

CAPITOLO VIII

**LE TRAVI AD ASSE RETTILINEO IPERSTATICHE
DI UNA SOLA CAMPATA**

1. Le equazioni di congruenza.

I valori delle reazioni sovrabbondanti in una trave ad asse rettilineo iperstatica si ricercano attraverso le relative equazioni di congruenza. Queste equazioni si possono scrivere, in generale, seguendo la via maestra del principio dei lavori virtuali (Cap. II, § 9); spesso però la conoscenza degli abbassamenti e delle rotazioni del sistema isostatico caricato dalle forze, e dalle reazioni singolarmente prese, permette di scrivere direttamente le equazioni di congruenza, con un notevole risparmio di lavoro. Molte volte poi si può operare come sopra su strutture iperstatiche ottenute dalla struttura in esame sopprimendo non tutti i vincoli sovrabbondanti; si riduce così l'ordine del sistema di equazioni.

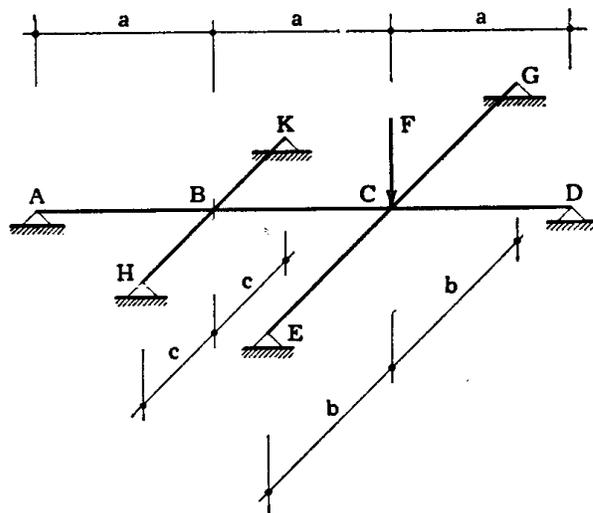


FIG. 8-1 a

Si consideri per esempio la struttura della fig. 8-1 a, costituita da una trave AD e da due travi ad essa ortogonali, HK ed EG, collegate in

B e in C da un vincolo che impone solo l'uguaglianza degli abbassamenti, e che sviluppa quindi solo un'interazione verticale; in C agisce una forza F verticale. Dalla espressione di v per la trave appoggiata soggetta

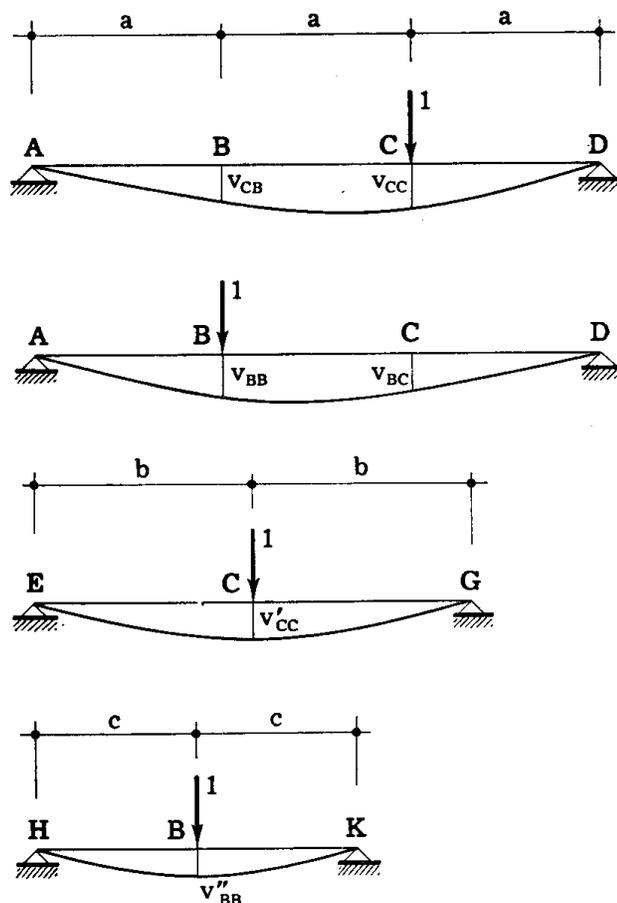


FIG. 8-1 b

ad una forza concentrata verticale si traggono i valori degli spostamenti in B e C per le travi della fig. 8-1 b:

$$v_{BC} = v_{CB} = \frac{4}{9} \frac{a^3}{EI}$$

$$v_{CC} = v_{BB} = \frac{2}{9} \frac{a^3}{EI}$$

(a)

$$v'_{CC} = \frac{b^3}{6 E'I'}$$

$$v''_{BB} = \frac{c^3}{6 E''I''}$$

L'interazione X_B si assume positiva se agisce sulla trave AD verso il basso e sulla trave HK verso l'alto; l'interazione X_C si assume positiva se agisce sulla trave AD verso il basso e sulla trave EG verso l'alto. L'equazione di congruenza in B è

$$X_B v_{BB} + (F + X_C) v_{CB} = - X_B v''_{BB}$$

e quella di congruenza in C è

$$X_B v_{BC} + (F + X_C) v_{CC} = - X_C v'_{CC} .$$

Il sistema risolvente è perciò il seguente

$$\begin{aligned} X_B (v_{BB} + v''_{BB}) + X_C v_{CB} &= - F v_{CB} \\ X_B v_{BC} + X_C (v_{CC} + v'_{CC}) &= - F v_{CC} , \end{aligned}$$

che porge

$$\begin{aligned} X_B &= - F \frac{v'_{CC} v_{CB}}{(v_{BB} + v''_{BB})(v_{CC} + v'_{CC}) - v_{CB}^2} \\ X_C &= - F \frac{v_{CC}(v_{BB} + v''_{BB}) - v_{CB}^2}{(v_{CC} + v'_{CC})(v_{BB} + v''_{BB}) - v_{CB}^2} . \end{aligned} \tag{b}$$

Dalle (a) e (b) si trae che per $E'I' = \infty$, è $v'_{CC} = 0$, e $X_B = 0$, $X_C = -F$; per $E''I'' = 0$, è $v''_{BB} = \infty$, e risulta $X_B = 0$, $X_C = -F \frac{v_{CC}}{v_{CC} + v'_{CC}}$; per $E'I' = 0$, è $v'_{CC} = \infty$, e si ha $X_B = -F \frac{v_{CB}}{v_{BB} + v''_{BB}}$, $X_C = 0$.

2. La trave di sezione costante con un appoggio e un incastro rigidi.

Si studia in questo paragrafo la trave AB incastrata in A e appoggiata in B, a vincoli rigidi, di sezione costante, sottoposta a condizioni di carico diverse.

a) *Trave soggetta ad un carico uniformemente distribuito.*

La trave AB (fig. 8-2), è soggetta ad un carico q uniformemente distribuito.

Eliminato l'appoggio in B, ci si riconduce ad una mensola; la reazione R_B in B è fornita dalla condizione di congruenza $v_B = 0$.

Lo spostamento di B per effetto di q è pari a $\frac{ql^4}{8EI}$; lo spostamento della stessa sezione per effetto di R_B è pari a $\frac{R_B l^3}{3EI}$. L'equazione di

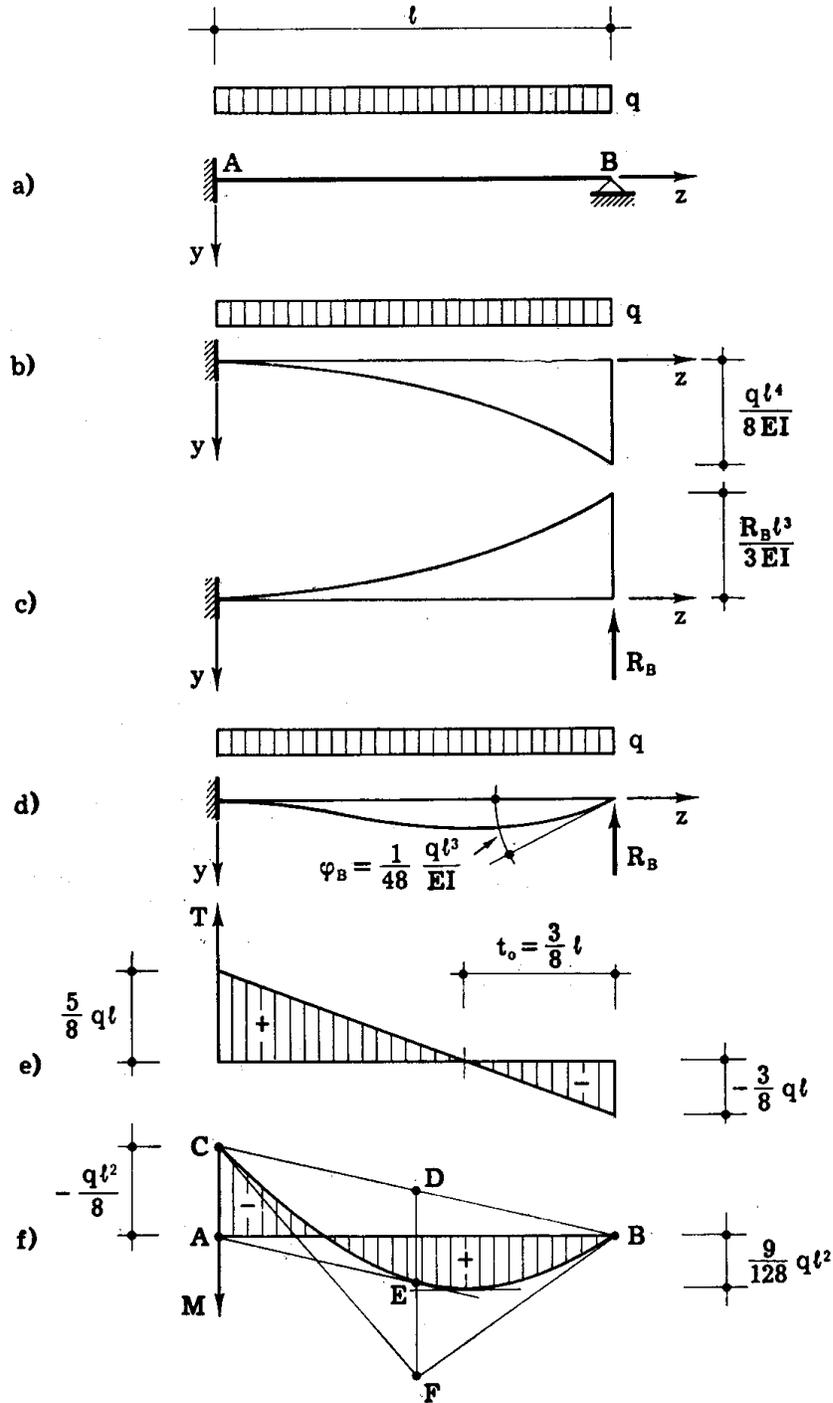


FIG. 8-2

congruenza è perciò

$$\frac{ql^4}{8EI} + \frac{R_B l^3}{3EI} = 0$$

da cui si trae

$$R_B = -\frac{3}{8} q l . \quad (1)$$

Dalla (8-1) e dalla condizione di equilibrio alla traslazione secondo y

$$R_A + R_B + q l = 0 \quad (c)$$

si ha

$$R_A = -\frac{5}{8} q l . \quad (2)$$

Il taglio T_A in A è pari alla reazione R_A cambiata di segno. La condizione di equilibrio alla rotazione intorno ad A si scrive

$$-\frac{q l^2}{2} + \frac{3}{8} q l^2 + \mathcal{M}_A = 0 \quad (d)$$

da cui si ottiene

$$\mathcal{M}_A = \frac{q l^2}{8} . \quad (3)$$

Il momento flettente M_A in A è pari alla coppia reattiva \mathcal{M}_A cambiata di segno. Il diagramma del taglio è lineare (fig. 8-2 e), e va dal valore $\frac{5}{8} q l$ in A al valore $-\frac{3}{8} q l$ in B. La sezione di taglio nullo dista di $t_0 = \frac{3}{8} l$ dall'appoggio; ivi si ha il massimo momento flettente, il cui valore è fornito da

$$M_{\max} = -R_B t_0 - q \frac{t_0^2}{2} = t_0 \left(-R_B - q \frac{t_0}{2} \right) .$$

Poichè è

$$R_B = -q t_0$$

si ha pure

$$M_{\max} = \frac{q t_0^2}{2} , \quad (4)$$

e cioè, nel caso in esame,

$$M_{\max} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{8} \right)^2 q l^2 = \frac{9}{128} q l^2 = 0,0703 q l^2 , \quad (5)$$

poco più elevato della metà del valore assoluto di M_A , che è pari (8-3) a $-\frac{16}{128} ql^2$.

Il diagramma del momento flettente è una parabola quadratica, la cui costruzione è riportata nella fig. 8-2 f; si disegna in A verso l'alto un segmento $AC = \frac{ql^2}{8}$, si congiunge C con B, e a partire dal punto medio D di CB si disegna verso il basso il segmento $DE = \frac{ql^2}{8}$ e il segmento doppio $DF = \frac{ql^2}{4}$. Le rette CF e BF sono le tangenti alla parabola in C e B, e la parallela per E alla CB è la tangente alla parabola in E. Conosciute le tangenti in C e B, la costruzione può completarsi, come è noto

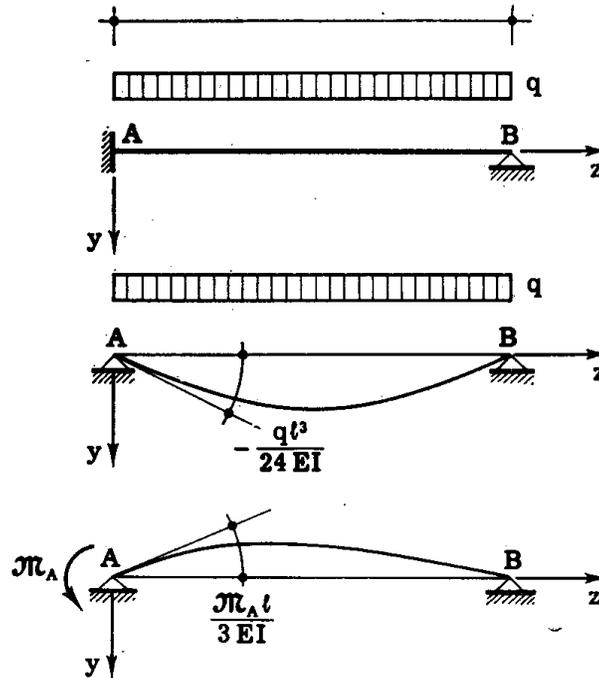


FIG. 8-3

dalla geometria proiettiva, suddividendo CF e BF in parti uguali e congiungendo i punti dividenti nell'ordine secondo-penultimo, terzo-terzultimo, e così via; in genere però la conoscenza delle tangenti in C, E e B è sufficiente per disegnare con buona approssimazione la parabola.

La rotazione in B è fornita da

$$\varphi_B = -\frac{ql^3}{6EI} + \frac{3}{8} ql \frac{l^2}{2EI},$$

e cioè da

$$\varphi_B = \frac{1}{48} \frac{ql^3}{EI} \quad (6)$$

Il problema può anche risolversi assumendo come struttura isostatica la trave appoggiata, e come incognita, quindi, la coppia \mathcal{M}_A (fig. 8-3). L'equazione di congruenza è, in tal caso,

$$-\frac{ql^3}{24 EI} + \frac{\mathcal{M}_A l}{3 EI} = 0$$

da cui si ottiene

$$\mathcal{M}_A = \frac{ql^2}{8}$$

b) *Trave soggetta ad un carico concentrato.*

La trave AB è soggetta in S ad una forza concentrata F (fig. 8-4). Si

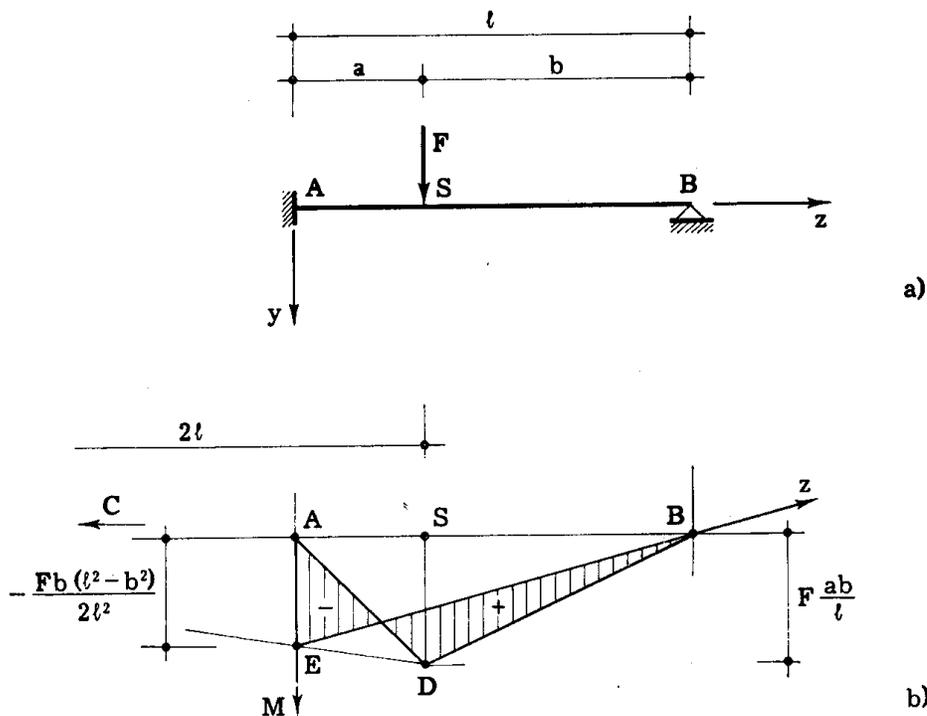


FIG. 8-4

assume come trave isostatica la trave appoggiata; l'equazione di congruenza è

$$-\frac{Fb}{6 l EI} (l^2 - b^2) + \frac{\mathcal{M}_A l}{3 EI} = 0$$

da cui si ottiene

$$\mathcal{M}_A = \frac{F b (l^2 - b^2)}{2 l^2} . \quad (7)$$

Poichè si ottiene pure

$$\mathcal{M}_A = \frac{F b}{2 l^2} (l + b) (l - b) = \frac{F b a}{2 l^2} (l + b) = \frac{F \frac{ab}{l} (2 l - a)}{2 l}$$

si giustifica la costruzione grafica di \mathcal{M}_A che si riporta nella fig. 8-4 b: dal punto C, situato sulla retta AB, a sinistra di A e a distanza $2 l$ da S, si proietta il vertice D dell'ordinata massima $SD = F \frac{ab}{l}$ della superficie semplice dei momenti; il segmento AE fornisce \mathcal{M}_A .

c) *Trave soggetta ad una coppia in corrispondenza dell'estremo appoggiato.*

Assumendo anche nel caso in esame (fig. 8-5 a) come struttura isosta-

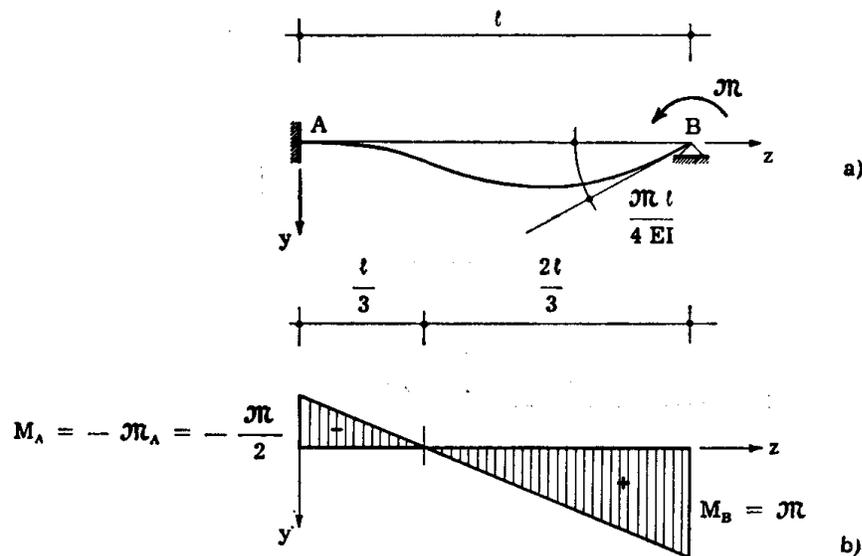


FIG. 8-5

tica la trave appoggiata, si ha

$$-\frac{\mathcal{M} l}{6 EI} + \frac{\mathcal{M}_A l}{3 EI} = 0 ,$$

da cui si ottiene (fig. 8-5 b)

$$\mathcal{M}_A = \frac{\mathcal{M}}{2} . \quad (8)$$

La rotazione φ_B in corrispondenza della coppia applicata è

$$\varphi_B = \frac{\mathcal{M} l}{3 EI} - \frac{\mathcal{M}_A l}{6 EI}$$

e cioè

$$\varphi_B = \frac{\mathcal{M} l}{4 EI} \quad (9)$$

Il diagramma del momento (fig. 8-5 b) è lineare, e si annulla a distanza $l/3$ dall'incastro.

d) *Trave soggetta ad un carico qualsiasi.*

Se la trave è soggetta ad un carico qualsiasi (fig. 8-6), e φ_A° è la ro-

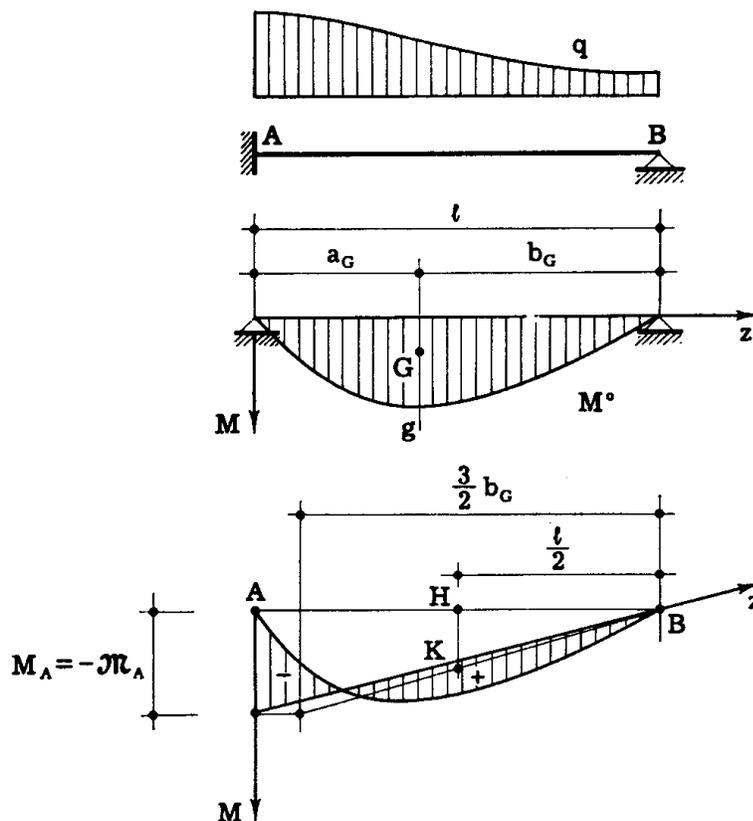


FIG. 8-6

tazione che il carico indurrebbe in corrispondenza della sezione A della trave AB appoggiata in A e B, l'equazione di congruenza è

$$\varphi_A^\circ + \frac{\mathcal{N}_A l}{3 EI} = 0$$

da cui si trae

$$\mathcal{M}_A = - \frac{3 EI \varphi_A^0}{l} . \quad (10)$$

Nella (8-10) rientrano le (8-3), (8-7) e (8-8).

Un elegante procedimento grafico che permette di ottenere \mathcal{M}_A deriva dai corollari di Mohr. Come già detto la trave ausiliaria è libera in A e appoggiata in B; perciò il carico fittizio $q^* = \frac{M}{EI} - \mu$ deve rispettare le condizioni di equilibrio di tale struttura, e cioè il suo momento rispetto al punto B deve essere nullo. A meno della quantità costante $1/EI$, il diagramma di q^* coincide con quello di $M - EI\mu$, ed è costituito dal diagramma del momento M^0 che il carico indurrebbe sulla trave appoggiata (*superficie semplice dei momenti*), dal diagramma triangolare che la coppia \mathcal{M}_A indurrebbe sulla stessa trave appoggiata e dal diagramma $-EI\mu$. La condizione di equilibrio del carico q^* sulla trave ausiliaria si scrive perciò come segue:

$$- \frac{\mathcal{M}_A l}{2} \frac{2}{3} l + HK l b_G = 0$$

da cui si trae

$$\mathcal{M}_A = 3 \frac{HK b_G}{l} , \quad (11)$$

ove HK è l'ordinata media del diagramma $M^0 - EI\mu$, è b_G la distanza della verticale baricentrica della stessa superficie dall'appoggio (fig. 8-6). Poichè può scriversi

$$\frac{\mathcal{M}_A}{HK} = \frac{\frac{3}{2} b_G}{\frac{l}{2}}$$

si giustifica la costruzione grafica della fig. 8-6.

e) *Trave soggetta ad una distorsione di rotazione relativa.*

Se la trave è sottoposta ad una distorsione di rotazione relativa D_φ in corrispondenza della sezione S distante a dall'incastro e b dall'appoggio (fig. 8-7), si ha

$$\varphi_A^0 = \frac{b}{l} D_\varphi ,$$

e perciò la 8-10 fornisce

$$\mathcal{M}_A = - \frac{3 EI b}{l^2} D_\varphi . \quad (12)$$

Il diagramma dei momenti, diviso per D_φ , fornisce il diagramma $m_{S\mu}$; così

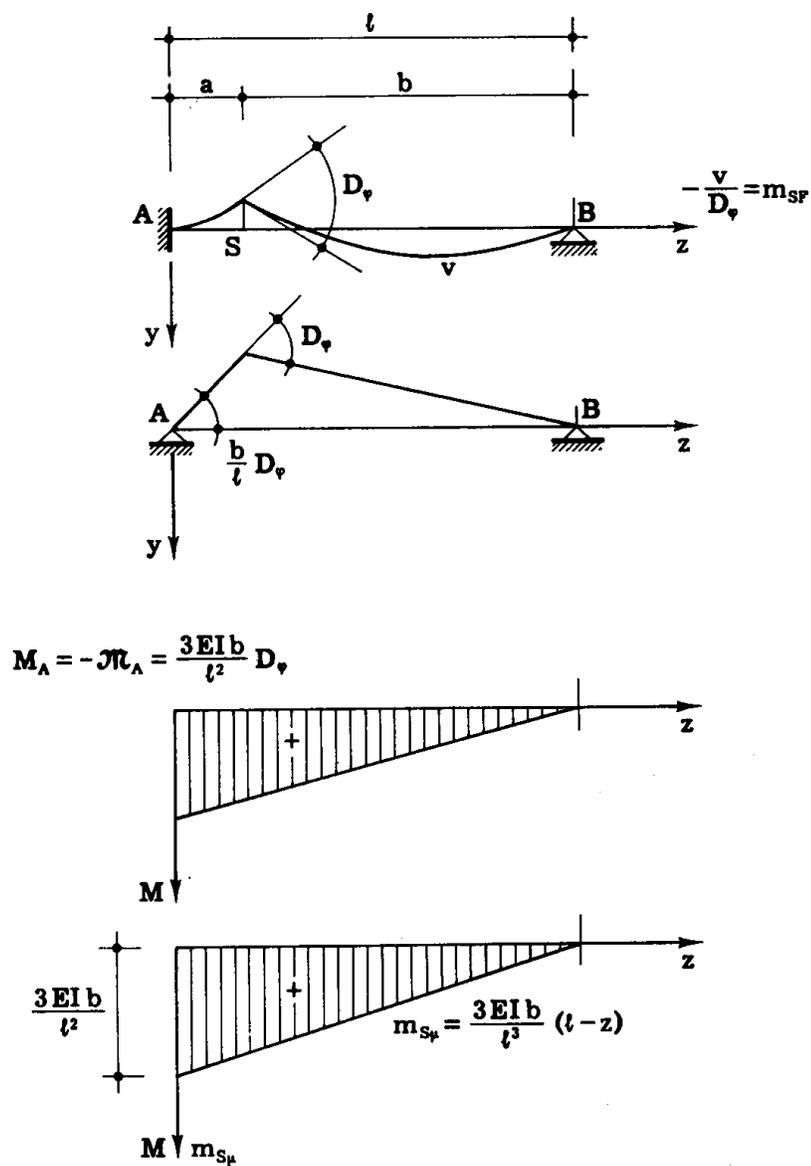


FIG. 8-7

pure il diagramma degli spostamenti, diviso per $-D_\varphi$, fornisce il diagramma m_{SF} .

f) Trave soggetta ad una distorsione di scorrimento relativo.

In tal caso si ha (fig. 8-8)

$$\varphi_A^0 = -\frac{D_\eta}{l},$$

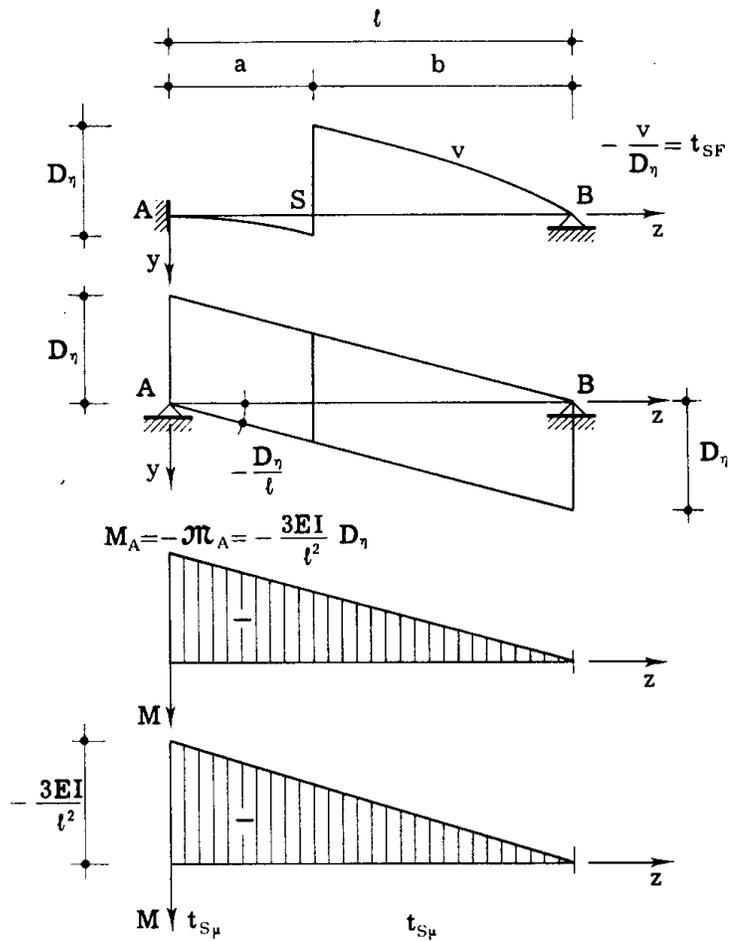


FIG. 8-8

e quindi dalla 8-10 si trae

$$\mathcal{M}_A = \frac{3EI}{l^2} D_\eta. \quad (13)$$

Il diagramma dei momenti, diviso per D_η , fornisce il diagramma $t_{S\mu}$; il diagramma degli spostamenti, diviso per $-D_\eta$, fornisce il diagramma t_{SF} .

g) *Trave soggetta ad un cedimento angolare anelastico dell'incastro.*

L'incastro cede (fig. 8-9) anelasticamente ed angularmente dell'angolo

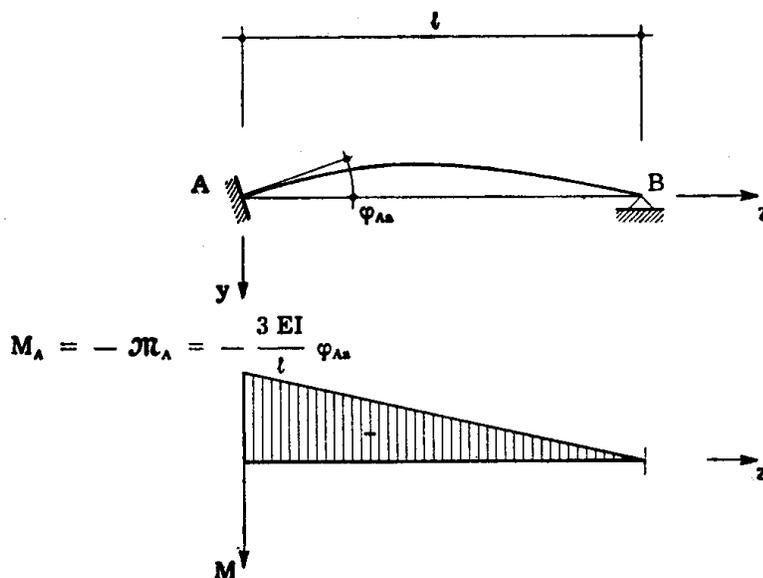


FIG. 8-9

φ_{Aa} ; come ogni rotazione, φ_{Aa} è positivo se antiorario. La condizione di congruenza in A si scrive

$$\frac{N_A l}{3EI} = \varphi_{Aa}$$

da cui si trae

$$N_A = \frac{3EI}{l} \varphi_{Aa} \quad (14)$$

La (8-14) è in accordo con la (8-12); infatti un cedimento φ_{Aa} corrisponde ad una distorsione $D_{\varphi A} = -\varphi_{Aa}$, attese le convenzioni sui versi.

h) *Trave soggetta a cedimenti vincolari verticali anelastici.*

La trave AB presenti i cedimenti vincolari anelastici degli appoggi v_{Aa} e v_{Ba} (fig. 8-10); v_{Aa} e v_{Ba} sono positivi se diretti verso il basso.

Se la trave fosse appoggiata, la sezione A ruoterebbe dell'angolo

$$\varphi_A^0 = -\frac{v_{Ba} - v_{Aa}}{l}$$

Il momento \mathcal{M}_A deve annullare tale rotazione; perciò l'equazione di congruenza in A si scrive

$$-\frac{v_{Ba} - v_{Aa}}{l} + \frac{\mathcal{M}_A l}{3EI} = 0$$

da cui si trae

$$\mathcal{M}_A = \frac{3EI}{l} \frac{v_{Ba} - v_{Aa}}{l} \quad (e)$$

Si conviene chiamare con δ_{AB} la differenza $v_{Ba} - v_{Aa}$ (positiva quindi se B cede più di A, come nella fig. (8-10), e con ψ_{AB} la rotazione indotta in

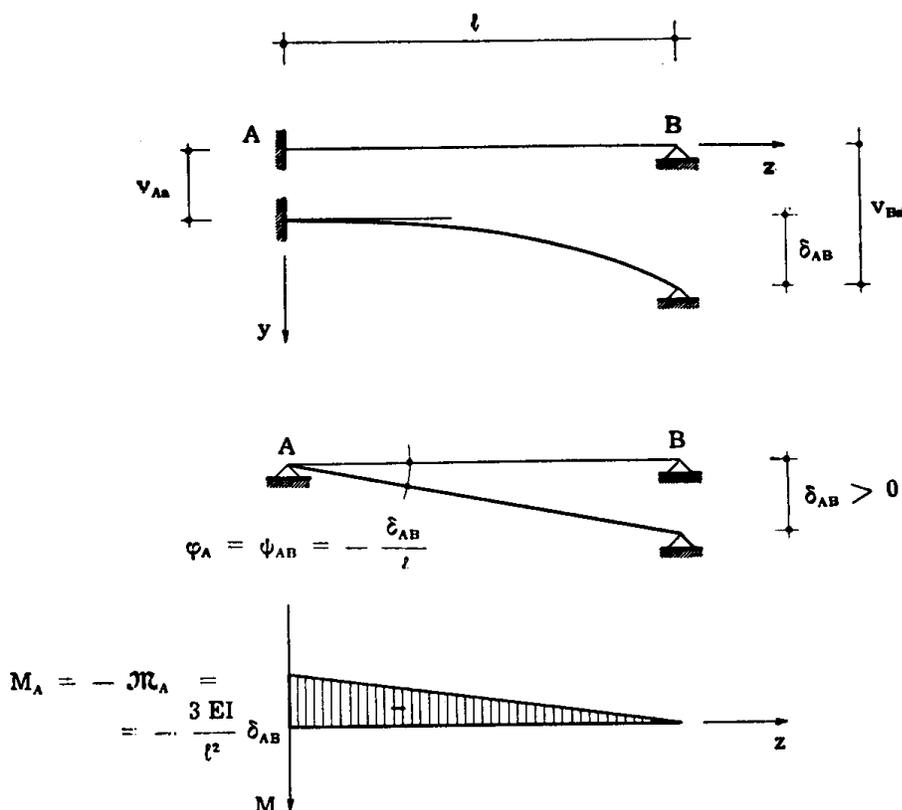


FIG. 8-10

A e B da δ_{AB} sulla trave appoggiata, positiva al solito se in verso orario; è perciò (*)

$$\psi_{AB} = -\frac{v_{Ba} - v_{Aa}}{l} = -\frac{\delta_{AB}}{l} \quad (15)$$

(*) La (8-15) è valida in generale, cioè per qualsiasi complesso di travi. Infatti il segno di ψ e δ è legato a quello degli assi n e t , orientati sempre in modo che t segua n nel verso antiorario, e quindi come gli assi y e z della fig. 8-10.

La (e) si scrive, per la (8-15),

$$\mathfrak{M}_A = \frac{3 EI \delta_{AB}}{\ell^2} = - \frac{3 EI}{\ell} \psi_{AB} . \quad (16)$$

La (8-16) è in accordo con la (8-13), perchè un cedimento δ_{AB} corrisponde ad una distorsione $D_{\eta B} = \delta_{AB}$ in B.

3. La trave di sezione variabile.

Si premette il calcolo dei valori delle rotazioni che si verificano in corrispondenza delle sezioni di estremità della trave appoggiata AB, per effetto di una coppia $\mathfrak{M} = 1$ applicata in A o in B. Se la coppia è appli-

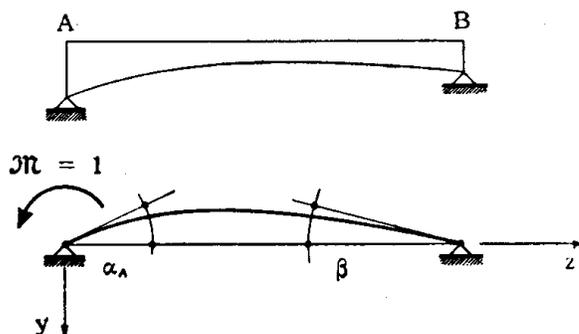


FIG. 8-11

cata in A (fig. 8-11) dalle formule (7-73), o dal principio dei lavori virtuali, si ottiene

$$M = - \frac{(\ell - z)}{\ell}$$

$$\varphi_A = \alpha_A = \frac{1}{\ell^2} \int_0^{\ell} \frac{(\ell - z)^2}{EI} dz$$

$$\varphi_B = \beta = - \frac{1}{\ell^2} \int_0^{\ell} \frac{(\ell - z) z}{EI} dz . \quad (17)$$

Se la coppia è applicata in B (fig. 8-12) si ha invece

$$\varphi_A = \beta = - \frac{1}{\ell^2} \int_0^{\ell} \frac{(\ell - z) z}{EI} dz$$

$$\varphi_B = \alpha_B = \frac{1}{\ell^2} \int_0^{\ell} \frac{z^2}{EI} dz . \quad (18)$$

I valori di φ_B nel primo caso e di φ_A nel secondo sono uguali, per il teorema di Maxwell, e si conviene indicarli con il simbolo β ; le rotazioni φ_A nel primo caso e φ_B nel secondo, corrispondenti alle sezioni di applicazione della coppia unitaria, si conviene indicarle con α_A ed α_B , e sono uguali se la trave è simmetrica rispetto alla mezzzeria.

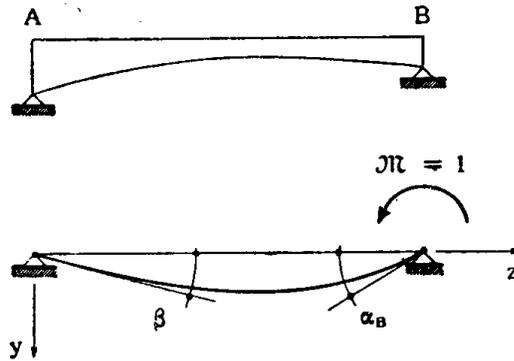


FIG. 8-12

Nelle tabelle da 8-1 ad 8-4 (in appendice al volume) sono riportati i valori di α_A , α_B e β . Le tabelle 8-1 ed 8-2 sono relative ad una trave simmetrica rispetto alla mezzzeria, di luce l , costituita da un tratto centrale con momento d'inerzia I_r costante, e da due tratti estremi in cui il momento d'inerzia varia da I_r ad I_s con legge rispettivamente quadratica e cubica. La lunghezza dei tratti a momento d'inerzia variabile è λl ($0 < \lambda < 0,5$); n è il rapporto

$$n = \frac{I_r}{I_s} .$$

Gli angoli sono forniti da

$$\alpha_A = \alpha_B = \frac{l}{EI_r} A$$

$$\beta = \frac{l}{EI_r} B .$$

Le tabelle 8-3 ed 8-4 sono relative ad una trave in cui la sezione varia solo da una parte; in esse è $0 < \lambda < 1$, e si è posto

$$\alpha_A = \frac{l}{EI_r} A_A$$

$$\alpha_B = \frac{l}{EI_r} A_B$$

$$\beta = \frac{l}{EI_r} B .$$

Per una trave incastrata in A con cedibilità elastica ϵ_A , appoggiata

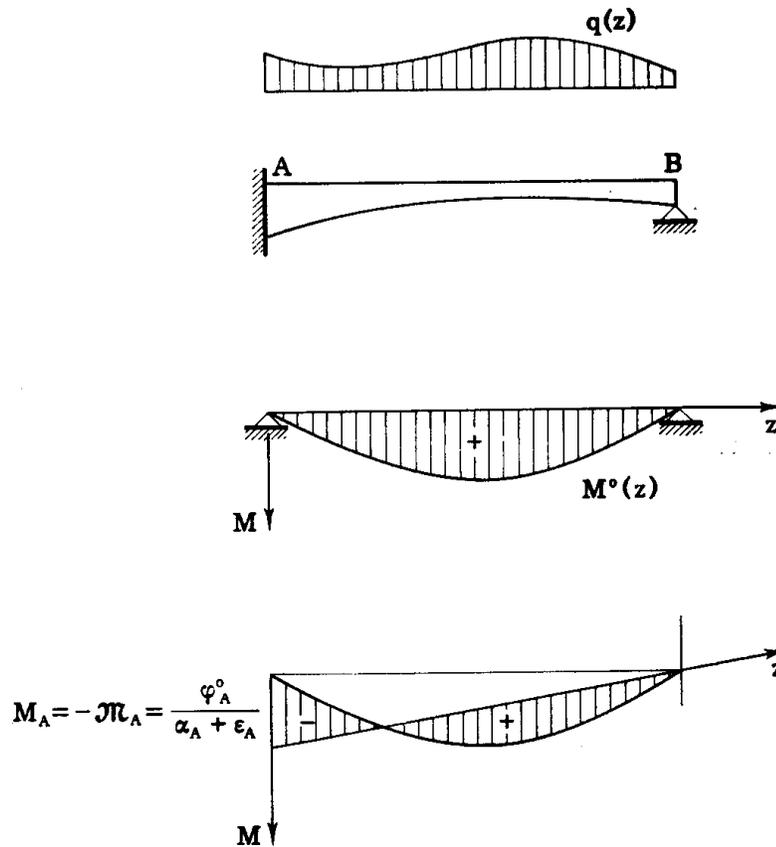


FIG. 8-13

in B, e soggetta ad un carico $q(z)$ cui corrisponde il momento di trave appoggiata $M^o(z)$ (fig. 8-13), si ha

$$\varphi_A^o + N_A \alpha_A = - N_A \epsilon_A .$$

E' quindi

$$N_A = - \frac{\varphi_A^o}{(\alpha_A + \epsilon_A)} \quad (19)$$

Per la stessa trave, incastrata in B e appoggiata in A (fig. 8-14), si ha

$$\varphi_B^0 + \mathcal{N}_B \alpha_B = - \mathcal{N}_B \varepsilon_B$$

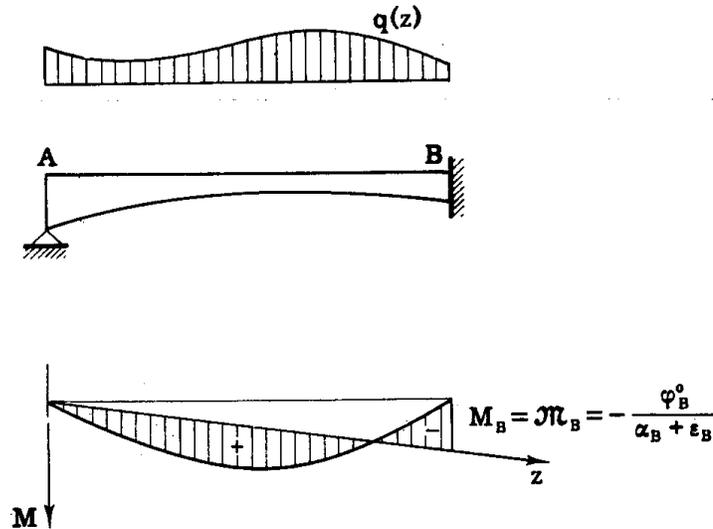


FIG. 8-14

da cui si ottiene

$$\mathcal{N}_B = - \frac{\varphi_B^0}{(\alpha_B + \varepsilon_B)} \quad (20)$$

I valori di φ_A^0 e φ_B^0 si calcolano attraverso gli M^0 al solito modo; si ha

$$\varphi_A^0 = - \frac{1}{l} \int_0^l \frac{M^0 (l - z)}{EI} dz, \quad e \quad \varphi_B^0 = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{M^0 z}{EI} dz.$$

4. Trave di sezione variabile con un appoggio e un incastro rigidi soggetta ad una coppia in corrispondenza dell'estremo appoggiato.

Se la trave AB è incastrata in A e soggetta alla coppia \mathcal{N} in B, si ha (fig. 8-15)

$$\mathcal{N} \beta + \mathcal{N}_A \alpha_A = 0$$

da cui

$$\mathcal{N}_A = - \mathcal{N} \frac{\beta}{\alpha_A} \quad (21)$$

La rotazione in B, è fornita da

$$\varphi_B = \mathcal{N} \alpha_B + \mathcal{N}_A \beta = \mathcal{N} \left(\alpha_B - \frac{\beta^2}{\alpha_B} \right) \quad (22)$$

Se invece la trave è incastrata in B e soggetta alla coppia \mathcal{M} in A, si ha (fig. 8-16)

$$\mathcal{M} \beta + \mathcal{M}_B \alpha_B = 0$$

da cui

$$\mathcal{M}_B = - \mathcal{M} \frac{\beta}{\alpha_B} . \quad (23)$$

La rotazione in A è fornita da

$$\varphi_A = \mathcal{M} \alpha_A + \mathcal{M}_B \beta = \mathcal{M} \left(\alpha_A - \frac{\beta^2}{\alpha_B} \right) . \quad (24)$$

Se la coppia applicata in B è unitaria, la rotazione φ_B si indica con il sim-

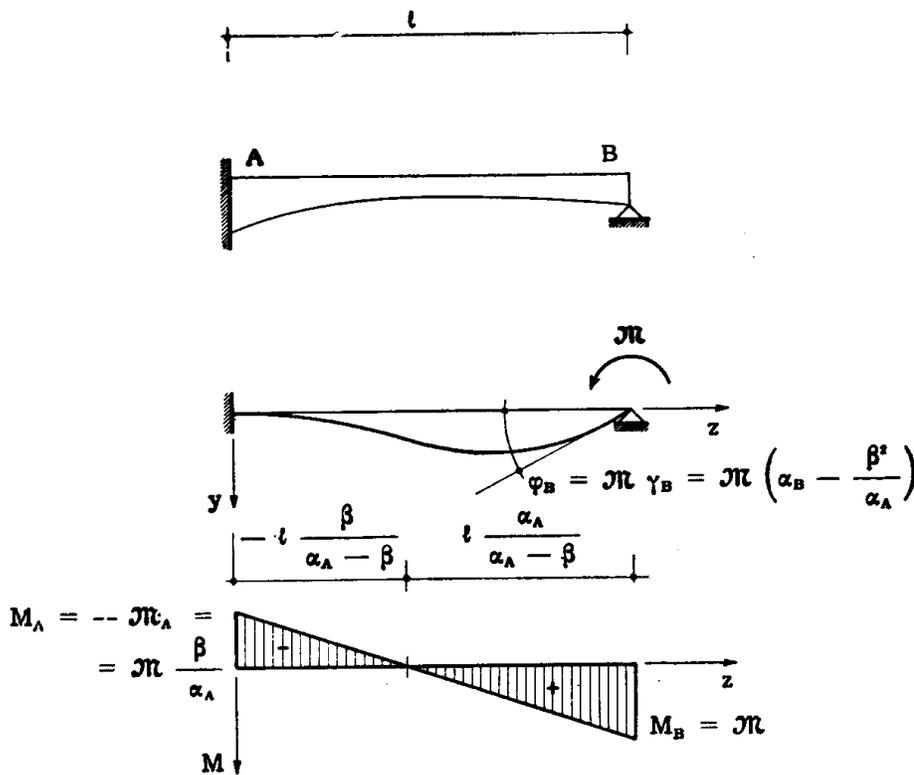


FIG. 8-15

bolo γ_B ; se la coppia applicata in A è unitaria, la rotazione φ_A si indica con il simbolo γ_A .

Le quantità

$$\gamma_A = \alpha_A - \frac{\beta^2}{\alpha_B} \quad (25)$$

$$\gamma_B = \alpha_B - \frac{\beta^2}{\alpha_A}$$

aventi le dimensioni dell'inverso di un momento $[F^{-1} l^{-1}]$ non sono che i pesi elastici della sezione A nella trave appoggiata in A e incastrata in B,

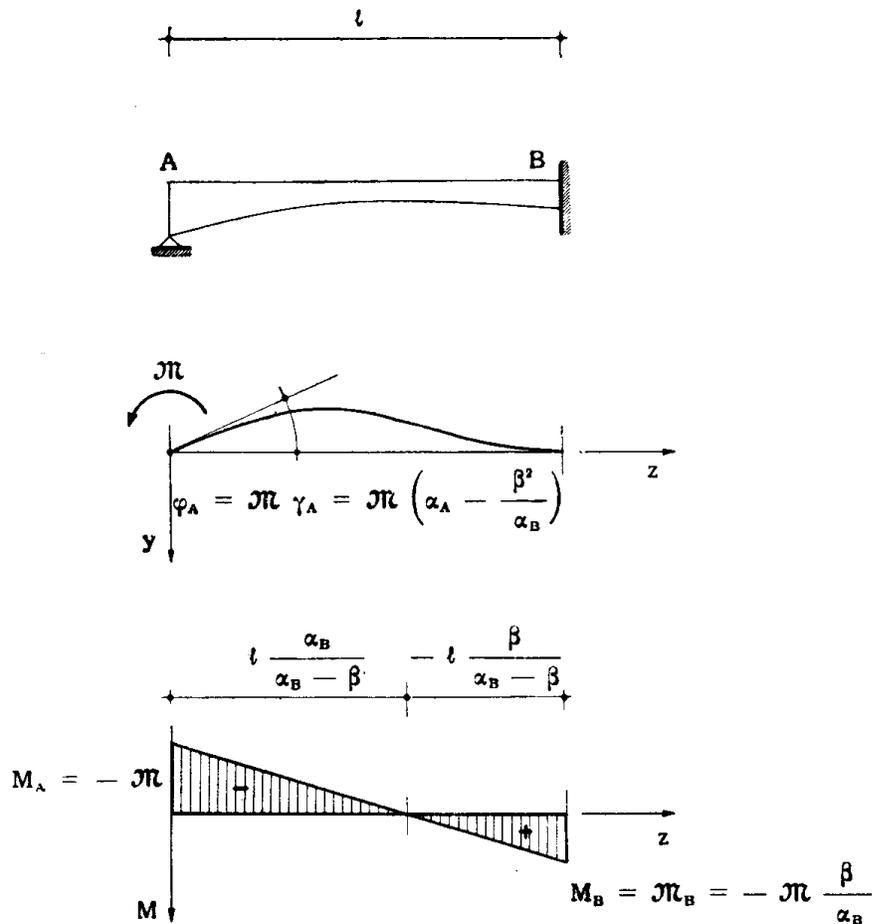


FIG. 8-16

e della sezione B nella trave incastrata in A e appoggiata in B, supposto in ambedue i casi che i vincoli siano rigidi.

5. Trave di sezione variabile con un appoggio e un incastro rigidi, soggetta ad una distorsione di rotazione relativa.

La distorsione D_φ agisce in corrispondenza della sezione S a distanza rispettivamente a e b dai due estremi A e B (fig. 8-17 a).

Nella trave appoggiata ai due estremi la distorsione D_φ produce una rotazione $\varphi_A^0 = \frac{b}{l} D_\varphi$ in A; l'equazione di congruenza si scrive perciò

$$\frac{b}{l} D_\varphi + \pi_A \alpha_A = 0$$

da cui si ottiene

$$\mathcal{M}_A = - \frac{b}{l} \frac{D_\varphi}{\alpha_A} \quad (26)$$

Per trave di sezione costante si ritrova la (8-12). Il diagramma del momento flettente è riportato nella fig. 8-17 c. Il diagramma degli sposta-

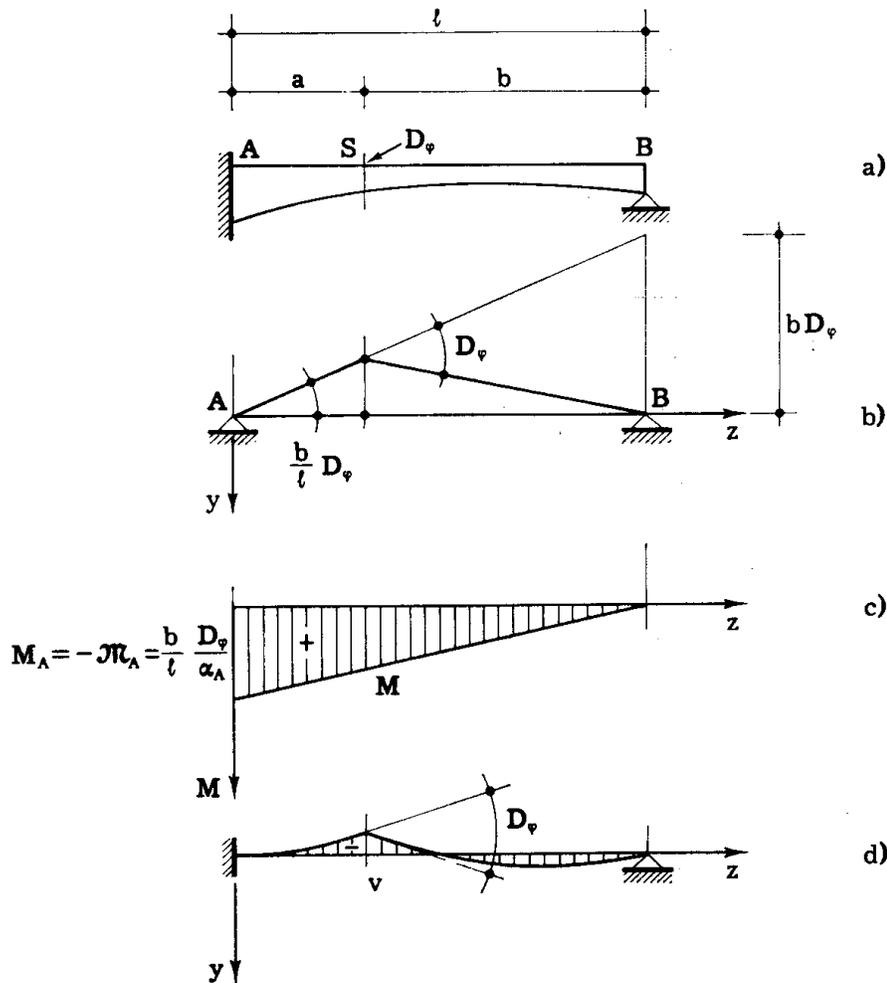


FIG. 8-17

menti è disegnato in fig. 8-17 d; esso è somma di quello provocato da D_φ sulla trave appoggiata (fig. 8-17 b), e di quello indotto dalla coppia \mathcal{M}_A sulla stessa trave appoggiata.

6. Trave di sezione variabile con un appoggio e un incastro rigidi, soggetta ad una distorsione di scorrimento relativo.

La distorsione D_η agisca in corrispondenza della sezione S a distanza rispettivamente a e b dai due estremi A e B (fig. 8-18). Nella trave appog-

giata ai due estremi la distorsione D_η produce una rotazione $\varphi_A^0 = -\frac{D_\eta}{l}$ in A ; si ha perciò

$$-\frac{D_\eta}{l} + \mathcal{N}_A \alpha_A = 0$$

da cui

$$\mathcal{N}_A = \frac{D_\eta}{l \alpha_A} . \quad (27)$$

Per trave di sezione costante si ritrova la (8-13). L'espressione (8-27),

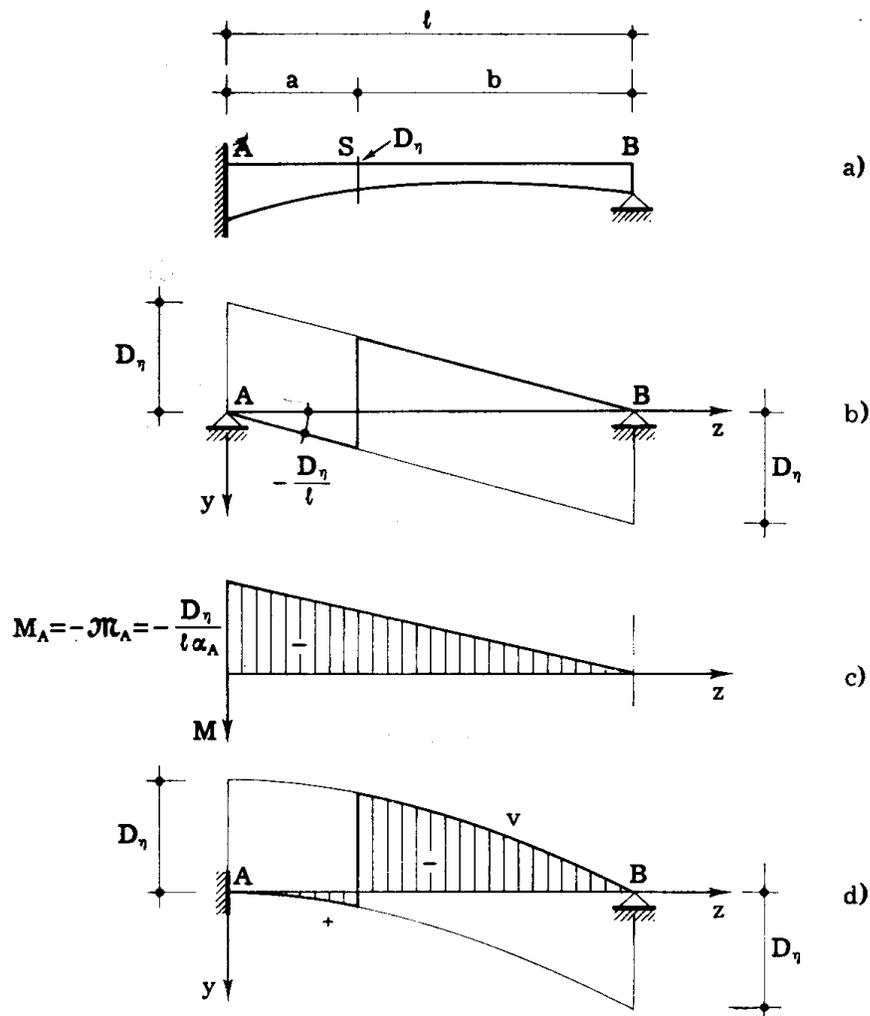


FIG. 8-18

come la (8-13), è indipendente da a e b , e cioè dalla posizione di D_η ; il diagramma del momento flettente è perciò sempre quello della fig. 8-

18 c, ovunque sia applicata D_n . Il diagramma degli spostamenti è quello della fig. 8-18 d; esso può ottenersi sovrapponendo al diagramma degli spostamenti della fig. 8-18 b quello degli spostamenti provocati sulla trave appoggiata dalla coppia \mathcal{M}_A .

Si può anche procedere assumendo come sistema isostatico la trave a mensola (fig. 8-19). Alla forza R_B agente sull'estremo B si associa una

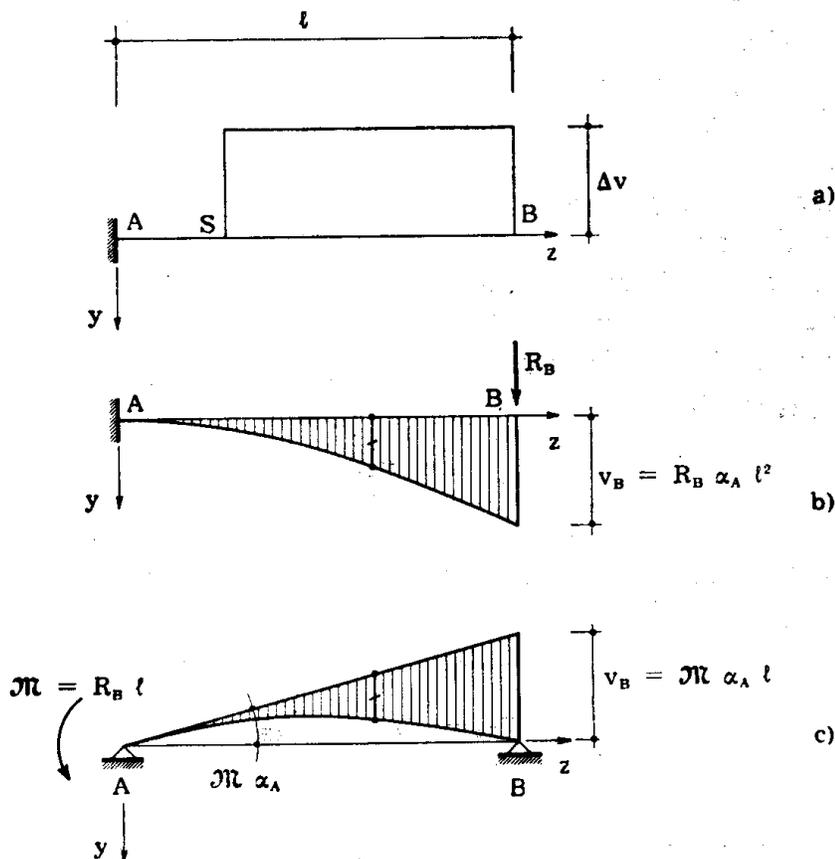


FIG. 8-19

linea elastica (fig. 8-19 b) che coincide con quella indotta nella stessa trave, appoggiata però ai due estremi, dalla coppia $\mathcal{M}_A = R_B l$ agente sull'estremo A (fig. 8-19 c); infatti i diagrammi dei momenti nei due casi coincidono. La linea elastica della trave appoggiata va letta però con riferimento alla sua tangente in A, per rispettare le condizioni di vincolo della mensola.

La forza R_B produce perciò in B uno spostamento pari a

$$v_B = \mathcal{M} \alpha_A l = R_B \alpha_A l^2 .$$

L'equazione di congruenza in B è quindi

$$- D_n + R_B \alpha_A l^2 = 0$$

da cui si trae

$$R_B = \frac{D_\eta}{\alpha_A l^2}.$$

Si può quindi disegnare la linea elastica della mensola soggetta in B alla forza $R_B = \frac{D_\eta}{\alpha_A l^2}$, e traslare verso l'alto di D_η la linea elastica alla destra di S (fig. 8-18 d). Poichè R_B non dipende dall'ascissa di S, la linea elastica, fissata D_η , è valida quale che sia la sezione S ove D_η è applicata; varia con la posizione di S solo la lunghezza del tratto di linea elastica che trasla.

Un cedimento angolare anelastico φ_{Aa} dell'incastro si tratta alla stregua in una distorsione $D_\varphi = -\varphi_{Aa}$ agente in A; un cedimento anelastico v_{Aa} dell'incastro (positivo se diretto verso il basso) alla stregua di una distorsione $D_\eta = -v_{Aa}$ agente in A; un cedimento anelastico v_{Ba} dell'appoggio alla stregua di una distorsione $D_\eta = v_{Ba}$ agente in B. Per effetto di un cedimento φ_{Aa} è perciò

$$\mathcal{M}_A = \frac{\varphi_{Aa}}{\varphi_A}; \quad (28)$$

per trave a sezione costante si ritrova la (8-14). Un cedimento v_{Aa} e un cedimento v_{Ba} equivalgono ad un unico cedimento $\delta_{AB} = v_{Ba} - v_{Aa}$ in B; ad essi corrisponde quindi un momento in A pari a

$$\mathcal{M}_A = \frac{v_{Ba} - v_{Aa}}{l \alpha_A} = \frac{\delta_{AB}}{l \alpha_A}; \quad (29)$$

per trave a sezione costante si ritrova la (8-16). La posizione (8-15) permette anche di scrivere

$$\mathcal{M}_A = -\frac{\psi_{AB}}{\alpha_A}. \quad (30)$$

7. Linee d'influenza del momento flettente e del taglio per una distorsione $D_\varphi = 1$ e per una forza $F = 1$ viaggianti, nell'ipotesi di vincoli rigidi.

La linea d'influenza $m_{S\mu}$ del momento flettente in S per una distorsione $D_\varphi = 1$ viaggiante è il diagramma del momento flettente provocato da una distorsione D_φ agente in S, diviso per il valore di D_φ ; essa è fornita perciò (fig. 8-20 b) da

$$m_{S\mu} = \frac{M_A}{l D_\varphi} (l - z) = \frac{b}{l^2 \alpha_A} (l - z).$$

La linea d'influenza t_{Su} del taglio in S per una distorsione $D_\phi = 1$ viaggiante è il diagramma del momento flettente provocato da una distorsione D_η agente in S, diviso per il valore di D_η ; essa è fornita perciò (fig. 8-20 c) da

$$t_{Su} = \frac{M_A}{l D_\eta} (l - z) = - \frac{1}{l^2 \alpha_A} (l - z) .$$

La linea d'influenza m_{SF} del momento flettente in S per una forza

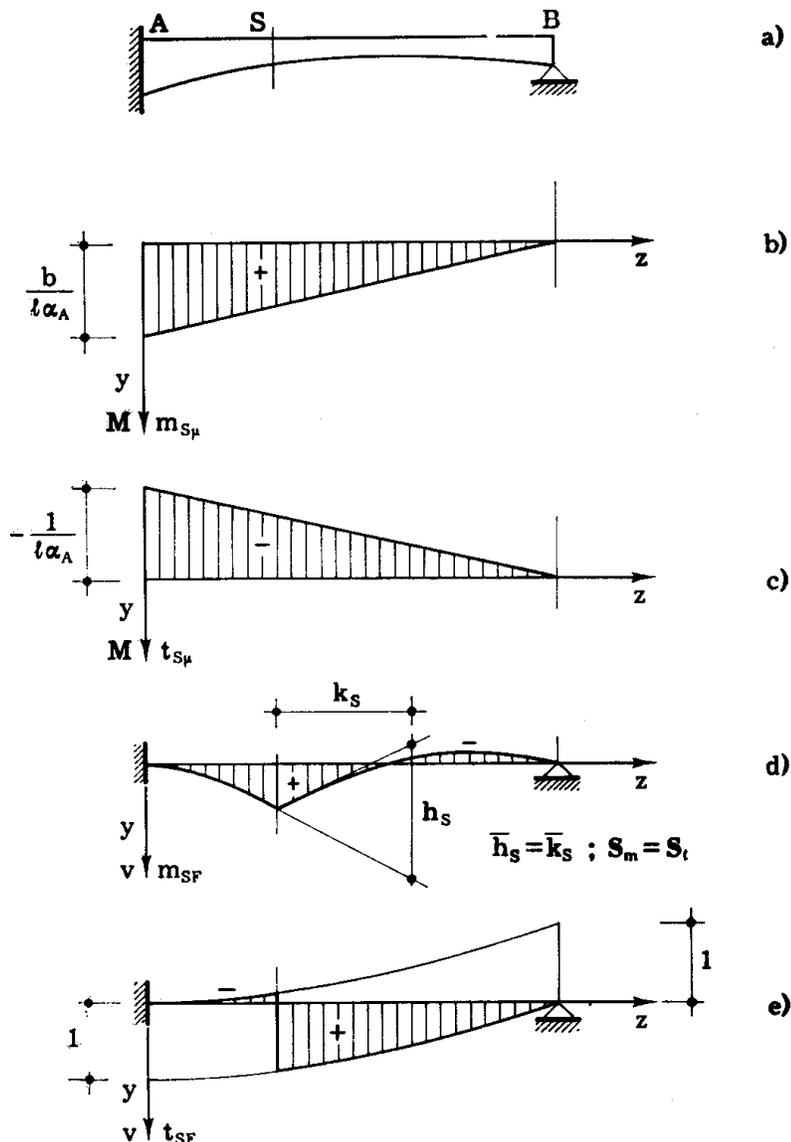


FIG. 8-20

$F = 1$ viaggiante è il diagramma degli abbassamenti provocati da una distorsione $-D_\phi$ agente in S, diviso per il valore assoluto di D_ϕ .

Le ordinate m_{SF} sono delle lunghezze; esse in genere si riportano in

diagramma nella stessa scala delle lunghezze z , e perciò il rapporto $\frac{\bar{h}_s}{\bar{k}_s}$ risulta pari all'unità (fig. 8-20 d).

La linea d'influenza t_{SF} del taglio in S per effetto di una forza $F=1$ viaggiante è il diagramma degli abbassamenti provocati da una distorsione $-D_\eta$ agente in S, diviso per il valore assoluto di D_η . Per quanto già detto nel paragrafo precedente, si può tracciare (fig. 8-20 e) la linea elastica della mensola AB per una forza qualsiasi agente in B verso l'alto, tralasciare la stessa linea verso il basso di una quantità pari allo spostamento v_B , e assumere come valida la linea superiore alla sinistra di S, la linea inferiore alla destra. Il valore di v_B si assume pari all'unità. La costruzione suddetta, sempre per quanto già detto nel paragrafo precedente, si esegue una sola volta anche se le linee d'influenza t_{SF} da disegnare sono relative a più di una sezione; e cioè la linea t_{TF} relativa ad una sezione T diversa da S si ottiene sempre considerando valida la linea superiore già tracciata, nel tratto alla sinistra di T, e quella inferiore nel tratto alla destra di T.

8. Trave di sezione variabile con appoggio e incastro, in cui l'incastro è angolarmente ed elasticamente cedevole, soggetta ad una coppia sull'appoggio.

Si consideri lo stesso caso del n. 4 (fig. 8-15), e si supponga che l'in-

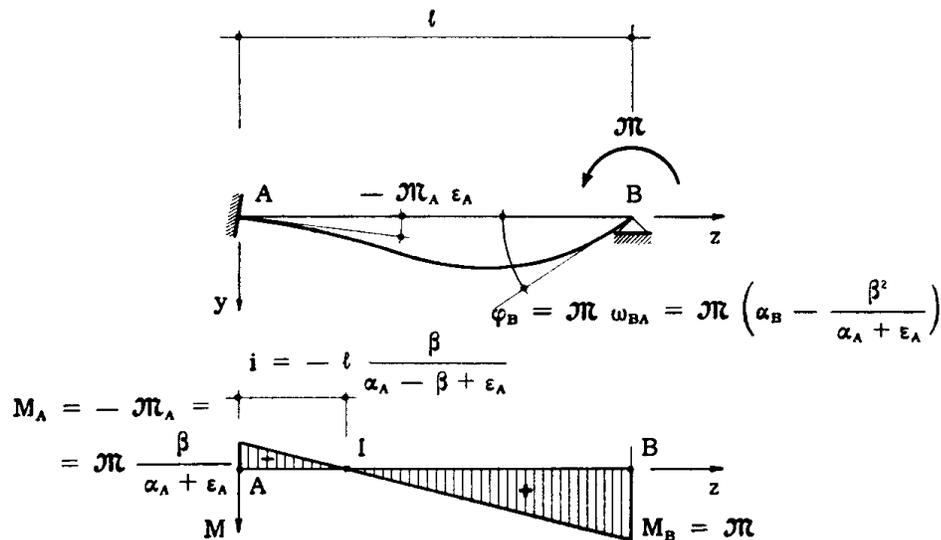


FIG. 8-21

castro A sia elasticamente cedevole, con cedibilità ε_A (fig. 8-21); l'equazione di congruenza è in tal caso

$$\pi \beta + \pi_A \alpha_A = -\pi_A \varepsilon_A$$

da cui si trae

$$\mathcal{M}_A = -\mathcal{N} \frac{\beta}{\alpha_A + \varepsilon_A} \quad (31)$$

La distanza i del punto I in cui si annulla il momento flettente dall'incastro A è fornita da

$$\frac{i}{l-i} = -\frac{\beta}{\alpha_A + \varepsilon_A} \quad (f)$$

da cui si ottiene

$$i = -l \frac{\beta}{\alpha_A - \beta + \varepsilon_A} \quad (32)$$

La rotazione φ_B è fornita da

$$\varphi_B = \mathcal{N} \alpha_B + \mathcal{M}_A \beta = \mathcal{N} \left(\alpha_B - \frac{\beta^2}{\alpha_A + \varepsilon_A} \right) \quad (33)$$

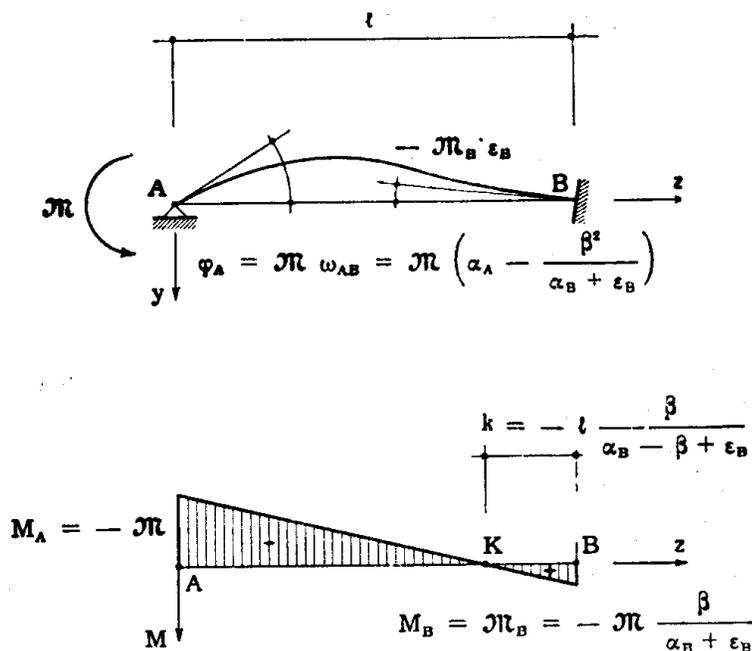


FIG. 8-22

Se la trave è incastrata in B con cedibilità ε_B si ha invece (fig. 8-22)

$$\mathcal{N} \beta + \mathcal{N}_B \alpha_B = -\mathcal{N}_B \varepsilon_B$$

da cui si ha

$$\mathfrak{M}_B = - \mathfrak{M} \frac{\beta}{\alpha_B + \varepsilon_B} . \quad (34)$$

La distanza k dell'incastro B dal punto K ove si annulla il momento flettente è fornita da

$$\frac{k}{l - k} = - \frac{\beta}{\alpha_B + \varepsilon_B}$$

da cui si trae

$$k = - l \frac{\beta}{\alpha_B - \beta + \varepsilon_B} . \quad (35)$$

La rotazione φ_A è fornita da

$$\varphi_A = \mathfrak{M} \alpha_A + \mathfrak{M}_B \beta = \mathfrak{M} \left(\alpha_A - \frac{\beta^2}{\alpha_B + \varepsilon_B} \right) . \quad (36)$$

Se la coppia applicata in B è unitaria, la rotazione φ_B si indica con il simbolo ω_{BA} ; se la coppia applicata in A è unitaria, la rotazione φ_A si indica con il simbolo ω_{AB} . Le quantità

$$\omega_{AB} = \alpha_A - \frac{\beta^2}{\alpha_B + \varepsilon_B} \quad (37)$$

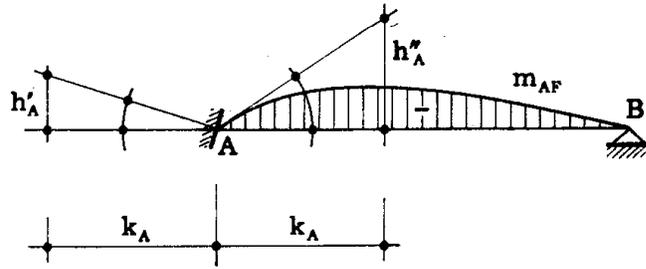
$$\omega_{BA} = \alpha_B - \frac{\beta^2}{\alpha_A + \varepsilon_A}$$

hanno le dimensioni dell'inverso di un momento, e sono i pesi elastici della sezione A della trave appoggiata in A ed elasticamente incastrata in B, e della sezione B della trave appoggiata in B ed elasticamente incastrata in A. Per ε_A ed ε_B nulli, le (8-37) coincidono con le (8-25). I punti I e K non sono altro che i *punti fissi* di sinistra e di destra, già definiti al § 1-17. Le (8-32) e (8-35) coincidono con le (1-32) e (1-33), le (8-37) con le (1-29).

9. Le linee d'influenza della trave di sezione variabile con incastro ed appoggio, in cui l'incastro è angolarmente ed elasticamente cedevole.

La linea d'influenza di maggiore interesse è quella m_{AF} del momento flettente in corrispondenza dell'incastro (fig. 8-23) (che in A, si ricorda,

è uguale e contraria a quella della coppia di incastro). La distorsione D_φ in A provoca in A stesso, come reazione, una coppia \mathcal{M}_A fornita dalla



$$\varphi_{As} = -\frac{\varepsilon_A}{\alpha_A + \varepsilon_A} \quad \varphi_{Ad} = \frac{\alpha_A}{\alpha_A + \varepsilon_A} \quad \varphi_B = \frac{\beta}{\alpha_A + \varepsilon_A}$$

$$\bar{h}'_A + \bar{h}''_A = \bar{k}_A \quad ; \quad S_m = S_t$$

FIG. 8-23

condizione di congruenza

$$\mathcal{M}_A \alpha_A + \mathcal{M}_A \varepsilon_A = -D_\varphi$$

da cui si ottiene

$$\mathcal{M}_A = -\frac{D_\varphi}{\alpha_A + \varepsilon_A} \quad (38)$$

La (8-38) può anche ottenersi dalla (8-19) ponendo $\varphi^0_A = D_\varphi$ (limite di $\frac{b D_\varphi}{l}$ per $b \rightarrow l$).

Gli spostamenti connessi con la coppia $\frac{1}{\alpha_A + \varepsilon_A}$ applicata in A costituiscono quindi la linea d'influenza m_{AF} . Riportando questi spostamenti nella stessa scala delle ascisse z , risulta (fig. 8-23)

$$\frac{\bar{h}'_A + \bar{h}''_A}{\bar{k}_A} = 1$$

In pratica spesso il tracciamento della linea di influenza può eseguirsi utilizzando i dati forniti dai manuali tecnici. Molti di questi infatti forniscono, per le leggi di variazione dei momenti d'inerzia di più frequente incontro, gli angoli α_A , α_B e β . Spesso gli stessi manuali [25] forniscono i valori degli spostamenti di una trave appoggiata ai due estremi A e B, e soggetta ad una coppia unitaria in A o in B; molto più frequentemente i manuali [27] forniscono gli spostamenti

$v_s(z)$ e $v_d(z)$ indotti sulla trave AB, supposta incastrata ai due estremi, da una distorsione unitaria negativa agente in A o in B (fig. 8-24). Si dice « spostamenti indotti da una distorsione unitaria negativa » nel senso già noto di spostamenti indotti da una distorsione $D_\varphi = -\alpha$, divisi per α ; essi coincidono poi con le linee

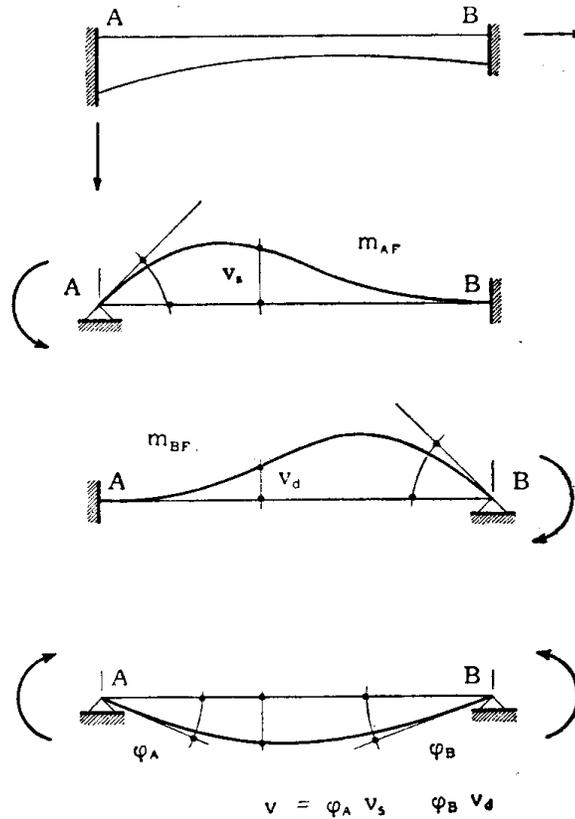


FIG. 8-24

d'influenza m_{AF} e m_{BF} della trave perfettamente incastrata ai due estremi. I diagrammi $v_s(z)$ e $v_d(z)$ permettono di costruire immediatamente il diagramma degli spostamenti $v(z)$ indotti nella trave appoggiata da due coppie qualsiasi agenti alle estremità, una volta noti gli angoli φ_A e φ_B , attraverso la relazione

$$v(z) = \varphi_A v_s(z) - \varphi_B v_d(z) . \quad (39)$$

Infatti sia $v(z)$ che $v_s(z)$ e $v_d(z)$ sono soluzioni relative a coppie applicate agli estremi della trave appoggiata, e quindi $v(z)$ deve essere combinazione lineare di $v_s(z)$ e $v_d(z)$. La (8-39), che soddisfa le condizioni ai limiti, è soluzione, e l'unica possibile (Kirchhoff), per quelle coppie cui sono associate le rotazioni φ_A e φ_B .

Nel caso in esame è $\varphi_A = \frac{\alpha_A}{\alpha_A + \varepsilon_A}$, $\varphi_B = \frac{\beta}{\alpha_A + \varepsilon_A}$, e quindi

$$m_{AF} = \frac{\alpha_A}{\alpha_A + \varepsilon_A} v_s(z) - \frac{\beta}{\alpha_A + \varepsilon_A} v_d(z) .$$

Nelle tabelle da 8-1 ad 8-4 (in appendice al volume) sono trascritti i valori in nove sezioni alle ascisse ζl ($\zeta = 0,1; 0,2; \dots 0,9$) delle ordinate v_s e v_d delle linee d'influenza dei momenti di incastro in una trave perfettamente incastrata alle estremità, per trave simmetrica o meno, e legge di variazione del momento d'inerzia quadratica o cubica. Nelle tabelle sono riportati i rapporti v_s/l e v_d/l ; ciò anche per travi simmetriche, per comodità di lettura, pur essendo v_d superflua, perchè simmetrica di v_s .

La conoscenza di m_{AF} (come quella relativa a qualsiasi altra sezione) permette di ottenere qualsiasi altra linea d'influenza relativa a forze viaggianti attraverso il procedimento esposto nel § 4-11. Per ottenere, per

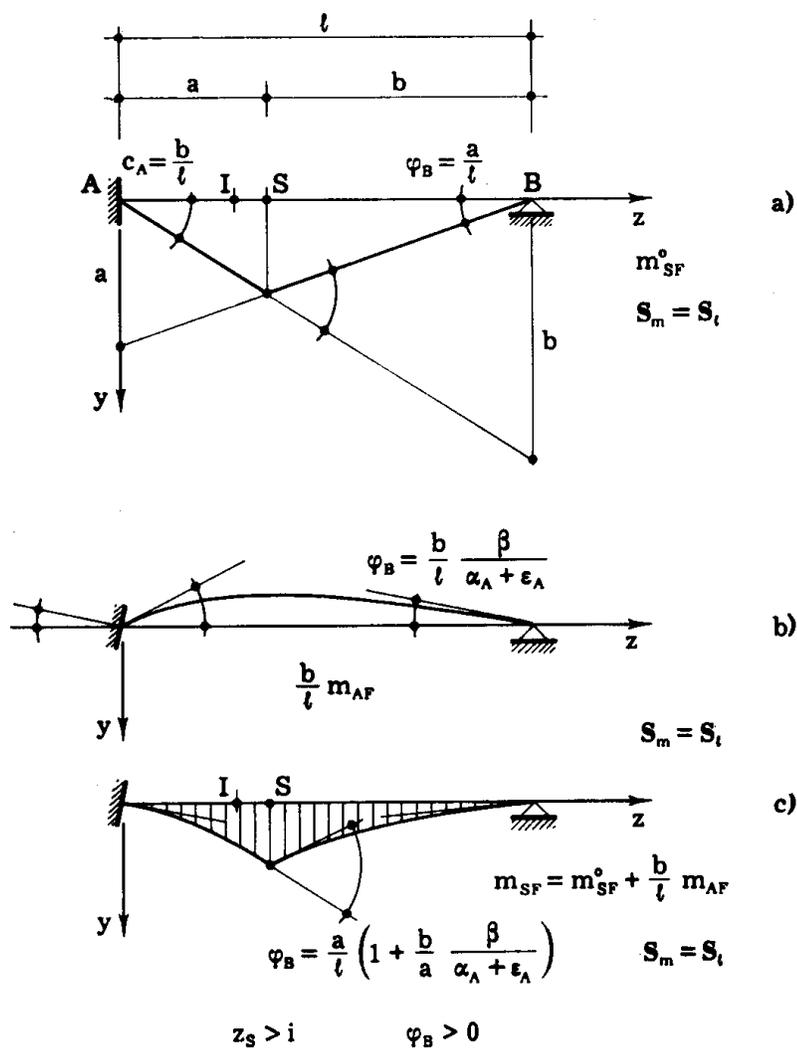


FIG. 8-25

esempio, la linea d'influenza m_{SF} del momento flettente nella sezione S per una forza $F=1$ viaggiante (fig. 8-25) basta costruire la linea d'in-

fluenza m_{SF}^0 relativa alla struttura isostatica, calcolare la discontinuità (con il segno come distorsione) $c_A = \frac{b}{l}$ che sorge in A, e sommare alla m_{SF}^0 la linea m_{AF} moltiplicata per b/l :

$$m_{SF} = m_{SF}^0 + \frac{b}{l} m_{AF} .$$

L'inclinazione in B della linea m_{SF} è fornita da

$$\varphi_B = \frac{a}{l} + \frac{b}{l} \frac{\beta}{\alpha_A + \varepsilon_A} = \frac{a}{l} \left(1 + \frac{b}{a} \frac{\beta}{\alpha_A + \varepsilon_A} \right) . \quad (g)$$

Per

$$\frac{a}{b} = - \frac{\beta}{\alpha_A + \varepsilon_A}$$

e cioè (f) per

$$\frac{a}{b} = \frac{i}{l - i}$$

è $\varphi_B = 0$. Ciò significa che la linea d'influenza m_{IF} relativa al punto fisso I presenta in B tangente orizzontale (fig. 8-26 a). Dalla (g) stessa si trae poi

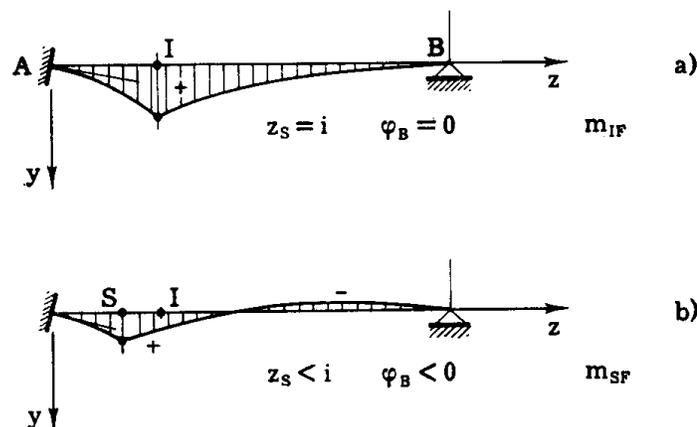


FIG. 8-26

che φ_B è funzione crescente di a , e perciò per $z_S > i$ è $\varphi_B > 0$ (fig. 8-25 c), per $z_S < i$ è $\varphi_B < 0$ (fig. 8-26 b). Si deduce da ciò che la linea d'influenza

del momento per una sezione compresa tra l'appoggio B e il punto fisso I è tutta positiva (fig. 8-25), e quella per una sezione compresa tra l'incastro A e il punto fisso I presenta inversione di segno (fig. 8-26 b).

Allo stesso risultato può pervenirsi considerando che la linea m_{Sm} è fornita da (7-98)

$$m_{Sm} = - \frac{\partial m_{SF}}{\partial z} .$$

Poichè, quando una coppia è applicata in B, il momento in I è nullo, in B si ha

$$m_{Im} = - \frac{\partial m_{IF}}{\partial z} = 0$$

e quindi la m_{IF} presenta in B tangente orizzontale (fig. 8-26 a).

Quando una coppia positiva è applicata in B, il momento in una sezione S a destra di I è positivo, e quindi in B si ha

$$m_{Sm} = - \frac{\partial m_{SF}}{\partial z} > 0 ;$$

si trae da ciò che la linea m_{SF} si presenta, per $z_s > i$, decrescente in B (fig. 8-25 c). Il contrario accade se la sezione S è ubicata a sinistra di I ($z_s < i$), caso riprodotto nella fig. 8-26 b.

In presenza di un carico uniformemente distribuito, che possa impegnare comunque la trave, la condizione di carico esteso a tutta la luce fornisce per quanto sopra il minimo possibile momento in A (e cioè il massimo valore assoluto del momento negativo in A), e il massimo possibile momento per tutte le sezioni comprese tra I e B; in presenza di forze verticali dirette verso il basso, nella prima sezione non può esistere che momento negativo, nelle seconde non possono esistere che momenti positivi.

10. La funzione di Green dello spostamento per forza viaggiante sulla trave di sezione costante con incastro e appoggio rigidi.

Si riporta l'espressione della funzione di Green v_{SF} dello spostamento nella generica sezione S ($z = z_s$) per una forza unitaria viaggiante, con riferimento ad una trave di sezione costante; essa coincide con la linea ela-

stica provocata da una forza $F=1$ agente in S (fig. 8-27) ed è fornita

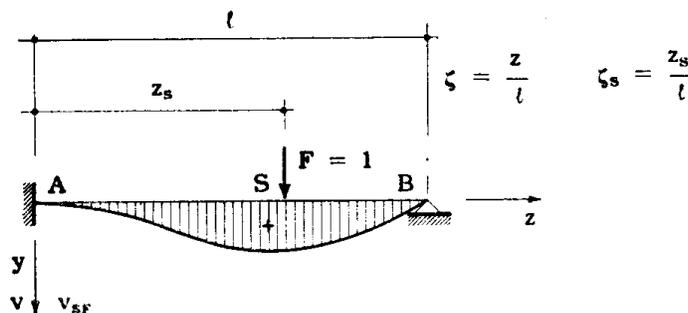


FIG. 8-27

(ponendo al solito $\zeta = z/l$, $\zeta_s = z_s/l$) da

$$v_{SF} = \begin{cases} \frac{\ell^3}{2EI} \zeta_s^2 \left[\zeta - \frac{\zeta_s}{3} - \frac{3}{2} \zeta^2 \left(1 - \frac{\zeta}{3} \right) \left(1 - \frac{\zeta_s}{3} \right) \right] & \text{per } \zeta \geq \zeta_s \\ \frac{\ell^3}{2EI} \zeta^2 \left[\zeta_s - \frac{\zeta}{3} - \frac{3}{2} \zeta_s^2 \left(1 - \frac{\zeta_s}{3} \right) \left(1 - \frac{\zeta}{3} \right) \right] & \text{per } \zeta \leq \zeta_s \end{cases} \quad (40)$$

La funzione $v_F(z, z_s)$ è simmetrica rispetto alle variabili z e z_s .

11. La trave di sezione costante con due incastri rigidi.

Si studia in questo paragrafo la trave di sezione costante incastrata rigidamente agli estremi, sottoposta a diverse condizioni di carico.

a) *Trave soggetta ad un carico uniformemente distribuito.*

La trave AB (fig. 8-28) è soggetta ad un carico q uniformemente distribuito. Assunta come trave isostatica la trave appoggiata, le condizioni di congruenza in A e B si scrivono

$$-\frac{q\ell^3}{24EI} + \frac{\mathcal{M}_A \ell}{3EI} - \frac{\mathcal{M}_B \ell}{6EI} = 0$$

$$\frac{q\ell^3}{24EI} + \frac{\mathcal{M}_B \ell}{3EI} - \frac{\mathcal{M}_A \ell}{6EI} = 0$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_A &= \frac{ql^2}{12} \\ \mathcal{M}_B &= -\frac{ql^2}{12} \end{aligned} \quad (41)$$

Il momento flettente in mezzeria, che coincide con il momento flettente

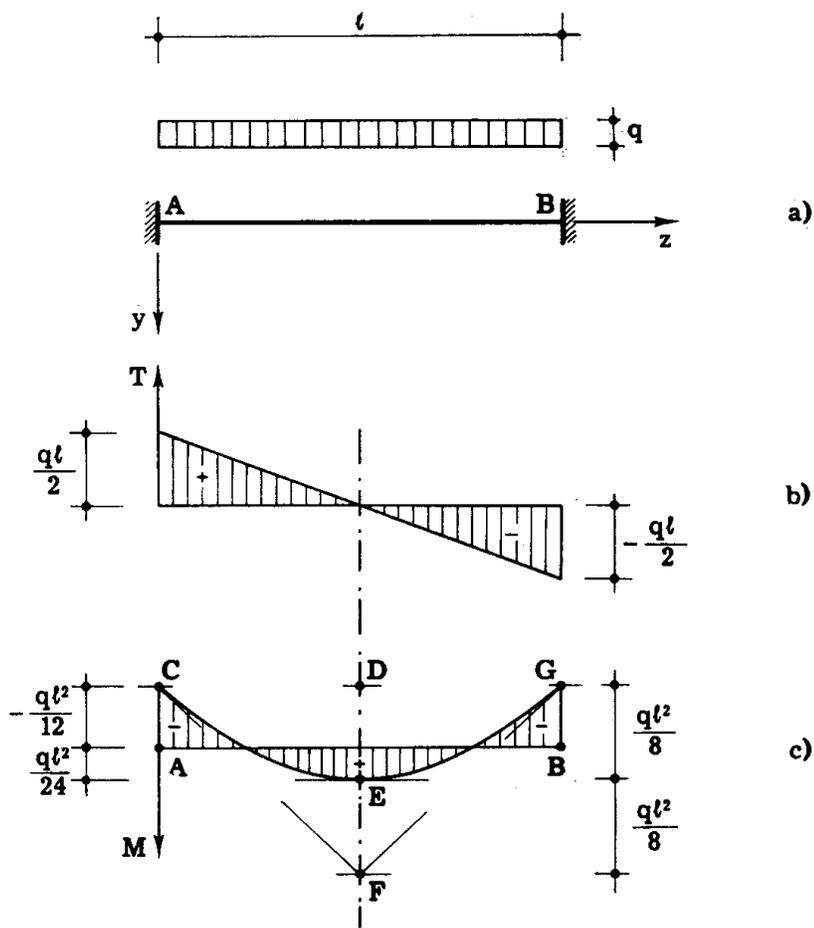


FIG. 8-28

positivo massimo, vale

$$M_{l/2} = \frac{ql^2}{8} - \frac{ql^2}{12}$$

e cioè

$$M_{l/2} = \frac{ql^2}{24} \quad (42)$$

Il diagramma del momento flettente è una parabola quadratica, la cui costruzione, analoga a quella della fig. 8-2 f, è riportata nella fig. 8-28 c; i due punti in cui M è nullo sono ubicati a distanza pressocchè uguali ad $l/5$ da A e da B . Le reazioni sono le stesse della trave appoggiata

$$R_A = R_B = -\frac{ql}{2},$$

poichè le due coppie \mathcal{M}_A ed $\mathcal{M}_B = -\mathcal{M}_A$ non inducono reazioni; quindi il diagramma del taglio è lo stesso che nella trave appoggiata (fig. 8-28 b).

Lo spostamento in mezzeria della trave appoggiata provocato dal carico q è (7-60) pari a

$$\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}.$$

Lo spostamento in mezzeria della trave appoggiata provocato da due coppie

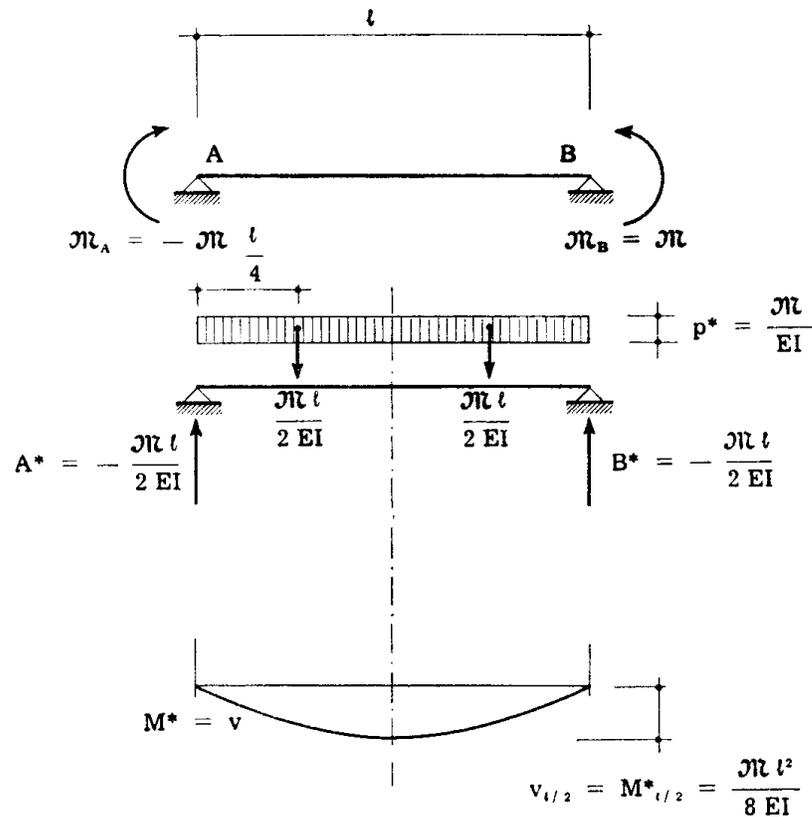


FIG. 8-29

$\mathcal{M}_A = -\mathcal{M}$ ed $\mathcal{M}_B = \mathcal{M}$ si ricava immediatamente attraverso il corollario di Mohr (fig. 8-29), ed è pari ad

$$\frac{\mathcal{M}l^2}{8EI};$$

tale valore può anche ricavarsi come spostamento della sezione estrema della mensola di luce $l/2$ soggetta alla coppia \mathcal{M} di estremità.

Per il principio di sovrapposizione, nella trave in esame è

$$v_{l/2} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} - \frac{ql^2}{12} \frac{l^2}{8EI}$$

e cioè

$$v_{l/2} = \frac{1}{384} \frac{ql^4}{EI} \quad (43)$$

Lo stesso problema può risolversi partendo da una struttura ancora iperstatica, ma già studiata: la trave con incastro e appoggio. La condizione di congruenza nell'appoggio B si scrive in tal caso, per le (8-6) e (8-9),

$$\frac{ql^3}{48EI} + \frac{\mathcal{M}_B l}{4EI} = 0$$

da cui

$$\mathcal{M}_B = - \frac{ql^2}{12} .$$

b) *Trave soggetta ad un carico concentrato.*

La trave AB è soggetta in S ad una forza concentrata F (fig. 8-30). Assumendo la trave appoggiata come struttura isostatica, le condizioni di congruenza in A e B si scrivono, per le (7-34) e (7-35),

$$- \frac{Fb}{6lEI} (l^2 - b^2) + \frac{\mathcal{M}_A l}{3EI} - \frac{\mathcal{M}_B l}{6EI} = 0$$

$$\frac{Fa}{6lEI} (l^2 - a^2) + \frac{\mathcal{M}_B l}{3EI} - \frac{\mathcal{M}_A l}{6EI} = 0$$

da cui si trae

$$\mathcal{M}_A = F \frac{ab^2}{l^2} \quad (44)$$

$$\mathcal{M}_B = - F \frac{a^2b}{l^2} .$$

La costruzione grafica della fig. 8-30 b è di immediata comprensione.

Le due reazioni R_A ed R_B si calcolano attraverso le equazioni della statica considerando la trave appoggiata in A e B; l'equilibrio alla rota-

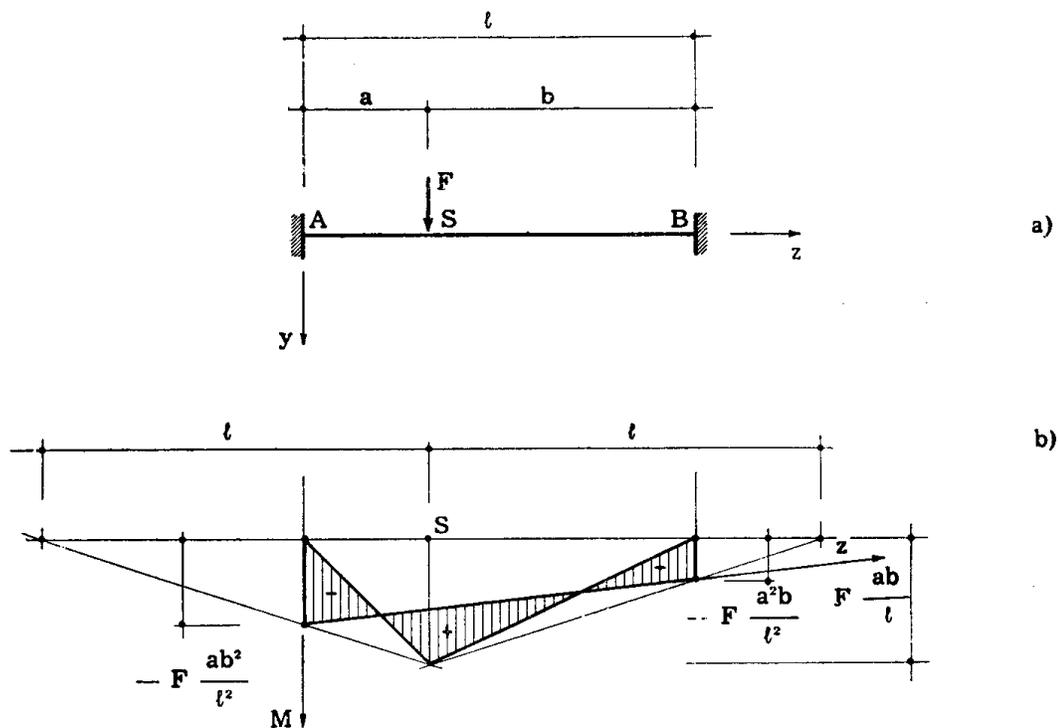


FIG. 8-30

zione intorno a B fornisce

$$Fb + R_A l + \mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B = 0$$

da cui

$$R_A = -F \frac{b^2 (3a + b)}{l^3} \quad (45)$$

Analogamente si ha

$$R_B = -F \frac{a^2 (3b + a)}{l^3} \quad (46)$$

Se la forza F è applicata in mezzeria, si ha

$$M_A = -\mathcal{M}_A = -F \frac{l}{8}$$

$$M_B = \mathfrak{M}_B = -F \frac{\ell}{8} \quad (47)$$

$$M_{l/2} = F \frac{\ell}{8}$$

e cioè i valori dei momenti agli incastri e in mezzeria sono la metà del valore $F \frac{\ell}{4}$ che si verificherebbe in mezzeria della trave appoggiata. In tal caso lo spostamento in mezzeria è (7-64)

$$v_{l/2} = \frac{8}{384} \frac{F \ell^3}{EI} - \frac{F \ell}{8} \frac{\ell^2}{8 EI}$$

e cioè

$$v_{l/2} = \frac{2}{384} \frac{F \ell^3}{EI} \quad (48)$$

c) *Trave soggetta ad un carico qualsiasi.*

Siano φ_A^0 e φ_B^0 le rotazioni in A e B della trave AB soggetta allo stesso carico e appoggiata in A e B; le condizioni di congruenza in A e B si scrivono

$$\varphi_A^0 + \frac{\mathfrak{M}_A \ell}{3 EI} - \frac{\mathfrak{M}_B \ell}{6 EI} = 0$$

$$\varphi_B^0 - \frac{\mathfrak{M}_A \ell}{6 EI} + \frac{\mathfrak{M}_B \ell}{3 EI} = 0$$

da cui si trae

$$\mathfrak{M}_A = -\frac{2 EI}{\ell} (2 \varphi_A^0 + \varphi_B^0) \quad (49)$$

$$\mathfrak{M}_B = -\frac{2 EI}{\ell} (2 \varphi_B^0 + \varphi_A^0)$$

d) Trave soggetta a cedimenti angolari anelastici.

La trave presenti i cedimenti angolari anelastici φ_{Aa} e φ_{Ba} (fig. 8-31);

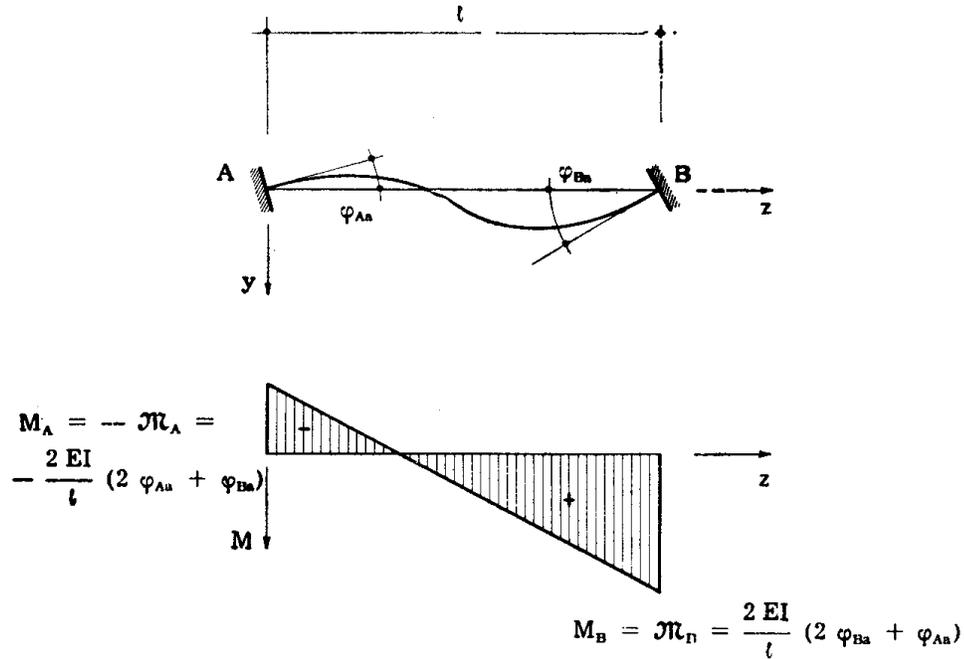


FIG. 8-31

le condizioni di congruenza si scrivono

$$\frac{\mathcal{N}_A l}{3EI} - \frac{\mathcal{N}_B l}{6EI} = \varphi_{Aa}$$

$$-\frac{\mathcal{N}_A l}{6EI} + \frac{\mathcal{N}_B l}{3EI} = \varphi_{Ba}$$

da cui si trae

$$\mathcal{N}_A = \frac{2EI}{l}(2\varphi_{Aa} + \varphi_{Ba})$$

$$\mathcal{N}_B = \frac{2EI}{l}(2\varphi_{Ba} + \varphi_{Aa}).$$
(50)

e) Trave soggetta a cedimenti verticali anelastici.

La trave AB presenti i cedimenti verticali anelastici degli appoggi

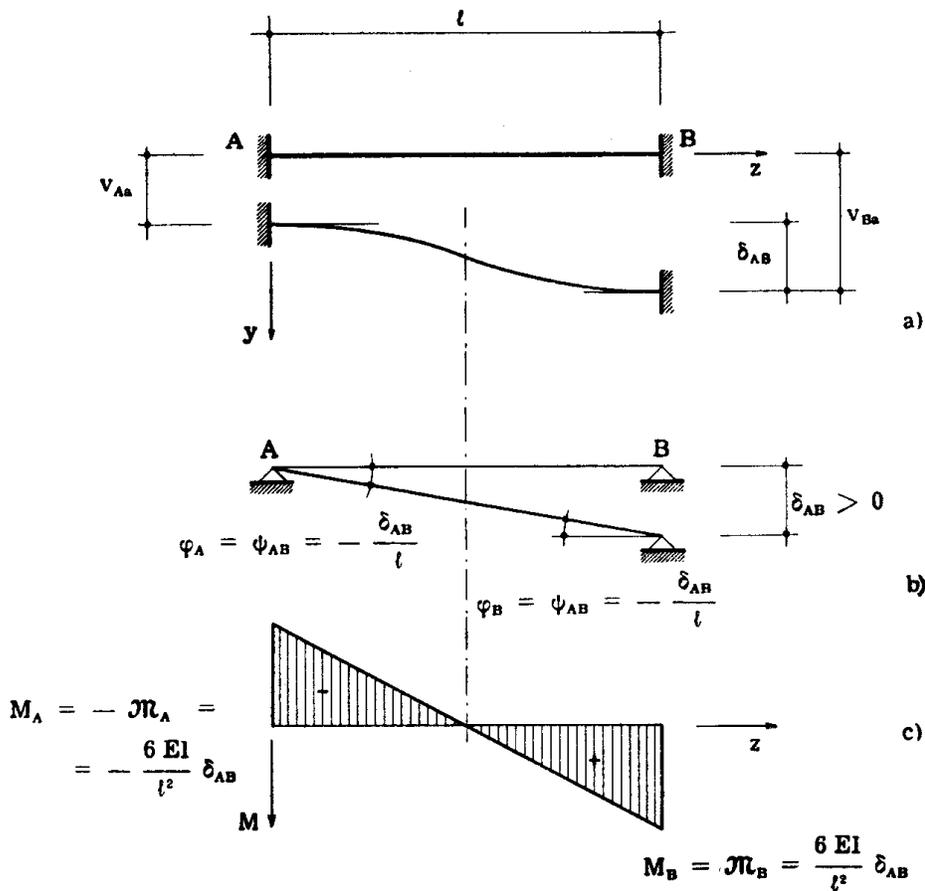


FIG. 8-32

v_{Aa} e v_{Ba} (fig. 8-32 a). Se la trave fosse appoggiata, le due sezioni A e B ruoterebbero (fig. 8-32 b) degli angoli

$$\varphi_A = -\frac{v_{Ba} - v_{Aa}}{l}$$

$$\varphi_B = -\frac{v_{Ba} - v_{Aa}}{l}$$

I momenti \mathcal{M}_A ed \mathcal{M}_B devono annullare tali rotazioni; perciò le equazioni di congruenza in A e B sono

$$-\frac{v_{Ba} - v_{Aa}}{l} + \frac{\mathcal{M}_A l}{3EI} - \frac{\mathcal{M}_B l}{6EI} = 0$$

$$-\frac{v_{Ba} - v_{Aa}}{l} - \frac{\mathcal{M}_A l}{6EI} + \frac{\mathcal{M}_B l}{3EI} = 0$$

da cui si trae

$$\mathcal{M}_A = \mathcal{M}_B = \frac{6 EI}{l} \frac{v_{Ba} - v_{Aa}}{l} \quad (h)$$

Con la posizione (8-15) la (h) si scrive

$$\mathcal{M}_A = \mathcal{M}_B = 6 \frac{EI \delta_{AB}}{l^2} = - \frac{6 EI}{l} \psi_{AB} \quad (51)$$

f) *Trave soggetta ad una distorsione di rotazione relativa.*

La trave AB presenti in corrispondenza della sezione S una distorsio-

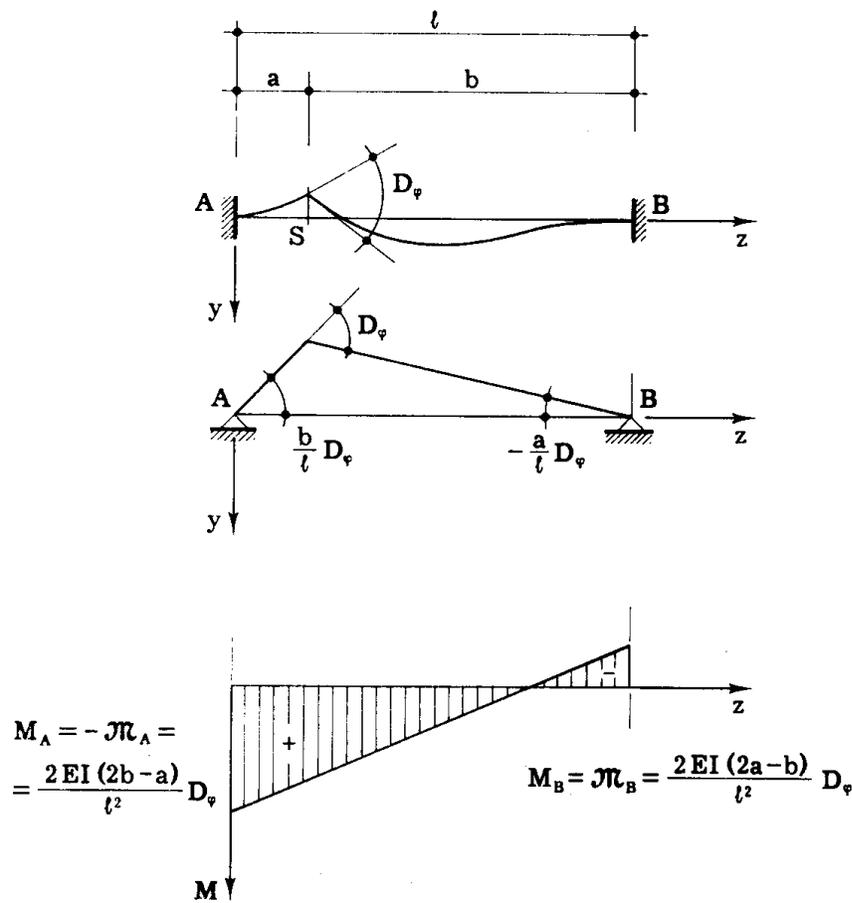


FIG. 8-33

ne D_φ (fig. 8-33). La D_φ provoca nella trave appoggiata due rotazioni

$$\varphi_A^0 = \frac{b}{l} D_\varphi$$

$$\varphi_B^0 = - \frac{a}{l} D_\varphi$$

Le condizioni di congruenza in A e B si scrivono così

$$\begin{aligned} \frac{b}{l} D_\varphi + \frac{\mathfrak{M}_A l}{3 EI} - \frac{\mathfrak{M}_B l}{6 EI} &= 0 \\ -\frac{a}{l} D_\varphi - \frac{\mathfrak{M}_A l}{6 EI} + \frac{\mathfrak{M}_B l}{3 EI} &= 0 \end{aligned}$$

da cui si trae

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_A &= -\frac{2 EI D_\varphi}{l^2} (2b - a) \\ \mathfrak{M}_B &= \frac{2 EI D_\varphi}{l^2} (2a - b) . \end{aligned} \tag{52}$$

Le (8-52) possono anche dedursi direttamente dalla (8-49).

g) *Trave soggetta ad una distorsione di scorrimento relativo.*

La distorsione D_η in S provoca nella trave appoggiata due rotazioni (fig. 8-34)

$$\begin{aligned} \varphi^o_A &= -\frac{D_\eta}{l} \\ \varphi^o_B &= -\frac{D_\eta}{l} . \end{aligned}$$

Dalle condizioni di congruenza in A e B

$$\begin{aligned} -\frac{D_\eta}{l} + \frac{\mathfrak{M}_A l}{3 EI} - \frac{\mathfrak{M}_B l}{6 EI} &= 0 \\ -\frac{D_\eta}{l} - \frac{\mathfrak{M}_A l}{6 EI} + \frac{\mathfrak{M}_B l}{3 EI} &= 0 \end{aligned}$$

si trae

$$\mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}_B = \frac{6 EI D_\eta}{l^2} . \tag{53}$$

I valori di \mathcal{M}_A ed \mathcal{M}_B sono indipendenti dall'ascissa di S; le (8-53) pos-

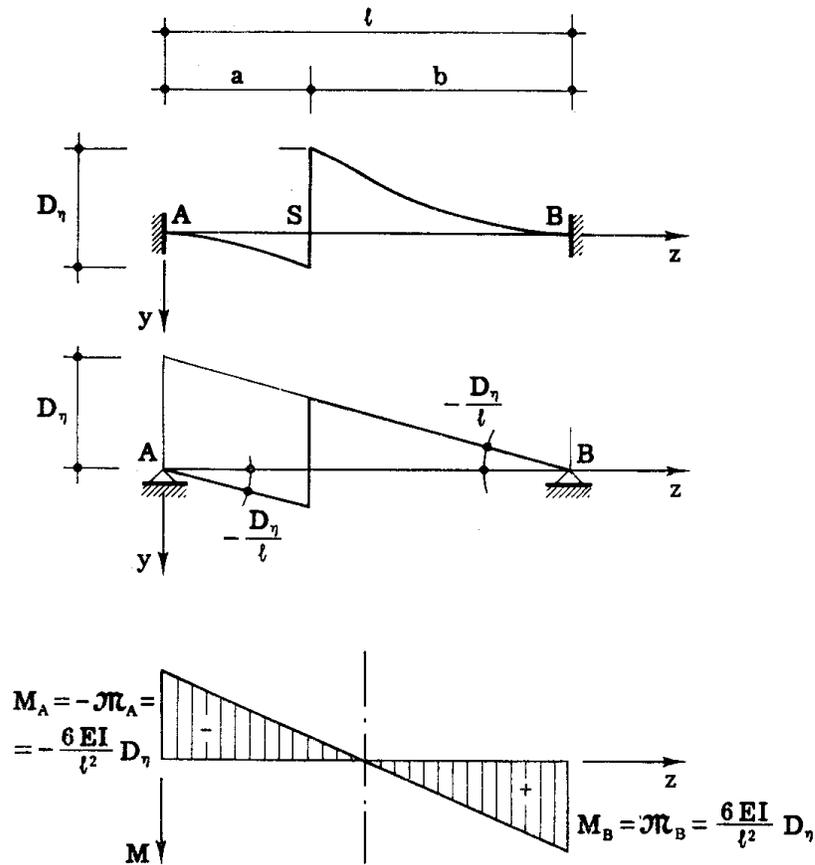


FIG. 8-34

sono dedursi anche direttamente dalla (8-49).

h) Ricerca grafica dei momenti d'incastro.

La trave ausiliaria secondo Mohr della trave incastrata in A e B è libera agli estremi; perciò il carico fittizio q^* su essa agente, costituito, a meno del fattore costante $1/EI$, dal diagramma del momento flettente M^0 che si verificherebbe nella trave appoggiata, a cui eventualmente si aggiunge il diagramma $-EI\mu$, e dal diagramma trapezio del momento flettente indotto sulla stessa trave appoggiata dalle due coppie d'incastro \mathcal{M}_A ed \mathcal{M}_B , deve soddisfare le condizioni di equilibrio. Si trae da ciò che il diagramma trapezio deve avere la stessa ordinata media HK del diagramma $M^0 - EI\mu$ (fig. 8-35) e la stessa verticale baricentrica g .

La costruzione del trapezio è perciò eseguibile secondo i due noti

procedimenti, e si riporta nella fig. 8-35 che non ha bisogno di delucidazioni.

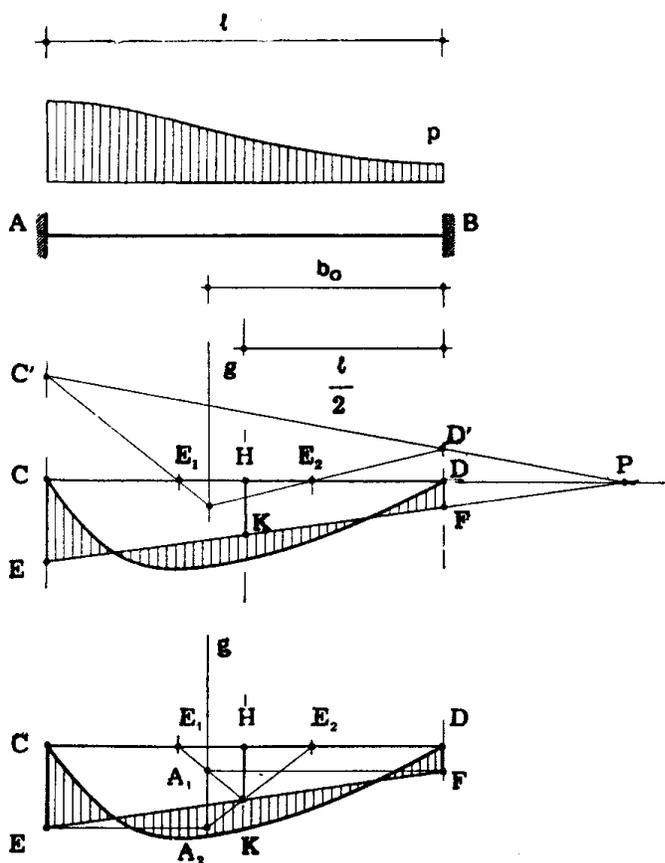


FIG. 8-35

12. La trave di sezione variabile con due incastri angolarmente cedevoli.

Con le notazioni già usate, le equazioni di congruenza sono in tal caso le seguenti (vedi pure le 1-36)

$$\begin{aligned} \varphi_A^0 + \mathcal{N}_A \alpha_A + \mathcal{N}_B \beta &= - \mathcal{N}_A \varepsilon_A \\ \varphi_B^0 + \mathcal{N}_A \beta + \mathcal{N}_B \alpha_B &= - \mathcal{N}_B \varepsilon_B \end{aligned}$$

da cui si trae

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_A &= \frac{- \varphi_A^0 (\alpha_B + \varepsilon_B) + \varphi_B^0 \beta}{(\alpha_A + \varepsilon_A) (\alpha_B + \varepsilon_B) - \beta^2} \\ \mathcal{N}_B &= \frac{- \varphi_B^0 (\alpha_A + \varepsilon_A) + \varphi_A^0 \beta}{(\alpha_A + \varepsilon_A) (\alpha_B + \varepsilon_B) - \beta^2} \end{aligned} \tag{54}$$

si ricava il valore delle due forze uguali e contrarie F e $-F$ che agenti sulle due facce risultanti da un taglio in S provocano tra queste facce una rotazione relativa D_φ , lasciando i baricentri a contatto. Il diagramma del momento, diviso per D_φ , fornisce la linea d'influenza m_{SF} ; il diagramma degli spostamenti, diviso per $-D_\varphi$, fornisce la linea d'influenza m_{SF} .

Con riferimento alla m_{SF} si osserva che se S è compresa tra A ed I , S' giace tra K e B ; quindi il diagramma del momento è intrecciato, le rotazioni in A e B sono ambedue negative, e la linea m_{SF} è anch'essa di due segni (fig. 8-36 c).

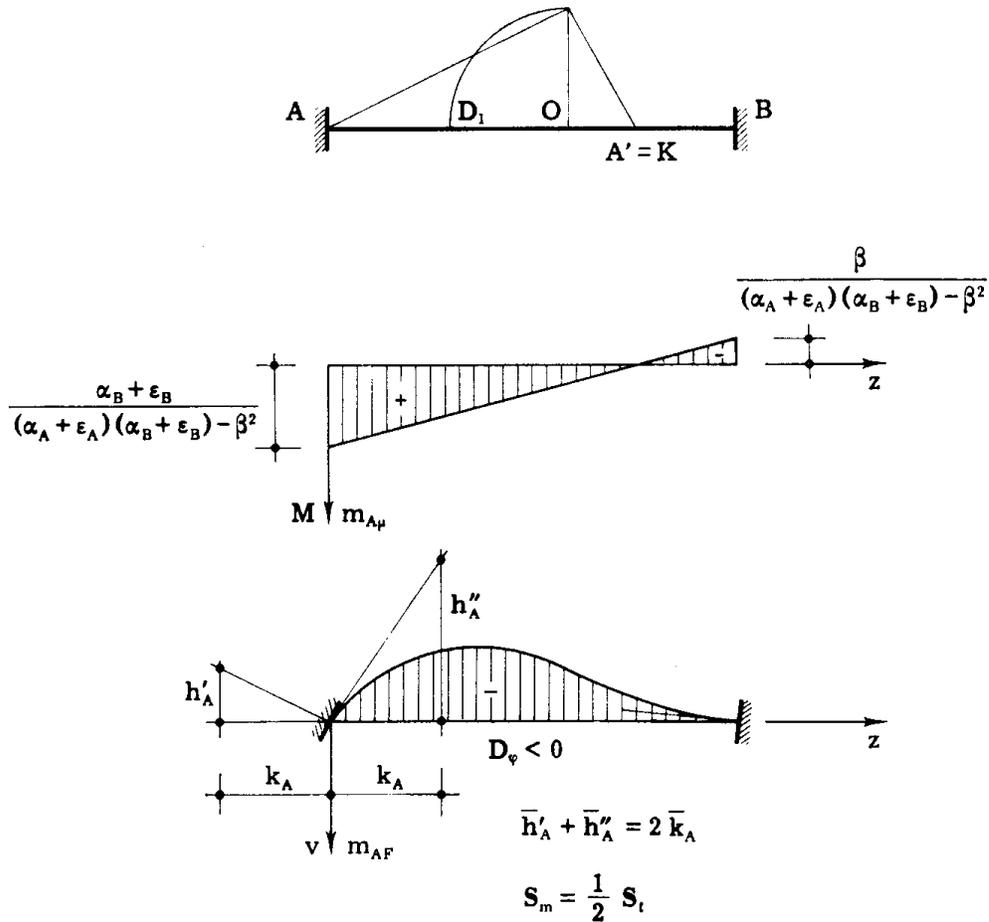


FIG. 8-37

Se S è compresa tra I e K , S' è situata fuori della luce della trave, il diagramma del momento è tutto negativo; le rotazioni in A e B sono rispettivamente negativa e positiva, e la linea m_{SF} è tutta positiva. Se S è compresa tra K e B , S' è ubicata tra A ed I , e di nuovo la linea m_{SF} presenta doppio segno.

Le due linee m_{AF} e m_{BF} sono ambedue tutte negative (fig. 8-37).

Si trae da quanto sopra che, se si è in presenza di un carico uniformemente distribuito che possa comunque impegnare la trave, alla condizione di carico esteso a tutta la luce corrispondono i momenti massimi nel tratto IK (fig. 8-38) e i momenti minimi (massimi dei valori as-

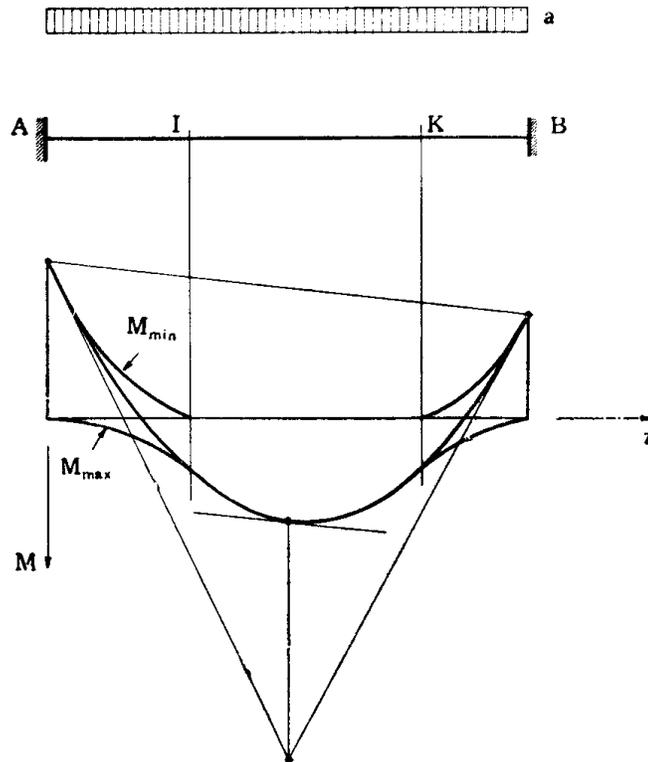


FIG. 8-38

soluti del momento negativo) in A e B. Nel tratto IK il momento non può che essere positivo, e perciò il diagramma dei minimi momenti ha ordinate nulle; in corrispondenza delle sezioni A e B il momento non può che essere negativo, e perciò il diagramma dei massimi momenti presenta ordinata nulla; nei tratti AI e KB i momenti massimi sono superiori, e i momenti minimi inferiori a quelli corrispondenti al carico uniforme esteso a tutta la luce.

La ricerca delle linee d'influenza può anche eseguirsi utilizzando le (8-54). Una distorsione D_φ nella sezione S a distanza a e b dagli incastri A e B genera sulla trave appoggiata due rotazioni

$$\varphi_A^\circ = \frac{b}{l} D_\varphi$$

$$\varphi_B^\circ = -\frac{a}{l} D_\varphi,$$
(i)

e quindi sulla trave incastrata due coppie di incastro fornite da

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_A &= - \frac{D_\varphi}{l} \frac{b(\alpha_B + \varepsilon_B) + a\beta}{(\alpha_A + \varepsilon_A)(\alpha_B + \varepsilon_B) - \beta^2} \\ \mathcal{M}_B &= \frac{D_\varphi}{l} \frac{a(\alpha_A + \varepsilon_A) + b\beta}{(\alpha_A + \varepsilon_A)(\alpha_B + \varepsilon_B) - \beta^2} \end{aligned} \quad (55)$$

Così pure una distorsione D_η genera due rotazioni

$$\begin{aligned} \varphi_A^0 &= - \frac{D_\eta}{l} \\ \varphi_B^0 &= - \frac{D_\eta}{l} \end{aligned}$$

e quindi due coppie d'incastro

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_A &= \frac{D_\eta}{l} \frac{\alpha_B + \varepsilon_B - \beta}{(\alpha_A + \varepsilon_A)(\alpha_B + \varepsilon_B) - \beta^2} \\ \mathcal{M}_B &= \frac{D_\eta}{l} \frac{\alpha_A + \varepsilon_A - \beta}{(\alpha_A + \varepsilon_A)(\alpha_B + \varepsilon_B) - \beta^2} \end{aligned} \quad (56)$$

Le linee $m_{S\mu}$ e $t_{S\mu}$ sono così definite, poichè basta dividere rispettivamente per D_φ e D_η i diagrammi dei momenti generati dalle coppie (8-55) e (8-56) sulla trave appoggiata. Le linee m_{SF} e t_{SF} sono le linee elastiche, divise per $-D_\varphi$ e $-D_\eta$, delle mensole AS e BS, incastrate elasticamente in A e B con cedibilità ε_A ed ε_B e soggette ai diagrammi di momento suddetti; queste linee elastiche possono ottenersi attraverso la teoria dei pesi elastici, o con i metodi già esposti trattando delle travi ad asse rettilineo (Saviotti e Mohr).

Se occorre tracciare più linee d'influenza, conviene ricorrere al procedimento delle linee di influenza fondamentali; come tali in genere si assumono quelle relative ai momenti di incastro. La m_A si può tracciare sfruttando l'involutione di elasticità; in tal caso (fig. 8-37) le due forze F e $-F$ passano per il punto fisso di destra K, e sono uguali a $\frac{1}{W_{AB} \cdot KO}$.

Il diagramma dei momenti può anche ottenersi considerando che la distorsione D_φ in A provoca due angoli φ_A^0 e φ_B^0 forniti dai limiti della (i) per $a \rightarrow 0$ e $b \rightarrow l$,

e cioè

$$\begin{aligned}\varphi_A^0 &= D_\varphi \\ \varphi_B^0 &= 0 ;\end{aligned}$$

quindi le (8-54) forniscono le coppie d'incastro

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_A = -M_A &= -D_\varphi \frac{\alpha_B + \varepsilon_B}{(\alpha_A + \varepsilon_A)(\alpha_B + \varepsilon_B) - \beta^2} \\ \mathfrak{M}_B = M_B &= D_\varphi \frac{\beta}{(\alpha_A + \varepsilon_A)(\alpha_B + \varepsilon_B) - \beta^2} .\end{aligned}\tag{57}$$

Ottenute in un modo o in un altro le coppie d'incastro, si calcolano i valori delle rotazioni provocate da D_φ e divise per $-D_\varphi$

$$\begin{aligned}\varphi_A &= \mathfrak{M}_A \alpha_A + \mathfrak{M}_B \beta = \frac{\alpha_A (\alpha_B + \varepsilon_B) - \beta^2}{(\alpha_A + \varepsilon_A)(\alpha_B + \varepsilon_B) - \beta^2} \\ \varphi_B &= \mathfrak{M}_A \beta + \mathfrak{M}_B \alpha_B = \frac{\beta (\alpha_B + \varepsilon_B) - \beta \alpha_B}{(\alpha_A + \varepsilon_A)(\alpha_B + \varepsilon_B) - \beta^2} ;\end{aligned}\tag{58}$$

seguendo il procedimento suggerito in nota al § 9 di questo capitolo, si ha

$$m_{AF} = \varphi_A v_s(z) - \varphi_B v_d(z) .$$

In maniera analoga si disegna la m_{BF} .

Ottenute le due linee m_{AF} e m_{BF} , si può tracciare per somma qualsiasi altra linea d'influenza. Se per esempio si vuole la linea d'influenza m_{SF} relativa alla sezione S, essa è fornita da (4-21)

$$m_{SF} = m_{SF}^0 + \frac{b}{l} m_{AF} + \frac{a}{l} m_{BF} ;\tag{59}$$

la t_{SF} è invece fornita da

$$\begin{aligned}t_{SF} &= t_{SF}^0 - \frac{1}{l} m_{AF} + \frac{1}{l} m_{BF} ; \\ m_{Sm} &= m_{Sm}^0 + \frac{b}{l} m_{Am} + \frac{a}{l} m_{Bm} \\ t_{Sm} &= t_{Sm}^0 - \frac{1}{l} m_{Am} + \frac{1}{l} m_{Bm} \\ m_{S\mu} &= \frac{b}{l} m_{A\mu} + \frac{a}{l} m_{B\mu}\end{aligned}\tag{60}$$

$$\begin{aligned}
 t_{S\mu} &= -\frac{1}{l} m_{A\mu} + \frac{1}{l} m_{B\mu} \\
 m_{S\delta} &= \frac{b}{l} m_{A\delta} + \frac{a}{l} m_{B\delta} \\
 t_{S\delta} &= -\frac{1}{l} m_{A\delta} + \frac{1}{l} m_{B\delta} .
 \end{aligned}
 \tag{61}$$

13. La trave di sezione variabile con incastrati rigidi.

Se gli incastrati della trave sono rigidi ($\varepsilon_A = \varepsilon_B = 0$) le (8-54) forniscono le cosiddette *coppie di incastro perfetto*:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_A &= \frac{-\varphi_A^0 \alpha_B + \varphi_B^0 \beta}{\alpha_A \alpha_B - \beta^2} \\
 \mathcal{M}_B &= \frac{-\varphi_B^0 \alpha_A + \varphi_A^0 \beta}{\alpha_A \alpha_B - \beta^2} .
 \end{aligned}
 \tag{62}$$

Per travi a sezione costante, si ritrovano le (8-49). In particolare, per $\varepsilon_A = \varepsilon_B = 0$ le (8-55) forniscono

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_A &= -\frac{D_\varphi}{l} \frac{b \alpha_B + a \beta}{\alpha_A \alpha_B - \beta^2} \\
 \mathcal{M}_B &= \frac{D_\varphi}{l} \frac{a \alpha_A + b \beta}{\alpha_A \alpha_B - \beta^2}
 \end{aligned}
 \tag{63}$$

e le (8-56)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_A &= \frac{D_\eta}{l} \frac{\alpha_B - \beta}{\alpha_A \alpha_B - \beta^2} \\
 \mathcal{M}_B &= \frac{D_\eta}{l} \frac{\alpha_A - \beta}{\alpha_A \alpha_B - \beta^2} .
 \end{aligned}
 \tag{64}$$

Per travi a sezione costante, le (8-63) e (8-64) si semplificano rispettivamente nelle (8-52) e (8-53).

Un cedimento angolare anelastico φ_{Aa} equivale ad una distorsione $D_{\mu A} = -\varphi_{Aa}$; perciò, in una trave perfettamente incastrata, le coppie d'in-

castro che ne derivano si traggono dalle (8-63):

$$\mathcal{M}_A = \varphi_{Aa} \frac{\alpha_B}{\alpha_A \alpha_B - \beta^2}$$

$$\mathcal{M}_B = - \varphi_{Aa} \frac{\beta}{\alpha_A \alpha_B - \beta^2} .$$

Un cedimento angolare anelastico φ_{Ba} equivale ad una distorsione $D_{\varphi B} = \varphi_{Ba}$; si ha perciò per esso

$$\mathcal{M}_A = - \varphi_{Ba} \frac{\beta}{\alpha_A \alpha_B - \beta^2}$$

$$\mathcal{M}_B = \varphi_{Ba} \frac{\alpha_A}{\alpha_A \alpha_B - \beta^2} .$$

I due cedimenti forniscono perciò in complesso le due coppie d'incastro.

$$\mathcal{M}_A = \frac{\varphi_{Aa} \alpha_B - \varphi_{Ba} \beta}{\alpha_A \alpha_B - \beta^2}$$

$$\mathcal{M}_B = \frac{-\varphi_{Aa} \beta + \varphi_{Ba} \alpha_A}{\alpha_A \alpha_B - \beta^2} .$$
(65)

I cedimenti vincolari verticali anelastici v_{Aa} e v_{Ba} equivalgono ad una distorsione $D_n = v_{Ba} - v_{Aa} = \delta_{AB} = -l \psi_{AB}$, e quindi essi inducono le coppie d'incastro

$$\mathcal{M}_A = \frac{\delta_{AB}}{l} \frac{\alpha_B - \beta}{\alpha_A \alpha_B - \beta^2}$$

$$\mathcal{M}_B = \frac{\delta_{AB}}{l} \frac{\alpha_A - \beta}{\alpha_A \alpha_B - \beta^2} .$$
(66)

Per travi a sezione costante le (8-65) e (8-66) si semplificano rispettivamente nelle (8-50) e (8-51).