

CAPITOLO XII  
**LA TRAVE SU SUOLO ELASTICO**

**1. Equazione del problema.**

Il problema della trave poggiante su suolo elasticamente cedevole si presenta di frequente nelle fondazioni, quando il terreno sconsigli i plinti a scarico diretto, o i pali; ad esso però possono ridursi molti altri casi apparentemente lontani, come la rotaia su traversine, il tubo soggetto a forze radiali lungo una circonferenza, il tubo cerchiato, la palancola, il serbatoio cilindrico.

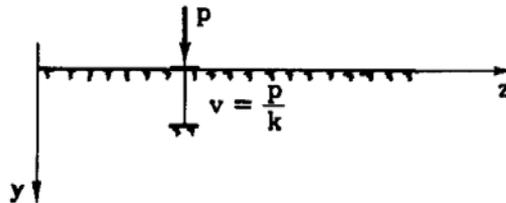


FIG. 12-1

La teoria qui esposta è basata sul presupposto che il suolo, in un punto generico, ceda proporzionalmente al valore che la componente normale della forza superficiale assume nel punto stesso; il cedimento è elastico, ed indipendente dalla forza esercitata negli altri punti. Questa ipotesi rimonta ad *E. Winkler* (1867), e si esprime (fig. 12-1) come segue:

$$v = \frac{P}{k} \quad (1)$$

La costante  $k$ , detta *costante di sottofondo*, ha dimensioni fisiche  $[F l^{-3}]$ , e si esprime in genere in  $Kg/cm^3$ ; essa è una caratteristica fisica del terreno, e deve essere misurata in situ. L'ordine di grandezza di  $k$  è di  $5 \div 20 Kg/cm^3$  per terreni sabbiosi, di  $10 \div 30 Kg/cm^3$  per terreni ghiaiosi; questi dati sono però soltanto largamente indicativi. D'altro canto è da dire subito che l'ipotesi di Winkler è abbastanza lontana dal

vero; e gli stessi risultati delle prove in luogo dipendono dalle dimensioni e dalla forma delle piastre di carico, e sono molto diversi dai valori presenti ad opera ultimata.

Se  $b$  è la larghezza della trave (valutata normalmente all'asse) a contatto del suolo, ed  $r(z)$  la reazione del terreno per unità di lunghezza assiale della trave, si ha

$$p = - \frac{r}{b},$$

e quindi

$$v = - \frac{r}{kb}.$$

Ponendo

$$kb = \rho \quad (2)$$

si può scrivere

$$r = - \rho v. \quad (3)$$

Si precisa che la  $r$  è positiva se, intesa come reazione del terreno sulla trave, è diretta secondo  $y$ , e cioè verso il basso; inoltre, si ammetterà nel seguito che il terreno reagisca nella stessa maniera (e cioè con lo stesso valore di  $k$ ) per carichi diretti verso il basso o verso l'alto.

L'equazione (7-11) della trave si scrive perciò

$$\frac{d^2}{dz^2} \left( EI \frac{d^2 v}{dz^2} \right) + \rho v = q + \frac{dm}{dz}. \quad (4)$$

Per trave di sezione costante, ed in assenza di coppie  $m$  applicate, la (12-4) si scrive, adottando l'apice per indicare la derivata rispetto a  $z$ ,

$$EI v'''' + \rho v = q. \quad (5)$$

Se il carico  $q$  è nullo, la (12-5) diviene

$$v'''' + 4 \alpha^4 v = 0, \quad (6)$$

avendo posto

$$\alpha^4 = \frac{\rho}{4 EI}. \quad (7)$$

Le dimensioni fisiche di  $\alpha$  sono  $[l^{-1}]$ .

Integrali particolari della (12-16) sono

$$v = e^{\alpha z} \operatorname{sen} \alpha z$$

$$v = e^{\alpha z} \operatorname{cos} \alpha z$$

$$v = e^{-\alpha z} \operatorname{sen} \alpha z$$

$$v = e^{-\alpha z} \operatorname{cos} \alpha z ;$$

quindi l'integrale generale della (12-6) è

$$v = A e^{\alpha z} \operatorname{sen} \alpha z + B e^{\alpha z} \operatorname{cos} \alpha z + C e^{-\alpha z} \operatorname{sen} \alpha z + D e^{-\alpha z} \operatorname{cos} \alpha z . \quad (8)$$

La (12-8) si scrive pure

$$v = e^{\alpha z} (A \operatorname{sen} \alpha z + B \operatorname{cos} \alpha z) + e^{-\alpha z} (C \operatorname{sen} \alpha z + D \operatorname{cos} \alpha z) . \quad (9)$$

La costante  $\alpha$ , che congloba le caratteristiche fisico-geometriche del terreno e della trave, si chiama *caratteristica* del sistema, ed il suo inverso  $1/\alpha$  è la *lunghezza caratteristica*.

## 2. La trave di lunghezza infinita e sezione costante su terreno di cedibilità costante.

Si consideri una trave di lunghezza infinita soggetta ad una forza concentrata  $F$  (fig. 12-2). La (12-9) è valida in assenza di forze, dunque per un tratto scarico; tale è tutto il tratto a destra di  $F$ . Inoltre  $I$  e  $\rho$  siano indipendenti da  $z$ .

Si assuma l'origine nel punto di applicazione di  $F$ . Per  $z = \infty$  è  $v = 0$ ; dunque il fattore di  $e^{\alpha z}$  nella (12-9) deve essere nullo, e cioè  $A = B = 0$ . Inoltre per  $z = 0$  è  $v' = 0$ , e cioè  $C = D$ . Si ha perciò

$$v = C e^{-\alpha z} (\operatorname{sen} \alpha z + \operatorname{cos} \alpha z) \quad (0 \leq z \leq \infty) .$$

Dalla condizione

$$\frac{F}{2} + \int_0^{\infty} r \, dz = 0 ,$$

è cioè

$$\frac{F}{2} - \rho \int_0^{\infty} v \, dz = 0 ,$$

si ottiene C (\*):

$$C = F \frac{\alpha}{2\rho} .$$

E' perciò

$$v = \frac{F\alpha}{2\rho} e^{-\alpha z} (\text{sen } \alpha z + \text{cos } \alpha z) , \quad (10)$$

che può anche scriversi

$$v = \frac{F\alpha}{\sqrt{2}\rho} e^{-\alpha z} \text{sen} \left( \alpha z + \frac{\pi}{4} \right) ; \quad (11)$$

la  $v$  è quindi (fig. 12-2) una senoide, di ampiezza smorzata per la presenza dell'esponenziale. La lunghezza d'onda  $l^*$  è fornita da

$$\alpha l^* = 2\pi ,$$

da cui

$$l^* = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi \sqrt{\frac{4EI}{\rho}} . \quad (12)$$

La  $v$  assume in  $z=0$  il suo massimo

$$v_{\max} = \frac{F\alpha}{2\rho} , \quad (13)$$

e si annulla all'ascissa

$$z_{0v} = \frac{3}{4} \frac{\pi}{\alpha} . \quad (14)$$

Dalla (12-10) si ha

$$\begin{aligned} \varphi &= -v' = F \frac{\alpha^2}{\rho} e^{-\alpha z} \text{sen } \alpha z \\ M &= -EI v'' = -F \frac{EI \alpha^3}{\rho} e^{-\alpha z} (\text{sen } \alpha z - \text{cos } \alpha z) = \\ &= -\frac{F}{4\alpha} e^{-\alpha z} (\text{sen } \alpha z - \text{cos } \alpha z) \end{aligned} \quad (15)$$

(\*)

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\alpha z} \text{sen } \alpha z \, dz &= - \left[ \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha z} (\text{cos } \alpha z + \text{sen } \alpha z) \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2\alpha} \\ \int_0^{\infty} e^{-\alpha z} \text{cos } \alpha z \, dz &= - \left[ \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha z} (\text{cos } \alpha z - \text{sen } \alpha z) \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2\alpha} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T &= -EI v''' = -2F \frac{EI \alpha^4}{\rho} e^{-\alpha z} \cos \alpha z = \\
 &= -\frac{F}{2} e^{-\alpha z} \cos \alpha z \\
 r &= EI v'' = -2F \frac{EI \alpha^5}{\rho} e^{-\alpha z} (\sin \alpha z + \cos \alpha z) = \\
 &= -\frac{F \alpha}{2} e^{-\alpha z} (\sin \alpha z + \cos \alpha z) .
 \end{aligned}$$

Tutte le curve (12-15) sono sinusoidi smorzate, la cui lunghezza d'on-

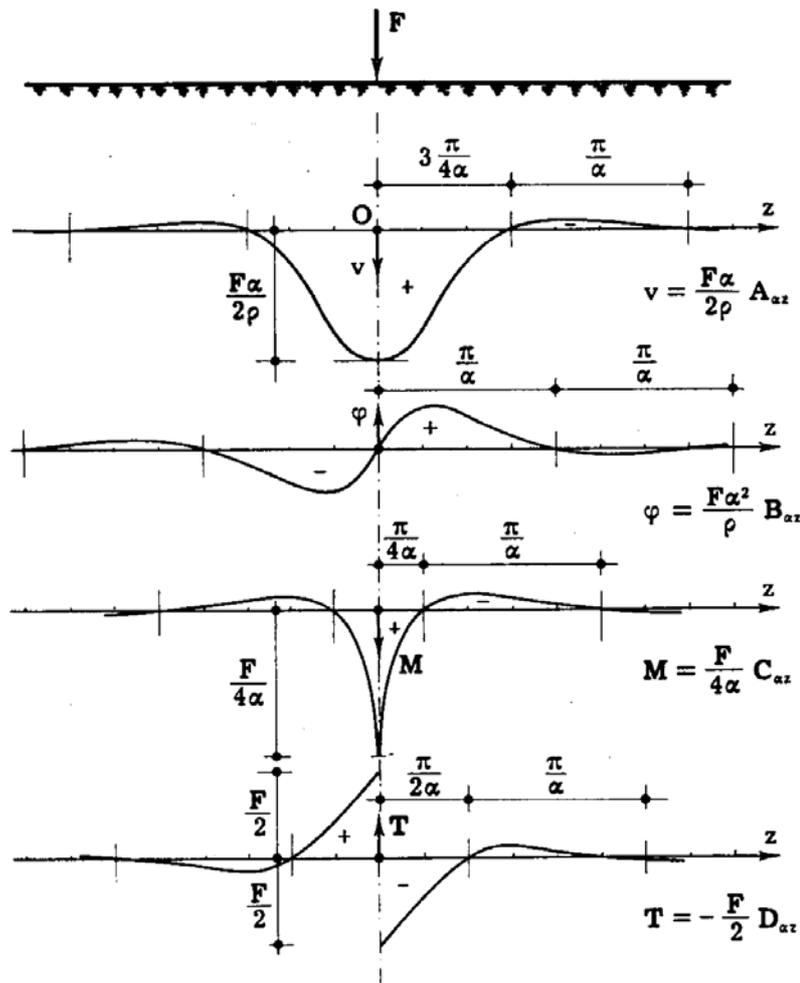


FIG. 12-2

da è fornita sempre dalla (12-12); esse sono riportate nella fig. 12-2.

I valori massimi sono

$$M_{\max} = \frac{F}{4\alpha} \quad (16)$$

$$T_{\max} = -\frac{F}{2} \quad (17)$$

$$r_{\max} = -\frac{F\alpha}{2} = -\rho v_{\max} . \quad (18)$$

Si usa a volte scrivere

$$\begin{aligned} v &= \frac{F\alpha}{2\rho} A_{\alpha z} \\ \varphi &= \frac{F\alpha^2}{\rho} B_{\alpha z} \\ M &= \frac{F}{4\alpha} C_{\alpha z} \\ T &= -\frac{F}{2} D_{\alpha z} \end{aligned} \quad (19)$$

avendo posto

$$\begin{aligned} A_{\alpha z} &= e^{-\alpha z} (\text{sen } \alpha z + \text{cos } \alpha z) \\ B_{\alpha z} &= e^{-\alpha z} \text{sen } \alpha z \\ C_{\alpha z} &= e^{-\alpha z} (\text{cos } \alpha z - \text{sen } \alpha z) \\ D_{\alpha z} &= e^{-\alpha z} \text{cos } \alpha z . \end{aligned} \quad (20)$$

Le funzioni A, B, C, D sono tabellate in molti trattati; esse sono riportate in appendice. E' facile verificare che

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dz} &= -2\alpha B \\ \frac{dB}{dz} &= \alpha C \\ \frac{dC}{dz} &= -2\alpha D \\ \frac{dD}{dz} &= -\alpha A . \end{aligned} \quad (21)$$

I valori (12-20) decrescono rapidamente con  $z$ ; perciò una trave non più corta di  $\frac{2\pi}{\alpha}$ , e cioè non più corta della lunghezza d'onda  $l^*$  della trave indefinita, si comporta praticamente, se caricata al centro, come una trave indefinita. Data la luce effettiva, l'assimilazione a trave indefinita è tanto più vicina al vero quanto più piccola è  $l^*$ , e cioè quanto più grande è  $\rho$  (suolo molto rigido) e quanto più piccolo è  $I$  (trave molto flessibile).

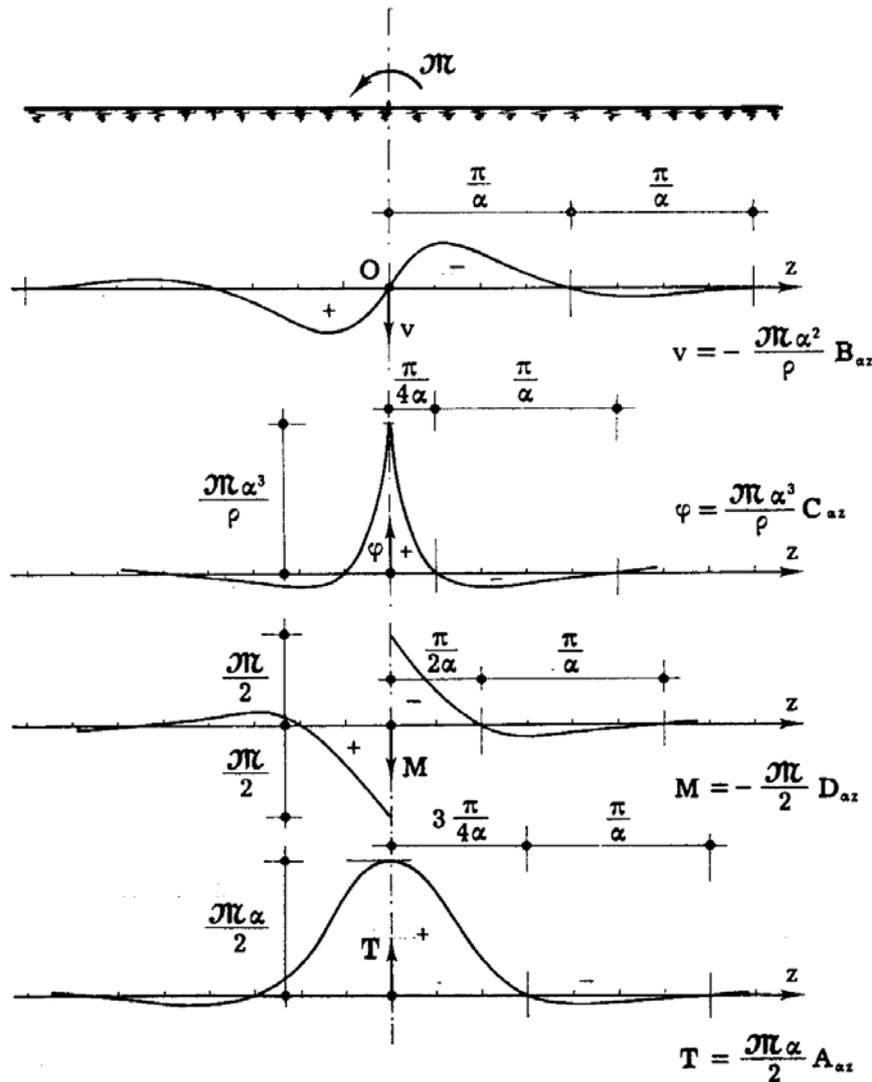


FIG. 12-3

Si esamini adesso il caso della coppia  $\mathcal{M}$  applicata (fig. 12-3); si assuma anche qui l'origine in corrispondenza della sezione ove agisce  $\mathcal{M}$ . Va premesso che, dall'esame delle curve della fig. 12-2, si trae che la linea  $v$  tracciata per  $F=1$  è anche la linea d'influenza dell'abbassamento in  $z=0$  per forza viaggiante; infatti, se  $F$  agisce in  $z$ , l'abbassamento in  $z=0$  si ha traslando di  $z$  la curva verso destra, e leggendo l'ordinata in

corrispondenza di  $z=0$ ; per simmetria, questa è uguale all'ordinata del diagramma originario letta sotto  $z$ . Così pure le curve  $-\varphi$ ,  $M$  e  $-T$  sono le linee d'influenza della rotazione, del momento e del taglio in  $z=0$ .

Analogamente, le curve  $-v$ ,  $\varphi$ ,  $-M$  e  $T$  per effetto di una coppia  $\mathcal{M}=1$  in  $z=0$  sono le linee d'influenza di  $v$ ,  $\varphi$ ,  $M$  e  $T$  per coppia viaggiante.

Per quanto detto al § 7-8 b, le linee  $v$ ,  $\varphi$ ,  $M$  e  $T$  per  $\mathcal{M}=1$  in  $z=0$  sono le derivate rispetto a  $z$  delle analoghe linee per  $F=1$  in  $z=0$  (cambiate due volte di segno). Per le (12-21) si può scrivere, per una coppia  $\mathcal{M}$  in  $z=0$ ,

$$\begin{aligned} v &= \frac{\mathcal{M} \alpha}{2 \rho} \frac{dA}{dz} = - \frac{\mathcal{M} \alpha^2}{\rho} B_{az} \\ \varphi &= \frac{\mathcal{M} \alpha^2}{\rho} \frac{dB}{dz} = \frac{\mathcal{M} \alpha^3}{\rho} C_{az} \\ M &= \frac{\mathcal{M}}{4 \alpha} \frac{dC}{dz} = - \frac{\mathcal{M}}{2} D_{az} \\ T &= - \frac{\mathcal{M}}{2} \frac{dD}{dz} = \frac{\mathcal{M} \alpha}{2} A_{az} \end{aligned} \quad (22)$$

### 3. La trave di lunghezza finita e sezione costante su terreno di cedibilità costante.

In possesso dei dati relativi alla trave di lunghezza infinita, è possibile ottenere rapidamente la soluzione relativa alla trave  $AB$  (fig. 12-4 a) di lunghezza finita, seguendo il procedimento cosiddetto di *Andree-Herzka* (1919).

Si studia in un primo momento la trave indefinita (fig. 12-4 b); nelle sezioni  $A$  e  $B$  si hanno valori determinati di  $v$ ,  $\varphi$ ,  $M$  e  $T$ . Per questo studio si utilizzano i risultati del paragrafo precedente, relativi ad una forza e ad una coppia, sommando gli effetti.

In un secondo momento si considera la trave, sempre indefinita, caricata da due forze  $F_A$  ed  $F_B$  e da due coppie  $\mathcal{M}_A$  ed  $\mathcal{M}_B$  nelle due sezioni immediatamente a sinistra di  $A$  ed a destra di  $B$ ; i valori di  $F_A$ ,  $F_B$ ,  $\mathcal{M}_A$ ,  $\mathcal{M}_B$  devono essere tali da soddisfare le condizioni ai limiti in  $A$  e  $B$  nella trave finita. Queste condizioni sono due in ogni estremo, e cioè quattro in tutto. Se la trave in un estremo è libera, in tale estremo risulta  $T=M=0$  (fig. 12-4 a); se è cernierata è  $v=M=0$ ; se è incastrata

è  $v = \varphi = 0$ ; se è vincolata ad un appoggio elasticamente cedevole si ha  $M = 0$ , e  $v = \mp c_v EI v'''$ . Nel caso della trave libera ai due estremi,

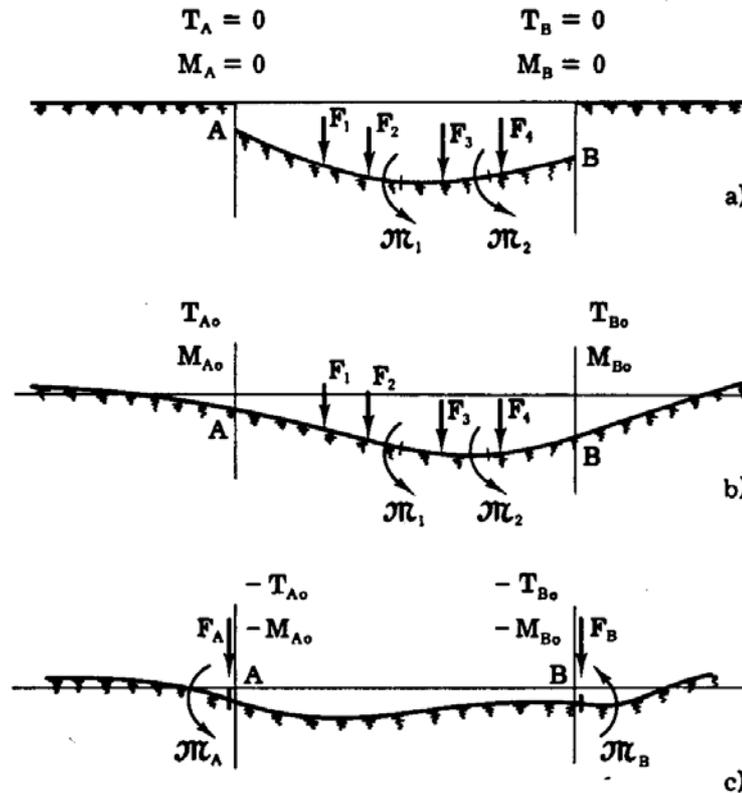


FIG. 12-4

per esempio, si ha (fig. 12-4)

$$\begin{aligned}
 T_{A0} - \frac{F_A}{2} + \frac{F_B}{2} D_{at} + \pi_A \frac{\alpha}{2} + \pi_B \frac{\alpha}{2} A_{at} &= 0 \\
 T_{B0} - \frac{F_A}{2} D_{at} + \frac{F_B}{2} + \pi_A \frac{\alpha}{2} A_{at} + \pi_B \frac{\alpha}{2} &= 0 \\
 M_{A0} + \frac{F_A}{4\alpha} + \frac{F_B}{4\alpha} C_{at} - \frac{\pi_A}{2} + \frac{\pi_B}{2} D_{at} &= 0 \\
 M_{B0} + \frac{F_A}{4\alpha} C_{at} + \frac{F_B}{4\alpha} - \frac{\pi_A}{2} D_{at} + \frac{\pi_B}{2} &= 0.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Dal sistema (12-23) si ricavano le quattro incognite  $F_A$ ,  $F_B$ ,  $\pi_A$ ,  $\pi_B$ ; dalla sovrapposizione tra gli effetti (sulla trave indefinita) delle forze applicate e delle quattro incognite così conosciute, si perviene alla soluzione valida per la trave finita.

#### 4. La trave di sezione variabile, su terreno di cedibilità costante.

Nel caso più generale in cui la sezione della trave sia variabile (ma di larghezza  $b$  al suolo costante) è conveniente procedere per successive approssimazioni seguendo il metodo di *Vianello-Stodola* (1898-1927). La trave sia ad estremi liberi. Si parte da una deformata  $v_1$  di primo tentativo, per esempio quella relativa alla trave di rigidità infinita (fig. 12-5).

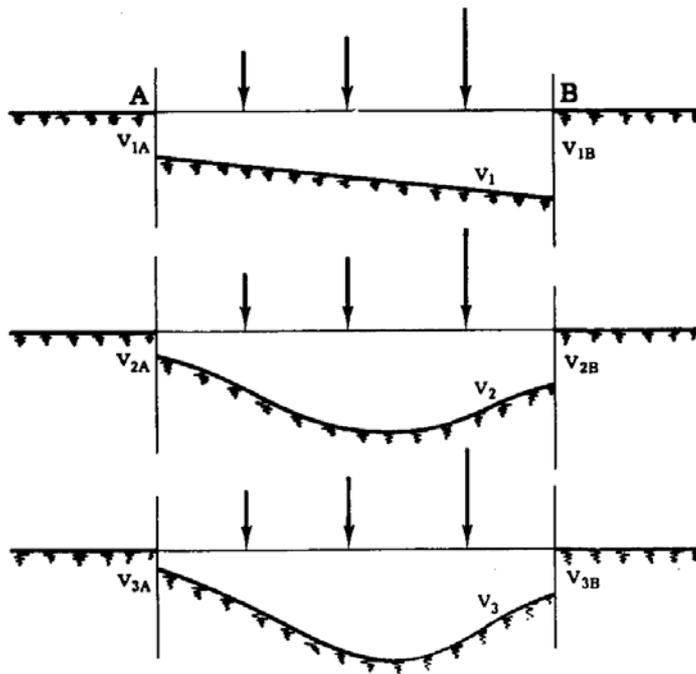


FIG. 12-5

La  $v_1$  è rettilinea; i valori estremi  $v_{1A}$  e  $v_{1B}$  si ottengono trasformando il diagramma degli abbassamenti nel diagramma delle reazioni  $r_1$  del terreno, ancora rettilineo, ed imponendo le due condizioni di equilibrio (alla traslazione ed alla rotazione) della trave sotto le forze applicate  $F_1$  e le reazioni  $r_1$ .

Si disegna poi la deformata  $v_2$  della trave effettiva, soggetta alle  $F_1$  ed  $r_1$ ; il procedimento di Mohr, o quello delle quattro integrazioni, forniscono la  $v_2$  a meno di due costanti; d'altro canto la fondamentale del diagramma  $v_2$ , e cioè i valori estremi  $v_{2A}$  e  $v_{2B}$ , sono definiti dalle stesse condizioni di equilibrio sopra citate. Il diagramma  $v_2$  si trasforma in diagramma delle reazioni  $r_2$  del terreno, e ripetendo il procedimento già eseguito si disegna la nuova deformata  $v_3$ .

Il procedimento converge poco rapidamente alla soluzione effettiva, se la trave non è molto rigida rispetto al terreno; per trave non molto ri-

gida, conviene partire da una deformata  $v_1$  calcolata per trave di sezione costante.

Si fa presente che, se la trave è di sezione costante, il peso proprio induce sul terreno una reazione pari al peso stesso, e la trave non si inflette; altrettanto succede per qualsiasi carico uniformemente ripartito.

Il suddetto procedimento, con le varianti del caso, può essere seguito anche se il terreno è di cedibilità variabile, ed in qualsiasi condizione di vincolo della trave.

Altro procedimento è quello già noto del *Ritz*, di carattere generale, basato sul teorema di stazionarietà dell'energia potenziale totale; numerosi interessanti esempi in merito sono riportati nel classico trattato dell'*Hetényi* [47].

### 5. Un esempio di trave a sezione costante.

Si studia la trave di lunghezza finita della fig. 12-6, soggetta a forze

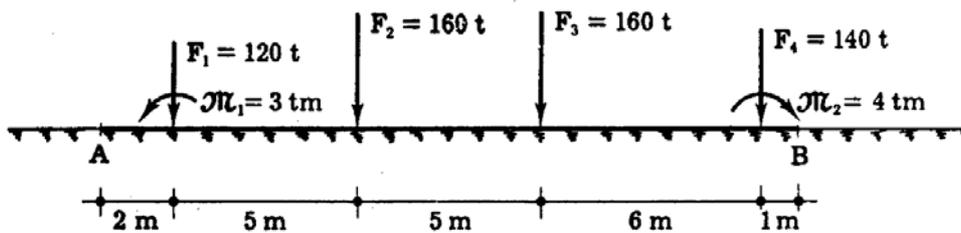


FIG. 12-6

concentrate e coppie. La pressione media sul suolo è di

$$\frac{580}{19} \sim 30 \text{ t/mq (3 Kg/cmq)} .$$

La sezione, costante, è consegnata nella fig. 12-7; risulta

$$I = I_x = 3,651 \cdot 10^6 \text{ cm}^4 = 3,651 \cdot 10^{-2} \text{ m}^4 .$$

La trave è realizzata in conglomerato, perciò si può porre

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ Kg cm}^{-2} = 2 \cdot 10^6 \text{ tm}^{-2} .$$

Il suolo su cui la trave poggia, di cedibilità costante, è caratterizzato da una costante di sottofondo

$$k = 10 \text{ Kg cm}^{-3} = 10.000 \text{ tm}^{-3} .$$

Si ha quindi

$$\rho = k b = 10.000 \text{ tm}^{-2} .$$

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{\rho}{4 EI}} = \sqrt[4]{\frac{10.000}{4 \cdot 3,651 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^6}} = 0,430 \text{ m}^{-1} .$$

La lunghezza caratteristica della trave e la lunghezza d'onda valgono

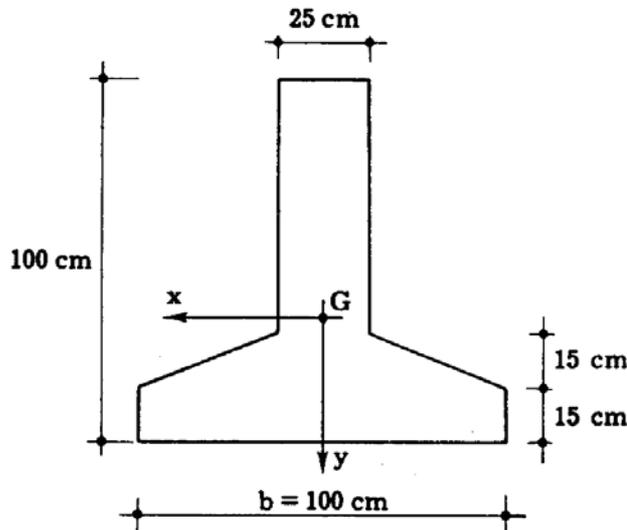


FIG. 12-7

rispettivamente

$$\frac{1}{\alpha} = 2,33 \text{ m}$$

$$l^* = 14,61 \text{ m} .$$

Il calcolo si esegue secondo il metodo di Andree-Herzka, facendo agire sulla trave, supposta di lunghezza infinita, i carichi  $F_1, F_2, F_3, F_4, \mathcal{N}_1$  ed  $\mathcal{N}_2$ , uno per volta; le tabelle da 1 a 4 raccolgono i valori di  $v, \varphi, M$  e  $T$  dovuti a ciascun carico, calcolati con le formule date nei precedenti paragrafi e con l'ausilio delle tabelle delle funzioni  $A_{\alpha z}, B_{\alpha z}, C_{\alpha z}$  e  $D_{\alpha z}$  riportate in appendice.

Per effetto della sovrapposizione delle sei condizioni di carico nascono agli estremi A e B della trave i momenti ed i tagli

$$M_{A0} = - 7,164 \text{ tm} \qquad M_{B0} = 22,773 \text{ tm}$$

$$T_{A0} = 13,236 \text{ t} \qquad T_{B0} = - 38,437 \text{ t};$$

TABELLA 12-1

SPOSTAMENTI DOVUTI ALLE FORZE E COPPIE APPLICATE ( $10^{-4}$  m)

z (m)	0	1	2	3	4	5	6
$F_1$	15,397	22,257	25,809	22,257	15,397	8,789	3,878
$F_2$	— 1,459	— 0,821	1,155	5,170	11,718	20,530	29,677
$F_3$	— 0,092	— 0,297	— 0,614	— 1,012	— 1,378	— 1,459	— 0,821
$F_4$	0,014	0,028	0,043	0,055	0,052	0,015	— 0,080
$\mathcal{M}_1$	0,178	0,151	0,000	— 0,151	— 0,178	— 0,147	— 0,098
$\mathcal{M}_2$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,004
z (m)	7	8	9	10	11	12	13
$F_1$	0,867	— 0,616	— 1,095	— 1,034	— 0,759	— 0,460	— 0,223
$F_2$	34,412	29,677	20,530	11,718	5,170	1,155	— 0,821
$F_3$	1,155	5,170	11,718	20,530	29,677	34,412	29,677
$F_4$	— 0,260	— 0,537	— 0,886	— 1,206	— 1,277	— 0,718	1,011
$\mathcal{M}_1$	— 0,054	— 0,022	— 0,004	0,005	0,008	0,007	0,005
$\mathcal{M}_2$	0,007	0,009	0,010	0,007	— 0,005	— 0,030	— 0,072
z (m)	14	15	16	17	18	19	
$F_1$	— 0,069	0,013	0,044	0,047	0,037	0,024	
$F_2$	— 1,459	— 1,378	— 1,012	— 0,614	— 0,297	— 0,092	
$F_3$	20,530	11,718	5,170	1,155	— 0,821	— 1,459	
$F_4$	4,524	10,254	17,964	25,967	30,111	25,967	
$\mathcal{M}_1$	0,003	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	
$\mathcal{M}_2$	— 0,131	— 0,196	— 0,237	— 0,201	0,000	0,201	

TABELLA 12-2

ROTAZIONI DOVUTE ALLE FORZE E COPPIE APPLICATE ( $10^{-4}$  m/m)

z (m)	0	1	2	3	4	5	6
$F_1$	— 7,120	— 6,022	0,000	6,022	7,120	5,871	3,929
$F_2$	— 0,190	— 1,192	— 2,882	— 5,239	— 7,828	— 9,494	— 8,030
$F_3$	0,153	0,261	0,368	0,411	0,280	— 0,190	— 1,192
$F_4$	— 0,011	— 0,015	— 0,015	— 0,007	0,016	0,062	0,134
$\mathcal{M}_1$	— 0,011	0,076	0,239	0,076	— 0,011	— 0,045	— 0,049
$\mathcal{M}_2$	0,000	0,000	0,000	0,000	— 0,001	— 0,002	— 0,002
z (m)	7	8	9	10	11	12	13
$F_1$	2,162	0,894	0,142	— 0,210	— 0,308	— 0,276	— 0,196
$F_2$	0,000	8,030	9,494	7,828	5,239	2,882	1,192
$F_3$	— 2,882	— 5,239	— 7,828	— 9,494	— 8,030	0,000	8,030
$F_4$	0,228	0,322	0,360	0,245	— 0,166	— 1,043	— 2,522
$\mathcal{M}_1$	— 0,038	— 0,025	— 0,013	— 0,005	0,000	0,002	0,002
$\mathcal{M}_2$	— 0,003	— 0,002	0,001	0,007	0,018	0,033	0,051
z (m)	14	15	16	17	18	19	
$F_1$	— 0,115	— 0,053	— 0,014	0,006	0,013	0,013	
$F_2$	0,190	— 0,280	— 0,411	— 0,368	— 0,261	— 0,153	
$F_3$	9,494	7,828	5,239	2,882	1,192	0,190	
$F_4$	— 4,584	— 6,849	— 8,307	— 7,026	0,000	7,026	
$\mathcal{M}_1$	0,002	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	
$\mathcal{M}_2$	0,065	0,060	0,014	— 0,102	— 0,318	— 0,102	

TABELLA 12-3

MOMENTI DOVUTI ALLE FORZE E COPPIE APPLICATE (tm)

z (m)	0	1	2	3	4	5	6
$F_1$	— 3,123	22,313	69,124	22,313	— 3,123	— 13,131	— 14,204
$F_2$	— 5,136	— 9,705	— 14,985	— 18,939	— 17,508	— 4,164	29,750
$F_3$	0,712	0,835	0,652	— 0,152	— 1,966	— 5,136	— 9,705
$F_4$	— 0,031	— 0,019	0,022	0,105	0,241	0,427	0,623
$\mathcal{M}_1$	0,414	0,887	— 1,500 1,500	— 0,887	— 0,414	— 0,114	0,040
$\mathcal{M}_2$	0,000	— 0,001	— 0,002	— 0,003	— 0,005	— 0,006	— 0,005
z (m)	7	8	9	10	11	12	13
$F_1$	— 11,239	— 7,279	— 3,852	— 1,475	— 0,114	0,489	0,626
$F_2$	92,990	29,750	— 4,164	— 17,508	— 18,939	— 14,985	— 9,705
$F_3$	— 14,985	— 18,939	— 17,508	— 4,164	29,750	92,990	29,750
$F_4$	0,731	0,570	— 0,133	— 1,720	— 4,494	— 8,492	— 13,112
$\mathcal{M}_1$	0,096	0,096	0,073	0,046	0,023	0,008	0,000
$\mathcal{M}_2$	0,000	0,011	0,031	0,061	0,098	0,128	0,128
z (m)	14	15	16	17	18	19	
$F_1$	0,534	0,366	0,207	0,090	0,019	— 0,016	
$F_2$	— 5,136	— 1,966	— 0,152	0,652	0,835	0,712	
$F_3$	— 4,164	— 17,508	— 18,939	— 14,985	— 9,705	— 5,136	
$F_4$	— 16,571	— 15,319	— 3,643	26,031	81,366	26,031	
$\mathcal{M}_1$	— 0,004	— 0,004	— 0,004	— 0,004	— 0,001	— 0,001	
$\mathcal{M}_2$	0,053	— 0,152	— 0,552	— 1,182	2,000 — 2,000	1,182	

TABELLA 12-4

TAGLI DOVUTI ALLE FORZE E COPPIE APPLICATE (t)

z (m)	0	1	2	3	4	5	6
$F_1$	16,554	35,469	— 60,000 60,000	— 35,469	— 16,554	— 4,568	1,603
$F_2$	— 3,906	— 5,129	— 5,103	— 2,137	6,090	22,072	47,293
$F_3$	0,199	0,014	— 0,433	— 1,242	— 2,448	— 3,906	— 5,129
$F_4$	0,003	0,024	0,059	0,109	0,164	0,201	0,174
$\mathcal{M}_1$	0,385	0,556	0,645	0,556	0,385	0,220	0,097
$\mathcal{M}_2$	0,000	— 0,001	— 0,001	— 0,002	— 0,001	0,000	0,002
z (m)	7	8	9	10	11	12	13
$F_1$	3,827	3,847	2,929	1,836	0,931	0,325	— 0,010
$F_2$	— 80,000 80,000	— 47,293	— 22,072	— 6,090	2,137	5,103	5,129
$F_3$	— 5,103	— 2,137	6,090	22,072	47,293	— 80,000 80,000	— 47,293
$F_4$	0,012	— 0,379	— 1,087	— 2,142	— 3,417	— 4,488	— 4,465
$\mathcal{M}_1$	0,022	— 0,015	— 0,027	— 0,026	— 0,019	— 0,012	— 0,006
$\mathcal{M}_2$	0,007	0,015	0,025	0,034	0,036	0,021	— 0,029
z (m)	14	15	16	17	18	19	
$F_1$	— 0,149	— 0,172	— 0,141	— 0,093	— 0,051	— 0,021	
$F_2$	3,906	2,448	1,242	0,433	— 0,014	— 0,199	
$F_3$	— 22,072	— 6,090	2,137	5,103	5,129	3,906	
$F_4$	— 1,870	5,329	19,313	41,381	— 70,000 70,000	— 41,381	
$\mathcal{M}_1$	— 0,002	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001	
$\mathcal{M}_2$	— 0,129	— 0,293	— 0,513	— 0,742	— 0,860	— 0,742	

da questi, sostituendo nel sistema (12-23), si ottengono i valori di  $F_A$ ,  $F_B$ ,  $M_A$ ,  $M_B$ . Nel caso in esame, avendosi

$$l = 19 \text{ m}$$

$$\alpha l = 8,176 ,$$

si ottiene:

$$A_{\alpha l} \approx B_{\alpha l} \approx C_{\alpha l} \approx D_{\alpha l} \approx 0 ,$$

e si possono scrivere le (12-23) nella forma semplificata

$$T_{A_0} - \frac{F_A}{2} + \mathcal{N}_A \frac{\alpha}{2} = 0$$

$$T_{B_0} + \frac{F_B}{2} + \mathcal{N}_B \frac{\alpha}{2} = 0$$

$$M_{A_0} + \frac{F_A}{4\alpha} - \frac{\mathcal{N}_A}{2} = 0$$

$$M_{B_0} + \frac{F_B}{4\alpha} + \frac{\mathcal{N}_B}{2} = 0 .$$

Da queste si trae

$$F_A = 4 (T_{A_0} + \alpha M_{A_0}) = 40,616 \text{ t}$$

$$F_B = 4 (\alpha M_{B_0} - T_{B_0}) = 192,931 \text{ t}$$

$$\mathcal{N}_A = 4 M_{A_0} + \frac{2}{\alpha} T_{A_0} = 32,883 \text{ tm}$$

$$\mathcal{N}_B = -4 M_{B_0} + \frac{2}{\alpha} T_{B_0} = -269,804 \text{ tm} .$$

Le tabelle da 5 ad 8 raccolgono i valori degli spostamenti e caratteristiche destati alle diverse ascisse della trave dai carichi  $F_A$ ,  $F_B$ ,  $\mathcal{N}_A$ ,  $\mathcal{N}_B$  (applicati uno per volta) calcolati con le formule relative alla trave indefinita; la somma di questi valori, e degli analoghi dovuti ai carichi applicati permette di ottenere i diagrammi di  $v$ ,  $\varphi$ ,  $M$  e  $T$  sulla trave effettiva di

lunghezza finita. Questi sono riportati nella fig. 12-8, e le ordinate sono raccolte nella tabella 9.

Si osservi come l'approssimazione introdotta per il calcolo di  $F_A$ ,  $F_B$ ,  $\mathcal{M}_A$  ed  $\mathcal{M}_B$  comporti un lieve squilibrio nei momenti e nei tagli alle estre-

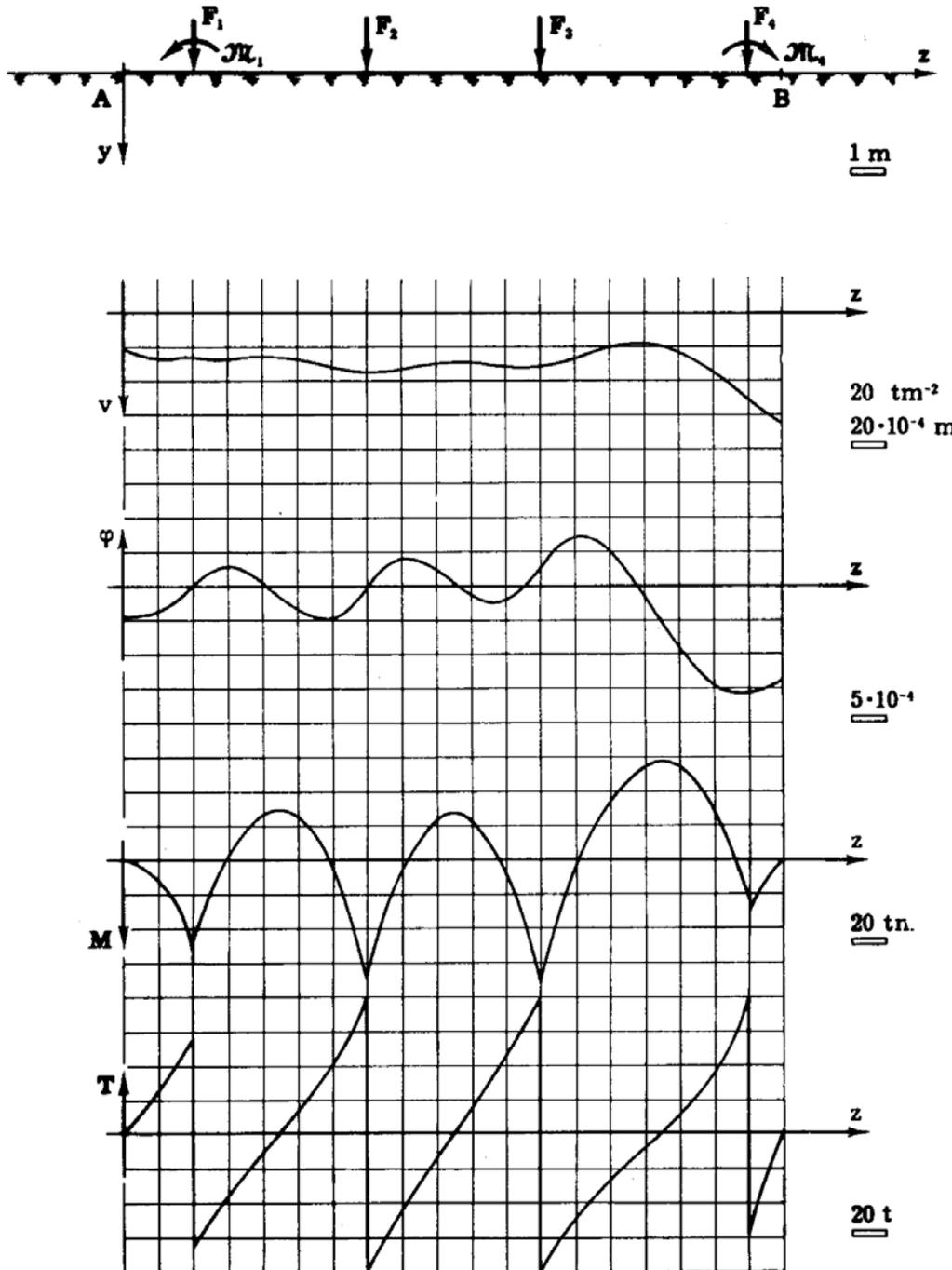


FIG. 12-8

mità della trave, peraltro tranquillamente accettabile, atteso il valore delle stesse caratteristiche nei punti intermedi.

Il diagramma degli abbassamenti, moltiplicato per  $k$ , fornisce quello

TABELLA 12-5  
SPOSTAMENTI DOVUTI ALLE FORZE E COPPIE AGGIUNTE ( $10^{-4}$  m)

z (m)	0	1	2	3	4	5	6
$F_A$	8,736	7,533	5,211	2,975	1,312	0,293	— 0,208
$F_B$	0,007	0,020	0,038	0,059	0,076	0,071	0,021
$\mathcal{M}_A$	0,000	— 1,650	— 1,951	— 1,609	— 1,077	— 0,592	— 0,245
$\mathcal{M}_B$	— 0,013	— 0,022	— 0,029	— 0,029	0,013	0,031	0,119
z (m)	7	8	9	10	11	12	13
$F_A$	— 0,370	— 0,350	— 0,257	— 0,156	— 0,075	— 0,023	0,004
$F_B$	— 0,111	— 0,359	— 0,740	— 1,220	— 1,662	— 1,760	— 0,990
$\mathcal{M}_A$	— 0,039	0,058	0,084	0,076	0,054	0,031	0,014
$\mathcal{M}_B$	0,258	0,440	0,620	0,693	0,472	— 0,320	— 2,010
z (m)	14	15	16	17	18	19	
$F_A$	0,015	0,016	0,012	0,008	0,004	0,002	
$F_B$	1,393	6,234	14,130	24,755	35,785	41,495	
$\mathcal{M}_A$	0,004	0,002	— 0,004	— 0,003	— 0,003	— 0,002	
$\mathcal{M}_B$	— 4,861	— 8,834	— 13,200	— 16,009	— 13,540	0,000	

TABELLA 12-6  
ROTAZIONI DOVUTE ALLE FORZE E COPPIE AGGIUNTE ( $10^{-4}$  m/m)

z (m)	0	1	2	3	4	5	6
$F_A$	0,000	2,038	2,410	1,987	1,330	0,732	0,303
$F_B$	— 0,010	— 0,015	— 0,020	— 0,021	— 0,009	0,022	0,085
$\mathcal{M}_A$	2,617	0,837	— 0,117	— 0,493	— 0,533	— 0,422	— 0,273
$\mathcal{M}_B$	0,008	0,008	0,005	— 0,006	— 0,028	— 0,064	— 0,113
z (m)	7	8	9	10	11	12	13
$F_A$	0,048	— 0,071	— 0,104	— 0,093	— 0,066	— 0,039	— 0,018
$F_B$	0,184	0,314	0,443	0,496	0,337	— 0,229	— 1,437
$\mathcal{M}_A$	— 0,145	— 0,055	— 0,004	0,018	0,024	0,020	0,014
$\mathcal{M}_B$	— 0,164	— 0,193	— 0,151	0,035	0,454	1,186	2,241
z (m)	14	15	16	17	18	19	
$F_A$	— 0,005	0,002	0,004	0,004	0,003	0,002	
$F_B$	— 3,476	— 6,317	— 9,439	— 11,448	— 9,682	0,000	
$\mathcal{M}_A$	0,008	0,003	0,001	— 0,001	— 0,001	— 0,001	
$\mathcal{M}_B$	3,461	4,374	4,043	0,961	— 6,870	— 21,474	

TABELLA 12-7  
MOMENTI DOVUTI ALLE FORZE E COPPIE AGGIUNTE (tm)

z (m)	0	1	2	3	4	5	6
$F_A$	23,606	7,552	- 1,057	- 4,444	- 4,808	- 3,804	- 2,464
$F_B$	- 0,040	- 0,043	- 0,026	0,030	0,145	0,333	0,588
$\mathcal{M}_A$	- 16,441	- 9,719	- 4,536	- 1,252	0,439	1,049	1,054
$\mathcal{M}_B$	0,012	- 0,006	- 0,046	- 0,114	- 0,210	- 0,316	- 0,387
z (m)	7	8	9	10	11	12	13
$F_A$	- 1,304	- 0,499	- 0,039	0,165	0,212	0,181	0,124
$F_B$	0,858	1,007	0,786	- 0,184	- 2,371	- 6,193	- 11,703
$\mathcal{M}_A$	0,803	0,503	0,255	0,089	- 0,003	- 0,041	- 0,047
$\mathcal{M}_B$	- 0,336	- 0,023	0,730	2,094	4,128	6,586	8,649
z (m)	14	15	16	17	18	19	
$F_A$	0,070	0,030	0,006	- 0,005	- 0,009	- 0,008	
$F_B$	- 18,069	- 22,836	- 21,111	- 5,020	35,873	112,129	
$\mathcal{M}_A$	- 0,039	- 0,026	- 0,014	- 0,006	- 0,001	0,001	
$\mathcal{M}_B$	8,605	3,603	- 10,269	- 37,220	- 79,748	- 134,902	

TABELLA 12-8  
TAGLI DOVUTI ALLE FORZE E COPPIE AGGIUNTE (t)

z (m)	0	1	2	3	4	5	6
$F_A$	- 20,308	- 12,005	- 5,603	- 1,546	0,542	1,295	1,302
$F_B$	- 0,009	0,005	0,033	0,082	0,150	0,226	0,277
$\mathcal{M}_A$	7,072	6,099	4,219	2,408	1,063	0,237	- 0,169
$\mathcal{M}_B$	- 0,010	- 0,028	- 0,053	- 0,083	- 0,106	- 0,100	- 0,029
z (m)	7	8	9	10	11	12	13
$F_A$	0,911	0,621	0,315	0,110	- 0,003	- 0,051	- 0,058
$F_B$	0,240	0,016	- 0,522	- 1,498	- 2,952	- 4,709	- 6,185
$\mathcal{M}_A$	- 0,300	- 0,283	- 0,208	- 0,126	- 0,061	- 0,019	0,004
$\mathcal{M}_B$	0,155	0,501	1,035	1,707	2,324	2,461	1,384
z (m)	14	15	16	17	18	19	
$F_A$	- 0,048	- 0,032	- 0,017	- 0,007	- 0,001	0,002	
$F_B$	- 6,153	- 2,577	7,343	26,615	57,026	96,465	
$\mathcal{M}_A$	0,012	0,013	0,010	0,006	0,003	0,001	
$\mathcal{M}_B$	- 1,948	- 8,718	- 19,760	- 34,619	- 50,043	- 58,029	

TABELLA 12-9  
VALORI FINALI DI  $v$ ,  $\varphi$ ,  $M$ ,  $T$

$z$ (m)	0	1	2	3	4	5	6
$v$ ( $10^{-4}$ m)	22,768	27,198	26,663	27,716	25,910	27,532	32,244
$\varphi$ ( $10^{-4}$ m/m)	— 4,564	— 4,023	— 0,014	2,732	0,337	— 3,529	— 5,208
$M$ (tm)	— 0,028	12,093	48,264 51,264	— 3,343	— 27,207	— 24,861	5,290
$T$ (t)	— 0,019	25,004	— 66,236 53,764	— 37,323	— 10,715	15,679	45,421
$z$ (m)	7	8	9	10	11	12	13
$v$ ( $10^{-4}$ m)	35,864	33,470	29,982	29,413	31,601	32,295	26,596
$\varphi$ ( $10^{-4}$ m/m)	— 0,610	3,975	2,340	— 1,174	— 2,499	2,537	7,357
$M$ (tm)	67,613	5,198	— 23,820	— 22,594	8,291	70,671	4,710
$T$ (t)	— 80,148 79,852	— 45,106	— 13,522	15,878	46,269	— 81,369 78,631	— 51,528
$z$ (m)	14	15	16	17	18	19	
$v$ ( $10^{-4}$ m)	19,949	17,827	22,868	35,106	51,275	66,135	
$\varphi$ ( $10^{-4}$ m/m)	5,040	— 1,231	— 8,869	— 15,090	— 15,925	— 14,500	
$M$ (tm)	— 34,720	— 53,812	— 54,470	— 31,648	30,629 26,629	— 0,007	
$T$ (t)	— 28,454	— 10,093	9,615	38,079	— 58,809 81,191	0,003	

delle pressioni sul terreno; la scala del diagramma  $S_p$  si ottiene da quella  $S_v$  moltiplicandola per  $k$ .

E' interessante notare come la pressione si esalti all'estremo di destra, ove attinge il valore di 6,5 Kg/cm<sup>2</sup>, più del doppio della media. Ciò è dovuto all'eccessiva brevità della mensola di destra; ed infatti all'estremo di sinistra il fenomeno non si riscontra. Occorre tener presente questa circostanza ogni qualvolta accade, come è frequente, di dover fondare in aderenza a manufatti già esistenti.