r si sommano tra loro ed alla forza eventualmente applicata allo stesso traverso, dando una $\overline{H}_r$.

Le $-\overline{\mathcal{M}}_{ih}$ sono assorbite dai pattini; le $\overline{H}_r$ provocano spostamenti dei traversi, e quindi ulteriori coppie $\overline{\mathcal{M}}_{ih}$ alle estremità dei ritti.

Le $\overline{\mathcal{M}}_{ih}$ si calcolano suddividendo tra i ritti del generico piano la somma delle $\overline{H}_r$ superiori secondo parti proporzionali alle quantità EI/l^3 (EI se i ritti sono ugualmente lunghi), e moltiplicando la forza che compete ad ogni ritto per la semilunghezza di questo. Anche tali coppie, cambiate di segno, sono assorbite dai pattini.

Sbloccando il generico pattino i , occorre ripartire tra le aste in esso concorrenti la $-\Sigma_i (\overline{\mathcal{M}}_{ih} + \overline{\mathcal{M}}_{ih})$ prima assorbita dal pattino stesso. La

rigidità dei traversi non cambia; quella dei ritti va calcolata con la (9-60), e se i ritti di ogni piano sono uguali con la (9-63).

Si prenda in esame il telaio della fig. 9-58, in cui i ritti di ogni piano sono uguali. I momenti di inerzia sono proporzionali ad 1 per i ritti GL,

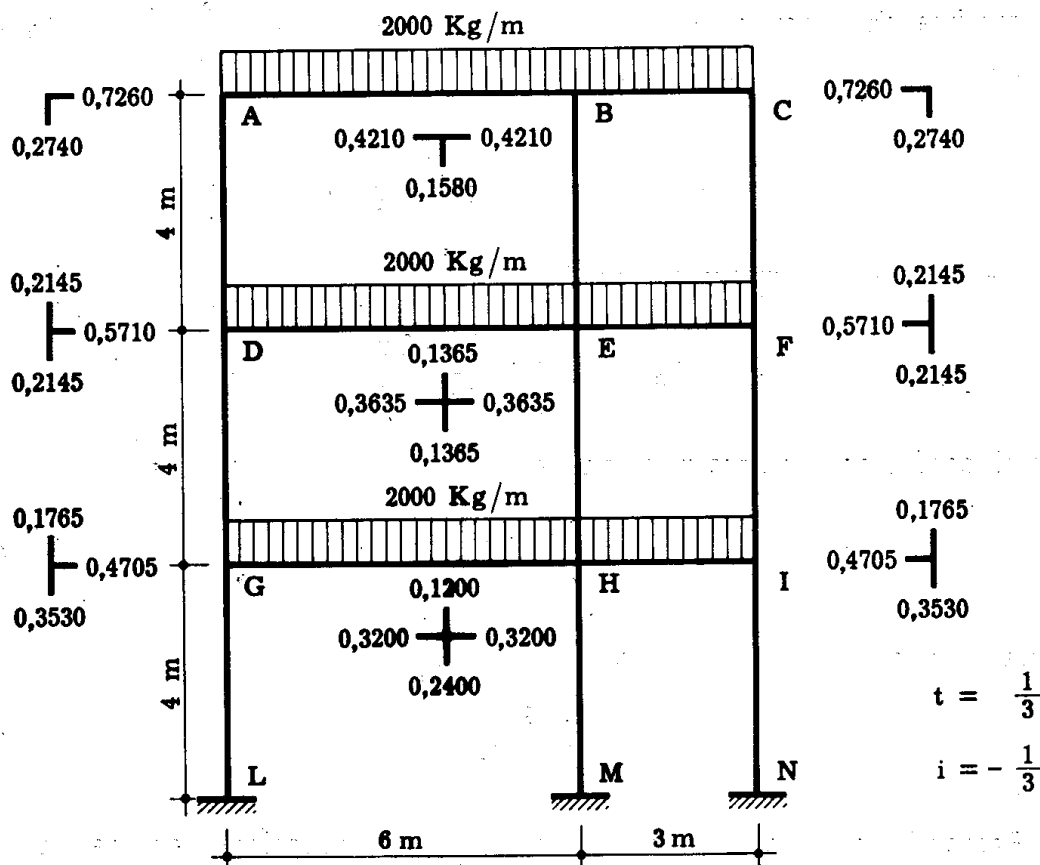


FIG. 9-58

HM, IN; 0,5 per gli altri ritti; 1,5 per le travate di 6 ml; 0,75 per le travate di 3 ml.

Poichè $n=3$, sarà

$$t = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad i = -\frac{1}{3};$$

la rigidità dei ritti è $\frac{3EI}{l}$.

Per il nodo H, ad es., le rigidità sono, a meno di un fattore,

$$\frac{4 \cdot 1,5}{6} \quad \text{e} \quad \frac{4 \cdot 0,75}{3}$$

per le travate HG e HI;

$$\frac{3 \cdot 1}{4} \quad \text{e} \quad \frac{3 \cdot 0,5}{4}$$

per i ritti HM e HE.

I coefficienti di ripartizione sono quindi 0,3200 per le travate, 0,2400 per il ritto HM, 0,1200 per il ritto HE. Nella fig. 9-58 sono trascritti tutti i coefficienti. Partendo dal nodo A (fig. 9-59) la coppia — 6000 Kgm si distribuisce in — 4360 in AB e — 1640 in AD; in B viene trasmessa una coppia $\frac{-4360}{2} = -2180$; in D una coppia $\frac{-1640}{3} = -546$. Agli estremi di BE e di CF vengono indotte le coppie $\frac{1640}{3} = 546$.

Procedendo nella stessa maniera si perviene già dopo due diffusioni a valori praticamente accettabili; i risultati esatti sono infatti i seguenti:

$\mathcal{M}_{AB}$	+ 2561	$\mathcal{M}_{HI}$	+ 2911	$\mathcal{M}_{EH}$	+ 1366
$\mathcal{M}_{BA}$	— 5899	$\mathcal{M}_{IH}$	— 740	$\mathcal{M}_{HE}$	+ 1363
$\mathcal{M}_{DE}$	+ 3857	$\mathcal{M}_{AD}$	— 2561	$\mathcal{M}_{HM}$	+ 1673
$\mathcal{M}_{ED}$	— 6032	$\mathcal{M}_{DA}$	— 2107	$\mathcal{M}_M$	+ 986
$\mathcal{M}_{GH}$	+ 4044	$\mathcal{M}_{DG}$	— 1749	$\mathcal{M}_{CF}$	+ 413
$\mathcal{M}_{HG}$	— 5947	$\mathcal{M}_{GD}$	— 1701	$\mathcal{M}_{FO}$	+ 417
$\mathcal{M}_{BC}$	+ 3864	$\mathcal{M}_{GL}$	— 2344	$\mathcal{M}_{FI}$	+ 352
$\mathcal{M}_{CB}$	— 413	$\mathcal{M}_L$	— 1022	$\mathcal{M}_{IF}$	+ 368
$\mathcal{M}_{EF}$	+ 2891	$\mathcal{M}_{BE}$	+ 2035	$\mathcal{M}_{IN}$	+ 372
$\mathcal{M}_{FE}$	— 798	$\mathcal{M}_{EB}$	+ 1774	$\mathcal{M}_N$	+ 335

Se i ritti dello stesso piano non sono identici, in ogni nodo si hanno due coefficienti di trasmissione diversi per i due ritti, e un coefficiente di induzione per ciascuno dei ritti dei due piani interessati dal nodo. Si tenga presente però che il procedimento risulta di applicazione par-

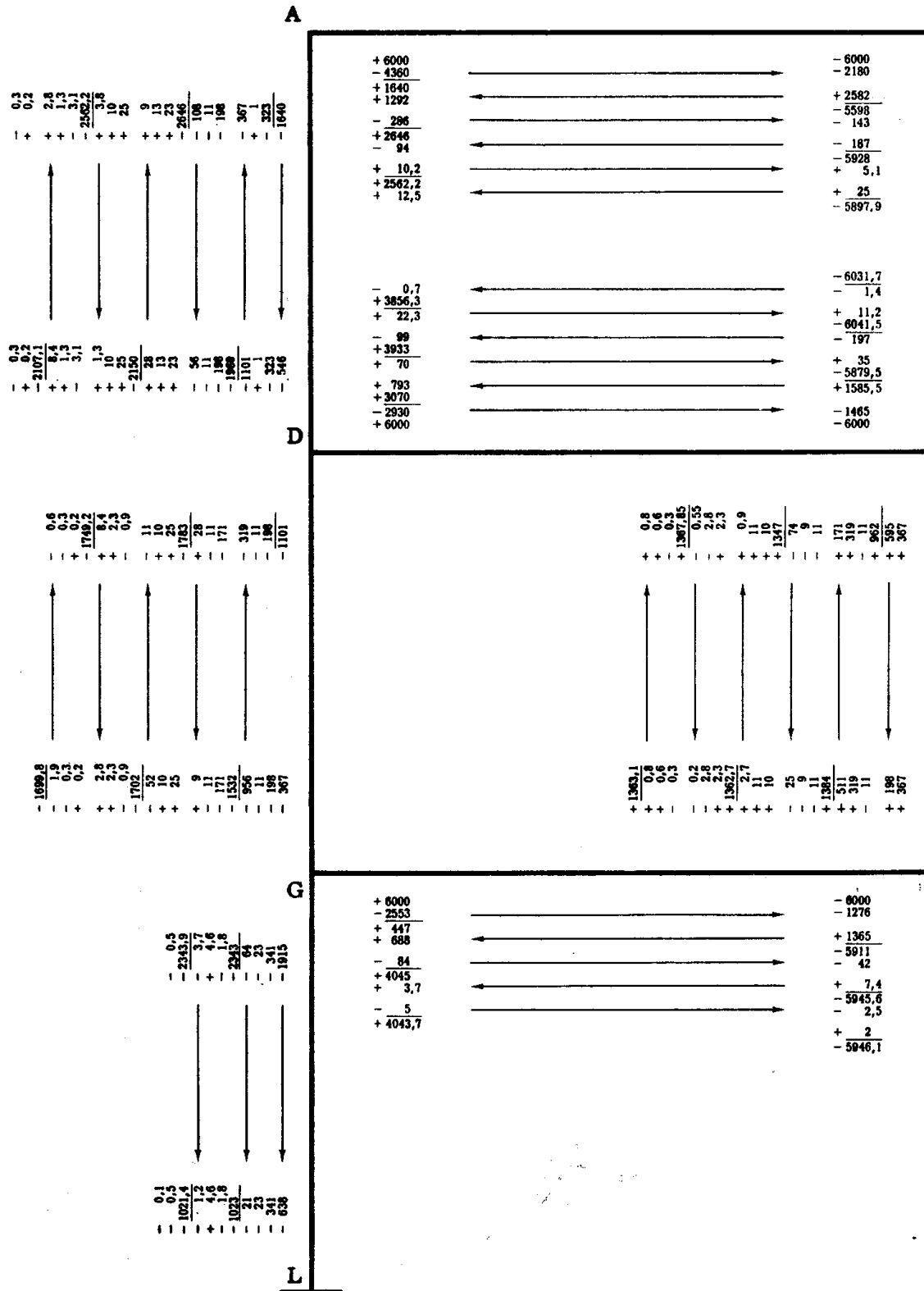


FIG. 9-59

+	5,1	←	-	415,7
+	3863	→	-	10,2
+	25	→	+	12,5
-	52	←	-	418
+	3890	→	-	105
-	187	→	-	94
-	5	←	-	219
+	4082	→	-	11
+	2582	→	-	1292
+	1500	→	-	1500

C

546	546
970	323
1516	1
367	367
196	196
11	11
36	36
69	69
2038	2038
13	13
9	9
25	25
10	10
0,3	0,3
2034,9	2034,9
1,3	1,3
0,2	0,2
0,2	0,2
0,3	0,3

546	546
323	323
4	4
219	219
367	367
196	196
11	11
36	36
23	23
23	23
40	40
418	418
9	9
25	25
10	10
1,3	1,3
3,1	3,1
3,9	3,9
415,7	415,7
2,8	2,8
0,2	0,2
0,3	0,3
+	+

+	1500	→	+	1500
+	1585,5	→	+	793
+	3085,5	→	+	84
+	42	→	+	623
-	197	→	-	99
+	2930,5	→	-	78
+	39	→	-	800
-	1,4	→	-	0,7
-	2890,1	→	+	2,2
+	1,1	→	-	798,5

F

367	367
196	196
11	11
319	319
171	171
34	34
361	361
9	9
25	25
30	30
345,5	345,5
11	11
0,9	0,9
6,9	6,9
21,3	21,3
2,8	2,8
0,2	0,2
0,8	0,8
351,5	351,5
0,6	0,6
+	+

638	638
1024	1024
1662	1662
23	23
21	21
5,5	5,5
1665,5	1665,5
4,6	4,6
1,2	1,2
1,5	1,5
1672,8	1672,8
0,1	0,1

I

638	638
341	341
69	69
336	336
21	21
1,8	1,8
13,8	13,8
371,4	371,4
1,2	1,2
0,5	0,5
0,2	0,2
371,9	371,9
0,1	0,1
335,2	335,2
+	+

M

N

ticolarmente semplice nel caso che i ritri di ogni piano siano identici, e ancor più nei telai a molti piani e pochi ritri.

9. Sistemi simmetrici ed emisimmetrici.

Se un sistema piano ammette una retta di simmetria fisico geometrica, sollecitazioni simmetriche rispetto a tale retta generano spostamenti, e quindi caratteristiche della sollecitazione interna e reazioni, fisicamente

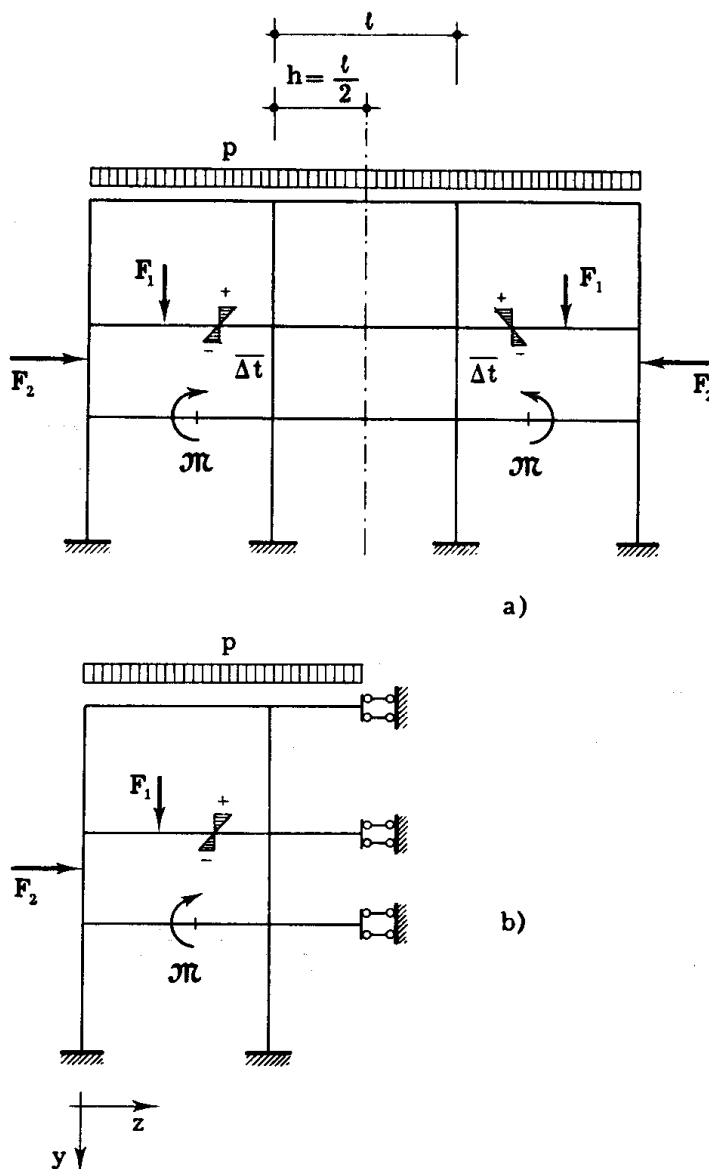


FIG. 9-60

simmetriche; e sollecitazioni emisimmetriche provocano spostamenti, caratteristiche e reazioni emisimmetriche.

Il telaio della fig. 9-60 a è simmetrico e caricato simmetricamente;

le sezioni appartenenti al piano di simmetria sono caratterizzate da

$$T = 0$$

$$\varphi = 0$$

$$w = 0 ,$$

e quindi il telaio può ridursi a quello della fig. 9-60 b, al quale si limita

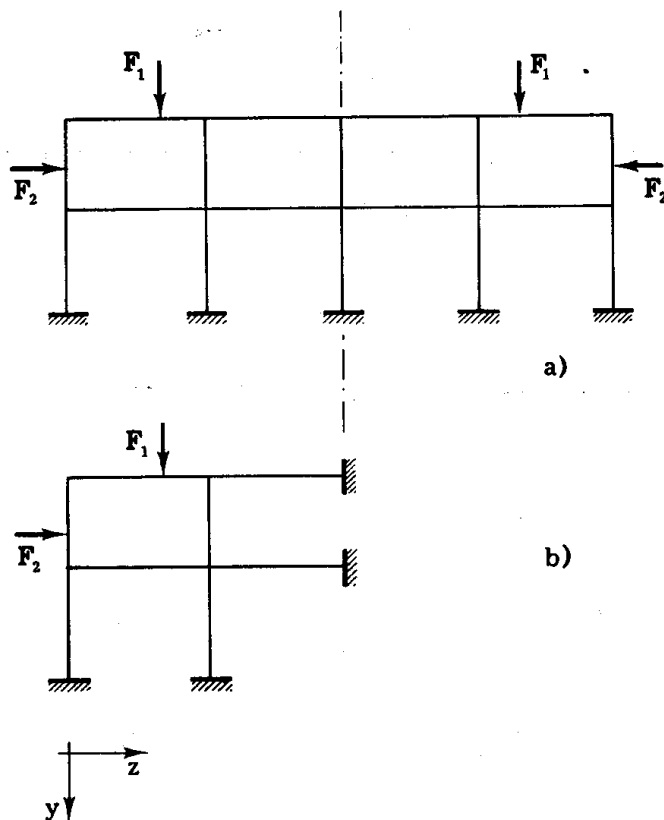


FIG 9-61

il calcolo. Così pure il telaio della fig. 9-61 a può ridursi a quello della fig. 9-61 b. Nell'ipotesi di sezione costante, la rigidità di una trave come quella della fig. 9-62 vale

$$\rho = \frac{EI}{h} = \frac{2EI}{\ell} , \quad (66)$$

ed il coefficiente di trasmissione è

$$t = -1 .$$

Il telaio della fig. 9-63 a è simmetrico e carico emisimmetricamente;

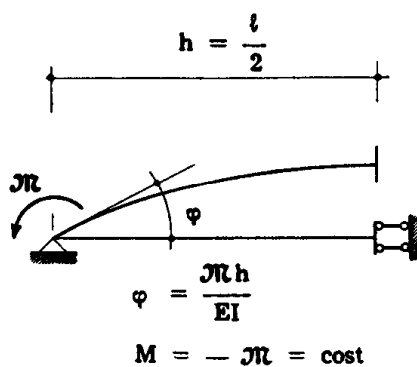


FIG. 9-62

le sezioni appartenenti al piano di simmetria sono caratterizzate da

$$M = 0$$

$$N = 0$$

$$v = 0,$$

e perciò il telaio si riduce a quello della fig. 9-63 b.

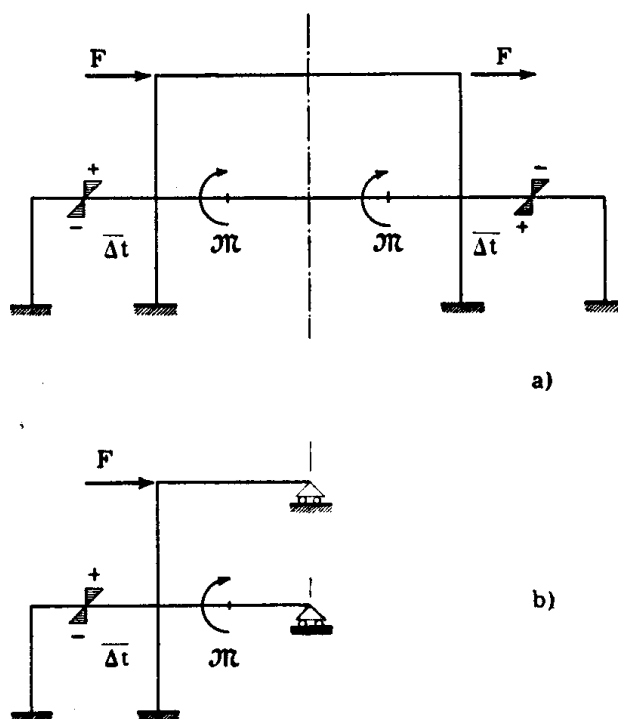


FIG. 9-63

Si osservi che, poichè si prescinde dall'accorciamento da sforzo assiale, ogni forza orizzontale applicata ad un traverso può supporre agente per metà nell'estremo sinistro, e per metà in quello destro.

Pure simmetrico ed emisimmetricamente caricato è il telaio della fig. 9-64 a; in esso, come in quello della fig. 9-61, esiste un ritto il cui

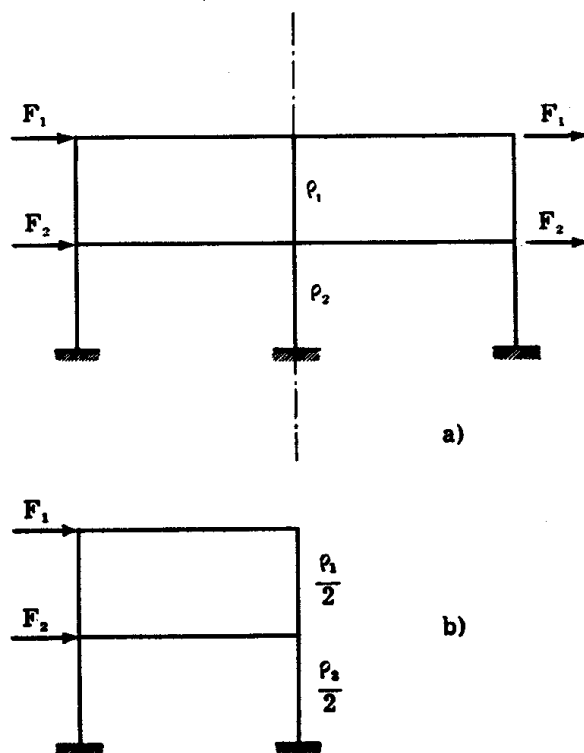


FIG. 9-64

asse è contenuto nel piano di simmetria. Si può ridurre il telaio della

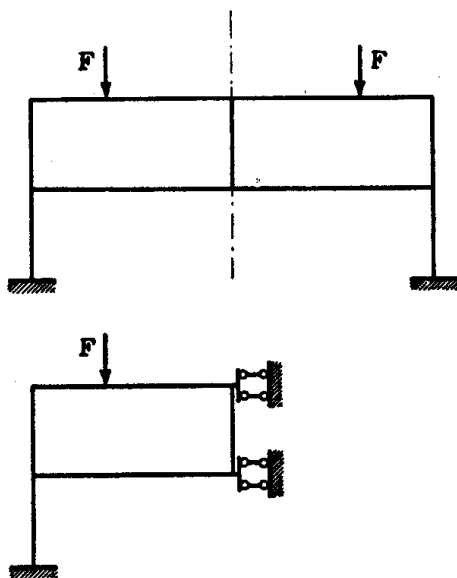


FIG. 9-65

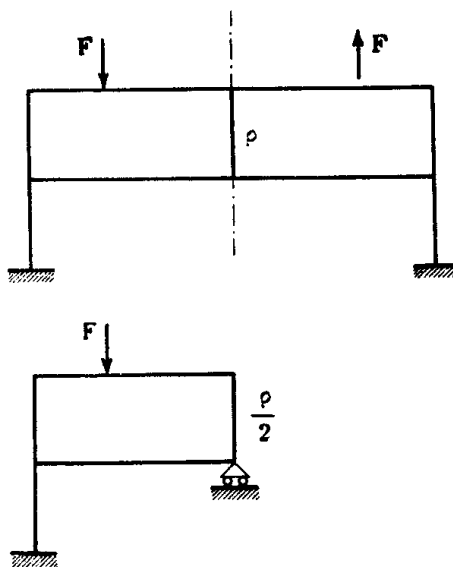


FIG. 9-66

fig. 9-64 a a quello della fig. 9-64 b, ove il ritto appartenente al piano

di simmetria presenta rigidità dimezzata rispetto a quella del ritto effettivo. Si pensi infatti che un ritto è equivalente a due ritti di rigidità dimezzata, uniti in sommità da un bipendolo; ciò perchè a parità di $\mathcal{M}$ le due strutture ruotano dello stesso angolo.

Nelle figg. 9-65 e 9-66 sono riportati altri esempi di telai simmetrici caricati simmetricamente ed emisimmetricamente.

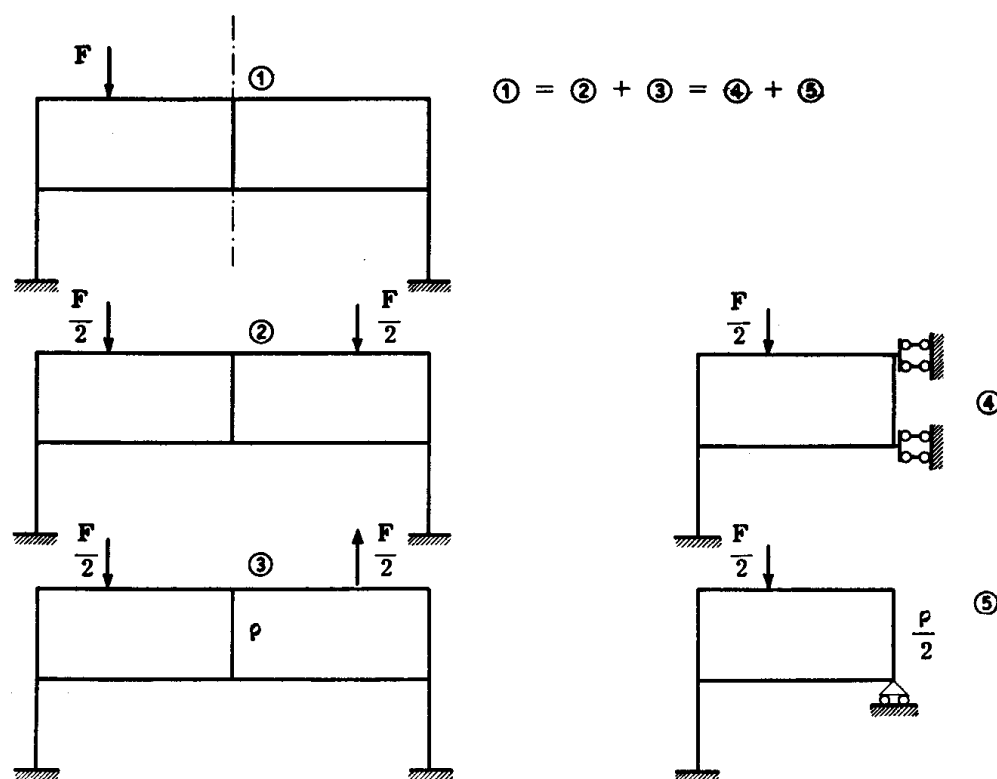


FIG. 9-67

Spesso può convenire scindere una condizione di carico in una simmetrica ed un'altra emisimmetrica; la somma delle sollecitazioni nei due casi fornisce la soluzione effettiva (fig. 9-67).

10. Le linee di influenza.

Le linee d'influenza delle caratteristiche relative ad una sezione di un telaio sono immediatamente costruibili attraverso il procedimento di Cross, come suggerito dal Raithel [23].

Se si vuole, per esempio, la linea d'influenza m_s del momento flettente in S per una forza verticale viaggiante sui traversi AC o DG (fig. 9-68) basta, come è noto, far agire in S una distorsione $D_\varphi = -1$,

e tracciare il diagramma delle componenti verticali degli spostamenti dei traversi AC e DG. Si determinano perciò le coppie $\overline{\mathcal{M}}_{EF}$ ed $\overline{\mathcal{M}}_{FE}$ dovute ad una distorsione $D_\varphi = -1$ in S (la distorsione è da intendersi unitaria

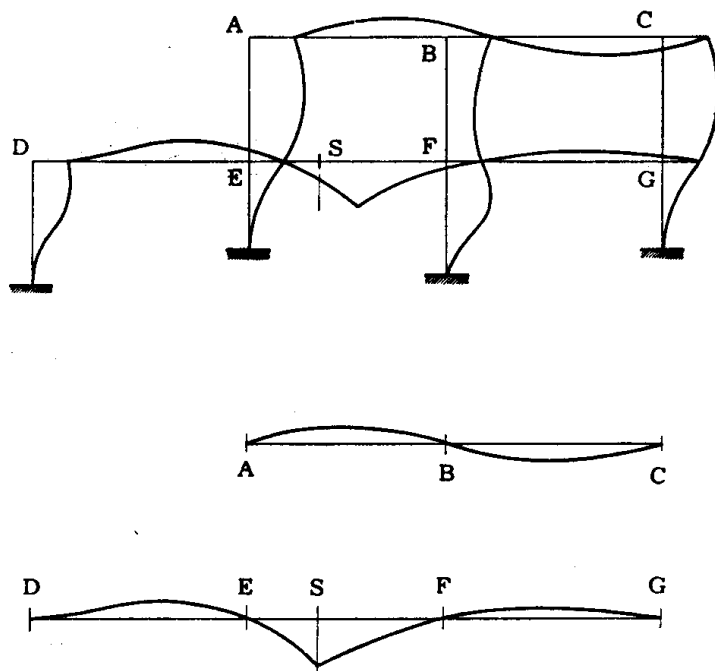


FIG. 9-68

nel senso già più volte specificato). Nel caso di travi di sezione costante si ha (8-52)

$$\overline{\mathcal{M}}_{EF} = \frac{2EI}{l^2} (2b - a) \quad (67)$$

$$\overline{\mathcal{M}}_{FE} = -\frac{2EI}{l^2} (2a - b);$$

se le travi sono di sezione variabile si ha (8-63)

$$\overline{\mathcal{M}}_{EF} = \frac{b\alpha_B + a\beta}{l(\alpha_A\alpha_B - \beta^2)} \quad (68)$$

$$\overline{\mathcal{M}}_{FE} = -\frac{a\alpha_A + b\beta}{l(\alpha_A\alpha_B - \beta^2)}$$

Le coppie così determinate si diffondono alla Cross. Dal diagramma effettivo dei momenti può risalirsi alla linea d'influenza tracciando il dia-

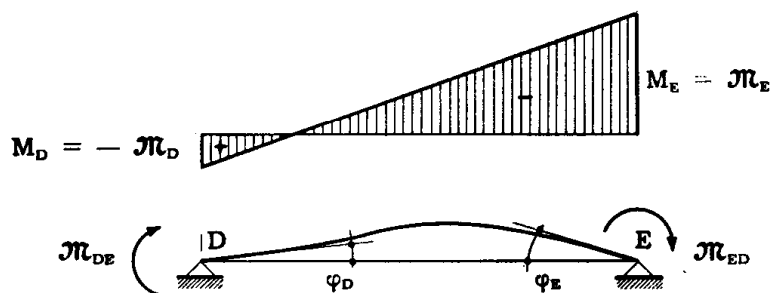


FIG. 9-69

gramma delle componenti verticali dello spostamento secondo il metodo già indicato al § 8-9; per la campata generica DE è (fig. 9-69)

$$\varphi_D = M_{DE} \alpha_D + M_{ED} \beta$$

$$\varphi_E = M_{DE} \beta + M_{ED} \alpha_E,$$

e quindi (8-39)

$$m_S = \varphi_D v_s(z) - \varphi_E v_d(z); \quad (69)$$

per la campata EF cui S appartiene (fig. 9-70) occorre alle ordinate (9-69) dovute alle coppie M_{EF} ed M_{FE} agenti sulle estremità della trave appog-

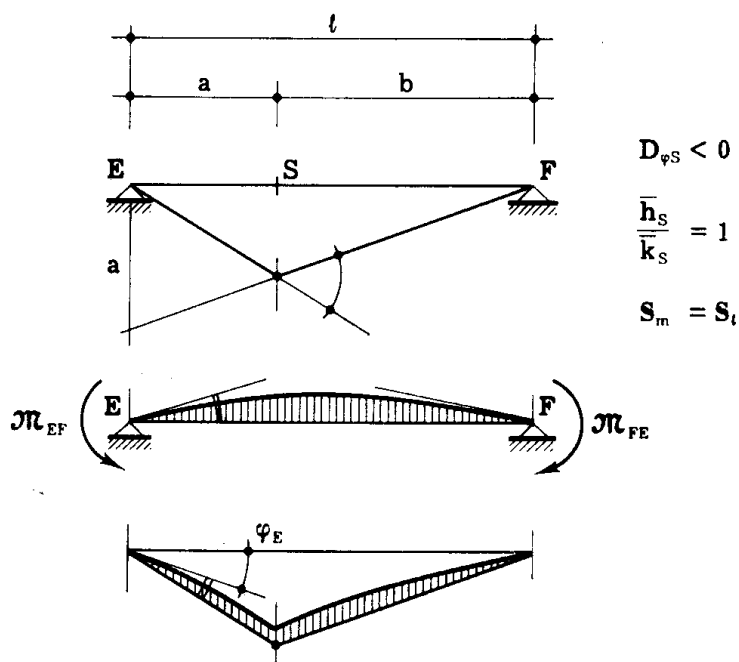


FIG. 9-70

giata EF, aggiungere quelle dovute alla distorsione $D_\varphi = -1$ agente nella sezione S della stessa trave. Riportando in diagramma le ordinate dovute

alle coppie (9-67) o (9-68) nella scala delle lunghezze, anche le ordinate dovute alla distorsione — e relative quindi alla sola trave EF — devono riportarsi nella stessa scala.

Si può anche operare attraverso il procedimento della sconnessione semplice (§ 4-12); in tal caso si taglia in S la trave EF (fig. 9-68), congiungendo le due facce risultanti dal taglio con una cerniera in corrispondenza del baricentro; si fanno agire poi sulle due facce due coppie qualsiasi uguali e contrarie. Per risolvere la struttura, il cui grado di iperstaticità si è così abbassato dell'unità, si può ancora operare attra-

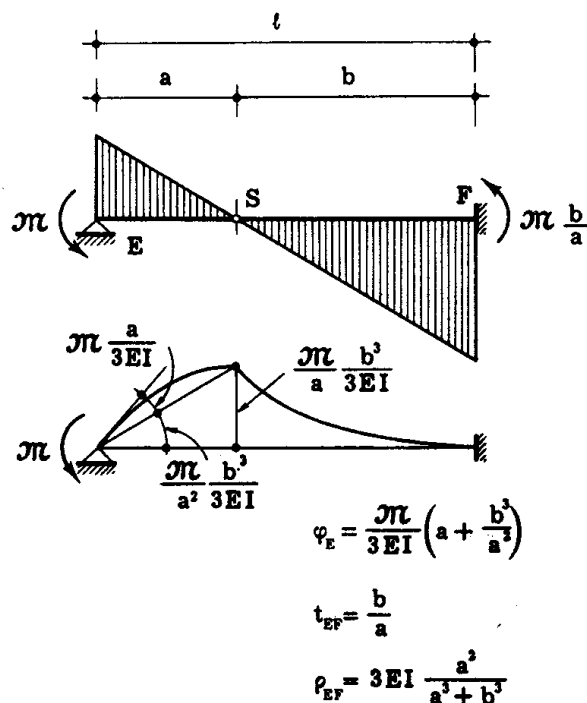


FIG. 9-71

verso Cross; si tenga presente però che sia le rigidità che i coefficienti di trasmissione relativi alla trave EF vanno calcolati tenendo conto della cerniera in S. I due coefficienti di trasmissione t_{EF} e t_{FE} sono in tal caso diversi, e valgono (fig. 9-71)

$$t_{EF} = \frac{b}{a}$$

$$t_{FE} = \frac{a}{b} ;$$
(70)

se la trave è di sezione costante, le rigidità valgono

$$\rho_{EF} = \frac{3EI}{a + \frac{b^3}{a^2}} \quad (71)$$

$$\rho_{FE} = \frac{3EI}{b + \frac{a^3}{b^2}}$$

In possesso del diagramma dei momenti, si calcola il valore della rotazione, $\Delta\varphi_s$, tra le due facce in S; i momenti che servono per tracciare la linea di influenza sono quelli ottenuti divisi per $\Delta\varphi_s$; il tracciamento della linea d'influenza si esegue poi come già detto, attraverso l'aiuto dei manuali (v. anche tabelle in appendice).

In genere tale procedimento non conviene. Il caso della linea di influenza per una sezione S che non sia una sezione di estremità di una trave capita però di rado; un telaio, in particolare una trave continua, si studia di norma attraverso le linee di influenza fondamentali (§ 4-11), e le sezioni per le quali si tracciano tali linee sono preferibilmente quelle di attacco delle travi ai nodi. In tal caso la costruzione della fig. 9-70 non ha luogo, perchè la distorsione nella trave appoggiata non è accompagnata da spostamenti; inoltre le coppie di incastro perfetto sono di calcolo immediato; il procedimento della sconnessione semplice può allora convenire.

Si considera come esempio quello della fig. 9-72, riportato anch'esso dallo Hirschfeld; si vuole disegnare la linea di influenza del momento flettente nella sezione S in cui la travata EF si attacca al nodo F. Nella fig. 9-72 a sono riportate le lunghezze delle aste, e nei cerchietti i numeri cui sono proporzionali i momenti di inerzia delle aste stesse. Si adotta il procedimento della sconnessione semplice, interponendo in S una cerniera e facendo agire due coppie uguali e contrarie $\mathcal{M}_s = 1 \text{ tm}$ e $\mathcal{M}_d = -1 \text{ tm}$.

Per l'asta EF si ha

$$t_{EF} = 0$$

$$\rho_{EF} = \frac{3EI}{a}$$

$$\rho_{FE} = 0 ;$$

il coefficiente t_{FE} è infinitamente grande, ma nessun momento deve essere trasmesso da F ad E, poichè ρ_{FE} è nullo.

I coefficienti di ripartizione sono

$$\tau_{EA} = 0,470$$

$$\tau_{FE} = 0$$

$$\tau_{EF} = 0,530$$

$$\tau_{FB} = 0,500$$

$$\tau_{GF} = 0,333$$

$$\tau_{FG} = 0,500$$

$$\tau_{GC} = 0,333$$

$$\tau_{HG} = 0,600$$

$$\tau_{GH} = 0,333$$

$$\tau_{HD} = 0,400$$

Bloccato il traverso con un appoggio fittizio in H, si distribuiscono alla Cross le coppie $\overline{M}_{EF} = -0,5$ tm, $\overline{M}_{FE} = -1$ tm; i momenti finali sono ri-

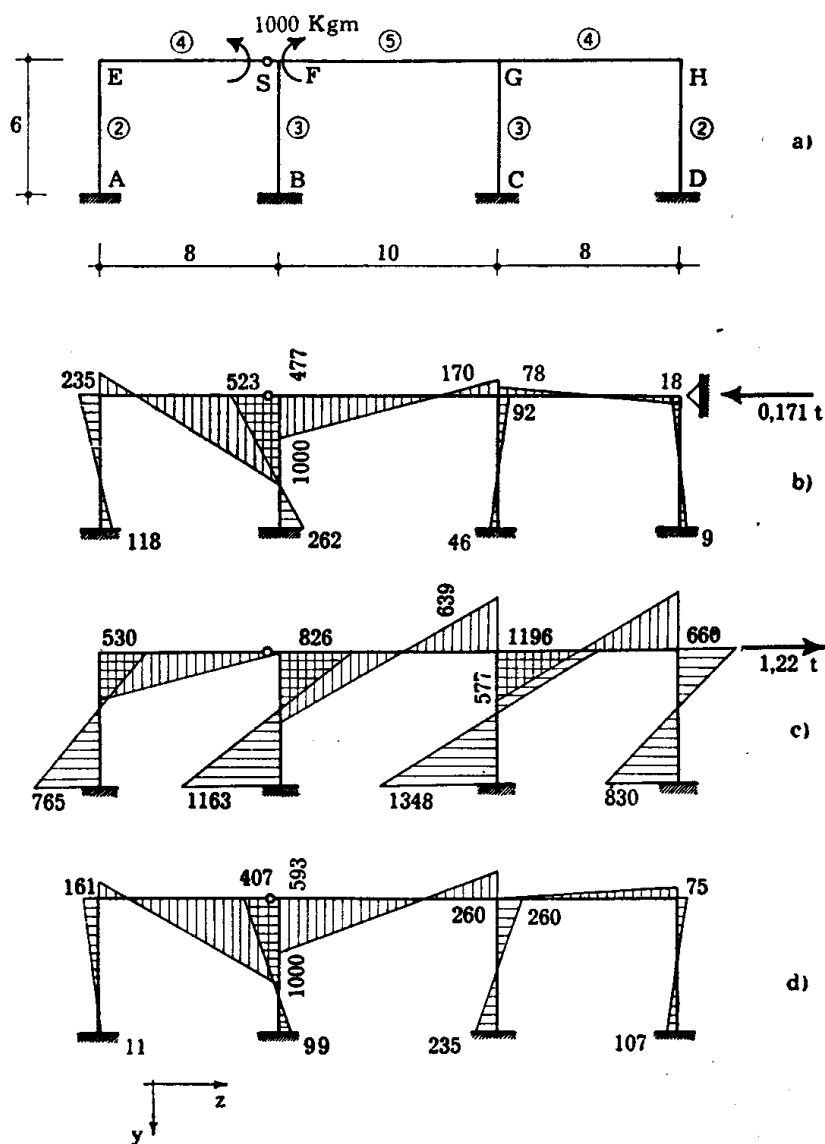


FIG. 9-72

portati nella fig. 9-72 b; la reazione R_1 è pari a $-0,171$ t. Si imprime poi

all'appoggio fittizio un cedimento tale che, nell'ipotesi di nodi impediti di ruotare, risulti

$$\mathcal{M}_{AE} = \mathcal{M}_{EA} = \mathcal{M}_{DH} = \mathcal{M}_{HD} = 1 \text{ tm}$$

$$\mathcal{M}_{BF} = \mathcal{M}_{FB} = \mathcal{M}_{CG} = \mathcal{M}_{GC} = \frac{3}{2} \mathcal{M}_{AE} = 1,5 \text{ tm} .$$

Si diffondono tali coppie, ottenendo i momenti finali riportati nella fig. 9-72 c, e la reazione $R_{11} = 1,22 \text{ t}$.

L'equazione (9-57)

$$\alpha \cdot 1,22 = 0,171$$

porge

$$\alpha = 0,140 .$$

I momenti finali sono quelli riportati nella fig. 9-72 d. Si calcola adesso $\Delta\varphi_s$, assumendo come momento di inerzia I_c di riferimento quello del traverso FG:

$$EI_c \varphi_{sd} = \left(-\frac{593}{3} + \frac{260}{6} \right) 10 = -1550$$

$$EI_c \varphi_{ss} = \left(\frac{1000}{3} - \frac{161}{6} \right) 8 \frac{5}{4} = 3058$$

$$EI_c \Delta\varphi_s = -4068 = -EI_c D_\varphi ,$$

dove EI_c è espresso in Kgm^2 .

Le ordinate della fig. 9-72 d, divise per

$$D_\varphi = \frac{4.608}{EI_c} ,$$

rappresentano la linea di influenza m_{su} del momento flettente in S per una distorsione del tipo μ viaggiante.

Il diagramma delle componenti verticali degli spostamenti del traverso EH indotti dai momenti flettenti della fig. 9-72 divise per $-D_\varphi$ coincide con la linea d'influenza m_s del momento flettente in S per una

forza unitaria positiva viaggiante sul traverso stesso. Tale linea è dise-

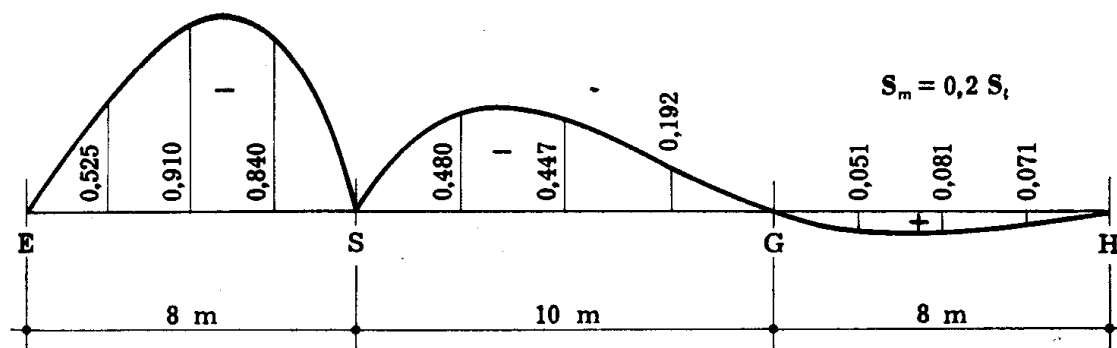


FIG. 9-73

gnata nella fig. 9-73, secondo una scala $S_m = 0.2 S_i$.