

CAPITOLO VII

LE TRAVI AD ASSE RETTILINEO ISOSTATICHE

1. Generalità sulle travi ad asse rettilineo.

Si considerano in questo capitolo e in quelli che seguono — salvo contrario avviso — travi piane (§ 6-1) ad asse rettilineo, caricate da forze contenute nel piano di simmetria geometrica e normali all'asse; si è perciò nell'ambito dei sistemi monodimensionali piani.

L'asse della trave si assume come asse z ; esso si suppone disposto orizzontalmente, e orientato verso destra. L'asse y è quello verticale, orientato verso il basso; il verso positivo delle rotazioni è quindi quello antiorario. Gli assi n e t hanno gli stessi versi di y e z . Delle (6-1) sono diverse da zero solo q_y ed m_x , che si chiamano senz'altro *carico distribuito* q e *coppia distribuita* m . Delle (6-4) sono diverse da zero solo ϑ_y e μ_x , che si chiamano *distorsione di scorrimento relativo* ϑ e *distorsione di rotazione relativa* μ .

Delle tre componenti u v w dello spostamento la u e la w sono trascurabili rispetto alla v , perciò la u e la w si pongono nulle nell'ambito dell'ipotesi di piccoli spostamenti. La v che si considera è quella relativa all'asse; essa infatti, nell'ipotesi accettata, è la stessa per tutti i punti della stessa sezione. Tale v si chiama semplicemente *spostamento*; il diagramma delle v , riportate parallelamente all'asse y a partire dall'asse z , si chiama *linea elastica*.

Delle (6-5) sono diverse da zero solo T_y ed M_x , che si chiamano, con dizione semplificata, *sforzo di taglio* (o più semplicemente *taglio*) T e *momento flettente* M .

La q è positiva se diretta verso il basso, e così pure le forze concentrate; la m è positiva se antioraria, e così pure le coppie concentrate; T è positiva se la sezione di sinistra è sollecitata verso il basso e quella di destra verso l'alto; M è positivo se per esso sono tese le fibre inferiori; ϑ e μ sono positive se di verso contrario ai rispettivi spostamenti elastici relativi provocati nel concio elementare da T ed M positivi; v è positiva se diretta verso il basso; la rotazione φ della sezione generica è positiva se antioraria.

I vincoli si suppongono tali da esplicitare reazioni dirette secondo l'asse y , o coppie. Uno solo dei vincoli deve poter sviluppare anche una rea-

zione orizzontale, che però risulta nulla, essendo nulle le q_z ; la presenza di questo vincolo è quindi teoricamente superflua, nell'ipotesi $q_z = 0$, ma esso si pone sia per far rientrare la trave nell'ambito della trattazione svolta nel precedente paragrafo in relazione alla isostaticità, labilità o iperstaticità delle strutture, sia perchè in realtà un tale vincolo è necessario per equilibrare i carichi orizzontali, la cui presenza — anche in quei casi in cui non è teoricamente ammessa — deve sempre supporre. Le reazioni verticali sono positive se, considerate agenti sulla trave, sono dirette verso il basso; le coppie di reazione sono positive se, considerate agenti sulla trave, sono antiorarie. Circa le proprietà dei diagrammi del taglio e del momento flettente, vale quanto detto al § 6-2 con riferimento ai tratti rettilinei. I riferimenti $q \cdot z$, $T \cdot z$, $M \cdot z$, $\varphi \cdot z$, dei diagrammi $q(z)$, $T(z)$, $M(z)$ e $\varphi(z)$ possono essere qualsiasi; e infatti il riferimento $y \cdot z$ di cui si è parlato all'inizio del paragrafo è impegnativo solo per gli spostamenti. Spesso, anzi, l'asse delle ascisse risulta, nei diagrammi del momento, inclinato rispetto all'asse z della trave, e poichè i valori di M si riportano sempre normalmente all'asse z , il riferimento non è più ortogonale. In genere $T(z)$ e $\varphi(z)$ si disegnano, se positivi, verso l'alto; $M(z)$ e $v(z)$, se positivi, verso il basso; ciò corrisponde alla convenzione di disegnare il diagramma del momento dalla parte delle fibre tese.

La prima delle (6-14) porge, nel caso in esame,

$$\frac{dT}{dz} = -q \quad (1)$$

e la terza delle (6-14)

$$\frac{dM}{dz} = T - m; \quad (2)$$

dalle (7-1) e (7-2), o dalla (6-15), si trae

$$\frac{d^2M}{dz^2} = -q - \frac{dm}{dz}. \quad (3)$$

Sempre nell'ipotesi di piccoli spostamenti è (fig. 7-1) $\varphi \cong \text{tg } \varphi$, e quindi

$$\varphi = -\frac{dv}{dz} \quad (4)$$

Dalla nota formula

$$d\varphi = \frac{M dz}{EI} \quad (5)$$

si trae

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M}{EI} \quad (6)$$

Dalle (7-4) e (7-6) si ha

$$\frac{d^2v}{dz^2} = - \frac{M}{EI} \quad (7)$$

Il raggio di curvatura è positivo se il vettore SC ha proiezione SC' lungo y positiva; nel caso della fig. 7-1 è $r < 0$. Con tale convenzione il raggio di curva-

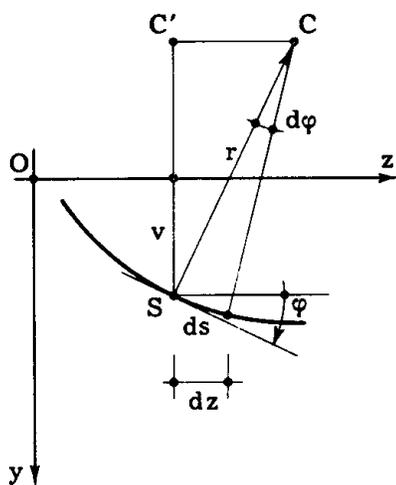


FIG. 7-1

tura è fornito dalla formula (§ 5-2 del Vol. II)

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2v}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2\right]^{3/2}}; \quad (8)$$

nell'ipotesi di piccoli spostamenti si ha

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2v}{dz^2} \quad (9)$$

e quindi

$$\frac{1}{r} = - \frac{M}{EI} \quad (10)$$

Dalle (7-3) e (7-7) si trae

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(EI \frac{d^2 v}{dz^2} \right) = q + \frac{dm}{dz} . \quad (11)$$

Per sezione costante e materiale omogeneo la (7-11) si scrive

$$\frac{d^4 v}{dz^4} = \frac{1}{EI} \left(q + \frac{dm}{dz} \right) . \quad (12)$$

In presenza di distorsioni all'effetto di M occorre aggiungere quello di μ , e quindi le (7-5), (7-6) e (7-7) si scrivono

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{M dz}{EI} - \mu dz \\ \frac{d\varphi}{dz} &= \frac{M}{EI} - \mu \\ \frac{d^2 v}{dz^2} &= -\frac{M}{EI} + \mu ; \end{aligned} \quad (13)$$

per la (7-3) si ha

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(EI \frac{d^2 v}{dz^2} \right) = q + \frac{dm}{dz} + \frac{d^2}{dz^2} EI \mu ; \quad (14)$$

per sezione costante e materiale omogeneo la (7-14) porge

$$\frac{d^4 v}{dz^4} = \frac{1}{EI} \left(q + \frac{dm}{dz} \right) + \frac{d^2 \mu}{dz^2} . \quad (15)$$

Se si vuole tener conto anche del taglio e delle distorsioni ϑ , la

$$\frac{dv_t}{dz} = \chi \frac{T}{GA} - \vartheta = -\varphi_t \quad (16)$$

(9-40 del Vol. II) porge

$$d\varphi_t = \frac{d}{dz} \left(-\chi \frac{T}{GA} + \vartheta \right) dz$$

e quindi si ha

$$-\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M}{EI} + \frac{d}{dz} \left(\chi \frac{T}{GA} \right) + \mu - \frac{d\vartheta}{dz}; \quad (17)$$

per la (7-3) si ha infine

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} \left(EI \frac{d^2v}{dz^2} \right) &= q + \frac{dm}{dz} + \frac{d^2}{dz^2} \left[EI \frac{d}{dz} \left(\chi \frac{T}{GA} \right) \right] + \\ &+ \frac{d^2}{dz^2} EI \mu - \frac{d^2}{dz^2} \left(EI \frac{d\vartheta}{dz} \right); \end{aligned} \quad (18)$$

per sezione costante e materiale omogeneo si ha, per la (7-1),

$$\frac{d^4v}{dz^4} = \frac{1}{EI} \left(q + \frac{dm}{dz} \right) - \frac{\chi}{GA} \frac{d^2q}{dz^2} + \frac{d^2\mu}{dz^2} - \frac{d^3\vartheta}{dz^3}. \quad (19)$$

Indicando con apici le derivate rispetto a z , le formule precedenti si scrivono:

$$T' = -q \quad (1 \text{ bis})$$

$$M' = T - m \quad (2 \text{ bis})$$

$$M'' = -q - m' \quad (3 \text{ bis})$$

$$v' = -\varphi \quad (4 \text{ bis})$$

$$-\varphi' = v'' = -\frac{M}{EI} + \left(\chi \frac{T}{GA} \right)' + \mu - \vartheta' \quad (17 \text{ bis})$$

$$(EI v'')'' = q + m' + \left[EI \left(\chi \frac{T}{GA} \right)' \right]'' + (EI \mu)'' - (EI \vartheta')'' \quad (18 \text{ bis})$$

$$v'''' = \frac{1}{EI} (q + m') - \frac{\chi}{GA} q'' + \mu'' - \vartheta'''. \quad (19 \text{ bis})$$

Se si è in presenza di grandi spostamenti, la (7-5) si modifica nell'altra

$$d\varphi = \frac{M ds}{EI}. \quad (20)$$

Per la (5-5) del II Vol., identica alla (7-10), si ha

$$\frac{1}{r} = -\frac{M}{EI} \quad (21)$$

e quindi (7-8)

$$\frac{v''}{(1 + v'^2)^{3/2}} = - \frac{M}{EI}, \quad (22)$$

dove v, M, E ed I sono relativi alla trave già deformata.

L'equazione della linea elastica, nella forma (7-11), (7-12), (7-18) o (7-19), è differenziale del quarto ordine; la sua integrazione, se si prescinde dal taglio, è immediata, e si esegue con quattro quadrature successive; la soluzione dipende da quattro costanti.

Le funzioni v, v', v'' e v''' devono essere derivabili, e perciò continue. Ne discende la necessità che siano continue le funzioni $EI, M, T, q, m, \mu, \vartheta$. L'integrazione va fatta perciò per ogni tratto che rispetti tale condizione, e che quindi non comprenda vincoli, forze o coppie concentrate, distorsioni concentrate, o punti di discontinuità delle funzioni EI, q, m, μ, ϑ .

In ciascuno dei due estremi della trave si scrivono due condizioni, ed in ciascun punto di contatto fra due tratti altre quattro condizioni; queste condizioni sono di congruenza (esprimono la continuità in tali punti della v e della v') o di equilibrio (esprimono l'equilibrio del tronco elementare in corrispondenza di tali punti). Se i tratti sono n , le condizioni sono $4n$, tante quante le costanti da determinare.

Di seguito si trascrivono alcune condizioni, nell'ipotesi che siano assenti nelle zone ad esse relative sia m che μ e ϑ , e trascurando nelle stesse zone l'effetto del taglio. Le condizioni di equilibrio sono scritte sia in termini di caratteristiche che di spostamenti.

a) appoggio di estremità:

$$\begin{aligned} v &= 0 && \text{cong.} \\ M &= \mp \mathcal{M} && \text{eq.} \end{aligned} \quad (23)$$

(\mathcal{M} è l'eventuale coppia applicata; il segno $+$ vale se l'appoggio è di sinistra, dove $\mathcal{M} = -M$; il segno $-$ se l'appoggio è di destra)

b) incastro:

$$\begin{aligned} v &= 0 && \text{cong.} \\ v' &= 0 && \text{cong.} \end{aligned} \quad (24)$$

c) bipendolo di estremità:

$$\begin{aligned} v' &= 0 && \text{cong.} \\ T &= \mp F && \text{eq.} \end{aligned} \quad (25)$$

(F è l'eventuale forza applicata all'estremità; la condizione

deriva dall'essere

$$T = M' = - (EI v'')' = \mp F$$

secondo che ci si riferisce all'estremo di sinistra o di destra)

d) *estremo libero*:

$$\begin{aligned} M &= \mp \mathcal{M} & ; & & EI v'' &= \pm \mathcal{M} & \text{eq.} \\ T &= \mp F & ; & & (EI v'')' &= \pm F & \text{eq.} \end{aligned} \quad (26)$$

e) *appoggio intermedio*:

$$\begin{aligned} v_s &= 0 & \text{cong.} \\ v_d &= 0 & \text{cong.} \\ v'_s &= v'_d & \text{cong.} \\ M_s - M_d &= \mathcal{M} & ; & & v''_d - v''_s &= \frac{\mathcal{M}}{EI} & \text{eq.} \end{aligned} \quad (27)$$

(le quantità con indici s e d sono quelle a sinistra e a destra dell'appoggio; la quarta condizione deriva dall'equilibrio dell'elemento sull'appoggio soggetto alla coppia \mathcal{M} eventualmente applicata, alla coppia $\mathcal{M}_s = -M_s = EI v''_s$, ed alla coppia $\mathcal{M}_d = M_d = -EI v''_d$).

f) *cerniera intermedia*:

$$\begin{aligned} v_s &= v_d & \text{cong.} \\ M_s &= \mathcal{M}_s & ; & & EI v''_s &= -\mathcal{M}_s & \text{eq.} \\ M_d &= -\mathcal{M}_d & ; & & EI v''_d &= \mathcal{M}_d & \text{eq.} \\ T_s - T_d &= F & ; & & (EI v''_d)' - (EI v''_s)' &= F & \text{eq.} \end{aligned} \quad (28)$$

(\mathcal{M}_s , \mathcal{M}_d , F sono le coppie e la forza eventualmente applicate; la quarta condizione è di equilibrio secondo y dell'elemento contenente la cerniera)

g) *bipendolo esterno*:

$$\begin{aligned} v_s &= v_d & \text{cong.} \\ v'_s &= 0 & \text{cong.} \\ v'_d &= 0 & \text{cong.} \\ T_s - T_d &= F & ; & & (EI v''_d)' - (EI v''_s)' &= F & \text{eq.} \end{aligned} \quad (29)$$

h) *bipendolo interno*:

$$\begin{aligned}
 v'_s &= v'_d && \text{cong.} \\
 T_s = F_s & ; & (EI v''_s)' = -F_s && \text{eq.} \\
 T_d = -F_d & ; & (EI v''_d)' = F_d && \text{eq.} \\
 M_s - M_d = \mathfrak{M} & ; & v''_d - v''_s = \frac{\mathfrak{M}}{EI} && \text{eq.}
 \end{aligned} \tag{30}$$

i) In corrispondenza di una forza esterna concentrata si ha

$$\begin{aligned}
 v_s &= v_d && \text{cong.} \\
 v'_s &= v'_d && \text{cong.} \\
 M_s = M_d & ; & v''_s = v''_d && \text{eq.} \\
 T_s - T_d = F & ; & (EI v''_d)' - (EI v''_s)' = F && \text{eq.}
 \end{aligned} \tag{31}$$

l) In corrispondenza di una coppia applicata è

$$\begin{aligned}
 v_s &= v_d && \text{cong.} \\
 v'_s &= v'_d && \text{cong.} \\
 M_s - M_d = \mathfrak{M} & ; & v''_d - v''_s = \frac{\mathfrak{M}}{EI} && \text{eq.} \\
 T_s = T_d & ; & (EI v''_d)' = (EI v''_s)' && \text{eq.}
 \end{aligned} \tag{32}$$

m) In corrispondenza di una distorsione D_φ si ha

$$\begin{aligned}
 v_s &= v_d && \text{cong.} \\
 v'_d - v'_s &= D_\varphi && \text{cong.} \\
 M_s = M_d & ; & v''_s = v''_d && \text{eq.} \\
 T_s = T_d & ; & (EI v''_s)' = (EI v''_d)' && \text{eq.}
 \end{aligned} \tag{33}$$

n) Analoghe sono le condizioni per una distorsione D_η :

$$\begin{aligned}
 v_s - v_d &= D_\eta && \text{cong.} \\
 v'_s &= v'_d && \text{cong.} \\
 M_s = M_d & ; & v''_s = v''_d && \text{eq.} \\
 T_s = T_d & ; & (EI v''_s)' = (EI v''_d)' && \text{eq.}
 \end{aligned} \tag{34}$$

Le condizioni di vincolo sono state scritte per vincoli rigidi; esse si modificano in modo ovvio in presenza di cedimenti anelastici o elastici. Per l'appoggio di estremità e per l'incastro si ha:

o) *appoggio cedevole di estremità:*

$$\begin{aligned} v &= v_e - c_v R && \text{cong.} \\ M &= \mp \mathcal{M} && \text{eq.} \end{aligned} \quad (35)$$

p) *incastro angolarmente e verticalmente cedevole:*

$$\begin{aligned} v &= v_e - c_v R && \text{cong.} \\ v' &= -\varphi_e \pm c_\varphi EI v'' && \text{cong.} \end{aligned} \quad (36)$$

(è infatti $v' = -\varphi = -\varphi_e + c_\varphi \mathcal{M}$, ed $\mathcal{M} = \mp M = \pm EI v''$ secondo che l'incastro è all'estremo di sinistra o di destra).

Se la trave è isostatica, e i tratti sono n , le condizioni di equilibrio sono $2n$, ed altrettante quelle di congruenza; ciò consente di risolvere separatamente l'equazione del secondo ordine (7-3), e poi l'equazione del secondo ordine (7-7), o (7-17).

Se la trave è iperstatica, si preferisce, invece di affrontare direttamente l'equazione del quarto ordine (7-18) o analoghe, operare sul sistema reso isostatico attraverso le equazioni di congruenza in termini finiti (Cap. VIII); nel caso della (7-18) si evita così, oltre tutto, l'inconveniente della T al secondo membro, non esplicitabile in funzione dei carichi. Nel seguito di questo capitolo si tratteranno le travi isostatiche, separando appunto l'equazione del quarto ordine in due del secondo. Nei casi più semplici si opererà analiticamente, in quelli più complessi graficamente, attraverso integrazioni grafiche o poligoni funicolari.

2. I diagrammi del taglio e del momento flettente: il metodo della doppia integrazione.

Dalla (7-1) si trae

$$T(z) = T_a - \int_a^z q \, dz \quad (37)$$

e dalla (7-2)

$$M(z) = M_a + \int_a^z (T - m) \, dz, \quad (38)$$

dove T_a ed M_a sono i valori del taglio e del momento flettente in corrispondenza della sezione all'ascissa $z = a$, $T(z)$ ed $M(z)$ i valori del taglio e del momento flettente in corrispondenza della sezione all'ascissa generica z .

Si può quindi asserire che il diagramma del taglio si ottiene integrando quello del carico; il diagramma del momento a sua volta si ottiene integrando quello del taglio, e cioè operando una doppia integrazione a partire dal diagramma del carico. Conviene operare graficamente se il dia-

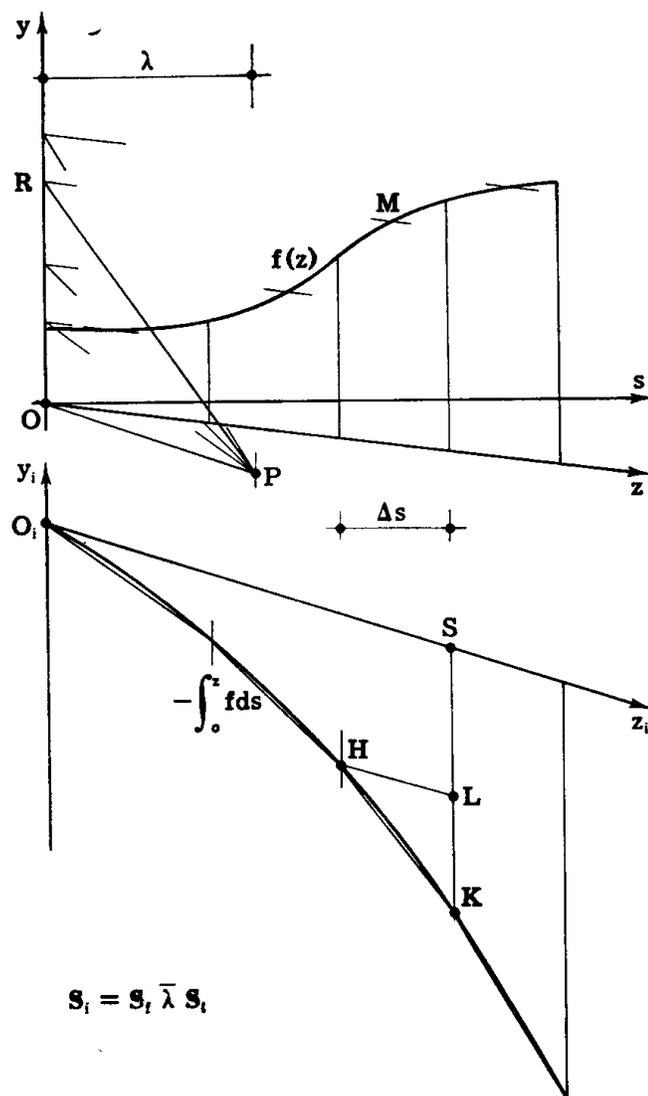


FIG. 7-2

gramma del carico non è esprimibile in forma analitica semplice, analiticamente in caso contrario.

Se esistono coppie distribuite m , al diagramma del taglio va aggiunto, prima di integrarlo, quello delle $-m$.

Il procedimento grafico di integrazione di una funzione $f(z)$ consiste, come è noto dalla Statica grafica, nel suddividere (fig. 7-2) il diagramma $f(z)$ in strisce mediante rette parallele all'asse y (gli assi y e z del riferimento cartesiano non sono necessariamente ortogonali) e sufficientemente vicine da permettere l'assimilazione di ogni striscia ad un trapezio (in particolare, un triangolo); la distanza tra le rette dividenti deve essere perciò tanto più piccola, quanto più accentuata è la curvatura del diagramma, e in genere essa varia da striscia a striscia. Si proiettano le estremità M delle ordinate medie di ogni striscia secondo z su y , e queste proiezioni R si congiungono con un punto P preso dalla stessa parte delle z positive. Si traccia poi la spezzata i cui vertici sono situati sulle rette dividenti il diagramma $f(z)$, e i cui lati HK sono paralleli alle congiungenti PR ; i vertici di tale spezzata appartengono alla curva integrale di $f(z)$, con fondamentale parallela alla OP . Infatti dalla similitudine dei due triangoli OPR ed LHK si trae, a prescindere dal segno,

$$\bar{\lambda} \cdot LK = \bar{\Delta s} \cdot \bar{OR} ,$$

da cui, moltiplicando a sinistra e a destra per $S_i S_f$,

$$\bar{\lambda} \bar{LK} S_i S_f = \Delta s \cdot OR = f \Delta s .$$

Il segmento LK è diretto verso il basso, e cioè è negativo, se OR è positivo. Si può perciò scrivere

$$\bar{\lambda} \bar{LK} S_i S_f = - f \Delta s$$

e quindi

$$\bar{\lambda} \bar{SK} S_i S_f = - \int_0^z f(z) ds , \quad (39)$$

La fondamentale z_i del diagramma integrale è parallela alla OP .

Se z trasla, z_i ruota intorno ad O_i dello stesso angolo di cui ruota PO . Dati perciò $f(z)$ e P , la conoscenza di z_i determina la posizione di z , sempre comunque parallela alle RM .

Il segno della (7-39) si giustifica per essere P a destra della y .

Ogni qualvolta si può, si preferisce riferire il diagramma $f(z)$ ad una fondamentale z normale ad y , ed assumere il punto P sulla z , in modo che anche il riferimento $y_i z_i$ del diagramma integrale risulti ortogonale.

La scala S_i del diagramma $\int f(z)$ si ottiene da quella S_f del diagramma $f(z)$ attraverso la

$$S_i = \bar{\lambda} S_f . \quad (40)$$

Se le s non sono lunghezze, la S_f va sostituita, nella (7-40), con la relativa scala.

Se si cambia il verso dell'asse y_i , la (7-39) si scrive

$$\bar{\lambda} \bar{SK} S_i S_f = \int_0^z f(z) ds . \quad (41)$$

Assegnato il diagramma $q(z)$ (fig. 7-3), esso si integra ottenendo il diagramma del taglio, a meno della fondamentale z_i ; infatti l'ordinata ge-

nerica è

$$T_0 - \int_0^z q \, dz = T(z) .$$

La posizione di z_i (parallela a z , perchè P_T è stato scelto su z) si fissa conoscendo il valore di T in una sezione, per esempio il valore T_0 in

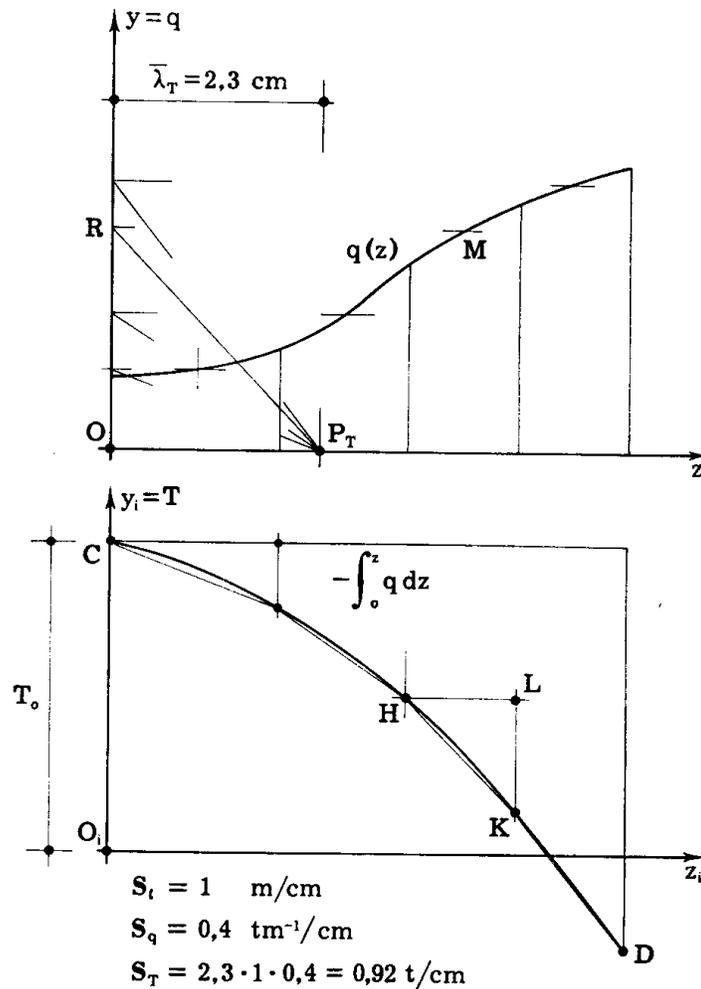


FIG. 7-3

$z=0$; le ordinate al disopra della fondamentale sono positive. Se la trave AB su cui il carico $q(z)$ insiste è incastrata in A e libera in B (fig. 7-4), il taglio è nullo in B e perciò la fondamentale è la GD ; se invece (fig. 7-5) la trave AB è libera in A e incastrata in B , il taglio è nullo in A , e la fondamentale è la CN .

Altre volte il valore di T non è a priori conosciuto in alcuna sezione; ciò accade, per esempio, se la trave AB è appoggiata ai due estremi

(fig. 7-6). In tal caso si integra il diagramma $T(z)$ con una fondamentale provvisoria, per esempio GD; si ottiene così il diagramma EF del mo-

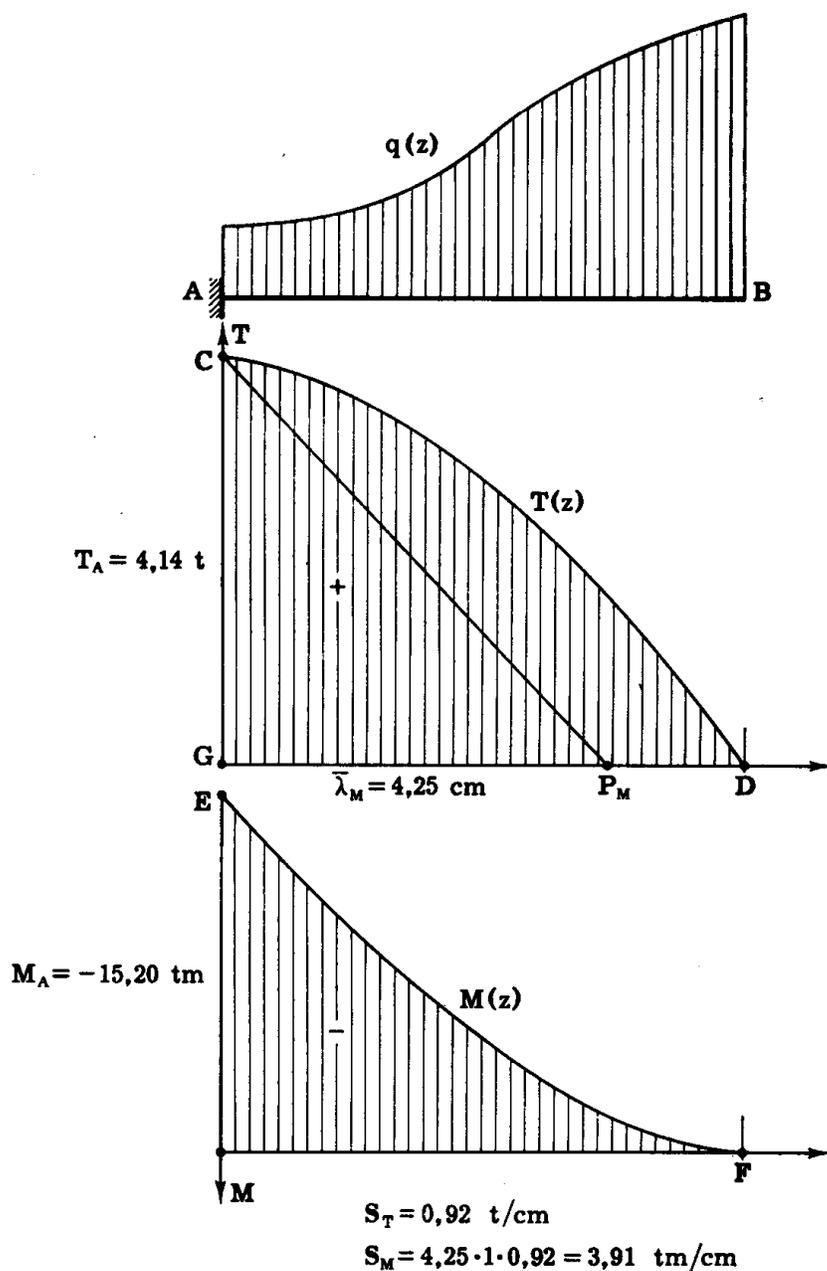


FIG. 7-4

mento flettente $M(z)$. Infatti, orientando l'asse M verso il basso, l'ordinata generica risulta

$$M_o + \int_0^z T \, dz = M(z) ;$$

le ordinate al disotto della fondamentale sono positive. Si determina la fondamentale di questo diagramma, che è la congiungente EF , e la parallela per P_M alla EF fissa in Z il punto per cui deve passare la vera fon-

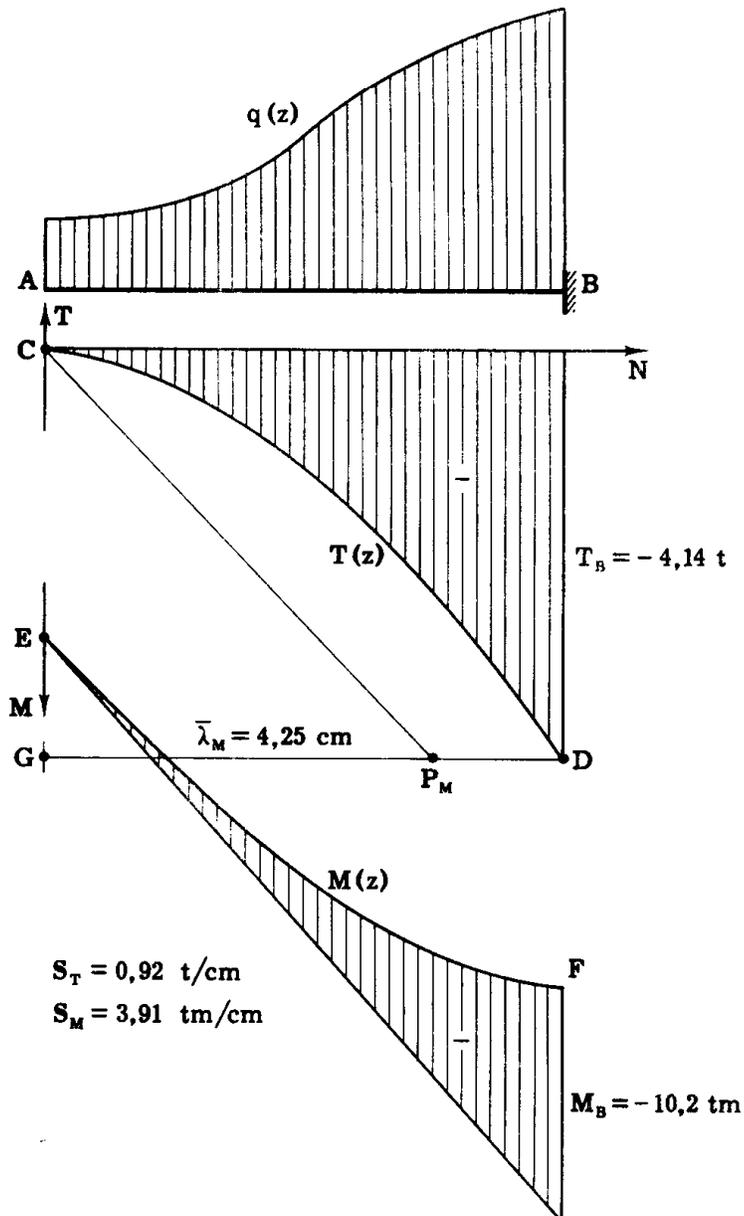


FIG. 7-5

damentale ZS del diagramma del taglio. Si ottengono così anche i due valori delle reazioni R_A ed R_B , pari a quelli dei tagli T_A e T_B .

La risultante R del carico distribuito $q(z)$ passa per l'intersezione delle due tangenti al diagramma $M(z)$ nei punti E ed F , in tal modo in-

fatti risultano chiusi e il poligono delle forze R , R_A ed R_B , e quello funicolare.

Nel caso della trave a mensola, il diagramma del momento $M(z)$ è sempre definito dalla curva integrale del diagramma $T(z)$ già ottenuta

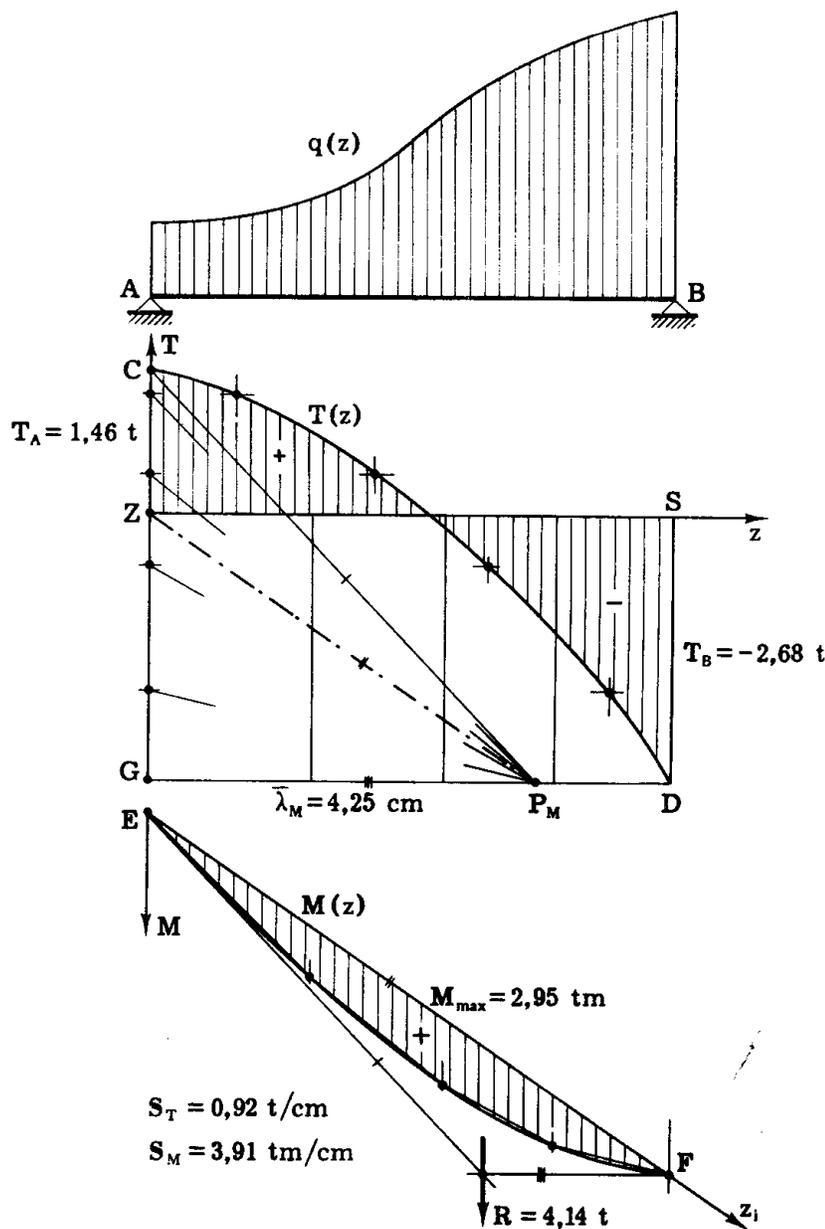


FIG. 7-6

nella fig. 7-6; se la trave è incastrata in A (fig. 7-4) la fondamentale deve essere orizzontale [poichè il polo P_M si è preso sulla fondamentale, orizzontale pur essa, di $T(z)$] e deve passare per F; se invece la trave è incastrata in B, la fondamentale è parallela alla CP_M , e passa per E.

Se i due appoggi sono intermedi (fig. 7-7) la trattazione è identica a quella svolta nel caso della fig. 7-6; i due momenti M_C ed M_D si ottengono considerando i due tratti AC e BD come due mensole, e la parallela per P_M alla fondamentale di $M(z)$ nel tratto CD fornisce la fondamentale di $T(z)$ relativa allo stesso tratto. Così pure si tratta la trave isostatica della fig. 7-8, con tre appoggi e una cerniera (Gerber); la fondamentale del diagramma del momento nel tratto CB si traccia tenendo conto

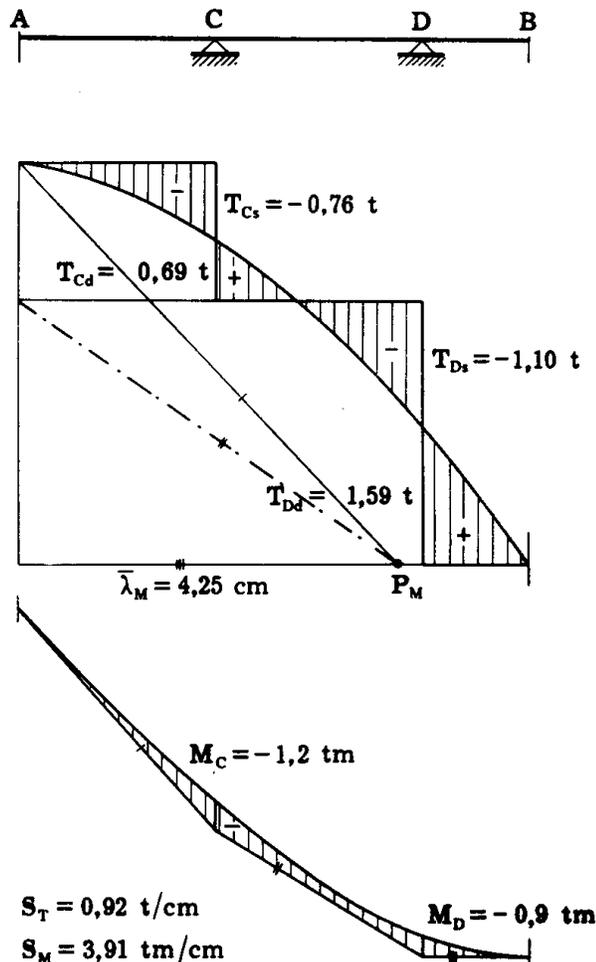


FIG. 7-7

che $M_D = M_B = 0$, e quella nel tratto AC considerando che $M_A = 0$, ed M_C è noto dopo aver tracciata la prima fondamentale. Le parallele per P_M alle due fondamentali forniscono le due fondamentali del diagramma del taglio. È importante osservare che in ogni caso le fondamentali del diagramma del momento possono tracciarsi ignorando quelle del diagramma del taglio; le condizioni in T infatti sono anche condizioni in M' , e le $2n$ condizioni in M ed M' sono nelle travi isostatiche sufficienti a definire le n fondamentali del diagramma momenti.

Si osservi pure che il metodo di integrazione grafico esposto all'inizio del paragrafo cade in difetto se la curva $f(z)$ presenta valori ∞ ; perciò se sulla trave agiscono, oltre al carico distribuito $q(z)$, dei carichi concentrati F_i noti, per ottenere il taglio si deve effettuare un'unica integrazione per tutto il carico $q(z)$, e disporre le fondamentali di ciascun tratto compreso tra due forze successive [tutte orizzontali se il punto P è preso sulla fondamentale di $q(z)$] sfalsate di quantità uguali ai valori dei relativi carichi concentrati: il che equi-

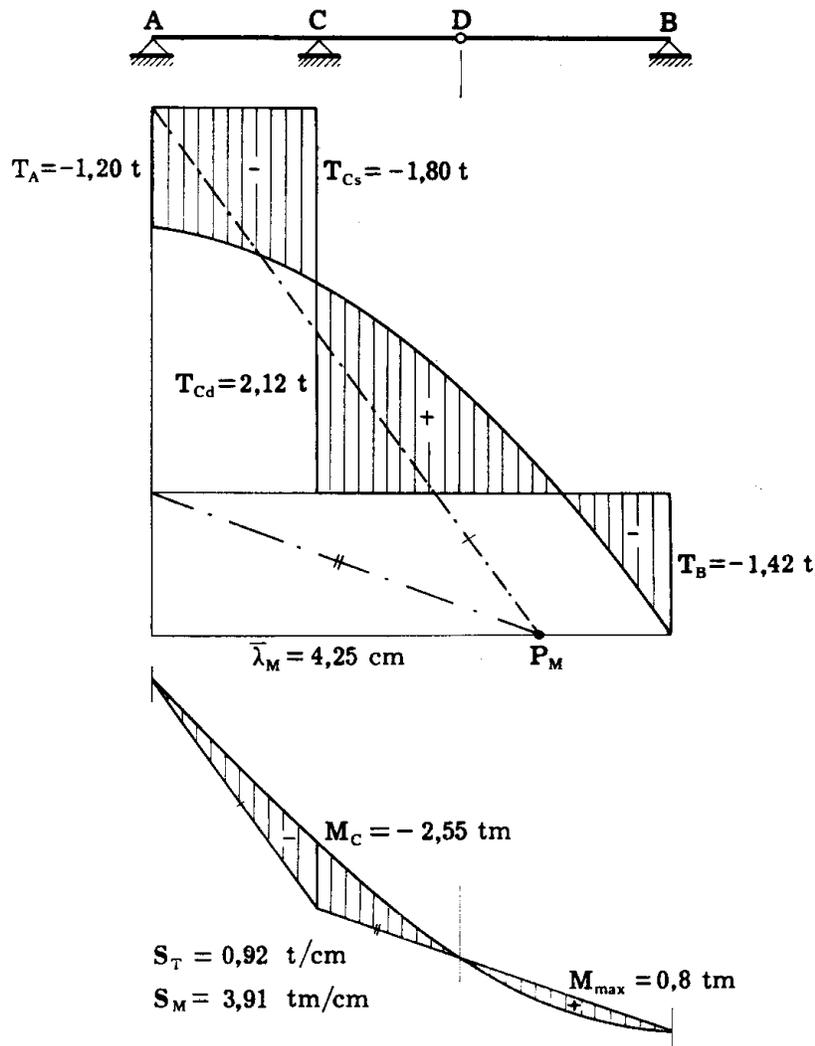


FIG. 7-8

vale ad eseguire una integrazione unica di $q(z)$, come se i carichi concentrati non esistessero, ed a traslare poi l'uno rispetto all'altro i tratti di diagramma compresi tra due forze concentrate successive. Ciò si effettua in relazione alle forze applicate, che sono note. Così operando la fondamentale risulta unica, e il diagramma discontinuo. Anche le reazioni sono forze concentrate, ma in genere non si conoscono a priori; i salti ad esse corrispondenti (e perciò i valori delle reazioni stesse) si hanno appunto costruendo le fondamentali nel modo già esposto. In genere, le fondamentali del diagramma del taglio, nel quale già si sia tenuto

conto dei salti dovuti alle forze concentrate applicate, sono tante quanti sono i tratti compresi tra due vincoli che introducono una reazione esterna.

Analogamente, se sulla trave sono applicate coppie concentrate, il diagramma $M(z)$ (supposto ottenuto per integrazione da un diagramma $T(z)$ preventivamente ridotto, se già non lo è, ad un'unica fondamentale provvisoria) deve ridursi ad un'unica fondamentale, trasladando i tratti tra coppia e coppia. Dopo aver eseguito tale operazione si passa a costruire le effettive fondamentali del momento e del taglio.

Se F_1 è positivo, e l'asse delle T rivolto verso l'alto, il tratto di destra del diagramma del taglio trasla verso il basso, perchè F_1 fa diminuire il taglio passando da sinistra a destra, come si trae dalla (7-37).

Se \mathcal{M}_1 è positivo e l'asse degli M rivolto verso il basso, il tratto di destra del diagramma del momento trasla verso l'alto, perchè \mathcal{M}_1 fa diminuire il momento passando da sinistra a destra, come si trae dalla (7-38).

Si osservi infine che tutte le costruzioni fin qui esposte continuano ad essere valide anche se il carico q non interessa tutta la trave.

Dall'esame delle figg. da 7-4 a 7-8, tutte relative a travi della stessa lunghezza e soggette allo stesso carico, si nota quale influenza abbiano le diverse disposizioni dei vincoli sull'assetto statico della struttura.

Il procedimento analitico di integrazione si adotta, come già detto, quando la funzione $q(z)$ è esprimibile in una forma facilmente quadrabile. Se il carico q è costante si ha, per una trave AB incastrata in B (fig. 7-9, for. 7-37),

$$T = T_0 - \int_0^z q \, dz = T_0 - qz ,$$

e poichè per $z=0$ è $T=0$, si ha

$$T = - qz . \quad (42)$$

Dalla (7-38) si ottiene poi

$$M = M_0 - \int_0^z qz \, dz = M_0 - q \frac{z^2}{2} ,$$

e poichè per $z=0$ è $M=0$, si perviene a

$$M = - q \frac{z^2}{2} . \quad (43)$$

La legge di variazione del taglio con l'ascissa z è perciò lineare, quella del momento quadratica; il diagramma $M(z)$ è una parabola CFD con asse parallelo all'asse M .

E' noto che le tangenti in due punti C e D di una parabola quadratica $y = az^2 + bz + c$ (fig. 7-10) si incontrano in un punto G situato sulla parallela all'asse condotta per il punto medio E del segmento CD; è noto pure che la lunghezza del segmento EF è la metà di quella del segmento EG, e che la tangente alla parabola in F è parallela alla corda CD. Di tutto ciò si trova conferma nel

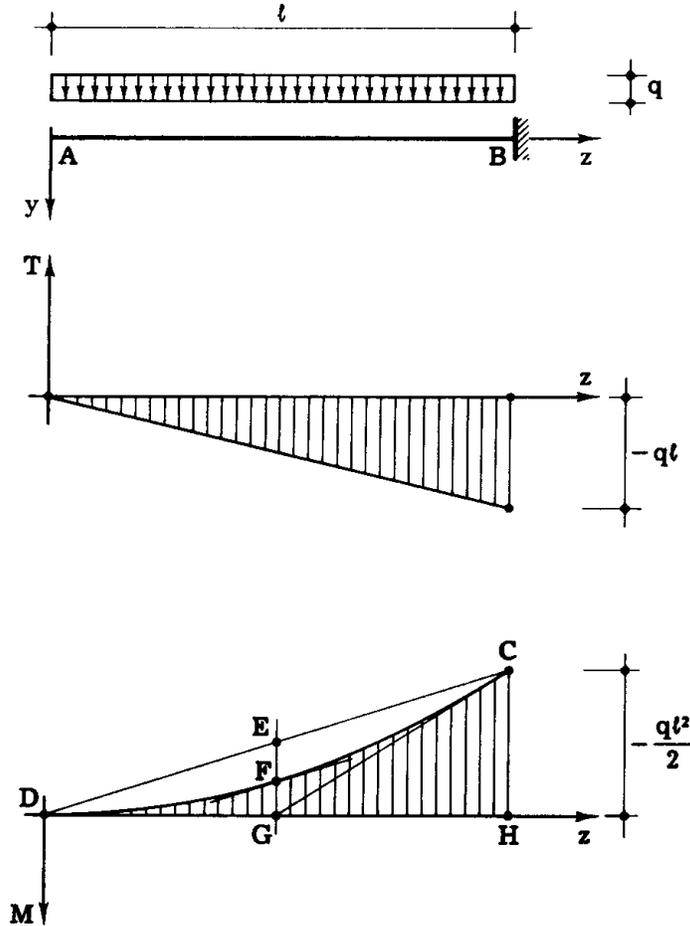


FIG. 7-9

diagramma della fig. 7-9. Infatti la tangente in D alla parabola è orizzontale, perchè ivi risulta

$$\left(\frac{dM}{dz} \right)_{z=0} = T_{z=0} = 0 ;$$

d'altro canto la tangente in C alla parabola incontra l'asse z nel punto medio G di HD, poichè in C è

$$\left(\frac{dM}{dz} \right)_{z=l} = T_{z=l} = -ql$$

e quindi

$$HC = GH \left(\frac{dM}{dz} \right)_{z=l}$$

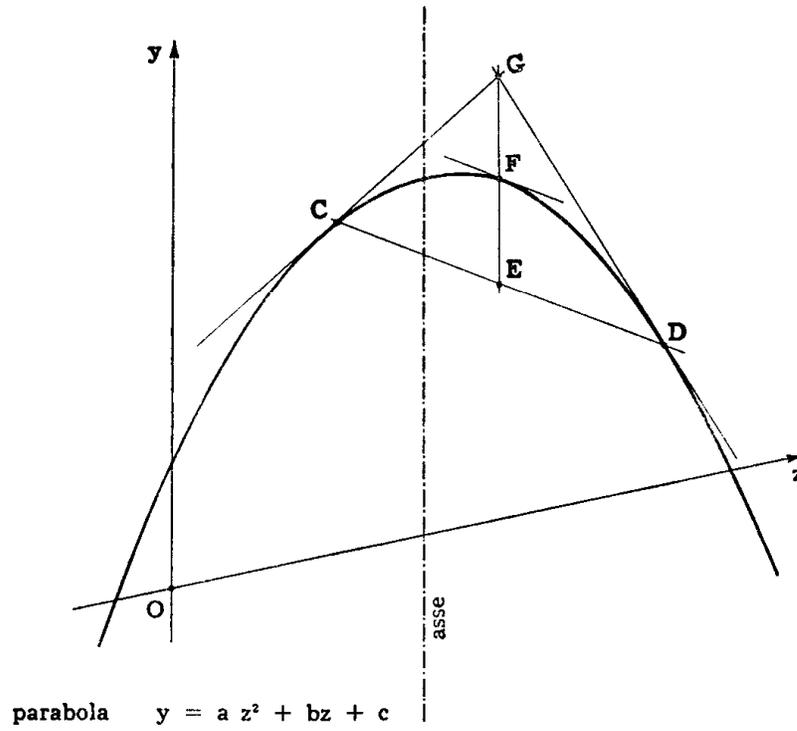


FIG. 7-10

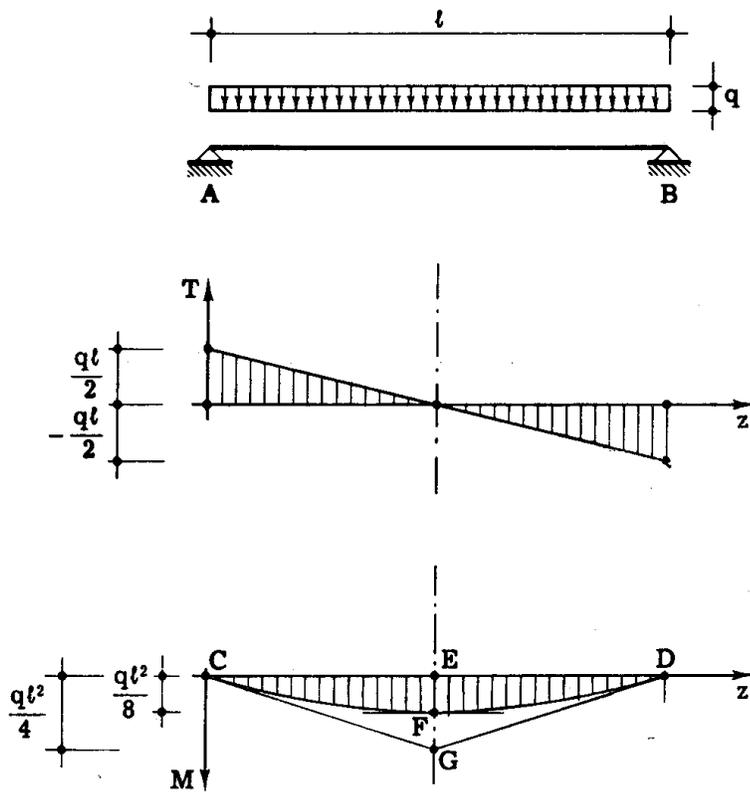


FIG. 7-11

da cui $GH = l/2$. Inoltre è (7-43)

$$M_{z=l/2} = -q \frac{l^2}{8}.$$

Se la trave è appoggiata in A e B (fig. 7-11) si ha

$$T = T_0 - qz$$

$$M = M_0 + \int_0^z T_0 dz - \int_0^z qz dz = M_0 + T_0 z - q \frac{z^2}{2}.$$

Poichè è

$$z = 0 \quad M = 0$$

$$z = l \quad M = 0$$

si ha

$$M_0 = 0$$

$$T_0 l - q \frac{l^2}{2} = 0$$

da cui

$$M_0 = 0$$

$$T_0 = \frac{ql}{2}$$

e quindi in definitiva

$$T = q \left(\frac{l}{2} - z \right) \tag{44}$$

$$M = \frac{q}{2} z (l - z).$$

Il valore massimo di M si ha nella sezione in cui $T = 0$, e cioè all'ascissa $z = l/2$, e vale

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{Pl}{8}, \tag{45}$$

ove $P = pl$ è il valore del carico totale che insiste sulla trave.

Poichè in C e D è

$$\left(\frac{dM}{dz}\right)_{z=0} = T_{z=0} = \frac{ql}{2}$$

$$\left(\frac{dM}{dz}\right)_{z=l} = T_{z=l} = -\frac{ql}{2}$$

si ha che le due tangenti in C e D al diagramma dei momenti si incontrano sulla verticale per il punto medio E di CD. Il segmento GE è fornito da

$$GE = CE \left(\frac{dM}{dz}\right)_{z=0} = \frac{l}{2} \frac{ql}{2} = \frac{ql^2}{4}$$

e perciò si verifica anche qui la proprietà

$$GE = 2 EF .$$

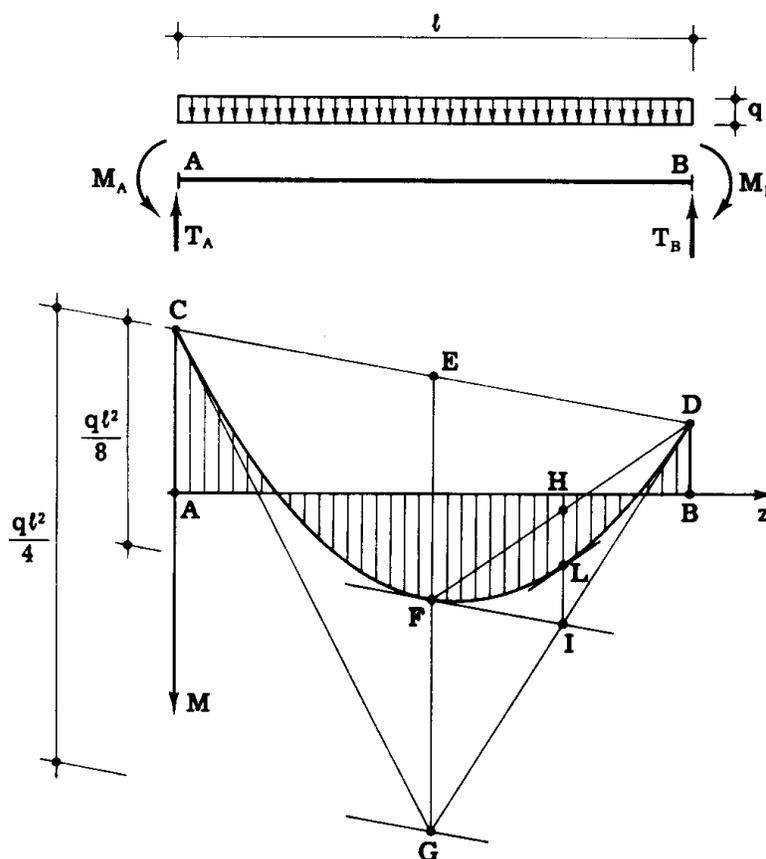


FIG. 7-12

La suddetta proprietà permette di tracciare il diagramma dei momenti lungo una qualsiasi trave rettilinea AB soggetta ad un carico \$q\$ distribuito uniformemente, una volta noti i valori dei momenti stessi \$M_A\$ ed \$M_B\$ nei suoi estremi A e B (fig. 7-12); basta infatti riportare, a partire dal punto medio del segmento CD,

il segmento $EG = ql^2/4$, nella stessa scala in cui sono tracciati $AC = M_A$ e $BD = M_B$, ottenendo così le due tangenti CG e DG in C e D , e la tangente in F , punto medio del segmento EG , che è parallela alla CD . Volendo un'altra tangente, si può unire F con D , e condurre da L , punto medio del segmento HI , la parallela alla FD ; il procedimento si ripete quante volte si vuole, se si desiderano più tangenti.

Se il carico q agente su una trave AB appoggiata agli estremi (fig. 7-

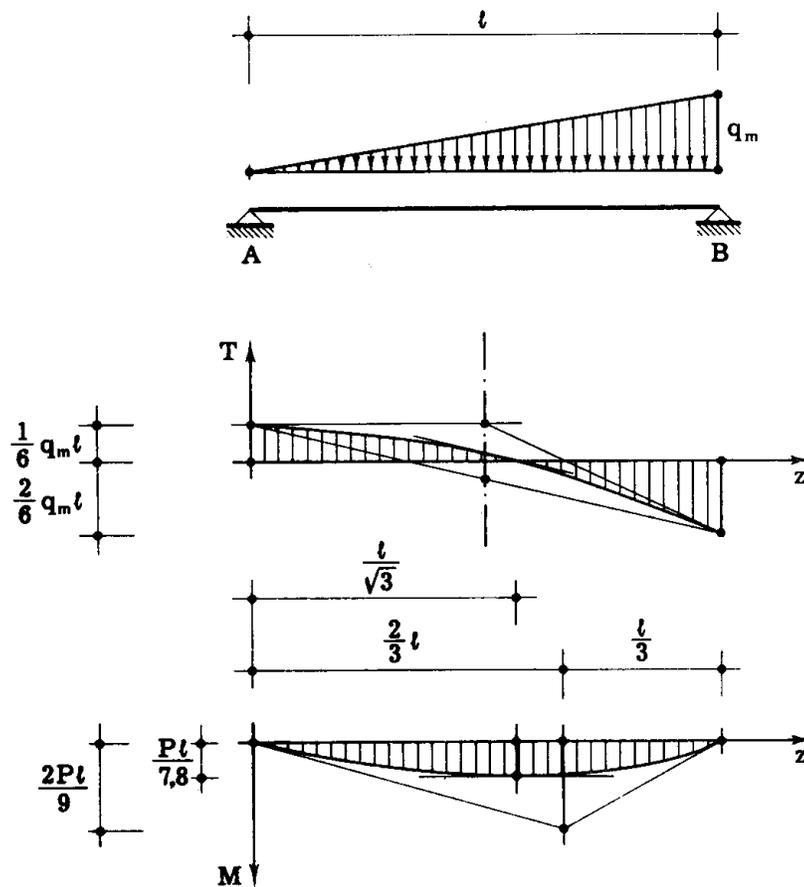


FIG. 7-13

13) è variabile, con legge lineare, da zero in un estremo ad un massimo q_m all'altro, è

$$q = q_m \frac{z}{l}$$

$$T = T_0 - \frac{q_m}{l} \frac{z^2}{2}$$

$$M = M_0 + T_0 z - \frac{q_m}{l} \frac{z^3}{6}$$

Poichè è

$$\begin{aligned} z = 0 & \quad M = 0 \\ z = \ell & \quad M = 0 \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} M_0 &= 0 \\ T_0 \ell - q_m \frac{\ell^2}{6} &= 0 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} M_0 &= 0 \\ T_0 &= q_m \frac{\ell}{6} \end{aligned}$$

e quindi in definitiva

$$\begin{aligned} T &= \frac{q_m}{2} \left(\frac{\ell}{3} - \frac{z^2}{\ell} \right) \\ M &= \frac{q_m}{6} \left(\ell z - \frac{z^3}{\ell} \right) \end{aligned} \tag{46}$$

Il valore massimo di M si ha nella sezione ove $T = 0$, e cioè per

$$z = \frac{\ell}{\sqrt{3}} = 0,577 \ell, \tag{47}$$

e vale

$$M_{\max} = q_m \frac{\ell^2}{9\sqrt{3}} = \frac{P\ell}{7,8} \tag{48}$$

ove $P = q_m \frac{\ell}{2}$ è il valore del carico totale che insiste sulla trave. Il diagramma del taglio è una parabola quadratica, e le tangenti ad esso nei due estremi si incontrano sull'asse di mezzeria; la tangente in A è orizzontale, perchè ivi è

$$\frac{dT}{dz} = -q = 0.$$

Il diagramma del momento è una parabola cubica; le due tangenti al diagramma del momento negli estremi A e B si incontrano sulla seconda verticale

trisecante il segmento AB ; infatti i valori di $\frac{dM}{dz}$ in A e B sono rispettivamente

$$\frac{1}{6} q_m \ell \quad \text{e} \quad \frac{2}{6} q_m \ell.$$

3. Il diagramma del momento: il metodo della curva funicolare.

Sia $q(z)$ un carico distribuito, ovunque parallelo ad un asse q (fig. 7-14); si costruisca il poligono delle forze elementari $q dz$, che nel caso in esame si riduce ad un segmento punteggiato CD (*punteggiata delle forze*), si proiettino i vertici di tale poligono da un polo P , e si costruisca il poligono funicolare (che, nel caso in esame, trattandosi di forze elementari è una *curva funicolare*). Si assume per la curva funicolare un riferimento

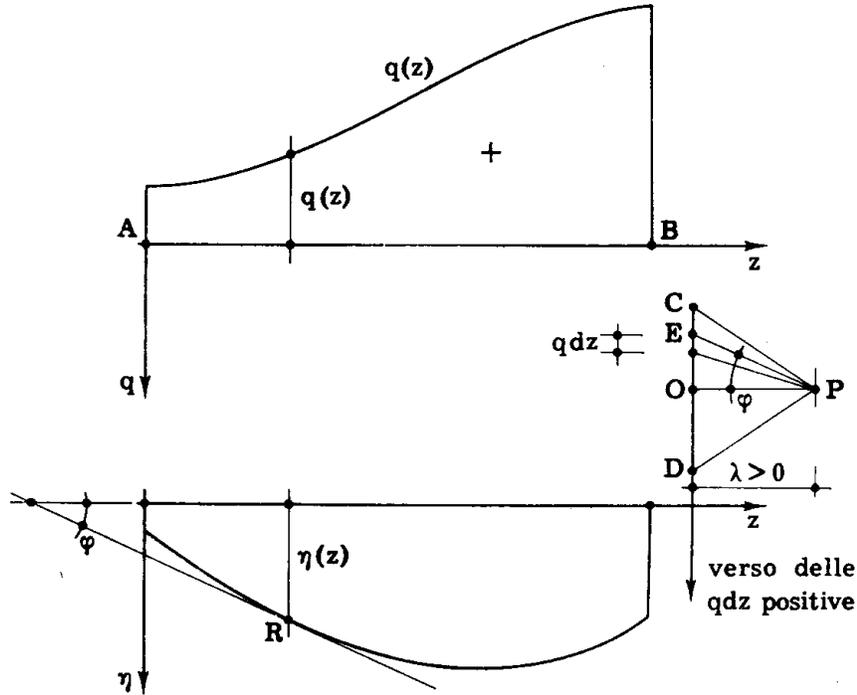


FIG. 7-14

ηz con l'asse z parallelo all'asse della trave, e l'asse η parallelo alla direzione q del carico ed orientato nel verso delle q positive e cioè verso il basso; la *distanza polare* $OP = \lambda$ si misura secondo l'asse z , e con il segno del vettore OP . Se $\bar{\varphi}$ è l'angolo $\hat{z}t$ (letto nel disegno) che l'asse z forma con la tangente alla curva in un generico punto R si ha (il verso antiorario è positivo)

$$\operatorname{tg} \bar{\varphi} = - \frac{d\bar{\eta}}{d\bar{z}} . \quad (a)$$

Il segno di $\operatorname{tg} \hat{z}t$, come è noto, non dipende dal verso di z o di t . Dalla (a) si ricava, differenziando,

$$d \operatorname{tg} \bar{\varphi} = - \frac{d^2 \bar{\eta}}{d\bar{z}^2} d\bar{z} . \quad (b)$$

Poichè è

$$\operatorname{tg} \bar{\varphi} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OP}}$$

$$d \operatorname{tg} \bar{\varphi} = \frac{d(\overline{OE})}{\overline{OP}} = \frac{q \, dz}{\lambda} \frac{S_t}{S_F}, \quad (c)$$

(ad un aumento dz dell'ascissa corrisponde, se $q > 0$, una diminuzione del valore assoluto del segmento \overline{OE} , se E è al disopra di O , un aumento se è al disotto) dal confronto tra la (b) e la (c) si trae (*)

$$\frac{d^2 \bar{\eta}}{dz^2} \bar{\lambda} S_t S_F = -q. \quad (49)$$

Si osservi che la relazione (7-49) non varia se alla funzione $\eta(z)$ si somma una funzione lineare in z ; e cioè la (7-49) vale qualunque sia la fondamentale — anche inclinata — rispetto alla quale si misurano le ordinate η della curva fondamentale; la λ deve essere sempre valutata, però, normalmente alla direzione del carico.

Dal confronto della (7-49) con la (7-3) si trae che, a meno della fondamentale, le ordinate della curva funicolare, moltiplicate per la forza λ , coincidono con le ordinate del diagramma del momento flettente:

$$M = \bar{\eta} \bar{\lambda} S_t S_F. \quad (50)$$

L'ordinata η va letta nella scala delle lunghezze, λ in quella delle forze, o viceversa.

La scala S_F è quella secondo cui sono riportate le $q \, dz$ nel segmento

(*) La (7-49) è l'equazione della configurazione di un filo flessibile soggetto al tiro $\bar{\lambda} S_F$ ed ai carichi q ; di qui il nome curva funicolare. Il tiro λ (componente, presa normalmente alla direzione del carico, dello sforzo normale del filo) è positivo se il filo è teso. In tale ipotesi, e con riferimento alle quantità reali, la (7-49) si scrive

$$\frac{d^2 \eta}{dz^2} = -\frac{q}{\lambda}. \quad (49')$$

A volte λ si assume positiva se corrisponde ad una compressione, come nell'arco; in tal caso, nell'equazione della funicolare occorre cambiare segno al secondo membro

$$\frac{d^2 \eta}{dz^2} = \frac{q}{\lambda}. \quad (49'')$$

delle forze. Se sono presenti anche coppie distribuite, si costruisce il poligono di $q + m'$.

La costruzione della curva funicolare si esegue dividendo il diagramma $q(z)$ in strisce (fig. 7-15) mediante rette parallele alla direzione

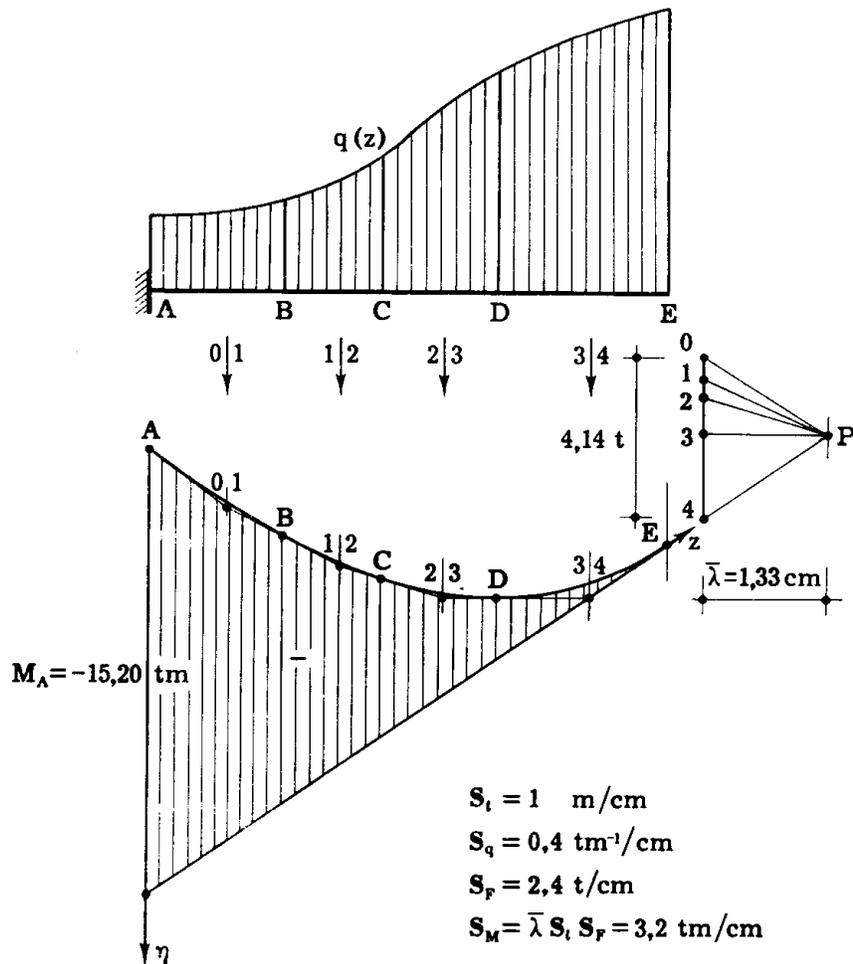


FIG. 7-15

del carico. Si valuta l'area di ogni striscia, che dimensionalmente è una forza; tali forze si fanno agire secondo la direzione del carico, e passanti per i baricentri delle singole strisce. Sia i valori delle forze che le posizioni dei baricentri si possono ottenere con buona approssimazione considerando le strisce come rettangoli o, meglio, come trapezi. Si costruisce la punteggiata delle forze $0 \cdot 1$, $1 \cdot 2$, $2 \cdot 3$ etc., e poi il poligono funicolare, utilizzando un qualsiasi polo P; come è noto dalla statica grafica, la curva funicolare effettiva ha in comune con il poligono così costruito sia i punti (ABCDE) che le tangenti in corrispondenza delle rette dividenti il diagramma $q(z)$ in strisce. La fondamentale, o le fondamentali, si ottengono dalle condizioni di vincolo.

Nel caso della fig. 7-15 in E è nullo sia il momento M che la sua derivata $\frac{dM}{dz}$; si trae che la fondamentale passa per E ed è ivi tangente alla curva funicolare.

Il momento M è una funzione continua di z se non sono presenti coppie concentrate; la derivata è una funzione continua di z se non sono presenti forze concentrate. La presenza di una coppia concentrata si risente con un salto nel diagramma $M(z)$, la presenza di una forza concentrata si risente invece con un salto nel diagramma $T(z)$ del taglio, e con un punto angoloso nel diagramma $M(z)$ (*).

Se delle forze e delle coppie si è tenuto conto nel tracciare la curva funicolare, la fondamentale del diagramma del momento è unica; in caso contrario le fondamentali sono tante quanti i tratti compresi fra due successive forze o coppie concentrate. Delle forze o coppie applicate si tiene in genere conto nel tracciamento del poligono funicolare; di quelle di reazione invece non si può tener conto in tale sede, non essendo esse preventivamente note. Le fondamentali sono in tal caso tante quanti sono i tratti compresi fra due successive reazioni vincolari esterne; esse si tracciano con sole considerazioni di statica, se il sistema è isostatico, e da esse si può risalire alla conoscenza delle reazioni di vincolo.

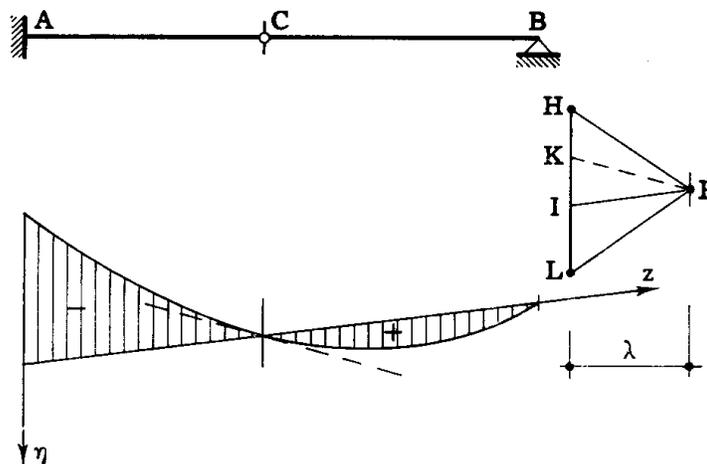


FIG. 7-16

Nelle figg. 7-16 e 7-17 è riportata la stessa trave della fig. 7-15, soggetta agli stessi carichi, ma diversamente vincolata. La curva funicolare è quindi la stessa

(*) Si ricordi che se ad una parte di carico se ne sostituisce un'altra equivalente (anche concentrata) la curva funicolare varia soltanto nel tratto interessato dalla sostituzione. Ciò permette di tracciare la curva funicolare anche in presenza di forze o coppie concentrate, in contrasto quindi con la (7-49), poiché queste possono intendersi come equivalenti ad un carico q continuo agente in una zona ristretta; non c'è ovviamente bisogno di precisare nè la legge del carico nè l'estensione del tratto elementare di sostituzione.

della fig. 7-15. Nel caso della fig. 7-16 la fondamentale è ancora unica, perchè non esistono vincoli intermedi che introducano una reazione esterna; essa si ottiene considerando che in C e in B il momento è nullo. Le reazioni in A e B si ottengono conducendo da P la parallela PI alla fondamentale; è $R_B = LI$, $R_A = IH$; e cioè ogni reazione è definita, sulla punteggiata delle forze, dalle parallele alle due tangenti della cuspidi che si incontra nella curva funicolare in corrispondenza delle reazioni stesse. Infatti così sia il poligono delle forze che quello funicolare relativi ai carichi ed alle reazioni sono chiusi, e sono soddisfatte le condizioni necessarie e sufficienti perchè carichi e reazioni siano in equilibrio; dalla condizione che il poligono delle forze sia chiuso si trae anche il verso delle reazioni, che sono nel caso in esame dirette verso l'alto se considerate agenti sulla trave.

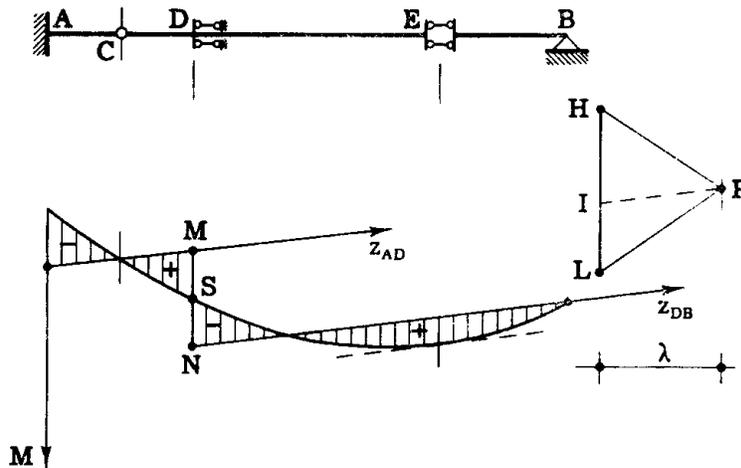


FIG. 7-17

L'interazione in C è fornita da $R_C = KI$, essendo K il punto dove la parallela per P alla tangente in C alla curva funicolare incontra la punteggiata delle forze; infatti R_C , R_B ed i carichi agenti su CB devono farsi equilibrio, e perchè ciò avvenga è necessario e sufficiente che i loro poligoni delle forze e funicolari siano chiusi; il verso della R_C considerata agente sulla trave CB è quello che chiude il poligono KL delle forze, e quindi tale reazione è diretta, nel caso in esame, verso l'alto. Nel caso della fig. 7-17 il vincolo D introduce una coppia reattiva esterna, e perciò le fondamentali sono due, una z_{AD} relativa al tratto AD, l'altra z_{DB} relativa al tratto DB. Le due fondamentali sono sfalsate ma parallele, perchè il vincolo in D introduce una coppia, ma non una forza, e quindi suscita nel diagramma di M una discontinuità di primo ordine, e nessuna discontinuità di secondo ordine. La fondamentale z_{DB} si ottiene considerando che il vincolo in E

impone che in A sia nullo il taglio, e cioè la $\frac{dM}{dz}$; quindi la z_{DB} è parallela

alla tangente in E alla curva funicolare; poichè inoltre la z_{DB} deve incontrare la curva funicolare in corrispondenza dell'estremo B, ove il momento è nullo, essa è definita. La z_{AD} è parallela alla z_{DB} , come già detto, e deve tagliare la curva funicolare in corrispondenza di C, ove il momento è nullo; essa pure è perciò definita. Le reazioni in A e B sono fornite da $R_B = LI$, $R_A = IH$, essendo I l'intersezione della punteggiata delle forze con la parallela condotta per P alle

due fondamentali. La coppia reattiva in D è fornita da MN; di essa la parte MS interessa la sezione a sinistra di D, la parte SN la sezione a destra. Sia MS che SN, considerate agenti sulla trave, sono antiorarie, come si deduce dai segni dei diagrammi dei momenti; la \mathcal{M}_D agente sulla trave è perciò antioraria, e dei due pendoli costituenti il vincolo il superiore è compresso, l'inferiore è teso.

Nella fig. 7-18 è riportato il caso in cui una forza 2-3 agisce sulla trave attraverso un braccio; il poligono funicolare si traccia connettendo le forze nell'ordine

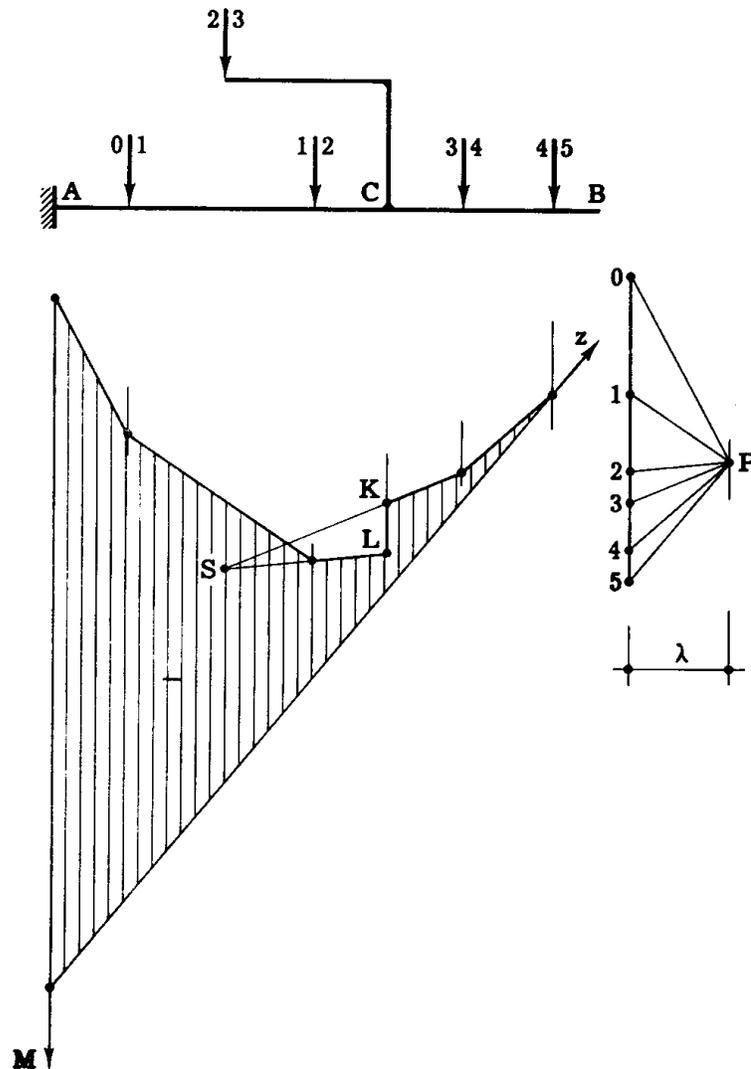


FIG. 7-18

secondo cui esse interessano la trave, e perciò prima la 0-1 e la 1-2, poi la 2-3, e infine la 3-4 e la 4-5. Così in corrispondenza di C si ha la discontinuità del primo ordine KL, cui corrisponde la coppia $KL \cdot \lambda$ pari al momento della 2-3 rispetto a C, e la discontinuità del secondo ordine costituita dall'angolo che formano tra loro la SK e la SL, le cui parallele per P definiscono sulla punteggiata delle forze proprio la forza 2-3.

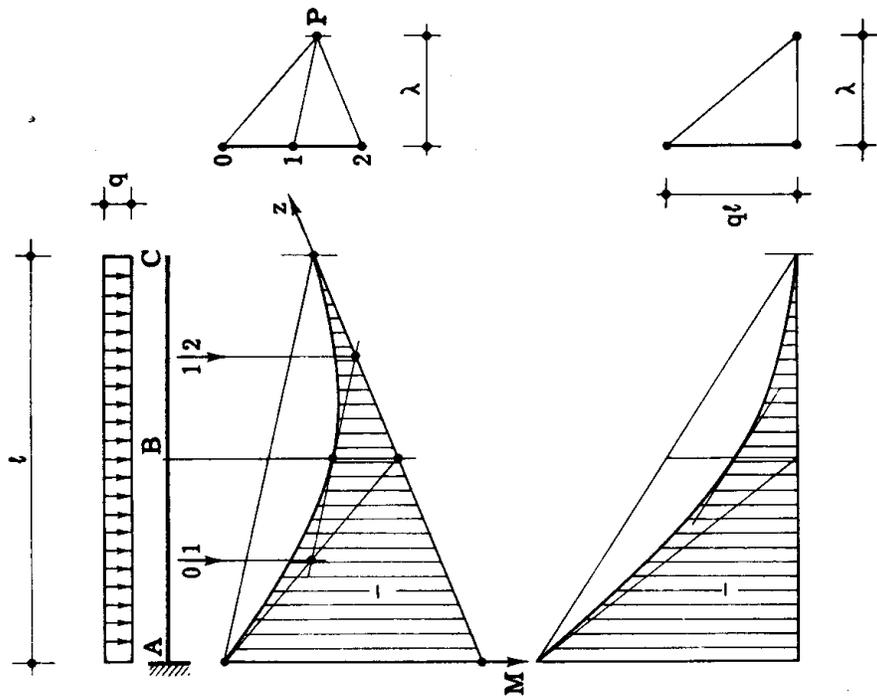


FIG. 7-20

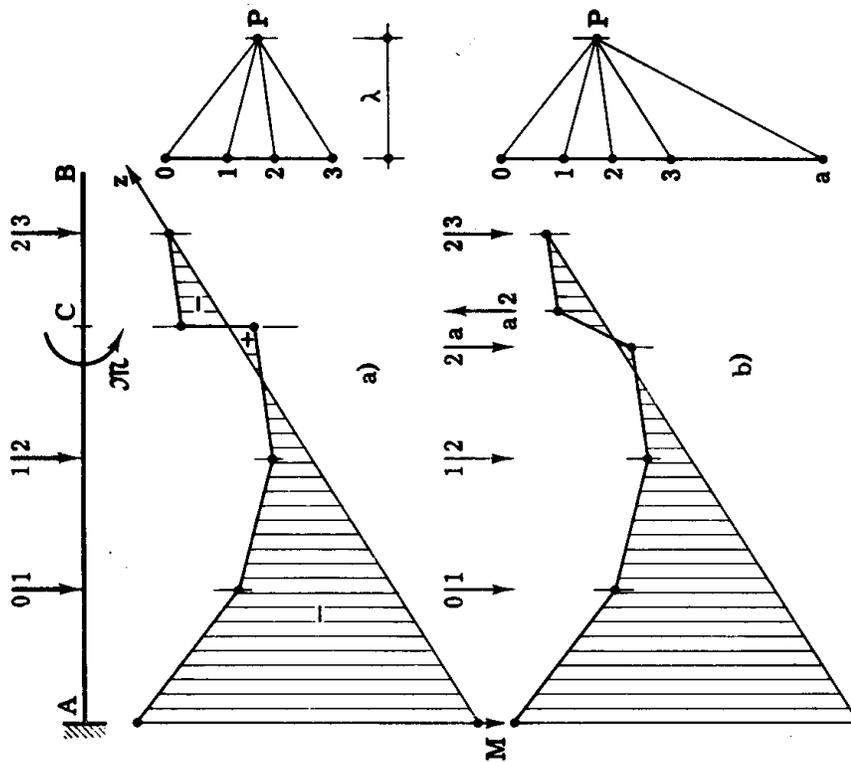


FIG. 7-19

Nella fig. 7-19 è riportato il caso in cui agisce una coppia \mathcal{M} in una sezione C; di essa si tiene conto nel poligono funicolare tracciando quest'ultimo come se la coppia non esistesse, e traslando poi verticalmente la sua parte di destra di un segmento pari ad \mathcal{M} .

Se \mathcal{M} è antioraria, e l'asse M è diretto verso il basso, la parte di destra trasla, come già detto, verso l'alto; di ciò ci si rende anche conto considerando (fig. 7-19 b) la coppia come costituita da due forze uguali e contrarie molto vicine, 2-a ed a-2.

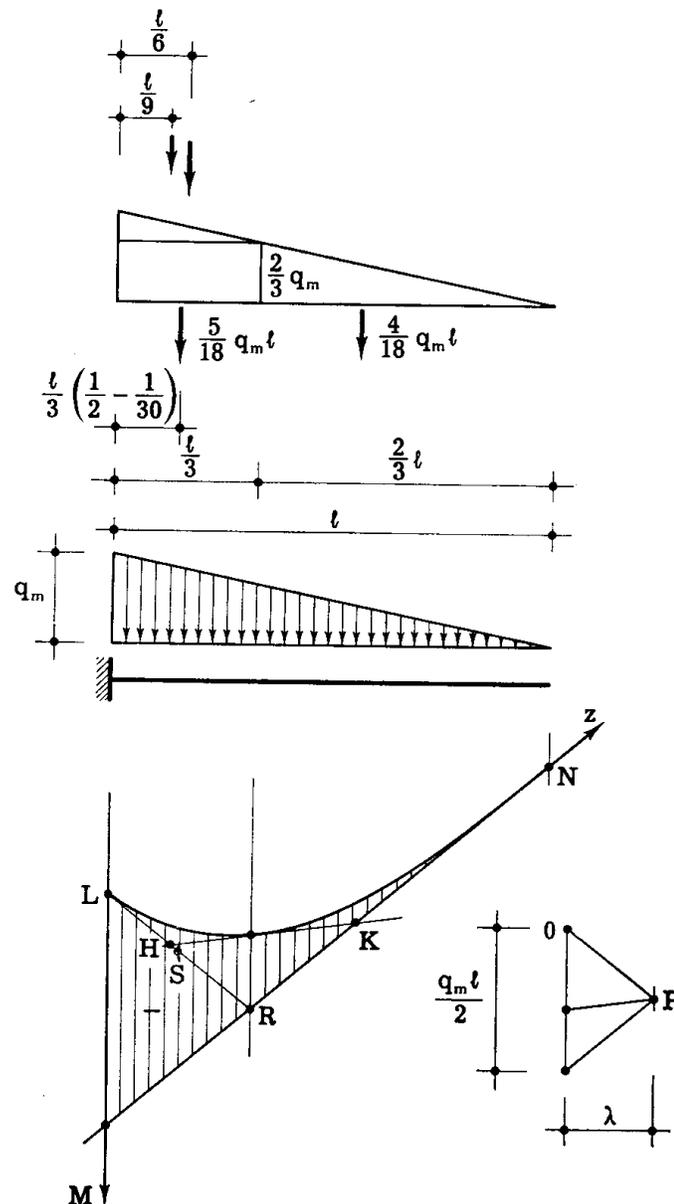


FIG. 7-21

Attraverso il procedimento della curva funicolare si ritrovano le proprietà dei diagrammi del momento flettente già enunciate con riferimento al carico uniformemente ripartito (fig. 7-20) e al carico triangolare (fig. 7-21). Per que-

st'ultimo caso si osserva come la tangente al diagramma in corrispondenza del baricentro del carico si ottenga congiungendo i due punti HK; K è il punto più vicino ad R dei due punti trisecanti il segmento RN, H invece si trova, rispetto alla mezzeria S del segmento LR, più lontana da R di $\frac{LR}{30}$.

Se si traccia il diagramma del momento attraverso il procedimento della curva funicolare, occorre determinare, sfruttando il diagramma del momento, le reazioni vincolari, e poi tracciare il diagramma del taglio.

4. La ricerca della linea elastica: il metodo di Saviotti, o delle quattro integrazioni.

Dalla (7-6) si trae, tenendo conto del solo effetto flettente, ed in assenza di distorsioni,

$$\varphi(z) = \varphi_a + \int_a^z \frac{M}{EI} dz \quad (51)$$

e dalla (7-4)

$$v(z) = v_a - \int_a^z \varphi dz, \quad (52)$$

dove φ_a e v_a sono i valori della rotazione e dell'abbassamento in corrispondenza della ascissa $z = a$.

Le (7-51) e (7-52) hanno, con segni invertiti, la stessa struttura delle (7-37) e (7-38); dal diagramma M/EI si passa quindi a $-\varphi$, e da $-\varphi$ a v come dal diagramma q si passa a T , e da T ad M ; e cioè dal diagramma delle *curvature* M/EI (considerate positive se M è positivo) si passa a quello delle rotazioni φ mediante un'integrazione, e dal diagramma delle rotazioni φ si passa a quello degli spostamenti v mediante un'altra integrazione. Poichè dal diagramma q al diagramma v si perviene attraverso quattro integrazioni, il procedimento prende nome di *metodo delle quattro integrazioni*; ad esso si associa il nome di *Saviotti* (*).

(*) Dalla (7-17) si ha, in generale,

$$\varphi' = -v'' = \frac{M}{EI} - \left(\chi \frac{T}{GA} \right)' - \mu + \vartheta'$$

da cui

$$\varphi(z) = \varphi_a + \int_a^z \left(\frac{M}{EI} - \mu \right) dz - \chi \frac{T}{GA} + \vartheta.$$

Il diagramma φ si ottiene perciò integrando tutta la funzione in parentesi; da φ si passa poi, con una seconda integrazione, al diagramma v .

Le operazioni possono essere condotte analiticamente o graficamente. Se il calcolo è analitico, occorre che il momento flettente sia assegnato univocamente, e non a meno di costanti, prima di procedere alla sua integrazione; se il calcolo è grafico, occorre che il diagramma del momento

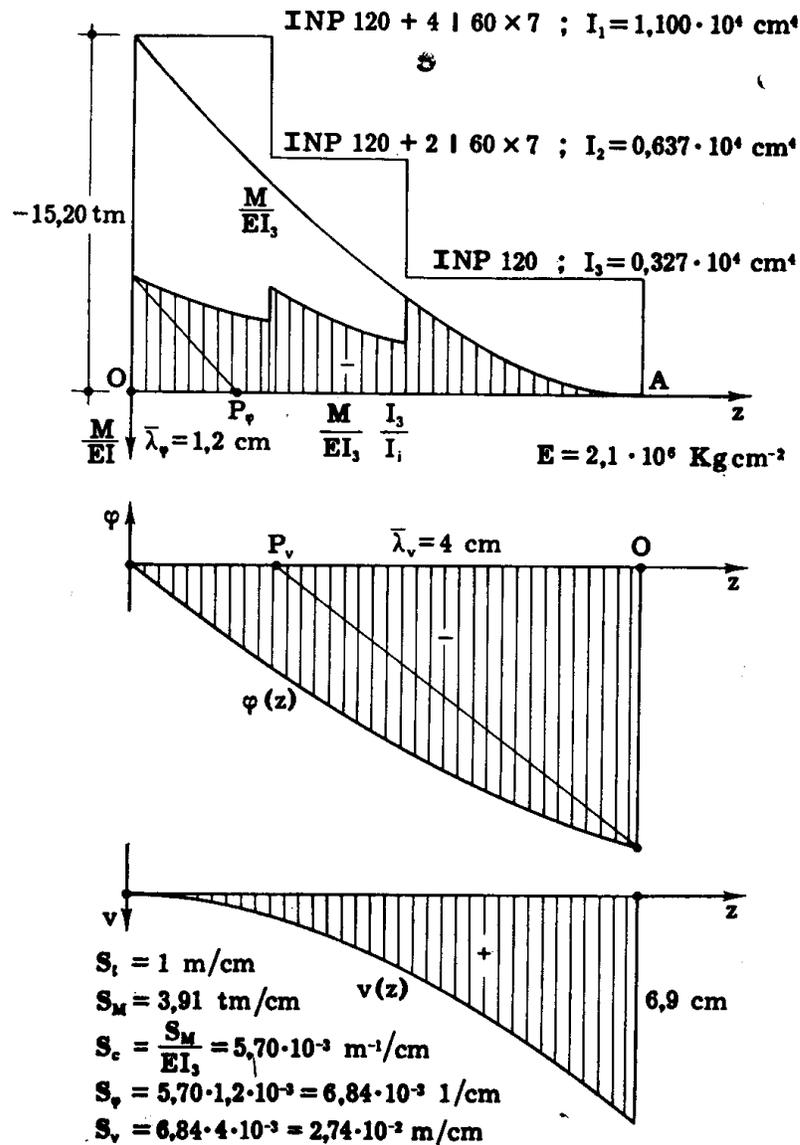


FIG. 7-22

sia assegnato a partire da una fondamentale orizzontale.

Tutto quanto detto a proposito di q , T ed M può ripetersi, segno compreso, a proposito di $\frac{M}{EI}$, $-\varphi$ e v . Nel calcolo grafico, poichè l'asse delle $\frac{M}{EI}$ si trova orientato verso il basso, prendendo P_φ a destra di O (fig. 7-22) l'asse delle φ risulta orientato verso l'alto. Se si assumesse

anche P_v a destra di O , l'asse delle v risulterebbe orientato verso l'alto; in genere si assume P_v a sinistra di O in modo che l'asse delle v (asse y) è orientato verso il basso.

La scala S_φ del diagramma φ è fornita da quella S_c del diagramma delle curvature (S_c ha le dimensioni di m^{-1}/cm) moltiplicata per la distanza OP_φ letta nella scala delle lunghezze, ed ha le dimensioni $1/cm$. La scala

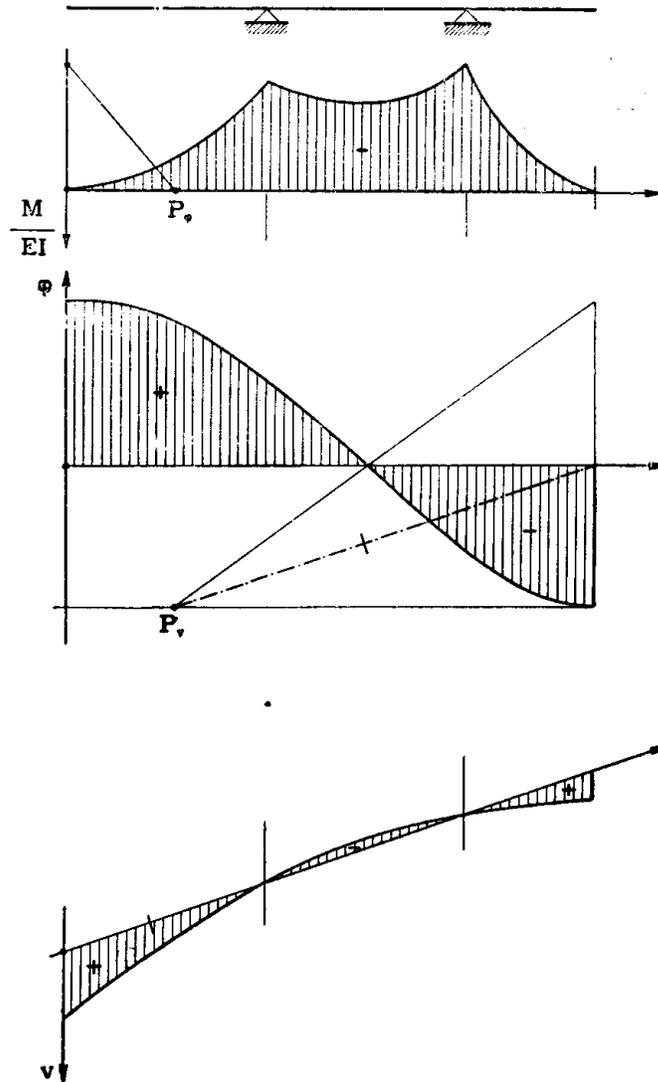


FIG. 7-23

S_v del diagramma v è fornita da S_φ moltiplicata per la distanza OP_v letta nella scala delle lunghezze, ed ha le dimensioni m/cm .

In alcuni casi (fig. 7-22) la fondamentale del diagramma φ è determinabile prima di conoscere il diagramma degli spostamenti, perchè è noto il valore di φ in una sezione. In altri casi invece (figg. 7-23 e 7-24) è necessario integrare il diagramma delle rotazioni assumendo una fonda-

mentale arbitraria, tracciare la fondamentale o le fondamentali del diagramma degli spostamenti (*), e da queste risalire alla fondamentale o alle fondamentali del diagramma delle rotazioni. Se la trave non ha cerniere (fig. 7-23) la funzione $v(z)$ non ha discontinuità, perciò la fondamentale

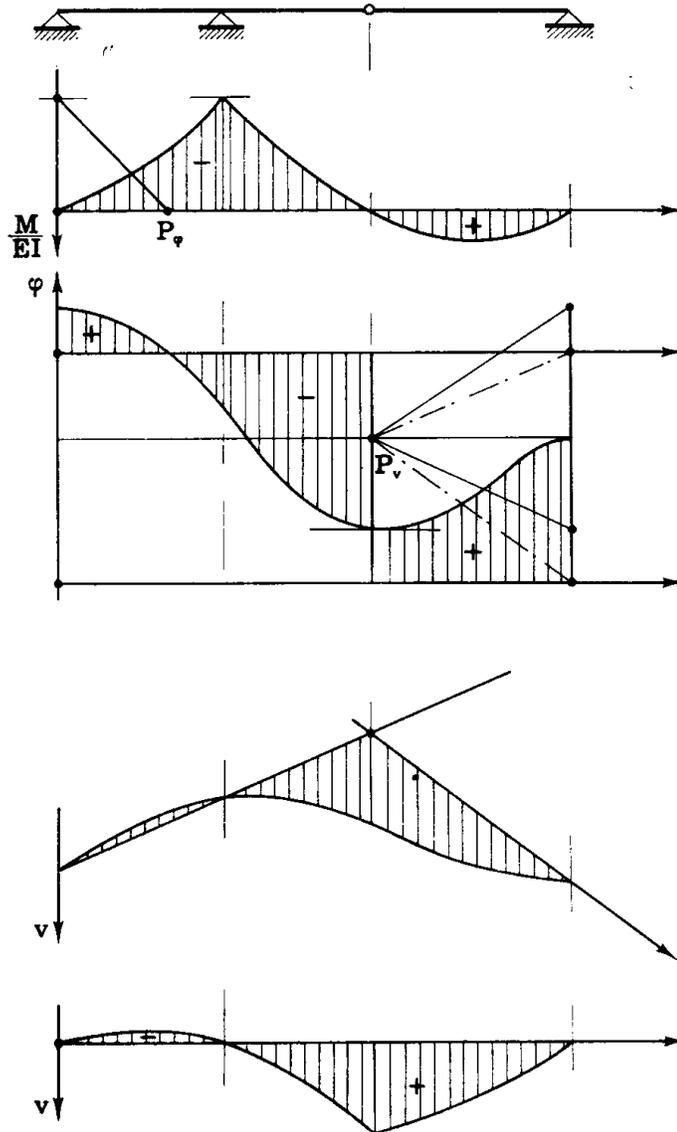


FIG. 7-24

del diagramma v è unica; se invece la trave ha i cerniere (fig 7-24) la funzione $v(z)$ presenta i discontinuità di ordine due, e perciò le fondamentali sono $i + 1$. Nel primo caso la fondamentale del diagramma φ è pur

(*) Si osservi che in ogni caso, analogamente a quanto già detto per il diagramma momenti, queste fondamentali si possono tracciare ignorando quelle di φ .

essa unica, nel secondo caso invece le fondamentali sono $i + 1$, tutte orizzontali, e perciò in corrispondenza di ogni cerniera il diagramma φ presenta una discontinuità di ordine uno.

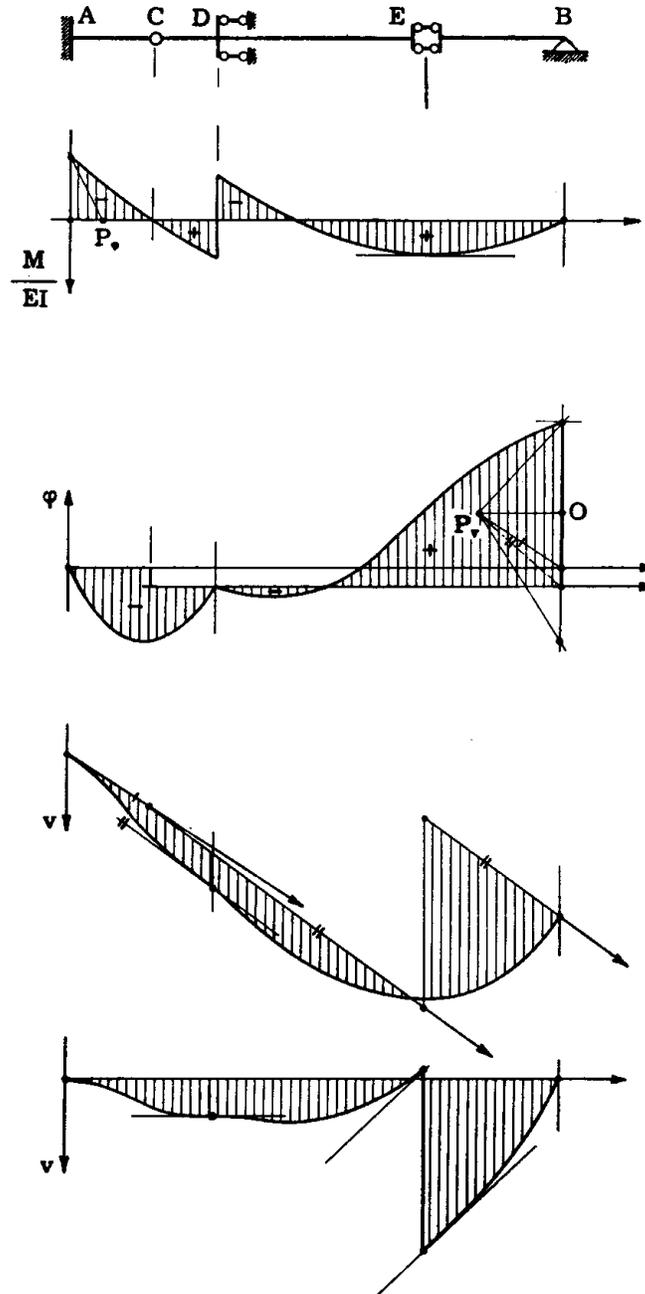


FIG. 7-25

Quanto detto fin qui in relazione agli appoggi e alle cerniere è però valido in presenza di qualsiasi tipo di vincolo o di snodo; per esempio nella trave della fig 7-25 (fig. 7-17) integrato il diagramma $\frac{M}{EI}$ si inte-

gra di nuovo il diagramma così ottenuto assumendo un'arbitraria fondamentale OP_v . Il secondo diagramma integrale (diagramma v) ha tre fondamentali, relative ai tratti AC, CE ed EB; infatti in C e in E la v ammette una discontinuità di ordine rispettivamente due e uno. La fondamentale relativa al tratto AC è la tangente in A alla curva v , poichè in A la rotazione è zero. La fondamentale relativa al tratto CE incontra la prima sulla verticale per C, ed è parallela alla tangente alla curva v condotta in corrispondenza della verticale per D; in D infatti la rotazione è ancora nulla. La fondamentale relativa al tratto EB incontra la curva v sotto B, ed è parallela alla seconda fondamentale; infatti in E le rotazioni delle sezioni a destra ed a sinistra del vincolo sono uguali. Tracciate le tre fondamentali del diagramma v , si ottengono quelle del diagramma φ (che si riducono a due, perchè in E le due rotazioni sono uguali) conducendo da P_v le parallele alle prime tre. Si osservi che la fondamentale del diagramma φ relativa al tratto AC poteva anche tracciarsi prima di integrare una seconda volta; infatti è noto che in A risulta $\varphi=0$. Scegliendo P_v sulla fondamentale di φ relativa al tratto AC, la fondamentale di v relativa allo stesso tratto vien fuori orizzontale.

Si noti che, quando il diagramma v ha più fondamentali, è utile ridurre il diagramma stesso ad una fondamentale unica, per una migliore visione della linea elastica; è quanto si è fatto nelle figg. 7-24 e 7-25.

Il procedimento esposto si usa per le travi isostatiche ed iperstatiche; la differenza tra i due casi gioca nella costruzione del diagramma M, non nella generazione di v da M. Se la trave è isostatica, occorre far ricorso a tutti i vincoli e snodi per ottenere le fondamentali di v , e un eventuale errore nel disegno di M passa inosservato; se invece la trave è iperstatica, basta ricorrere solo ad alcuni dei vincoli e degli snodi per ottenere le fondamentali di v ; in tal caso la necessità che tali fondamentali rispettino gli altri vincoli e snodi costituisce una prova dell'esattezza di M. Si è trattato finora del procedimento grafico del Saviotti; esso però può seguirsi anche analiticamente, compatibilmente con le difficoltà connesse alla materiale esecuzione delle quadrature. Si riportano di seguito alcuni esempi semplici di calcolo analitico della linea elastica.

a) *Trave a mensola di sezione costante caricata da una coppia nell'estremo.*

Sia AB una trave rettilinea a sezione retta costante, incastrata in B, e caricata da una coppia \mathcal{M} in A (fig. 7-26). Si ha

$$M = - \mathcal{M}$$

e, dalla (7-51),

$$\varphi = \varphi_A - \frac{\mathcal{M}}{EI} \int_0^z dz = \varphi_A - \frac{\mathcal{M}z}{EI}$$

Per $z=l$ è $\varphi=0$, perciò si ha

$$\varphi_A = \frac{\pi l}{EI} \quad (53)$$

$$\varphi = \frac{\pi (l-z)}{EI} \quad (d)$$

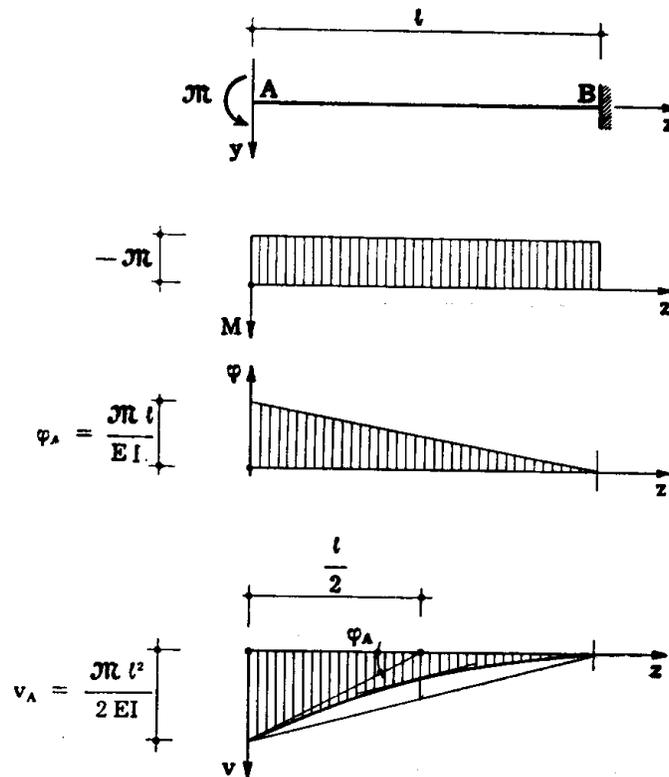


FIG. 7-26

Dalla (7-52), per la (d), si ha poi

$$v = v_A - \frac{\pi}{EI} \int_0^z (l-z) dz = v_A - \frac{\pi}{EI} \left(lz - \frac{z^2}{2} \right).$$

Poichè per $z=l$ è $v=0$, si ha

$$v_A = \frac{\pi l^2}{2 EI} \quad (54)$$

$$v = \frac{\pi}{2 EI} (l-z)^2 \quad (e)$$

b) *Trave a mensola di sezione costante caricata da una forza nell'estremo.*

Si ha (fig. 7-27)

$$M = - Fz$$

$$\varphi = \varphi_A - \frac{F}{EI} \int_0^z z \, dz = \varphi_A - \frac{Fz^2}{2EI};$$

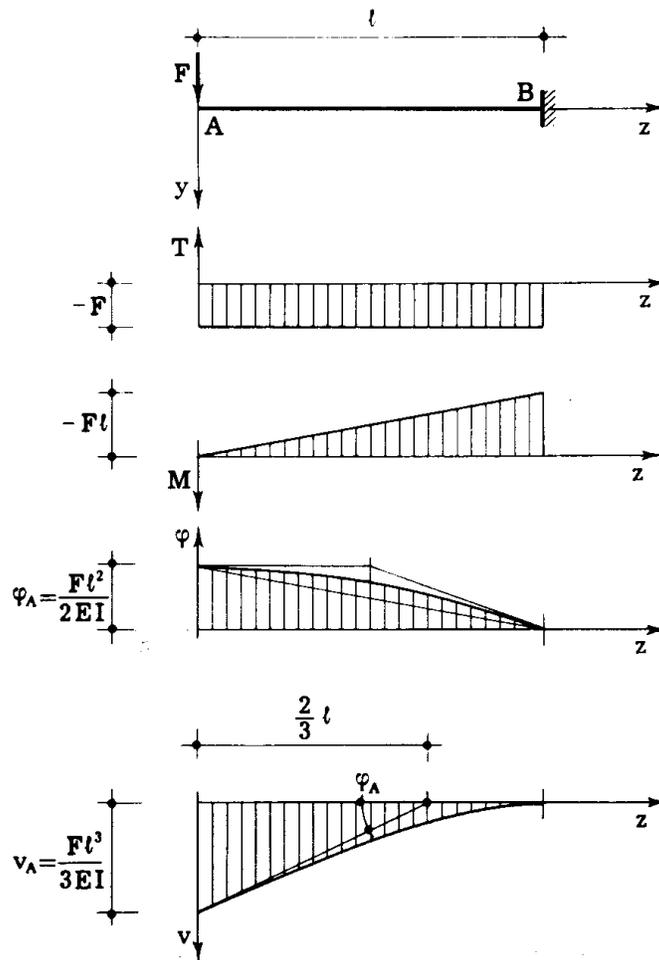


FIG. 7-27

per $z=l$ è $\varphi=0$, perciò si ha

$$\varphi_A = \frac{Fl^2}{2EI}$$

$$\varphi = \frac{F}{2EI} (l^2 - z^2).$$

(55)

Si ottiene poi

$$v = v_A - \frac{F}{2 EI} \int_0^z (\ell^2 - z^2) dz = v_A - \frac{F}{2 EI} \left(\ell^2 z - \frac{z^3}{3} \right);$$

poichè per $z = \ell$ è $v = 0$, si ha

$$v_A = \frac{F \ell^3}{3 EI} \quad (56)$$

$$v = \frac{F}{6 EI} (2 \ell^3 - 3 \ell^2 z + z^3). \quad (f)$$

La (f) è una parabola cubica.

c) *Trave a mensola di sezione costante soggetta ad un carico uniformemente distribuito.*

Il momento flettente è fornito (fig. 7-28, for. 7-43) da

$$M = -q \frac{z^2}{2}$$

Si trae perciò

$$\varphi = \varphi_A - \frac{q}{2 EI} \int_0^z z^2 dz = \varphi_A - \frac{qz^3}{6 EI};$$

per $z = \ell$ $\varphi = 0$, e perciò si ottiene

$$\varphi_A = \frac{q \ell^3}{6 EI} \quad (57)$$

$$\varphi = \frac{q}{6 EI} (\ell^3 - z^3).$$

Si ha poi

$$v = v_A - \frac{q}{6 EI} \int_0^z (\ell^3 - z^3) dz = v_A - \frac{q}{6 EI} \left(\ell^3 z - \frac{z^4}{4} \right);$$

poichè per $z=l$ è $v=0$, si ha

$$v_A = \frac{ql^4}{8EI} \quad (58)$$

$$v = \frac{q}{24EI} (3l^4 - 4l^3z + z^4) . \quad (g)$$

La (g) è una parabola del quarto grado.

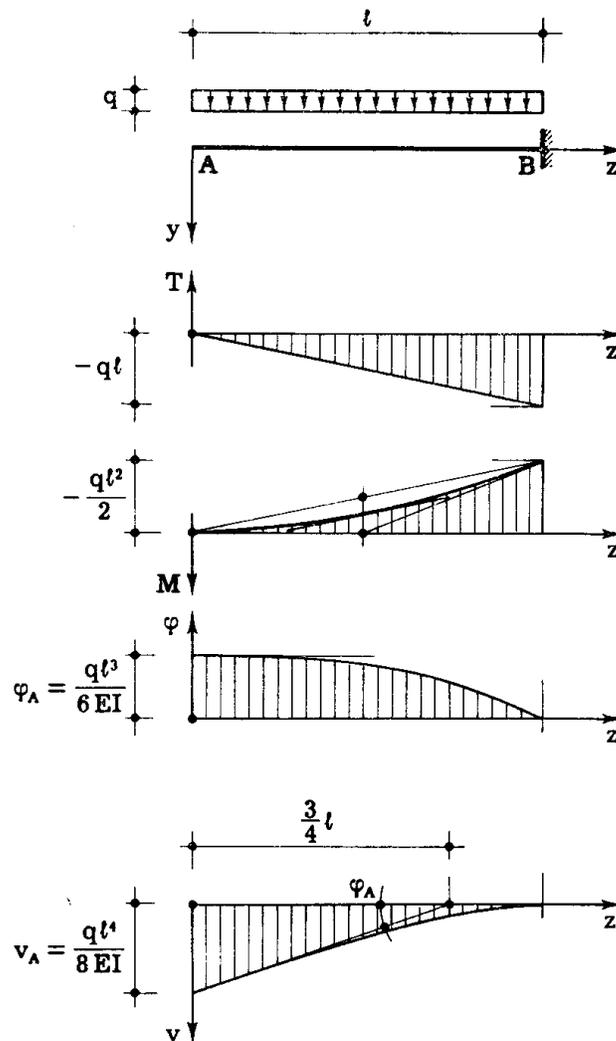


FIG. 7-28

d) *Trave di sezione costante appoggiata agli estremi e soggetta ad un carico uniformemente distribuito.*

Il momento flettente (fig. 7-29, for. 7-44) è fornito da

$$M = \frac{q}{2} z (l - z) ;$$

si ha quindi

$$\varphi = \varphi_A + \frac{q}{2EI} \int_0^z z(l-z) dz = \varphi_A + \frac{q}{2EI} \left(l \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right),$$

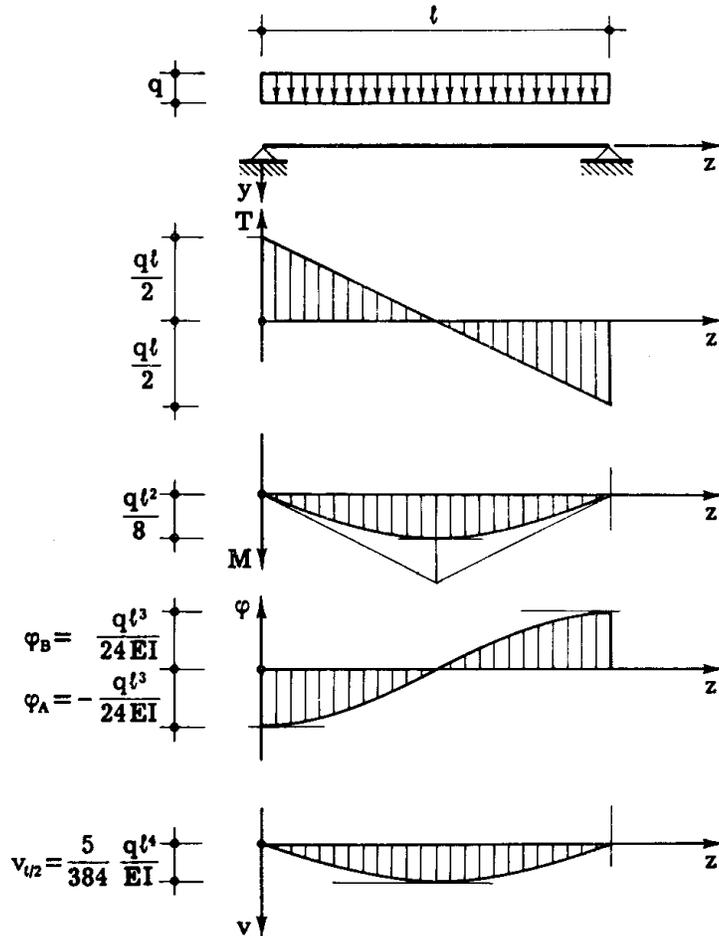


FIG. 7-29

e ancora

$$\begin{aligned} v &= v_A - \varphi_A z - \frac{q}{2EI} \int_0^z \left(l \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right) dz = \\ &= v_A - \varphi_A z - \frac{q}{2EI} \left(l \frac{z^3}{6} - \frac{z^4}{12} \right). \end{aligned}$$

Per $z=0$ e $z=l$ è $v=0$; e cioè è

$$\begin{aligned} v_A &= 0 \\ \varphi_A &= - \frac{ql^3}{24EI}. \end{aligned} \quad (59)$$

Si ha quindi

$$v = \frac{q}{24 EI} (\ell^3 z - 2 \ell z^3 + z^4); \quad (h)$$

il valore massimo di v si ha per $z = \ell/2$, e vale

$$v_{\max} = \frac{5}{384} \frac{q \ell^4}{EI}. \quad (60)$$

e) *Trave di sezione costante appoggiata agli estremi e soggetta ad una forza concentrata.*

La forza F agisca in corrispondenza della sezione S ; la funzione $M(z)$ è fornita da due diverse espressioni nel tratto AS e in quello SB :

$$\text{tratto AS} \quad M = \frac{Fb}{\ell} z$$

$$\text{tratto SB} \quad M = \frac{Fa}{\ell} (\ell - z).$$

Conviene utilizzare per il tratto AS il riferimento cartesiano y, z , con l'origine in A , e l'asse z diretto secondo AS , e per il tratto SB il riferimento y', z' , con l'origine in B , e l'asse z' diretto secondo BS (fig. 7-30). Si ha così per il tratto AS , al solito (for. 7-51 e 7-52),

$$M = \frac{Fb}{\ell} z$$

$$\varphi = \varphi_A + \frac{Fbz^2}{2 \ell EI}$$

$$v = - \varphi_A z - \frac{Fbz^3}{6 \ell EI};$$

infatti è $v_A = 0$. Per il tratto BS le formule (7-51) e (7-52), restano invariate, ma atteso l'orientamento degli assi la φ deve considerarsi positiva se oraria.

Si ha quindi

$$\varphi = \varphi_a - \int_a^{z'} \frac{M}{EI} dz'$$

$$v = v_a + \int_a^{z'} \varphi dz' .$$

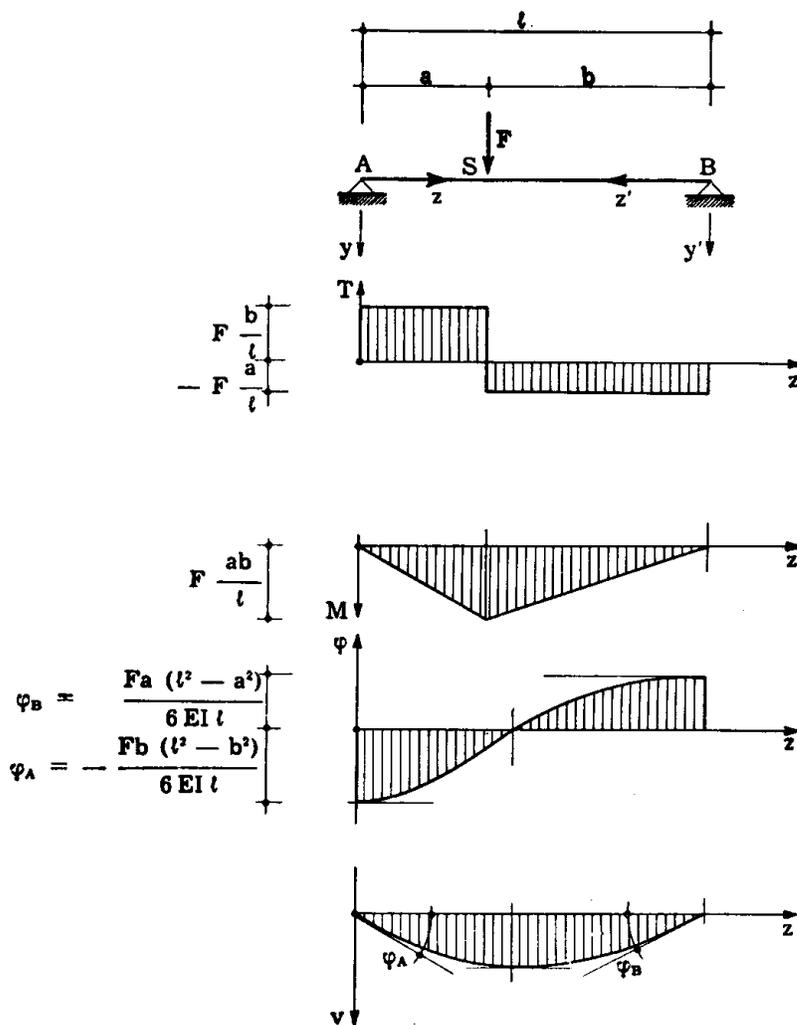


FIG. 7-30

Può perciò scriversi

$$M = \frac{Fa}{l} z'$$

$$\varphi = \varphi_B - \frac{Faz'^2}{2lEI}$$

$$v = \varphi_B z' - \frac{Faz'^3}{6lEI} .$$

In S ($z = a$, $z' = b$) deve essere

$$\varphi_{\text{sin}} = \varphi_{\text{des}}$$

$$v_{\text{sin}} = v_{\text{des}} ;$$

è perciò

$$\begin{aligned} \varphi_A + \frac{Fba^2}{2lEI} - \varphi_B + \frac{Fab^2}{2lEI} &= 0 \\ \varphi_A a + \frac{Fba^3}{6lEI} + \varphi_B b - \frac{Fab^3}{6lEI} &= 0 \end{aligned} \quad (i)$$

da cui si trae

$$\varphi_B = - \frac{Fab}{6l^2EI} (a^2 - b^2 - 3al) .$$

Con facili sostituzioni si ha infine (*)

$$\varphi_B = \frac{Fa}{6lEI} (l^2 - a^2) . \quad (61)$$

Dalla prima delle (i) si trae pure

$$\varphi_A = - \frac{Fb}{6lEI} (l^2 - b^2) . \quad (62)$$

Per il tratto AS si ha quindi

$$v = \frac{Fb}{6lEI} (l^2z - b^2z - z^3)$$

e per il tratto SB

$$v = \frac{Fa}{6lEI} [l^2(l-z) - a^2(l-z) - (l-z)^3] .$$

(*) Si verifica che

$$b(a^2 - b^2 - 3al) = -b^3 - 2a^2b - 3ab^2$$

$$l(a^2 - l^2) = -b^3 - 2a^2b - 3ab^2$$

e quindi

$$\frac{b}{l} (a^2 - b^2 - 3al) = - (l^2 - a^2) .$$

Se la forza F è applicata in mezzeria ($a = b$) si ha

$$\varphi_A = - \varphi_B = - \frac{F\ell^2}{16 EI} \quad (63)$$

$$v_{\ell/2} = v_{\max} = \frac{8}{384} \frac{F\ell^3}{EI} = \frac{F\ell^3}{48 EI} \quad (64)$$

Alle (7-61) e (7-62) si può giungere anche attraverso considerazioni cinematiche, sfruttando i risultati relativi alla mensola. Rispetto alla tangente in E alla linea elastica (fig. 7-31) gli spostamenti coincidono con quelli della mensola AS

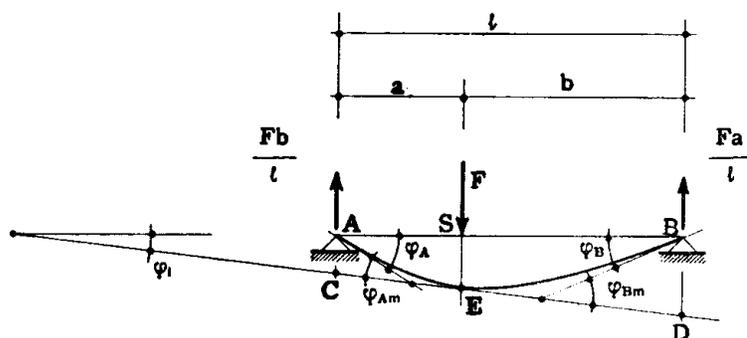


FIG. 7-31

incastrata in S e caricata in A dalla forza $F \frac{b}{\ell}$, e con quelli della mensola BS incastrata in S e caricata in B dalla forza $F \frac{a}{\ell}$. I segmenti AC e BD sono forniti da

$$AC = \frac{Fba^3}{3 \ell EI} \quad ; \quad BD = \frac{Fab^3}{3 \ell EI} ,$$

e perciò la rotazione della CD rispetto alla direzione AB è fornita da (gli angoli si confondono con le tangenti trigonometriche)

$$\varphi_1 = - \frac{BD - AC}{\ell} = \frac{Fab (a^2 - b^2)}{3 \ell^2 EI} .$$

Le rotazioni di A e B rispetto alla sezione S, e cioè le inclinazioni delle tangenti alla linea elastica in A e B sulla CD, sono fornite da

$$\varphi_{Am} = - \frac{Fba^2}{2 \ell EI} \quad ; \quad \varphi_{Bm} = \frac{Fab^2}{2 \ell EI} .$$

E' perciò

$$\varphi_A = \varphi_{Am} + \varphi_1 = \frac{Fab}{6EI\ell^2} (-3a\ell + 2a^2 - 2b^2) = -\frac{Fb}{6EI\ell} (\ell^2 - b^2)$$

$$\varphi_B = \varphi_{Bm} + \varphi_1 = \frac{Fab}{6EI\ell^2} (3b\ell + 2a^2 - 2b^2) = \frac{Fa}{6EI\ell} (\ell^2 - a^2)$$

f) *Trave di sezione costante appoggiata agli estremi e soggetta ad una coppia concentrata.*

La coppia \mathcal{N} agisca (fig. 7-32) in corrispondenza della sezione S; la

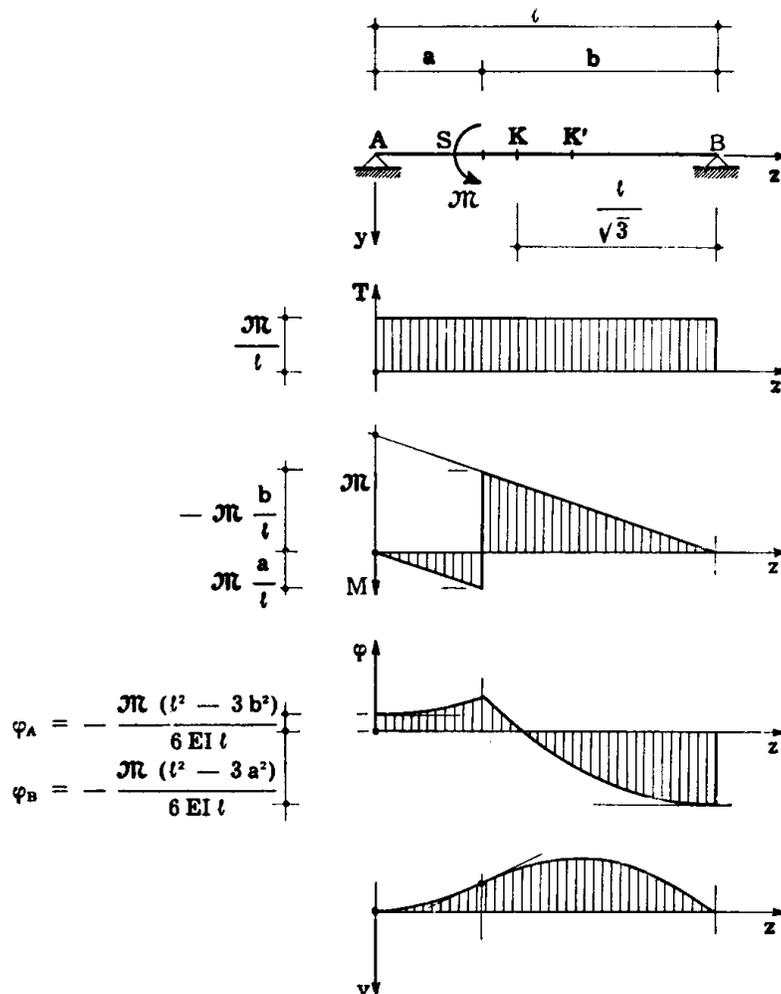


FIG. 7-32

funzione $M(z)$ è fornita da due diverse espressioni nel tratto AS e in quello SB:

tratto AS

$$M = \frac{\mathcal{N}}{\ell} z$$

tratto SB

$$M = - \frac{\mathcal{N}}{l} (l - z) .$$

Utilizzando lo stesso doppio riferimento dell'esempio precedente si ha:
tratto AS

$$M = \frac{\mathcal{N}}{l} z$$

$$\varphi = \varphi_A + \frac{\mathcal{N} z^2}{2 l EI}$$

$$v = - \varphi_A z - \frac{\mathcal{N} z^3}{6 l EI}$$

tratto BS

$$M = - \frac{\mathcal{N}}{l} z'$$

$$\varphi = \varphi_B + \frac{\mathcal{N} z'^2}{2 l EI}$$

$$v = \varphi_B z' + \frac{\mathcal{N} z'^3}{6 l EI} .$$

In S deve essere

$$\varphi_{\text{sin}} = \varphi_{\text{des}}$$

$$v_{\text{sin}} = v_{\text{des}} ;$$

e quindi si ha

$$\varphi_A + \frac{\mathcal{N} a^2}{2 l EI} - \varphi_B - \frac{\mathcal{N} b^2}{2 l EI} = 0$$

$$\varphi_A a + \frac{\mathcal{N} a^3}{6 l EI} + \varphi_B b + \frac{\mathcal{N} b^3}{6 l EI} = 0 .$$

Dal sistema ora scritto si trae

$$\varphi_B = \frac{\mathcal{N}}{6 l^2 EI} (2 a^3 - 3 a b^2 - b^3)$$

$$\varphi_A = \frac{\mathcal{N}}{6 l^2 EI} (2 b^3 - 3 a^2 b - a^3)$$

e con facili passaggi

$$\varphi_A = \frac{\mathcal{M}}{6 l EI} (3 b^2 - l^2)$$

$$\varphi_B = \frac{\mathcal{M}}{6 l EI} (3 a^2 - l^2) .$$
(65)

Si osserva dalle (7-65) che possono darsi due casi. Se a e b sono ambedue minori di $l/\sqrt{3}$, e cioè se la sezione S ove è applicata la coppia è interna al segmento KK' ($AK' = BK = l/\sqrt{3}$), i due angoli φ_A e φ_B sono tutti e due di segno contrario a quello della coppia \mathcal{M} , e perciò le v sono dei due segni. Se invece S è compreso tra A e K (fig. 7-32), o fra K' e B , i due angoli φ_A e φ_B sono di segno opposto, e perciò le v sono tutte dello stesso

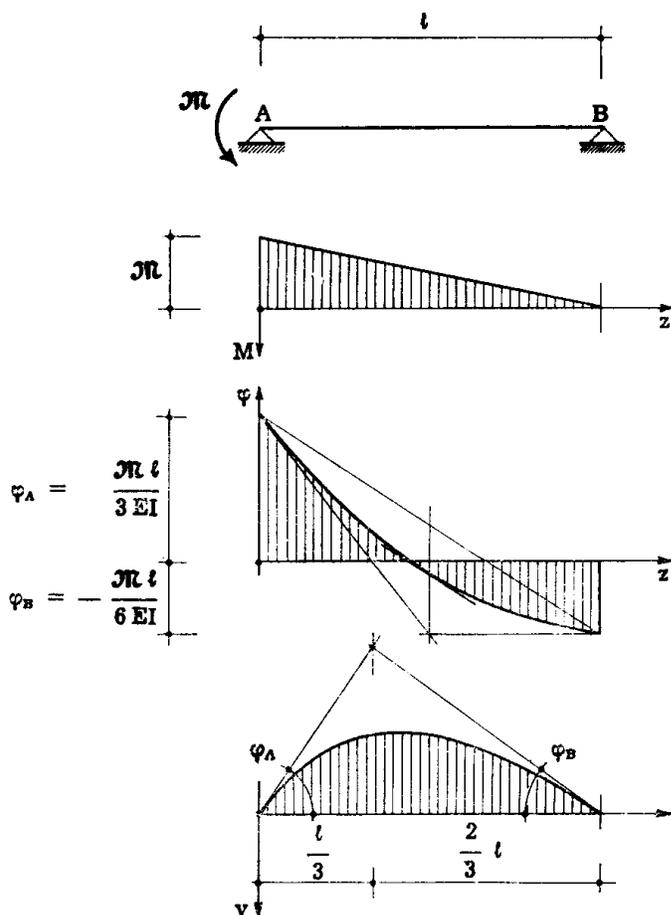


FIG. 7-33

seguo; se S è compresa tra A e K , φ_A è dello stesso segno di \mathcal{M} ; se S è compresa tra K' e B , è invece φ_B dello stesso segno di \mathcal{M} .

Se la coppia \mathcal{M} è applicata nell'estremo A (fig. 7-33) si ha

$$\varphi_A = \frac{\mathcal{M} l}{3 EI} \quad ; \quad \varphi_B = -\frac{\mathcal{M} l}{6 EI} .$$
(66)

5. La ricerca della linea elastica: il metodo dei due poligoni funicolari e i corollari di Mohr.

Dal confronto tra la (7-3) e la (7-17)

$$M'' = -q - m'$$

$$v'' = -\left(\frac{M}{EI} - \mu\right) - \left(\vartheta - \chi \frac{T}{GA}\right)'$$

si trae che la v coincide con il *momento fittizio* M^* dovuto ad un *carico fittizio*

$$q^* = \frac{M}{EI} - \mu \quad (67)$$

ed a *coppie distribuite fittizie*

$$m^* = -\chi \frac{T}{GA} + \vartheta. \quad (68)$$

Le dimensioni fisiche di q^* , m^* , M^* , sono $[l^{-1}]$ $[1]$ $[l]$, e cioè coincidono a meno di $[F]$ con quelle di q , m , M .

L'identità

$$v = M^* \quad (69)$$

è a meno di una funzione lineare in z ; le condizioni di congruenza in v coincidono con quelle in M^* , ma sono diverse da quelle in M , quindi deve ricorrersi ad una trave (*trave ausiliaria*) diversa da quella reale; della trave ausiliaria si parlerà subito appresso in dettaglio. Le condizioni di M^* sulla trave ausiliaria definiscono le fondamentali di M^* , e quindi di v , in modo univoco.

Dal confronto tra la (7-2) e la (7-4)

$$M' = T - m$$

$$v' = -\varphi$$

si trae

$$M^* = T^* - m^*$$

$$\varphi = -v' = -M^*$$

e quindi

$$\varphi = -T^* + m^*. \quad (70)$$

La (7-70) assicura che la rotazione φ è fornita dalla somma del *taglio fittizio* T^* cambiato di segno provocato sulla trave ausiliaria da q^* ed m^* , e della coppia fittizia m^* .

Nella fig. 7-34 è riportata la stessa struttura della fig. 7-22. Diviso il

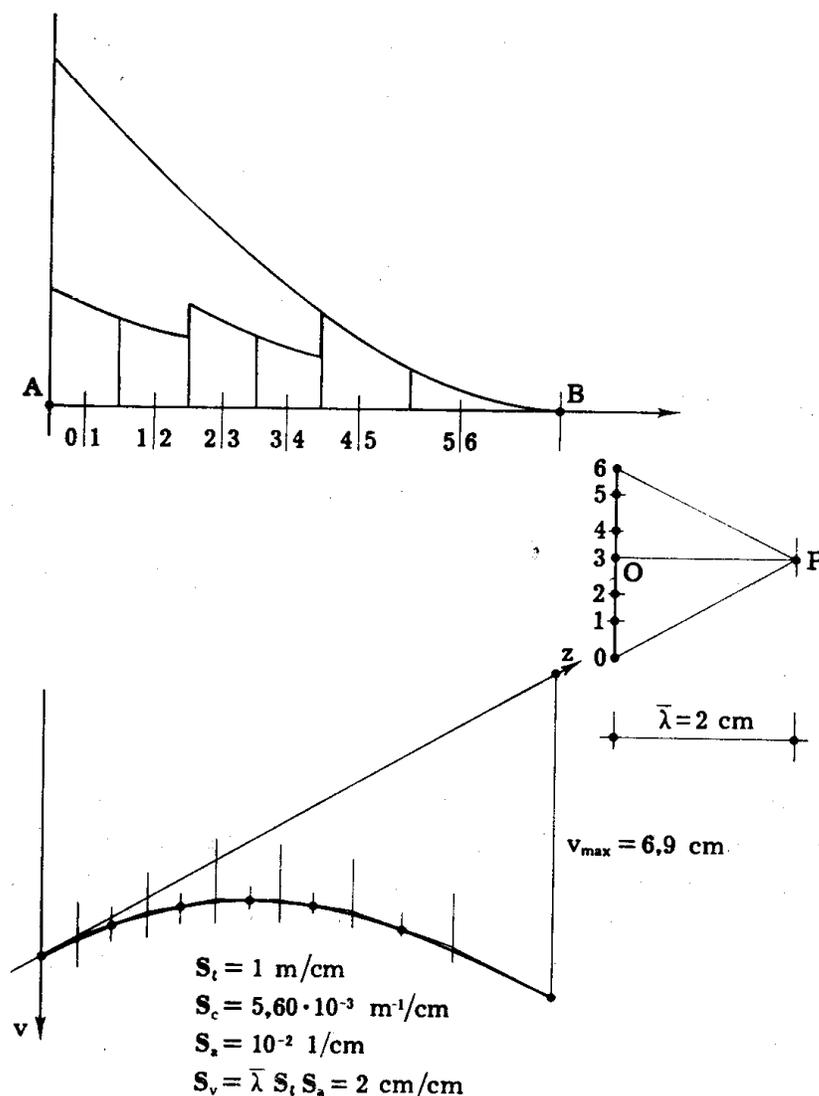


FIG. 7-34

diagramma $\frac{M}{EI}$ in strisce, si sono riportate le aree $\frac{M}{EI} \Delta s$ (forze concentrate fittizie, adimensionali) nella punteggiata 0-6; la relativa scala S_a è 10^{-2} 1/cm . Si sono poi connesse queste forze con un poligono di distanza polare $\bar{\lambda} = 2 \text{ cm}$, ottenendo il poligono funicolare la cui scala è

$$S_v = S_a \bar{\lambda} S_t = 2 \text{ cm/cm} . \quad (71)$$

La fondamentale del poligono è fissata dalla condizione

$$\begin{aligned} z = 0 & \quad M^* = \quad v = 0 \\ z = 0 & \quad T^* = -\varphi = 0 . \end{aligned}$$

Orientando l'asse v verso il basso, l'asse z verso destra, e convenendo che le forze fittizie positive siano dirette verso il basso, la base OP deve essere positiva, e cioè il punto P deve essere preso come nella fig. 7-34.

Operando come sopra si perviene dal carico q alla linea elastica tracciando due poligoni funicolari invece di effettuare quattro integrazioni; i due metodi, operando graficamente, si equivalgono. La convenienza delle (7-69) e (7-70), che prendono nome spesso di *corollari di Mohr*, si palesa nel calcolo, analitico o grafico, di una sola v o di una sola φ ; poterle ottenere come caratteristiche di sollecitazione, riducendo il problema ad un problema di statica, e utilizzando ove necessario il procedimento delle catene cinematiche, è una grande semplificazione operativa del problema. Ciò è strettamente connesso con il concetto, già dato in breve, di *trave ausiliaria*.

Un vincolo (reale) impone delle condizioni o lascia delle libertà a v ed a φ ; sulla trave ausiliaria, caricata da q^* ed m^* , si devono imporre nella stessa sezione le stesse condizioni e lasciare le stesse libertà ad M^* ed a $-T^* + m^*$; ciò significa che il vincolo (fittizio) cambia.

In corrispondenza di un appoggio deve essere $v = 0$, mentre può essere $\varphi \neq 0$; nella trave caricata da q^* e da m^* l'appoggio deve essere sostituito da un vincolo che imponga $M^* = 0$, e che permetta $T^* \neq 0$, e cioè, se l'appoggio è terminale, da un appoggio terminale; se è intermedio, da una cerniera. In corrispondenza di una cerniera deve essere $\Delta v = 0$, mentre può essere $\Delta \varphi \neq 0$; nella trave caricata da q^* e da m^* la cerniera deve essere sostituita da un vincolo che imponga $\Delta M^* = 0$, e che permetta $\Delta T^* \neq 0$, e cioè da un appoggio.

Un incastro impone $v = 0$, $\varphi = 0$, esso quindi va sostituito con un vincolo che imponga $M^* = 0$, $T^* = 0$, e quindi la sezione corrispondente deve essere libera (*).

Se una sezione è libera, in essa può essere $v \neq 0$ e $\varphi \neq 0$, e perciò nella trave caricata da q^* e da m^* tale sezione va incastrata, perchè solo l'incastro fornisce la possibilità di $M^* \neq 0$, e $T^* \neq 0$. Analogamente il bipendolo esterno va sostituito con un bipendolo interno, e viceversa.

(*) Nell'incastro è consentita la φ dovuta al taglio ed alla \mathfrak{D} ; queste infatti si risolvono in una rotazione φ tra l'asse della trave e la sezione retta. Se ne trae che nella φ da annullare nell'incastro occorre non tener conto di T e \mathfrak{D} in corrispondenza dell'incastro stesso, e cioè, nella (7-70), non tener conto di m^* .

Nella fig. 7-35 sono riportati i vincoli reali e quelli corrispondenti nella trave ausiliaria.

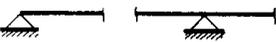
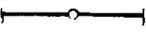
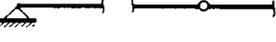
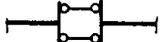
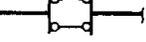
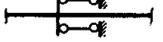
Trave effettiva	 $v = 0$ $\varphi \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$	 $\Delta v = 0$ $\Delta\varphi \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$	 $v = 0$ $\varphi = 0$
Trave ausiliaria	 $M^* = 0$ $T^* \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$	 $\Delta M^* = 0$ $\Delta T^* \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$	 $M^* = 0$ $T^* = 0$
Trave effettiva	 $v \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$ $\varphi \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$	 $v \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$ $\varphi = 0$	 $\Delta v \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$ $\Delta\varphi = 0$
Trave ausiliaria	 $M^* \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$ $T^* \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$	 $M^* \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$ $T^* = 0$	 $\Delta M^* \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$ $\Delta T^* = 0$

FIG. 7-35

In una trave appoggiata AB le rotazioni φ_A e φ_B delle sezioni estreme sono fornite, trascurando l'effetto del taglio, ed in assenza di ϑ , da

$$\varphi_A = - T^*_A$$

$$\varphi_B = - T^*_B ;$$

poichè chiamando A^* e B^* le *reazioni fittizie* della trave appoggiata (*) (considerate al solito positive se dirette, come le forze, verso il basso), si ha

$$T^*_A = - A^*$$

$$T^*_B = B^*$$

(*) La reazione fittizia in un vincolo A si chiama generalmente R_{A^*} .

può scriversi

$$\begin{aligned}\varphi_A &= A^* \\ \varphi_B &= -B^* .\end{aligned}\quad (72)$$

Poichè è (fig. 7-36)

$$\begin{aligned}A^* &= -\frac{1}{l} \int_0^l \frac{M(l-z)}{EI} dz + \frac{1}{l} \int_0^l \mu(l-z) dz \\ B^* &= -\frac{1}{l} \int_0^l \frac{Mz}{EI} dz + \frac{1}{l} \int_0^l \mu z dz\end{aligned}$$

si ha pure

$$\begin{aligned}\varphi_A &= -\frac{1}{l} \int_0^l \frac{M(l-z)}{EI} dz + \frac{1}{l} \int_0^l \mu(l-z) dz \\ \varphi_B &= \frac{1}{l} \int_0^l \frac{Mz}{EI} dz - \frac{1}{l} \int_0^l \mu z dz (*) .\end{aligned}\quad (73)$$

Si riporta di seguito qualche esempio di utilizzazione dei corol-

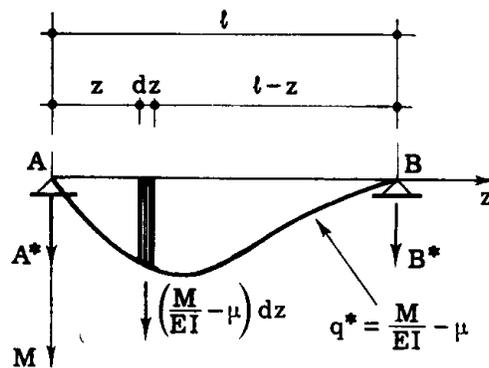


FIG. 7-36

lari di Mohr. Si consideri la trave della fig. 7-38; la trave ausiliaria

(*) Se si tiene conto di T, e se è presente ϑ , occorre considerare (fig. 7-37) i termini aggiuntivi

$$\begin{aligned}\varphi_A &= \frac{1}{l} \int_0^l \chi \frac{T}{GA} dz - \frac{1}{l} \int_0^l \vartheta dz - \left(\chi \frac{T}{GA} \right)_A + \vartheta_A \\ \varphi_B &= \frac{1}{l} \int_0^l \chi \frac{T}{GA} dz - \frac{1}{l} \int_0^l \vartheta dz - \left(\chi \frac{T}{GA} \right)_B + \vartheta_B\end{aligned}\quad (74)$$

che possono anche scriversi, chiamando m_m^* il valore medio di m^* lungo la trave,

$$\begin{aligned}\varphi_A &= -m_m^* + m_A^* \\ \varphi_B &= -m_m^* + m_B^* .\end{aligned}$$

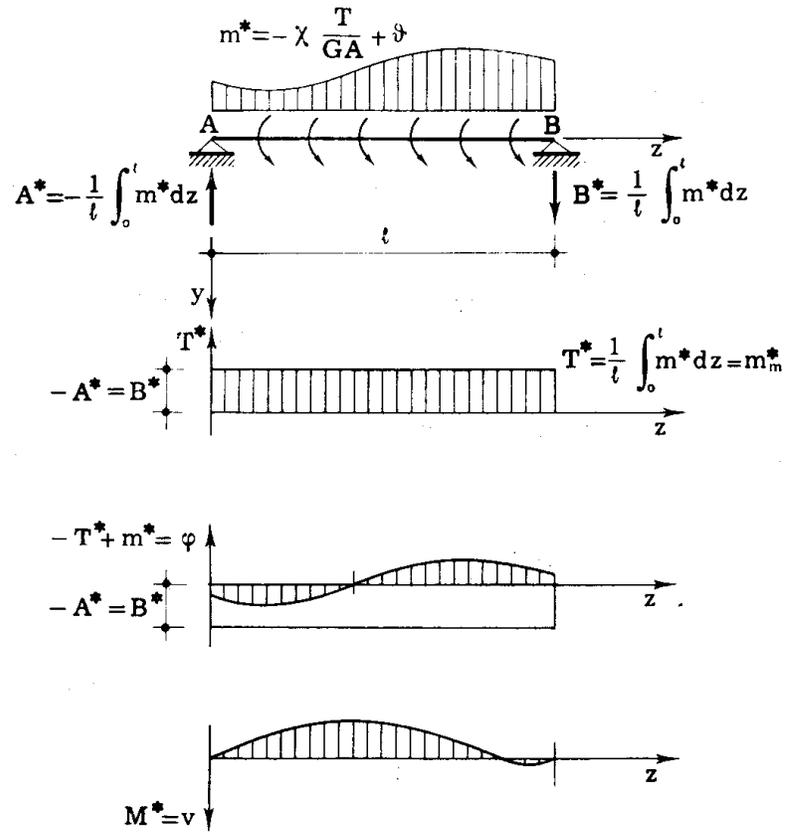


FIG. 7-37

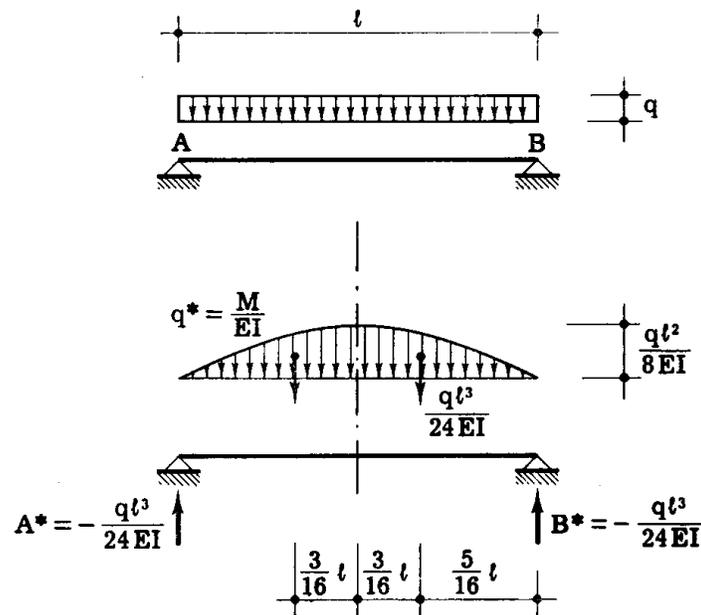


FIG. 7-38

è ancora la trave appoggiata AB. Le due rotazioni φ_A e φ_B sono fornite da

$$\varphi_A = A^* = -\frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{ql^2}{8EI} l = -\frac{ql^3}{24EI}$$

$$\varphi_B = -B^* = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{ql^2}{8EI} l = \frac{ql^3}{24EI}$$

L'abbassamento in mezzeria è

$$v_{l/2} = M^*_{l/2} = \frac{ql^3}{24EI} \frac{5}{16} l = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}$$

Si consideri la trave della fig. 7-39; la trave ausiliaria è ancora la

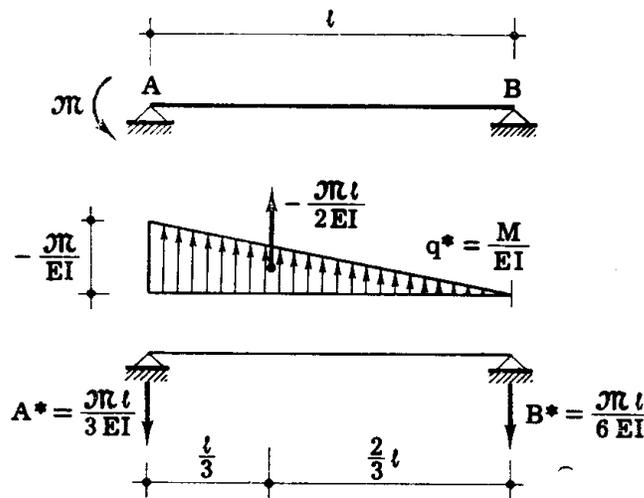


FIG. 7-39

trave AB. Si ha

$$\varphi_A = A^* = \frac{\pi l}{3EI}$$

$$\varphi_B = -B^* = -\frac{\pi l}{6EI}$$

Si prenda in esame la trave della fig. 7-40 incastrata in B e soggetta alla forza F in A; la trave ausiliaria è una mensola libera in B e incastrata in A.

E' in tal caso

$$\varphi_A = R^*_A = \frac{Fl^2}{2EI}$$

$$v_A = M^*_A = \frac{Fl^3}{3EI};$$

si osservi che ad M_A^* è stato attribuito il segno che gli compete come momento flettente, non come coppia.

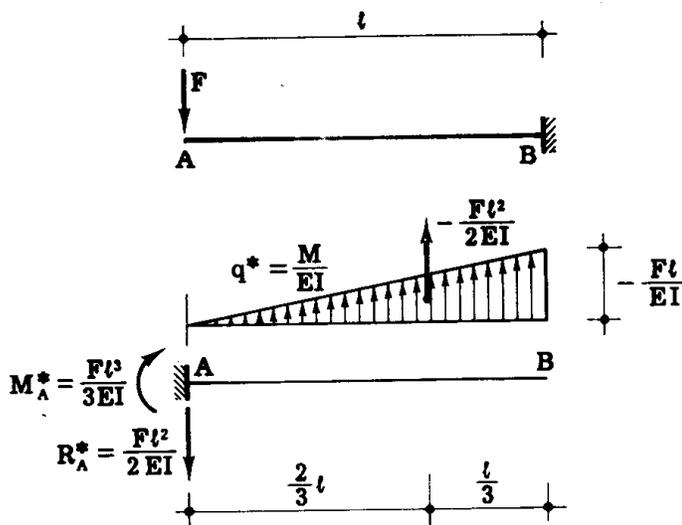


FIG. 7-40

La trave della fig. 7-41 a è soggetta ad una forza F nella mezzeria

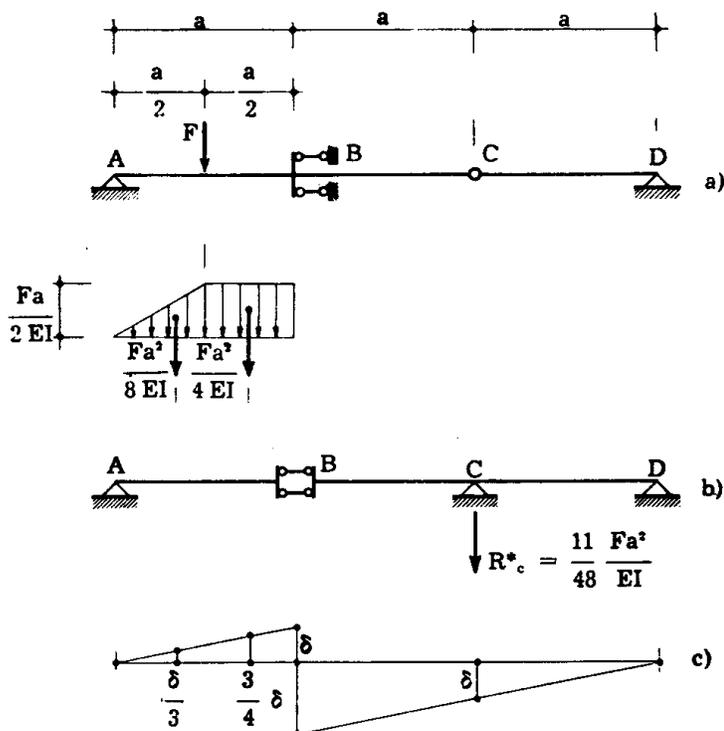


FIG. 7-41

del tratto AB; l'ausiliaria (fig. 7-41 b) ha in B un bipendolo interno, in C un appoggio.

Si vuole determinare la rotazione relativa $\Delta\varphi_C$ tra le facce unite dalla cerniera C; essa è la differenza tra le rotazioni assolute φ_s e φ_d della sezione di sinistra e di quella di destra

$$\Delta\varphi_C = \varphi_d - \varphi_s ,$$

ed è positiva se $\varphi_d > \varphi_s$; in tal caso il punto angoloso che si forma in C ha il vertice verso il basso poichè la sezione di destra ruota in senso antiorario rispetto a quella di sinistra . E'

$$\Delta\varphi_C = \varphi_d - \varphi_s = T_s^* - T_d^*$$

e, poichè la reazione R_C^* , positiva al solito verso il basso, è fornita da

$$R_C^* - T_s^* + T_d^* = 0 ,$$

può scriversi

$$\Delta\varphi_C = R_C^* . \quad (75)$$

Il diagramma $q^* = \frac{M}{EI}$ è quello riportato nella fig. 7-41 b; per ricercare R_C^* si è utilizzato il principio dei lavori virtuali dei sistemi olonomi (fig. 7-41 c):

$$R_C^* \delta - \frac{Fa^2}{8EI} \frac{\delta}{3} - \frac{Fa^2}{4EI} \frac{3}{4} \delta = 0$$

da cui si trae

$$\Delta\varphi_C = R_C^* = \frac{11}{48} \frac{Fa^2}{EI} .$$

Nei suddetti esempi si è trascurato l'effetto del taglio.

La trave a mensola della fig. 7-42 è soggetta a coppie distribuite uniformemente, di valore m . Risulta $T=0$, ed M variabile linearmente; l'inclinazione del diagramma M è pari a $-m$. Per ottenere φ e v si carica

la trave ausiliaria con il carico $q^* = \frac{M}{EI}$.

La stessa trave sia soggetta a una distorsione ϑ uniformemente distribuita (fig. 7-43); per ottenere φ e v si carica la trave ausiliaria con le coppie distribuite $m^* = \vartheta$; risulta così $\varphi = \vartheta$, e v variabile linearmente.

In A la (7-70) porge $\varphi = m^* = \vartheta$; ciò non è in contrasto con le condizioni

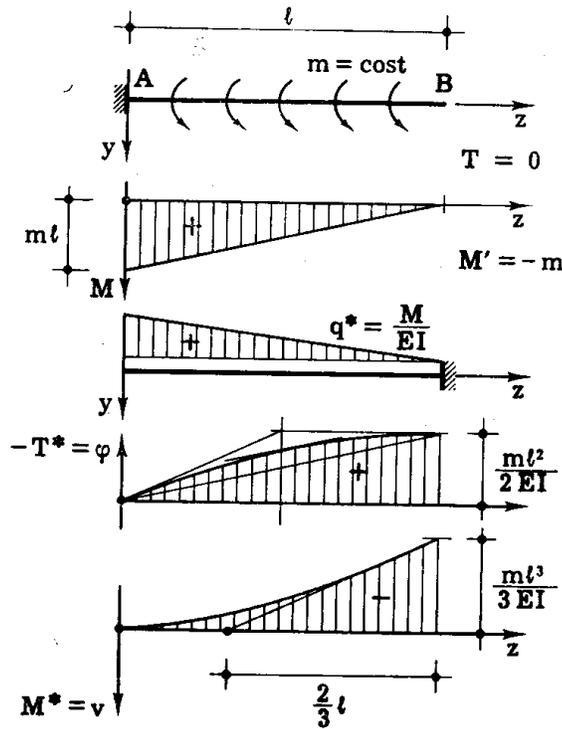


FIG. 7-42

di incastro, dove si annulla la sola T^* (vedi prima nota al § 7-5).

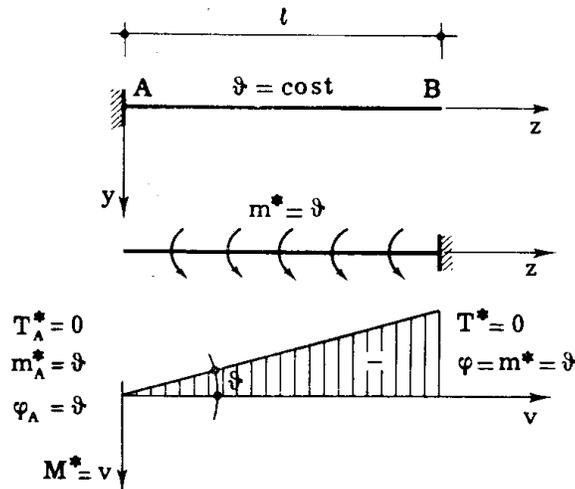


FIG. 7-43

Nella trave appoggiata della fig. 7-44, soggetta alle coppie m uniformemente distribuite, risulta

$$\begin{aligned} T &= m \\ M &= 0 \\ M' &= T - m = 0 . \end{aligned}$$

La trave ausiliaria è caricata dalle coppie fittizie

$$m^* = -\chi \frac{T}{GA} = -\chi \frac{m}{GA};$$

per essa risulta ancora

$$T^* = m^* = -\chi \frac{m}{GA}$$

$$\varphi = -T^* + m^* = 0$$

$$M^* = 0$$

$$v = 0.$$

La trave della fig. 7-45 è soggetta alla variazione termica $\overline{\Delta t}$ variabile

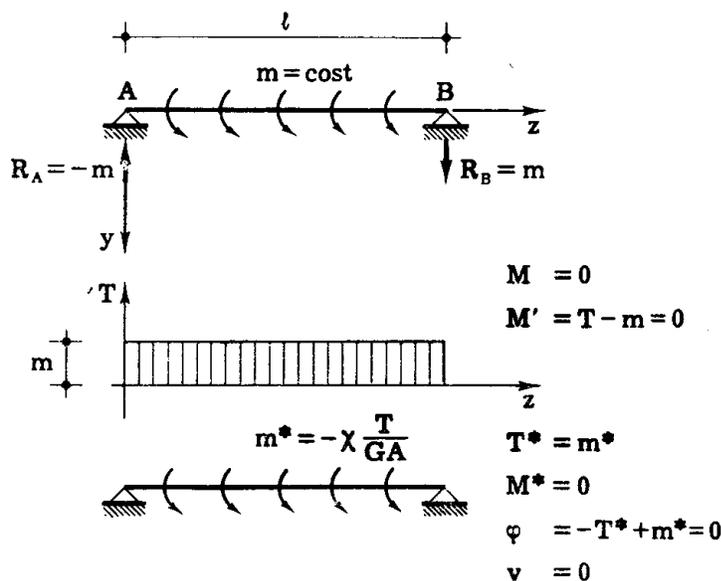


FIG. 7-44

linearmente lungo l'altezza e annullantesi nel baricentro della sezione; $\overline{\Delta t}$ è positiva (§ 1-13), e la quantità

$$\alpha \frac{\overline{\Delta t}}{h} = -\mu$$

è costante con l'ascissa z . La trave ausiliaria si sottopone al carico.

$$q^* = -\mu = \alpha \frac{\overline{\Delta t}}{h};$$

si ottengono così i diagrammi di φ e di v come diagrammi di $-T^*$ e di M^* .

Se si vuole conoscere solo la rotazione φ_s della sezione S di mezzzeria di a , si sfrutta il procedimento delle catene cinematiche; è infatti

$$\varphi_s = - T^*_s ;$$

tagliata quindi in S la trave ausiliaria, e collegate le due parti con un

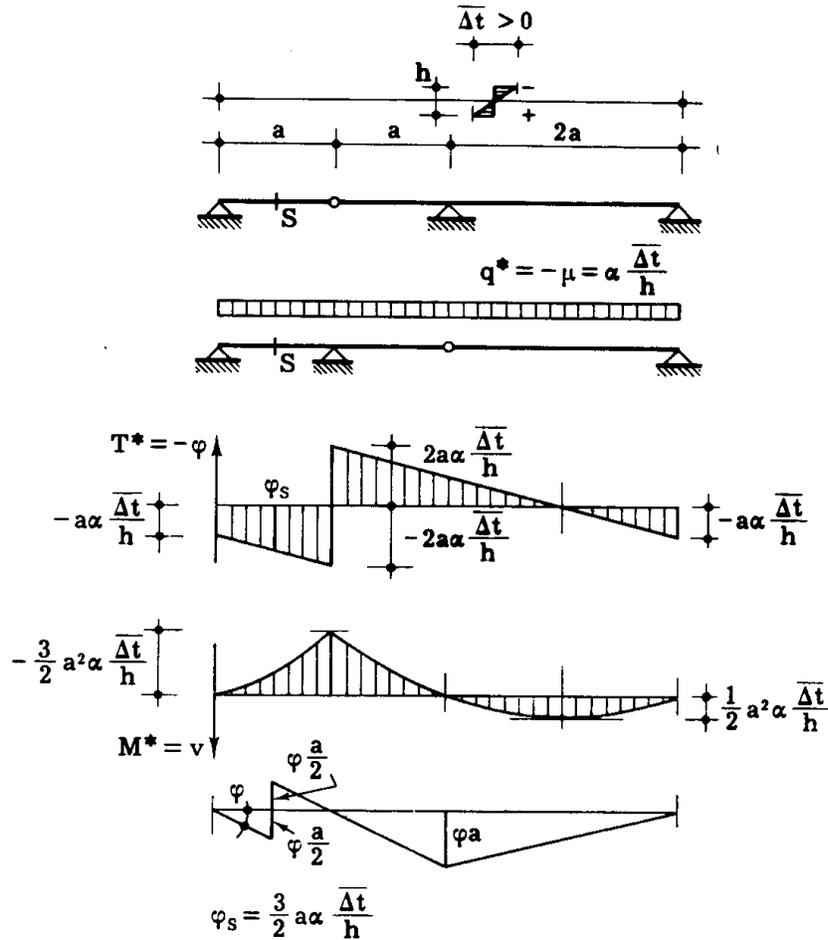


FIG. 7-45

bipendolo, si imprime alla trave lo spostamento reso così possibile; si ottiene

$$T^*_s \varphi a + q^* \frac{3}{2} \varphi a^2 = 0$$

da cui

$$T^*_s = - \frac{3}{2} q^* a$$

$$\varphi_s = \frac{3}{2} a \alpha \frac{\Delta t}{h} .$$

Nella fig. 7-46 la trave è soggetta ad una distorsione concentrata in S di rotazione relativa, e pari a -1 . La trave ausiliaria si carica in S con

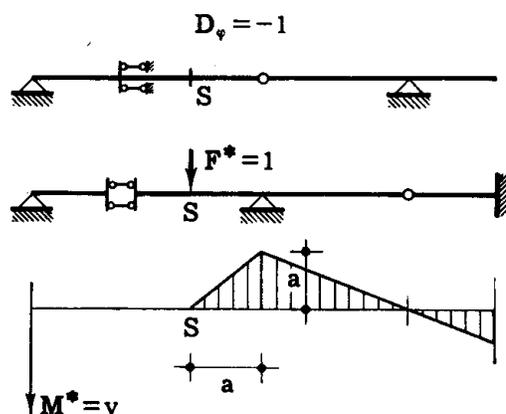


FIG. 7-46

la forza concentrata fittizia

$$F^* = -D_\varphi = 1 ;$$

il diagramma M^* fornisce v . La dimensione di M^* è $[l]$, poichè $[F^*] = [1]$.

Nella fig. 7-47 la trave è soggetta in S ad una distorsione $D_\eta = -1$;

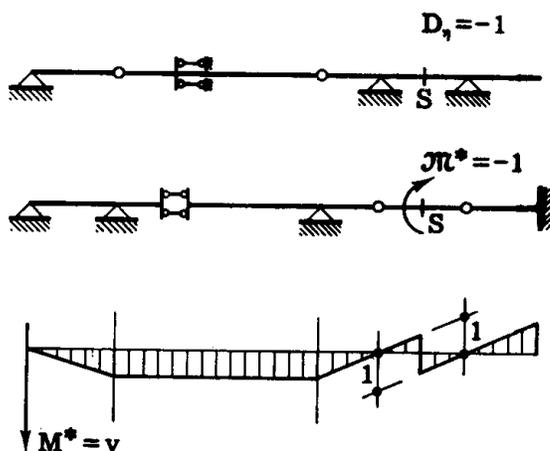


FIG. 7-47

la trave ausiliaria si carica con una coppia fittizia

$$\pi^* = D_\eta = -1 ,$$

ed il diagramma M^* fornisce v . Le sue dimensioni sono $[l]$, perchè $[\pi^*] = [l]$.

I corollari di Mohr si utilizzano anche nelle travi iperstatiche; in tal caso la trave ausiliaria risulta labile, e su di essa possono agire solo carichi e coppie fittizi che soddisfino le condizioni di equilibrio della struttura labile. La curvatura del diagramma M dipende solo dal carico q , e quella del diagramma $\frac{M}{EI}$ dal carico e dalla legge di variazione di I ; perciò è solo la scelta della fondamentale o delle fondamentali del diagramma $\frac{M}{EI}$ che permette al diagramma stesso di soddisfare la condizione di equilibrio della struttura labile. Se il calcolo delle iperstatiche è condotto per altra via, le fondamentali sono fissate, e il diagramma $\frac{M}{EI}$ così definito deve soddisfare le suddette condizioni di equilibrio; viceversa, in alcuni casi semplici può convenire sfruttare la necessità di sod-

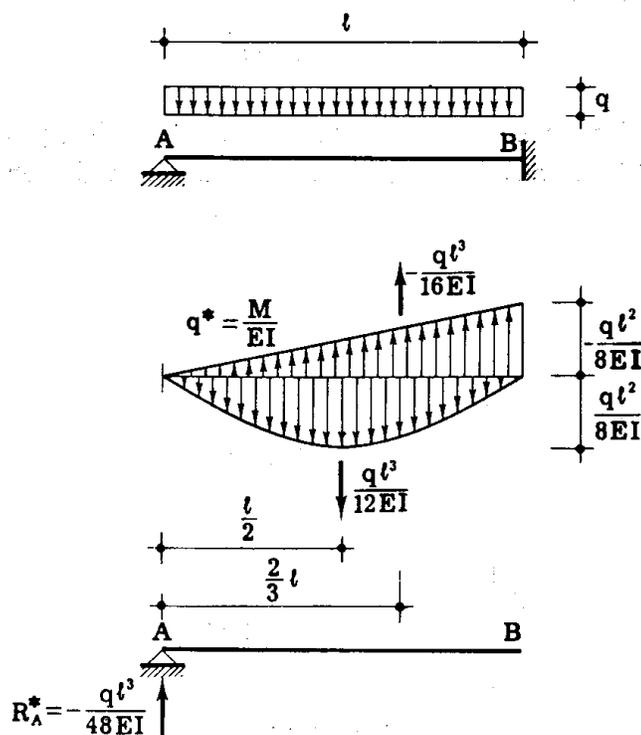


FIG. 7-48

disfare tali condizioni per definire le fondamentali, e quindi le iperstatiche. Nel caso della trave rappresentata nella fig. 7-48, di sezione costante, appoggiata in A e incastrata in B , la trave ausiliaria è solo appoggiata in A ; se M_B è il momento in B si ha, per l'equilibrio alla rotazione

del carico q^* intorno ad A,

$$-\frac{ql^3}{12EI} \frac{l}{2} - M_B \frac{l}{2} \frac{2}{3} l = 0$$

da cui si trae

$$M_B = -\frac{ql^2}{8}. \quad (76)$$

La rotazione φ_A in A è pari alla reazione R_A^* della trave ausiliaria, e cioè è fornita da

$$\varphi_A = -\frac{ql^3}{48EI}. \quad (77)$$

Nelle (7-76) e (7-77) è trascurato l'effetto del taglio.

6. La composizione delle rotazioni e degli spostamenti.

A volte riesce molto spedito calcolare la rotazione o lo spostamento di una sezione sfruttando la conoscenza della rotazione e dello spostamento

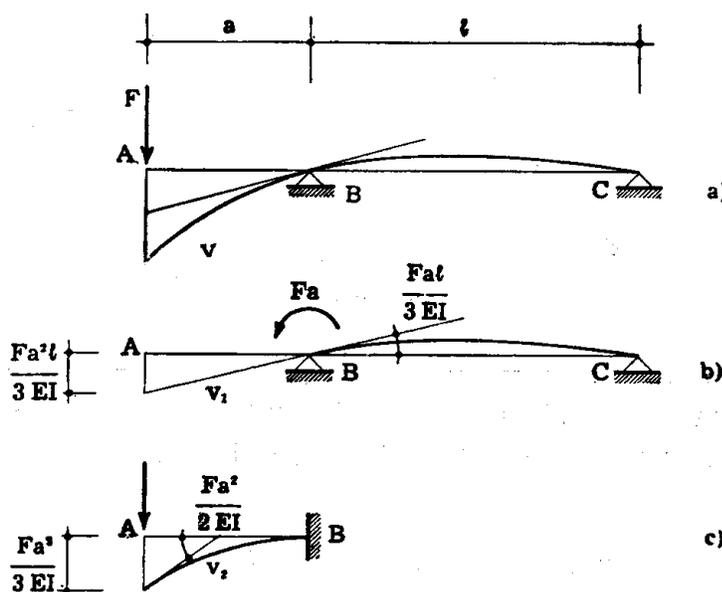


FIG. 7-49

in altre sezioni. Se si vuole ottenere, per esempio, la rotazione o lo spostamento della sezione A della trave appoggiata con sbalzo della fig. 7-49 a, si sfrutta l'osservazione che la linea elastica v del tratto AB si ottiene

sommando gli spostamenti v_1 che il tratto AB considerato rigido presenterebbe per effetto della coppia $F \cdot a$ agente in B (fig. 7-49 b), e gli spostamenti v_2 relativi alla mensola AB incastrata perfettamente in B e caricata dalla forza F in A. Ciò è dovuto al fatto che le caratteristiche in a) sono somma di quelle in b) e in c).

Si ha quindi

$$\varphi_A = \frac{Fa \ell}{3 EI} + \frac{Fa^2}{2 EI} = \frac{Fa}{6 EI} (2\ell + 3a)$$

$$v_A = \frac{Fa \ell}{3 EI} a + \frac{Fa^3}{3 EI} = \frac{Fa^2}{3 EI} (\ell + a)$$

Così pure, se si vuole l'abbassamento v_D della sezione D della trave della fig. 7-50 a, si considera che gli spostamenti v del tratto CE si ot-

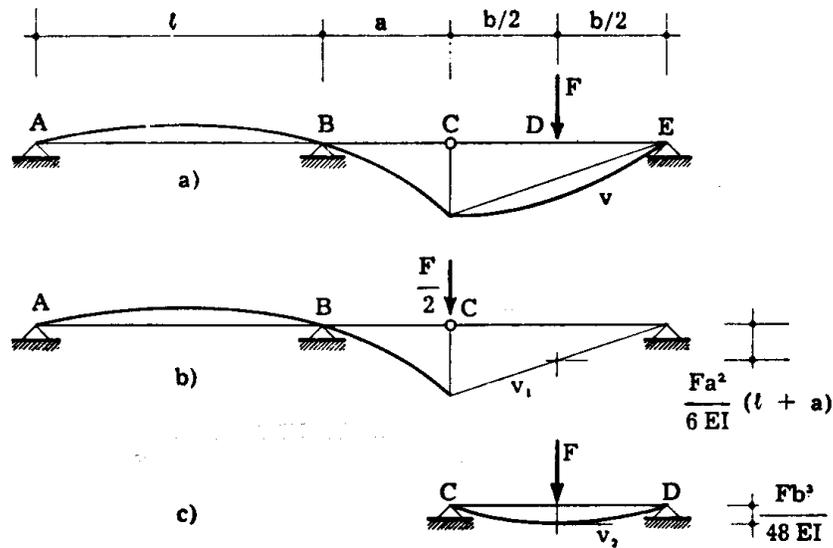


FIG. 7-50

tengono sommando quelli v_1 che il tratto stesso presenterebbe per effetto della forza $F/2$ applicata in C (fig. 7-50 b) e quelli v_2 relativi alla trave CD appoggiata in C e D (fig. 7-50 c); si ha quindi

$$v_{1D} = \frac{1}{2} v_{1C} = \frac{Fa^2}{6 EI} (\ell + a)$$

$$v_{2D} = \frac{Fb^3}{48 EI}$$

$$v_D = \frac{F}{6 EI} \left(a^2 \ell + a^3 + \frac{b^3}{8} \right)$$

In un certo senso analogo a quello ora esposto è il procedimento seguito nel caso della fig. 7-31; in quest'ultimo però si è giocato sui vincoli, rimuovendo prima i due appoggi A e B e bloccando la sezione S, e imprimendo poi, a deformazione avvenuta, un moto rigido che riporta al rispetto dei vincoli.

7. Travi Gerber.

Le travi rettilinee isostatiche con più di due appoggi o di un incastro prendono nome di travi *Gerber*; ai vincoli semplici in più rispetto a quelli strettamente necessari (considerando l'incastro equivalente a due vincoli semplici) devono corrispondere altrettanti snodi semplici interni; in più, perchè la struttura non risulti in parte labile e in parte iperstatica, è ne-

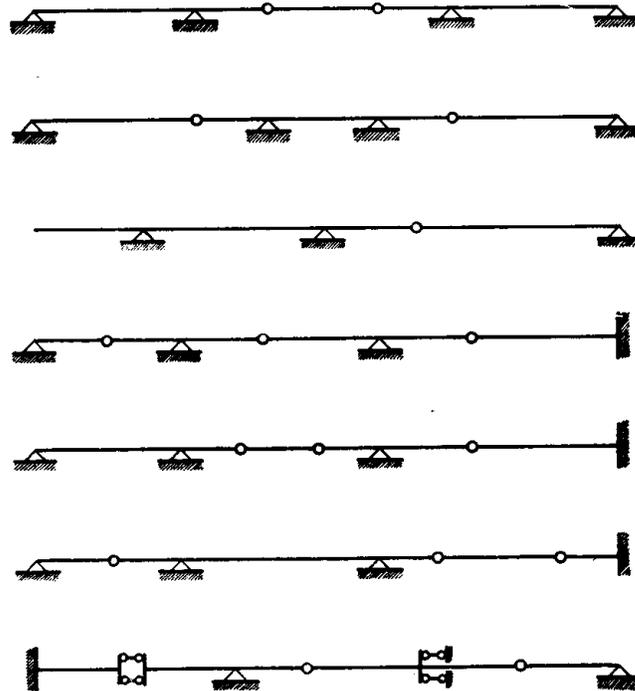


FIG. 7-51

cessario che non vi siano più di due snodi tra due vincoli esterni, nè più di due vincoli esterni tra due snodi. La trave Gerber classica è quella ove i vincoli esterni sono degli appoggi, e gli snodi sono delle cerniere. Esempi di travi Gerber si riportano nella fig. 7-51.

I metodi di risoluzione delle travi Gerber sono stati già esposti nel presente capitolo; è opportuno soltanto fare un cenno in relazione al

procedimento grafico. Se si esegue una sola doppia integrazione o un solo poligono funicolare dei carichi per tutta la trave, le ordinate momento risultano a volte molto piccole, e quindi sono rilevanti gli errori di graficismo e di lettura; conviene allora eseguire tante doppie integrazioni o disegnare tanti poligoni funicolari quanti sono i tratti compresi tra due vincoli esterni successivi. Nella fig. 7-52 a è riportato un esempio di tale procedimento. Le curve funicolari dei carichi relative ai tratti AB, BC, CD

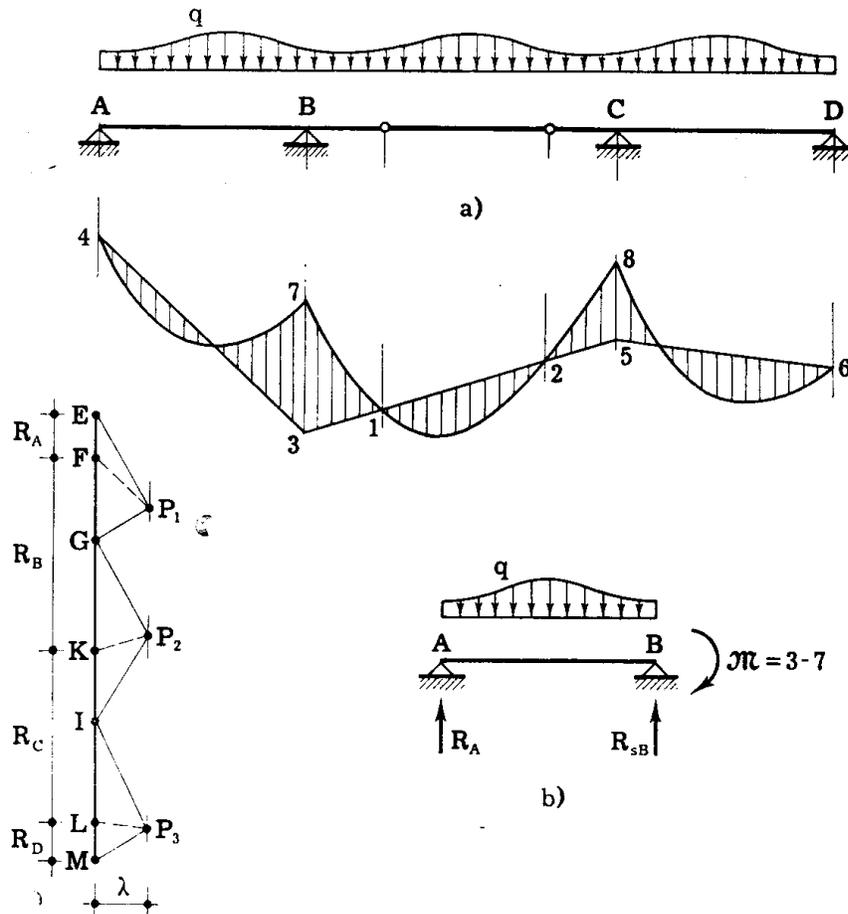


FIG. 7-52

sono tracciate con tre poli qualsiasi P_1 , P_2 , P_3 , ma tutte con la stessa distanza polare λ ; la fondamentale 3-5 di BC si ottiene considerando che in corrispondenza delle due cerniere il momento è nullo; le fondamentali 3-4 e 5-6 dei tratti AB e CD si ottengono considerando che il momento in A e D è nullo, e in B e C è fornito rispettivamente da 3-7 e 5-8. Conducendo da P_1 la parallela alla 3-4 si divide il carico totale EG relativo al tratto AB in due parti, EF ed FG, di cui la prima è la reazione in A, la seconda è la reazione in B della trave AB appoggiata in A e B, sog-

getta al carico q e alla coppia 3-7 in B (fig. 7-52 b)

$$R_A = FE$$

$$R_{sB} = GF .$$

Analogamente si ha, conducendo da P_2 e da P_3 le parallele alla 1-2 e alla 5-6

$$R_{dB} = KG$$

$$R_{sC} = IK$$

$$R_{dC} = LI$$

$$R_D = ML$$

e quindi può scriversi

$$R_A = FE$$

$$R_B = KF$$

$$R_C = LK$$

$$R_D = ML .$$

Nella fig. 7-53 è riportato un altro esempio; i due tratti considerati sono stavolta AC e CE, P_1 e P_2 i rispettivi poli. La fondamentale 1-3 relativa al tratto CE si determina conducendo da 1 la parallela alla tangente alla curva funicolare in corrispondenza della verticale per D; è

$$R_{dC} = LI$$

$$R_E = ML .$$

La fondamentale 5-7 relativa al tratto AC si determina considerando che in B il momento deve essere nullo; quindi la 5-7 deve intersecare la curva funicolare in 6, e cioè in corrispondenza della verticale per B. Inoltre la reazione in C deve essere nulla, e perciò la 5-7 è parallela alla $P_1 L$; solo così infatti risulta

$$R_{sC} = IL$$

e quindi

$$R_c = R_{sC} + R_{dC} = IL + LI = 0 .$$

E' infine

$$R_A = LK .$$

Per tracciare la deformata di una trave Gerber si può adottare il metodo di Saviotti o quello di Mohr; il metodo generale è quello già esposto, e cioè eseguire una doppia integrazione o un poligono funicolare, determinando poi le fondamentali attraverso le condizioni di vincolo. Si può

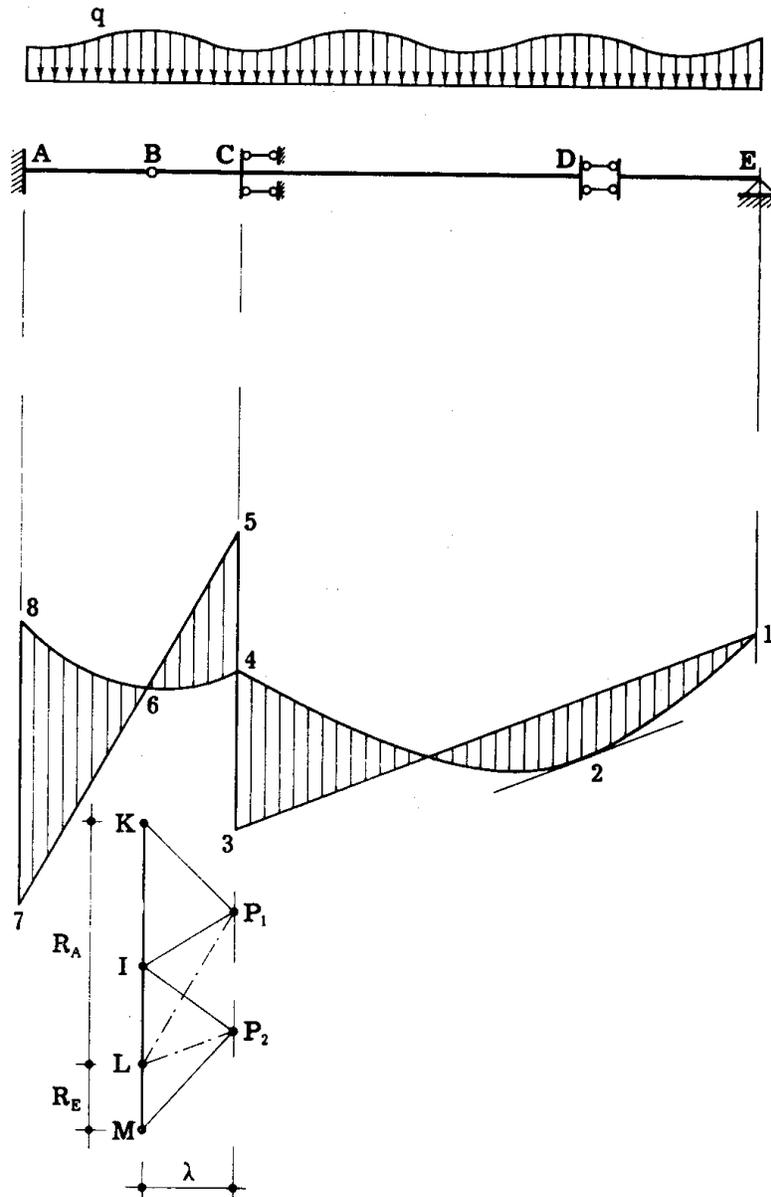


FIG. 7-53

anche in questa fase — l'utilità è però meno sentita che nel caso della ricerca del momento, attesa l'inversione di segno del carico q — eseguire tante doppie integrazioni o disegnare tanti poligoni funicolari quanti sono i tratti compresi tra due snodi successivi della trave reale, o tra due vincoli esterni successivi della trave ausiliaria.

8. Linee d'influenza.

La teoria generale delle linee d'influenza si è tratteggiata nel Cap. IV; nel Cap. VI (§ 8) si è poi mostrato come la teoria delle linee d'influenza delle caratteristiche della sollecitazione interna e delle reazioni di vincolo per forze viaggianti su strutture isostatiche possa essere svolta a partire dal principio dei lavori virtuali per i sistemi rigidi olonomi, senza bisogno quindi di appoggiarsi ai principi di reciprocità. Si riportano di seguito alcuni esempi di linee d'influenza per travi ad asse rettilineo isostatiche.

a) Trave a mensola.

Nella fig. 7-54 a è riportata la linea d'influenza v_{SF} dello spostamento v_S in S per effetto di una forza verticale $F = +1$ viaggiante; il verso

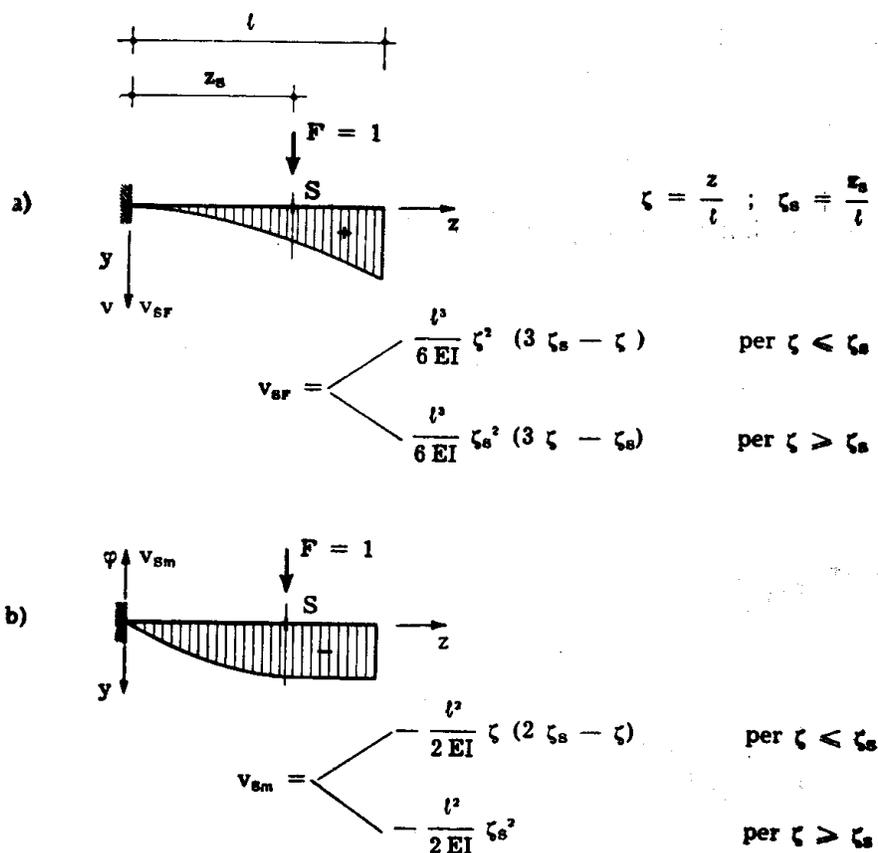


FIG. 7-54

positivo di v e di F è quello dell'asse y . La linea v_{SF} coincide con il diagramma degli spostamenti v per effetto di una forza verticale $F = +1$ agente in S. Siano z_s l'ascissa di S (l'origine si pone in corrispondenza del-

l'incastro per giungere a formule più semplici) e z l'ascissa corrente, l la luce della trave, ζ_s e ζ i due rapporti

$$\zeta_s = \frac{z_s}{l} \quad (l)$$

$$\zeta = \frac{z}{l} .$$

L'espressione di v per $z \leq z_s$ si trae dalla (f) ponendo $z_s - z$ al posto di z , e z_s al posto di l ; si ha così

$$v_{SF} = \frac{1}{6 EI} (3 z_s z^2 - z^3) = \frac{l^3}{6 EI} \zeta^2 (3 \zeta_s - \zeta) \quad \text{per } \zeta \leq \zeta_s . \quad (78)$$

Per $z \geq z_s$ l'espressione di v_{SF} è diversa dalla (7-78); v_{SF} si ottiene in tal caso sommando lo spostamento di S ed il prodotto $-\varphi (z - z_s)$, poichè la parte a destra di S non si deforma:

$$v_{SF} = \frac{1}{6 EI} (3 z z_s^2 - z_s^3) = \frac{l^3}{6 EI} \zeta_s^2 (3 \zeta - \zeta_s) \quad \text{per } \zeta \geq \zeta_s . \quad (79)$$

Si osserva dalle (7-78) e (7-79) che la funzione $v_{SF} = v_F(\zeta, \zeta_s)$ è simmetrica rispetto a ζ ed a ζ_s , e cioè

$$v_F(\zeta, \zeta_s) = v_F(\zeta_s, \zeta) ; \quad (80)$$

e infatti, sostituendo ζ a ζ_s , e ζ_s a ζ , dalle (7-78) e (7-79) si riottengono le stesse relazioni. Ciò era da attendersi perchè, per il teorema di Maxwell, lo spostamento in z per una forza $F = +1$ in z_s è uguale allo spostamento in z_s per una forza $F = +1$ in z . La funzione $v_F(\zeta, \zeta_s)$, che ha le due espressioni (7-78) e (7-79) secondo che $\zeta \leq \zeta_s$, e che rappresenta lo spostamento in $z_s = \zeta_s l$ per una forza unitaria in $z = \zeta l$, o lo spostamento in $z = \zeta l$ per una forza unitaria in $z_s = \zeta_s l$, si chiama *funzione di influenza* o *funzione di Green* dello spostamento per una forza unitaria viaggiante.

Nella fig. 7-54 b è riportata la linea d'influenza v_{Sm} dello spostamento in S per effetto di una coppia $\mathcal{M} = +1$ viaggiante; il verso positivo di \mathcal{M} e φ è definito una volta fissati gli assi y e z ; nel caso della figura è quello antiorario. Tale linea coincide con il diagramma delle ro-

tazioni provocate da una forza $F = +1$ agente in S; è perciò

$$v_{Sm} = \begin{cases} -\frac{l^2}{2EI} \zeta (2\zeta_s - \zeta) & \text{per } \zeta \leq \zeta_s \\ -\frac{l^2}{2EI} \zeta_s^2 & \text{per } \zeta \geq \zeta_s \end{cases} \quad (81)$$

La funzione $v_{Sm} = v_m(\zeta, \zeta_s)$ non è simmetrica rispetto a ζ ed a ζ_s , non sussiste infatti uguaglianza fra lo spostamento in z provocato da $\mathcal{M} = +1$ in z_s e lo spostamento in z_s provocato da $\mathcal{M} = +1$ in z . La funzione $v_{Sm} = v_m(\zeta, \zeta_s)$ è la funzione di Green dell'abbassamento in S per una coppia $\mathcal{M} = +1$ viaggiante.

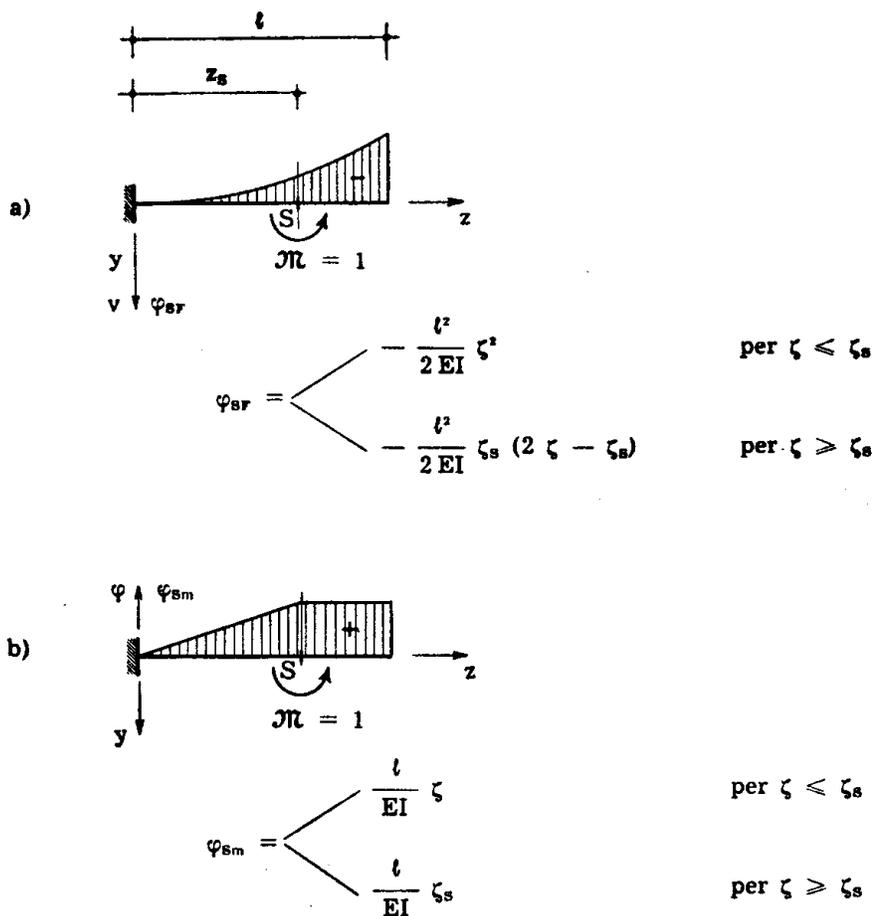


FIG. 7-55

Nella fig. 7-55 a è riportata la linea d'influenza φ_{SF} della rotazione in S per effetto di $F = +1$ viaggiante; essa coincide con gli abbassamenti

provocati da $\mathcal{M} = +1$ in S, ed è fornita da

$$\varphi_{SF} = \begin{cases} -\frac{\ell^2}{2EI} \zeta^2 & \text{per } \zeta \leq \zeta_s \\ -\frac{\ell^2}{2EI} \zeta_s (2\zeta - \zeta_s) & \text{per } \zeta \geq \zeta_s \end{cases} \quad (82)$$

Anche la funzione $\varphi_{SF} = \varphi_F(\zeta, \zeta_s)$ non è simmetrica rispetto a ζ ed a ζ_s ; si osserva però dal confronto tra le (7-81) e (7-82), che

$$v_m(\zeta, \zeta_s) = \varphi_F(\zeta_s, \zeta); \quad (83)$$

anche questo era da attendersi, in base al teorema di Maxwell.

Infine nella fig. 7-55 b è riportata la linea d'influenza φ_{Sm} della rotazione in S per effetto di $\mathcal{M} = +1$ viaggiante; essa coincide con il diagramma delle rotazioni provocate da $\mathcal{M} = +1$ in S, ed è fornita analiticamente da

$$\varphi_{Sm} = \begin{cases} \frac{\ell}{EI} \zeta & \text{per } \zeta \leq \zeta_s \\ \frac{\ell}{EI} \zeta_s & \text{per } \zeta \geq \zeta_s \end{cases} \quad (84)$$

La $\varphi_m(\zeta, \zeta_s)$ è simmetrica rispetto a ζ ed a ζ_s , conformemente al teorema di Maxwell. Si avverte che, come φ è riportata positiva verso l'alto, così si sono riportate positive verso l'alto anche le linee v_{Sm} e φ_{Sm} , che non sono altro che rotazioni, provocate rispettivamente da $F = +1$ ed $\mathcal{M} = +1$ in S.

Nelle figg. 7-56 e 7-57 sono riportate le linee di influenza delle caratteristiche della sollecitazione interna e degli spostamenti in S per effetto rispettivamente di forze e distorsioni viaggianti; si completano così le linee d'influenza relative alla sezione S, poichè quelle della sollecitazione interna per effetto di distorsioni viaggianti sono nulle, come in ogni struttura isostatica. Le linee di cui adesso si tratta sono tutte costituite da segmenti di retta; esse infatti sono diagrammi di spostamenti rigidi di sistemi ad un grado di libertà, o diagrammi di caratteristiche. Nella fig. 7-56 a è riportata la linea d'influenza t_{SF} del taglio in S per una forza $F = +1$ viaggiante; il verso positivo del taglio è collegato a quello di y e z , e, come è noto, è quello per cui la forza T, sull'elemento la cui normale è diretta secondo z , ha lo stesso verso di y . La linea t_{SF} coincide con il diagramma

degli spostamenti v provocati da una distorsione $D_\eta = -1$ agente in S; si ricordi che la convenzione circa il segno di D_η è collegata a quella circa il segno di T, poichè D_η è positiva se per essa le forze T connesse con un taglio positivo compiono lavoro positivo, e cioè, col riferimento adottato,

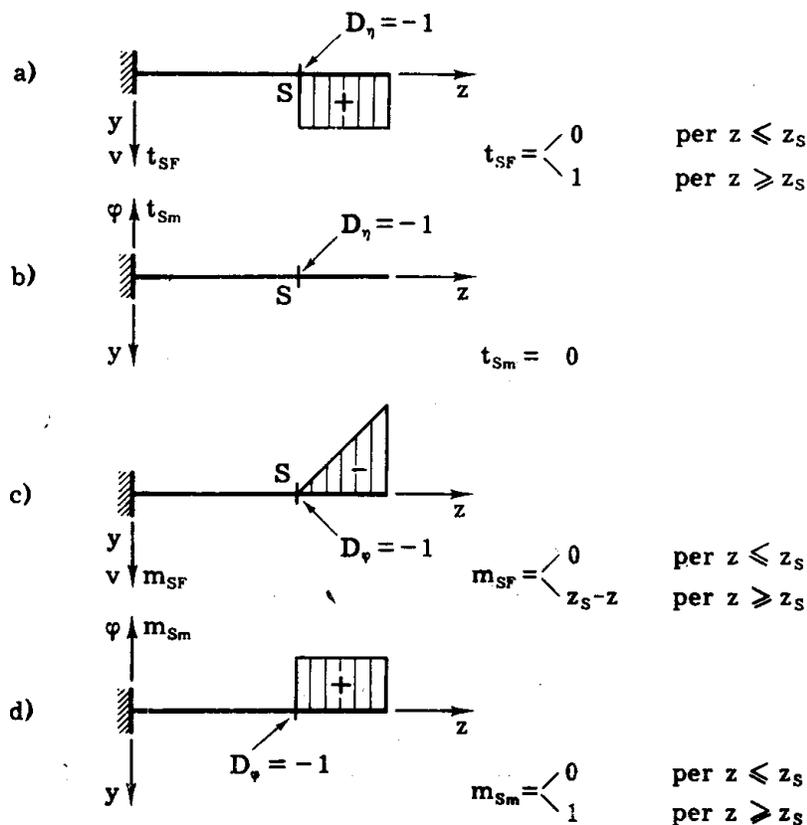


FIG. 7-56

se la faccia di destra sale rispetto a quella di sinistra. Si può scrivere

$$t_{SF} = \begin{cases} 0 & \text{per } z \leq z_S \\ 1 & \text{per } z \geq z_S \end{cases} \quad (85)$$

La funzione $t_{SF} = t_F(z, z_S)$, funzione di Green del taglio in S per una forza $F = +1$ viaggiante, non è simmetrica rispetto a z e z_S .

Nella fig. 7-56 c è riportata la linea d'influenza m_{SF} del momento in S per una forza $F = +1$ viaggiante. Il verso positivo del momento è anch'esso collegato a quello di y e z ; infatti il momento M è positivo quando, considerato agente sulla faccia la cui normale è diretta secondo z , è rappresentato da un vettore diretto secondo il verso di x , ove x y z formano terna destrorsa. La linea m_{SF} coincide — nel senso già precisato al § 4-7 —

con il diagramma degli spostamenti v provocati da una distorsione $D_\varphi = -1$ agente in S; si ricordi che D_φ è positiva se per essa le coppie M connesse con un momento positivo compiono lavoro positivo, e cioè, con il riferimento adottato, se la faccia di destra ruota in senso orario rispetto a quella sinistra.

Così, per $z \geq z_s$, è;

$$m_{SF} = \frac{\Delta\varphi (z_s - z)}{\Delta\varphi} = z_s - z .$$

Si ha perciò

$$m_{SF} = \begin{cases} 0 & \text{per } z \leq z_s \\ z_s - z & \text{per } z \geq z_s . \end{cases} \quad (86)$$

Secondo la posizione (l), può scriversi pure

$$m_{SF} = \begin{cases} 0 & \text{per } \zeta \leq \zeta_s \\ l (\zeta_s - \zeta) & \text{per } \zeta \geq \zeta_s . \end{cases} \quad (87)$$

Nella fig. 7-56 b è riportata la linea d'influenza t_{sm} del taglio in S per una coppia viaggiante $\mathcal{M} = +1$; essa, coincidente con il diagramma delle rotazioni per effetto di $D_\eta = -1$ in S, è ovunque nulla.

Nella fig. 7-56 d è riportata la linea d'influenza m_{sm} del momento in S per effetto di una coppia $\mathcal{M} = +1$ viaggiante; essa, coincidente con il diagramma delle rotazioni per effetto di $D_\varphi = -1$ in S, è fornita da

$$m_{sm} = \begin{cases} 0 & \text{per } z \leq z_s \\ -1 & \text{per } z \geq z_s . \end{cases} \quad (88)$$

La $m_{sm} = m_m(z, z_s)$ non è simmetrica rispetto a z e z_s .

Nella fig. 7-57 a è disegnata la linea d'influenza v_{su} dello spostamento in S per effetto di una distorsione $D_\varphi = +1$ viaggiante; essa coincide con il diagramma del momento provocato da $F = -1$ in S, e si esprime come segue

$$v_{su} = \begin{cases} z_s - z & \text{per } z \leq z_s \\ 0 & \text{per } z \geq z_s \end{cases} \quad (89)$$

oppure

$$v_{S\mu} = \begin{cases} l (\zeta_s - \zeta) & \text{per } \zeta \leq \zeta_s \\ 0 & \text{per } \zeta \geq \zeta_s . \end{cases} \quad (90)$$

La linea d'influenza $v_{S\theta}$ dello spostamento in S per effetto di una distorsione $D_\eta = +1$ viaggiante (fig. 7-57 b) coincide con il diagramma

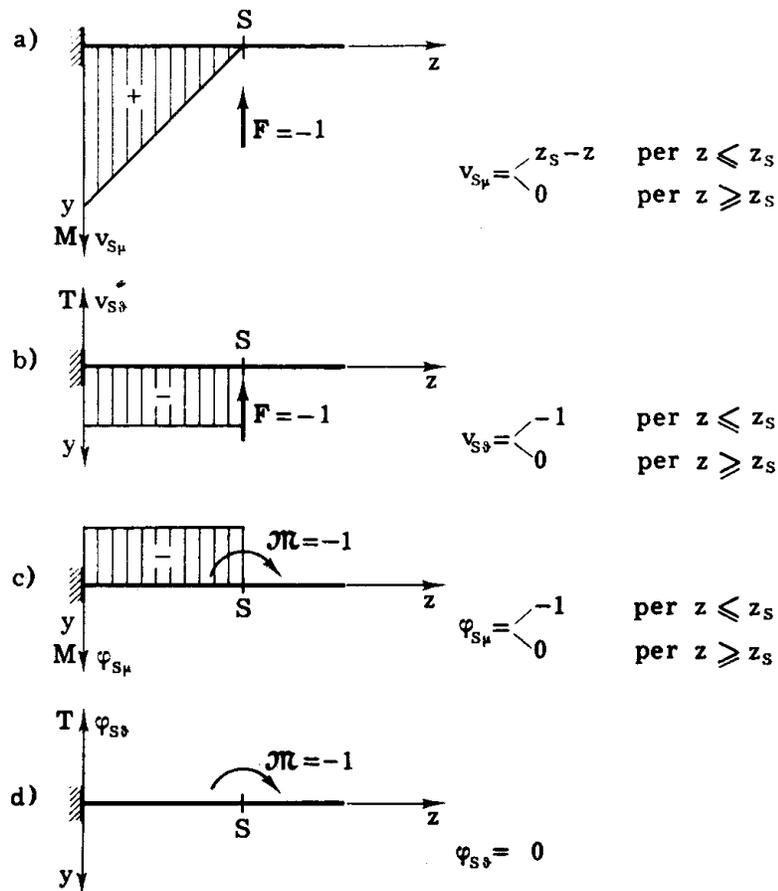


FIG. 7-57

del taglio per $F = -1$ in S, ed è fornita perciò da

$$v_{S\theta} = \begin{cases} -1 & \text{per } z \leq z_s \\ 0 & \text{per } z \geq z_s . \end{cases} \quad (91)$$

La linea d'influenza $\varphi_{S\mu}$ della rotazione in S per effetto di una distorsione $D_\varphi = +1$ viaggiante (fig. 7-57 c) coincide con il diagramma dei

momenti provocati da $\mathcal{M} = -1$ in S, e quindi è fornita da

$$\varphi_{S\mu} = \begin{cases} -1 & \text{per } z \leq z_S \\ 0 & \text{per } z \geq z_S \end{cases} \quad (92)$$

La linea d'influenza $\varphi_{S\delta}$ della rotazione in S per effetto di una distorsione $D_\eta = +1$ viaggiante, coincidente con il diagramma del taglio provocato da $\mathcal{M} = -1$ in S, è ovunque nulla.

Tutte le funzioni di Green dalla (7-85) alla (7-92) non presentano carattere di simmetria rispetto alle z, z_S .

Analogamente a quanto si è fatto per le v_{Sm} e φ_{Sm} , anche le t_{Sm} , m_{Sm} , $v_{S\delta}$, $\varphi_{S\delta}$ si sono riportate positive verso l'alto; infatti le t_{Sm} ed m_{Sm} non sono che i diagrammi delle rotazioni provocate da $D_\eta = -1$ e $D_\varphi = -1$ in S, e le $v_{S\delta}$ e $\varphi_{S\delta}$ non sono che i diagrammi dei tagli provocati da $F = -1$ ed $\mathcal{M} = -1$ in S.

b) *Alcune relazioni notevoli.*

Si verifica agevolmente che le espressioni dalla (7-78) alla (7-92) rispettano alcune relazioni, molto interessanti e di carattere generale, va-

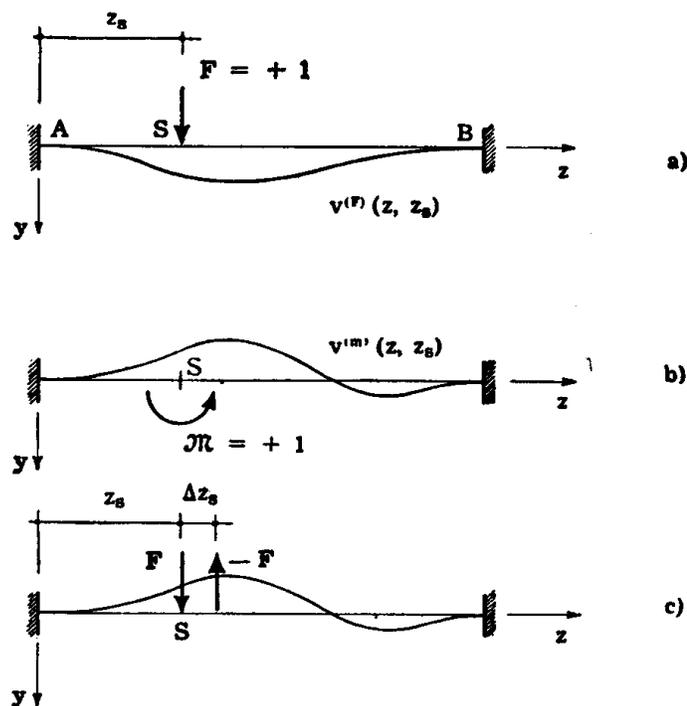


FIG. 7-58

lidi per travi di qualsiasi tipo, isostatiche o iperstatiche. Si consideri una qualsiasi trave AB caricata in S da $F = +1$ (fig. 7-58 a); sia

$$v^{(F)}(z, z_S)$$

la linea elastica. Si consideri la stessa trave caricata in S da $\mathcal{N} = +1$ (fig. 7-58 b); la linea elastica sia

$$v^{(m)}(z, z_S) .$$

Si consideri infine la stessa trave, caricata da $+F$ all'ascissa z_S e da $-F$ all'ascissa $z_S + \Delta z_S$; il prodotto $F \cdot \Delta z_S$ sia pari all'unità (fig. 7-58 c). La linea elastica è fornita da

$$F [v^{(F)}(z, z_S) - v^{(F)}(z, z_S + \Delta z_S)] . \quad (m)$$

Si faccia ora tendere Δz_S a zero ed F all' ∞ , in modo che il prodotto $F \Delta z_S$ risulti sempre pari all'unità; la (m) tende alla $v^{(m)}(z, z_S)$, che è perciò fornita da

$$v^{(m)}(z, z_S) = \lim_{\Delta z_S \rightarrow 0} \frac{v^{(F)}(z, z_S) - v^{(F)}(z, z_S + \Delta z_S)}{\Delta z_S} F \Delta z_S ;$$

si ha quindi

$$v^{(m)}(z, z_S) = - \frac{\partial v^{(F)}(z, z_S)}{\partial z_S} \quad (93)$$

Quanto detto per v vale per φ , per M , per T ; in genere può enunciarsi: « la funzione $e^{(m)}(z, z_S)$ rappresentante un qualsiasi effetto provocato su una trave da $\mathcal{N} = +1$ agente in S coincide con la derivata rispetto a z_S , cambiata di segno, della funzione $e^{(F)}(z, z_S)$ rappresentante lo stesso effetto provocato da $F = +1$ agente in S ».

Si consideri ancora una trave AB caricata in S da D_φ (fig. 7-59 a); sia

$$v^{(\varphi)}(z, z_S) D_\varphi$$

la linea elastica. Si consideri la stessa trave caricata in S da $D_\eta = +1$ (fig. 7-59 b); sia

$$v^{(\eta)}(z, z_S)$$

la linea elastica.

Si consideri infine la stessa trave, caricata da $-D_\varphi$ in z_S e da D_φ in $z_S + \Delta z_S$; il prodotto $D_\varphi \Delta z_S$ sia pari all'unità (fig. 7-52 c). La linea elastica è fornita da

$$D_\varphi [-v^{(\varphi)}(z, z_S) + v^{(\varphi)}(z, z_S + \Delta z_S)] . \quad (n)$$

Facendo tendere Δz_S a zero e D_φ all' ∞ in modo che il prodotto $D_\varphi \Delta z_S$ si

conservi pari all'unità, la (n) tende alla $v^{(b)}(z, z_S)$, che è perciò fornita da

$$v^{(b)}(z, z_S) = \lim_{\Delta z_S \rightarrow 0} \frac{v^{(\varphi)}(z, z_S + \Delta z_S) - v^{(\varphi)}(z, z_S)}{\Delta z_S} D_\varphi \Delta z_S,$$

e quindi in definitiva è

$$v^{(b)}(z, z_S) = \frac{\partial v^{(\varphi)}(z, z_S)}{\partial z_S}. \quad (94)$$

Si enuncia perciò: «la funzione $e^{(b)}(z, z_S)$ rappresentante un qualsiasi effetto provocato su una trave da $D_\eta = +1$ agente in S coincide con la

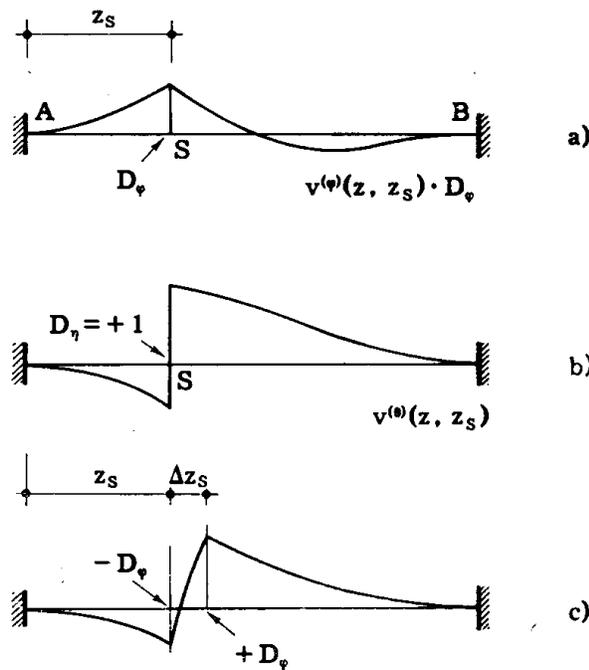


FIG. 7-59

derivata rispetto a z_S della funzione $e^{(\varphi)}(z, z_S)$ rappresentante lo stesso effetto provocato da $D_\varphi = +1$ agente in S».

Dalla (7-93) discendono le relazioni seguenti:

$$\varphi_F(z, z_S) = - \frac{\partial V_F(z, z_S)}{\partial z_S}$$

$$\varphi_m(z, z_S) = - \frac{\partial V_m(z, z_S)}{\partial z_S}$$

(95)

$$\varphi_{\delta} (z, z_S) = - \frac{\partial v_{\delta} (z, z_S)}{\partial z_S}$$

$$\varphi_{\mu} (z, z_S) = - \frac{\partial v_{\mu} (z, z_S)}{\partial z_S} .$$

Così pure dalla (7-94) discendono le altre relazioni:

$$t_F (z, z_S) = \frac{\partial m_F (z, z_S)}{\partial z_S}$$

$$t_m (z, z_S) = \frac{\partial m_m (z, z_S)}{\partial z_S}$$

$$t_{\delta} (z, z_S) = \frac{\partial m_{\delta} (z, z_S)}{\partial z_S}$$

$$t_{\mu} (z, z_S) = \frac{\partial m_{\mu} (z, z_S)}{\partial z_S} .$$
(96)

Dalla (7-2)

$$\frac{dM}{dz} = T - m$$

si traggono le relazioni

$$v_{\delta} (z, z_S) = \frac{\partial v_{\mu} (z, z_S)}{\partial z}$$

$$\varphi_{\delta} (z, z_S) = \frac{\partial \varphi_{\mu} (z, z_S)}{\partial z}$$

$$m_{\delta} (z, z_S) = \frac{\partial m_{\mu} (z, z_S)}{\partial z}$$

$$t_{\delta} (z, z_S) = \frac{\partial t_{\mu} (z, z_S)}{\partial z}$$
(97)

e dalla (7-4)

$$\frac{dv}{dz} = - \varphi$$

si traggono le altre

$$\begin{aligned}
 v_m(z, z_S) &= - \frac{\partial v_F(z, z_S)}{\partial z} \\
 \varphi_m(z, z_S) &= - \frac{\partial \varphi_F(z, z_S)}{\partial z} \\
 m_m(z, z_S) &= - \frac{\partial m_F(z, z_S)}{\partial z} \\
 t_m(z, z_S) &= - \frac{\partial t_F(z, z_S)}{\partial z}
 \end{aligned}
 \tag{98}$$

Dalle precedenti relazioni si ha

$$\begin{aligned}
 \varphi_m(z, z_S) &= \frac{\partial^2 v_F(z, z_S)}{\partial z \partial z_S} \\
 \varphi_\delta(z, z_S) &= - \frac{\partial^2 v_\mu(z, z_S)}{\partial z \partial z_S} \\
 t_m(z, z_S) &= - \frac{\partial^2 m_F(z, z_S)}{\partial z \partial z_S} \\
 t_\delta(z, z_S) &= \frac{\partial^2 m_\mu(z, z_S)}{\partial z \partial z_S} .
 \end{aligned}
 \tag{99}$$

Si può quindi asserire che solo quattro linee sono *indipendenti*, e cioè v_F, v_μ, m_F, m_μ ; da esse per derivazioni semplici o doppie possono trarsi le altre dodici.

c) *Le dimensioni fisiche e le scale delle linee d'influenza.*

Le dimensioni fisiche della v_{SF} sono $[l F^{-1}]$; ciò si deduce sia dal fatto che v_{SF} è la linea elastica provocata da una forza unitaria, come dall'altro che il prodotto di una forza per una ordinata della v_{SF} deve fornire per risultato uno spostamento. Se la v_{SF} è determinata analiticamente, l'espressione $v_{SF} = v_F(z, z_S)$ deve avere dimensioni fisiche $[l F^{-1}]$; e infatti, nel caso già esaminato (for. 7-78 e 7-79) si osserva che il rapporto l^3/EI ha appunto dimensioni $[l F^{-1}]$, mentre l'espressione in ζ è adimensionale. Per riportare poi v_{SF} in diagramma, è necessario scegliere una certa scala

delle quantità $l F^{-1}$; per esempio, adoperando come unità m e t , occorre fissare una scala $S_1 = K m t^{-1}/cm$, con il criterio che il diagramma risulti leggibile, pur non occupando una parte eccessiva del foglio. Se il diagramma v_{SF} si trae graficamente, la scala degli abbassamenti S_v è pari ad un certo numero K di m/cm ; la scala S_1 della linea d'influenza è rappresentata dallo stesso numero di $m t^{-1}/cm$, se la forza agente nella sezione è stata assunta pari ad una tonnellata.

Per tutte le linee d'influenza valgono gli stessi ragionamenti; le loro dimensioni fisiche sono le seguenti:

$v_{SF} [l F^{-1}]$	$v_{S\mu} [l]$	$t_{SF} [1]$	$t_{S\mu} [F]$
$v_{Sm} [F^{-1}]$	$v_{S\delta} [1]$	$t_{Sm} [l^{-1}]$	$t_{S\delta} [F l^{-1}]$
$\varphi_{SF} [F^{-1}]$	$\varphi_{S\mu} [1]$	$m_{SF} [l]$	$m_{S\mu} [F l]$
$\varphi_{Sm} [l^{-1} F^{-1}]$	$\varphi_{S\delta} [l^{-1}]$	$m_{Sm} [1]$	$m_{S\delta} [F]$

Una precisazione è forse utile. Tutta la teoria delle linee d'influenza poggia sull'ipotesi della sovrapponibilità degli effetti, e quindi, in particolare, della piccolezza degli spostamenti. Le linee calcolate come diagrammi di abbassamenti, e cioè v_{SF} , φ_{SF} , t_{SF} , m_{SF} , devono rispettare questa condizione, e ciò si ottiene imponendo che F , M , D_η , D_φ agenti in S nei quattro casi, siano molto piccoli; i diagrammi v_{SF} , φ_{SF} , t_{SF} ed m_{SF} non dipendono dai valori che si assegnano in realtà ad F , M , D_η , D_φ , poichè gli abbassamenti da questi ultimi provocati vanno divisi per i valori di F , M , D_η , D_φ . Tutto ciò non offre alcuna difficoltà nel procedimento analitico, poichè le espressioni degli abbassamenti calcolate per F , M , D_η , D_φ unitario sono proprio quelle degli abbassamenti calcolate per F , M , D_η , D_φ piccolissimi, e ad essi rapportate. Nella ricerca grafica di v_{SF} e φ_{SF} si applicano nella sezione in esame una forza o una coppia di valore noto, per esempio $1 t$ ed $1 tm$, senza preoccuparsi di indagare se gli abbassamenti che in realtà esse provocherebbero sono non piccoli nel senso noto; gli abbassamenti si calcolano quindi con i metodi già esposti, e cioè come se fossero piccoli. Si hanno così le v_{SF} e φ_{SF} in $m t^{-1}$ e in t^{-1} ; ciò che interessa è che, nei casi particolari, le quantità $\int q v_{SF} dz$ e $\int q \varphi_{SF} dz$ rispettino la condizione di piccolezza, e questo dipende — come è ovvio — solo dal valore di q . Nella ricerca grafica di t_{SF} non si impone alcun valore di D_η ; la linea t_{SF} , le cui dimensioni sono numeri puri, si legge assumendo il D_η del disegno come unità di misura. Per rendere l'uso della linea più agevole, si fa spesso in modo che il D_η sia espresso da un numero intero di centimetri. Anche nella ricerca grafica di m_{SF} non si impone il valore di D_φ ; la linea m_{SF} , le cui dimensioni sono $[l]$, si legge nella scala degli abbassamenti S_v divisa per il valore di D_φ .

d) *Trave appoggiata.*

Nella fig. 7-60 è riportata la linea d'influenza v_{SF} ; dalle espressioni

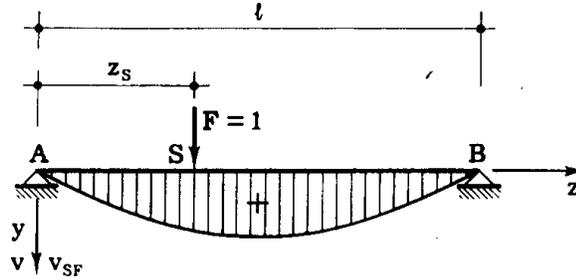


FIG. 7-60

riportate al § 4-e di questo capitolo si ha

$$v_{SF} = \begin{cases} \frac{l^3}{6EI} (1 - \zeta_s) [\zeta (2\zeta_s - \zeta^2) - \zeta^3] & \text{per } \zeta \leq \zeta_s \\ \frac{l^3}{6EI} (1 - \zeta) [\zeta_s (2\zeta - \zeta^2) - \zeta_s^3] & \text{per } \zeta > \zeta_s \end{cases} \quad (100)$$

La $v_{SF} = v(\zeta, \zeta_s)$ ora riportata è la funzione di Green dell'abbassamen-

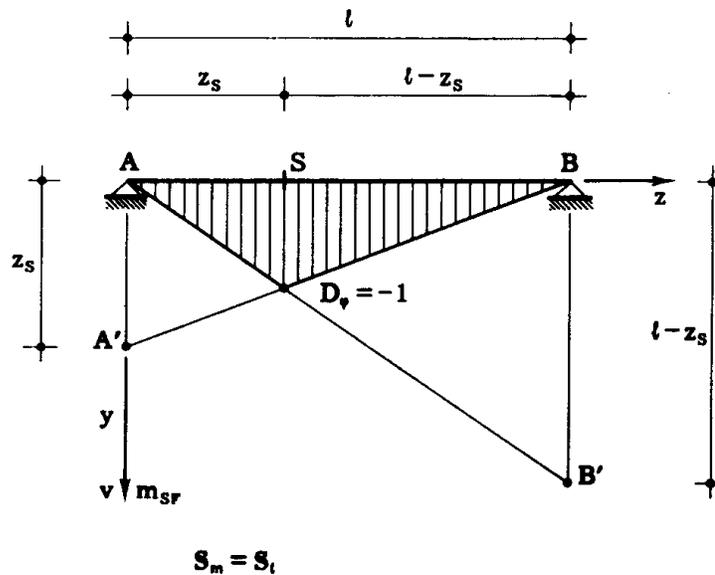


FIG. 7-61

to per una forza unitaria viaggiante, e per la trave appoggiata agli estremi, di sezione costante; essa è simmetrica rispetto a ζ e ζ_s .

Nella fig. 7-61 è disegnata la linea d'influenza m_{SF} ; essa è fornita da

$$m_{SF} = \begin{cases} \frac{l - z_S}{l} z & \text{per } z \leq z_S \\ \frac{z_S}{l} (l - z) & \text{per } z \geq z_S . \end{cases} \quad (101)$$

Nella rappresentazione grafica, per ottenere la m_{SF} nella stessa scala delle lunghezze basta riportare sulle verticali per A e B due segmenti $AA' = z_S$ e $BB' = l - z_S$, e congiungere A con B' ed A' con B.

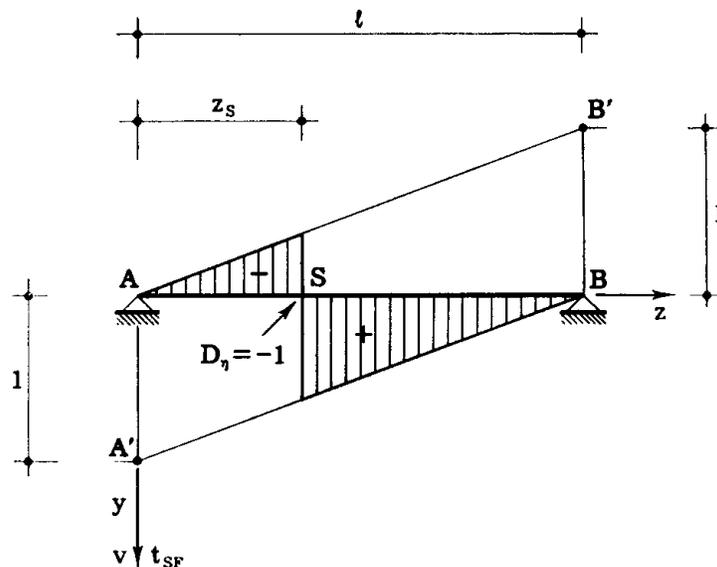


FIG. 7-62

Nella fig. 7-62 è riportata la linea d'influenza t_{SF} ; essa è fornita da

$$t_{SF} = \begin{cases} \frac{1}{l} z & \text{per } z \leq z_S \\ \frac{1}{l} (l - z) & \text{per } z \geq z_S . \end{cases} \quad (102)$$

Per ottenere nella rappresentazione grafica il segmento unitario pari ad un numero intero di cm, si portano sulle verticali per A e B due segmenti AA' e BB' pari a quello che si desidera come segmento unitario, e si congiunge A con B' e B con A'.

Nella fig. 7-63 infine è riportata la linea d'influenza v_{Slt} , la cui espres-

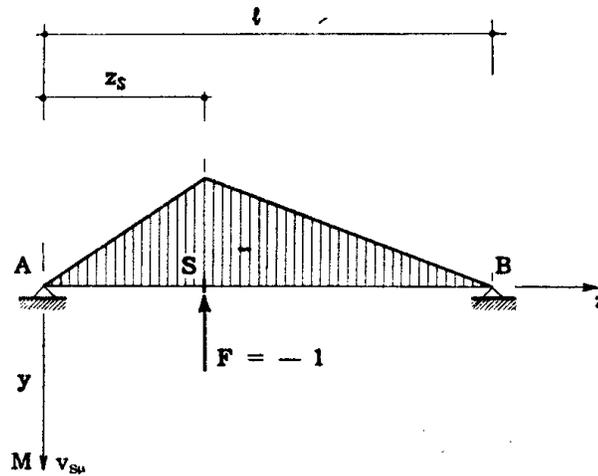


FIG. 7-63

sione analitica è

$$v_{Slt} = \begin{cases} -\frac{l - z_s}{l} z & \text{per } z \leq z_s \\ -\frac{z_s}{l} (l - z) & \text{per } z \geq z_s \end{cases} \quad (103)$$

e) *Travi Gerber.*

Nella fig. 7-64 sono riportate le seguenti linee d'influenza per una trave Gerber di tipo classico, con quattro appoggi e due cerniere:

r_{AF} , linea d'influenza della reazione in A, considerata positiva se diretta verso il basso; il verso positivo di v e di F è verso il basso.

r_{BF} , linea d'influenza della reazione in B.

r_{EF} , linea d'influenza dell'interazione in E, considerata positiva se quella esercitata sulla faccia di sinistra è diretta verso il basso, e quella sulla faccia di destra verso l'alto.

m_{SF} , linea d'influenza del momento in S. La costruzione è fatta in modo che la scala di m_{SF} sia quella delle lunghezze; lo stesso si farà per tutte le altre linee d'influenza del momento descritte in questo paragrafo.

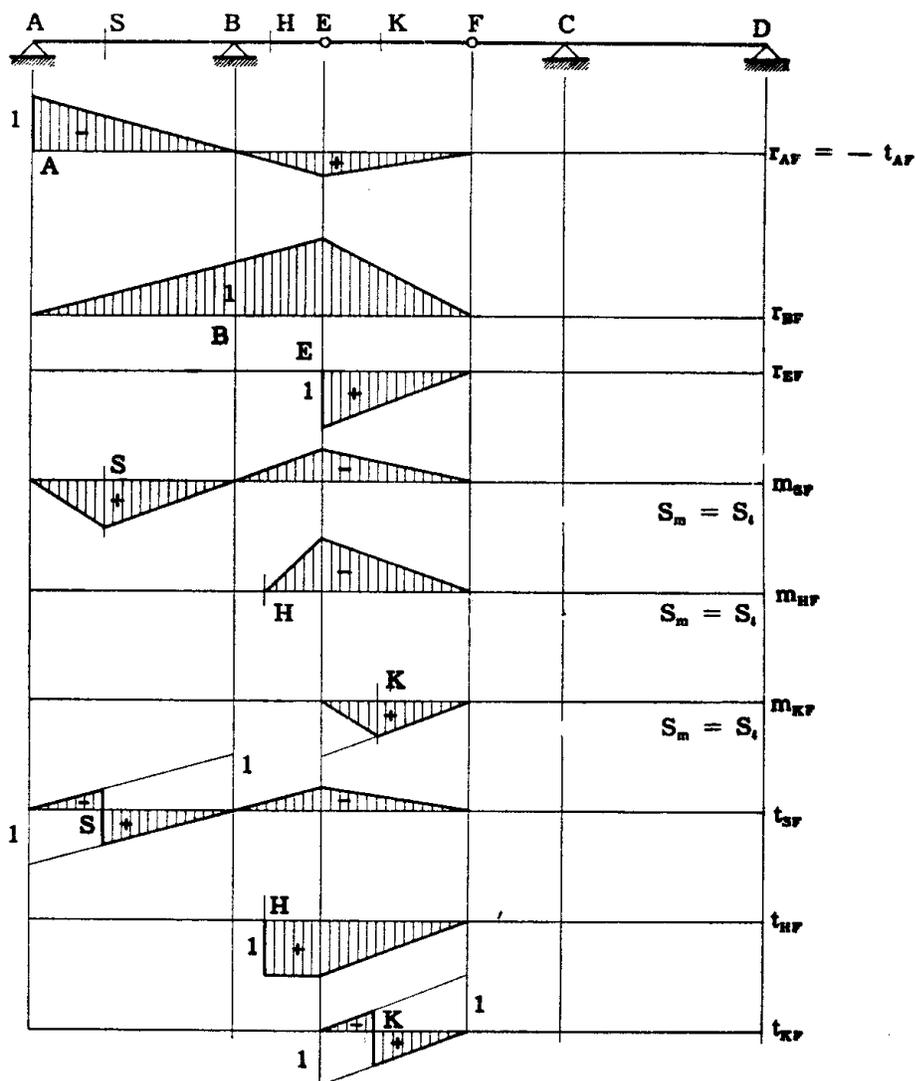


FIG. 7-64

m_{HF} , m_{KF} , linee d'influenza del momento in H e in K.

t_{SF} , t_{HF} , t_{KF} , linee d'influenza del taglio in S, H, K; la scala di queste linee è la stessa, e coincide con quella delle linee d'influenza delle reazioni, e con quella delle altre linee di influenza del taglio o delle reazioni descritte in questo paragrafo.

Nella fig. 7-65 sono riportate le linee d'influenza per una trave Gerber di tipo meno consueto:

\bar{m}_{AF} , linea d'influenza del momento d'incastro \bar{M}_A in A; il segno di questo momento si è assunto intendendolo come coppia reattiva, e quindi positivo se, agente sulla trave, è antiorario.

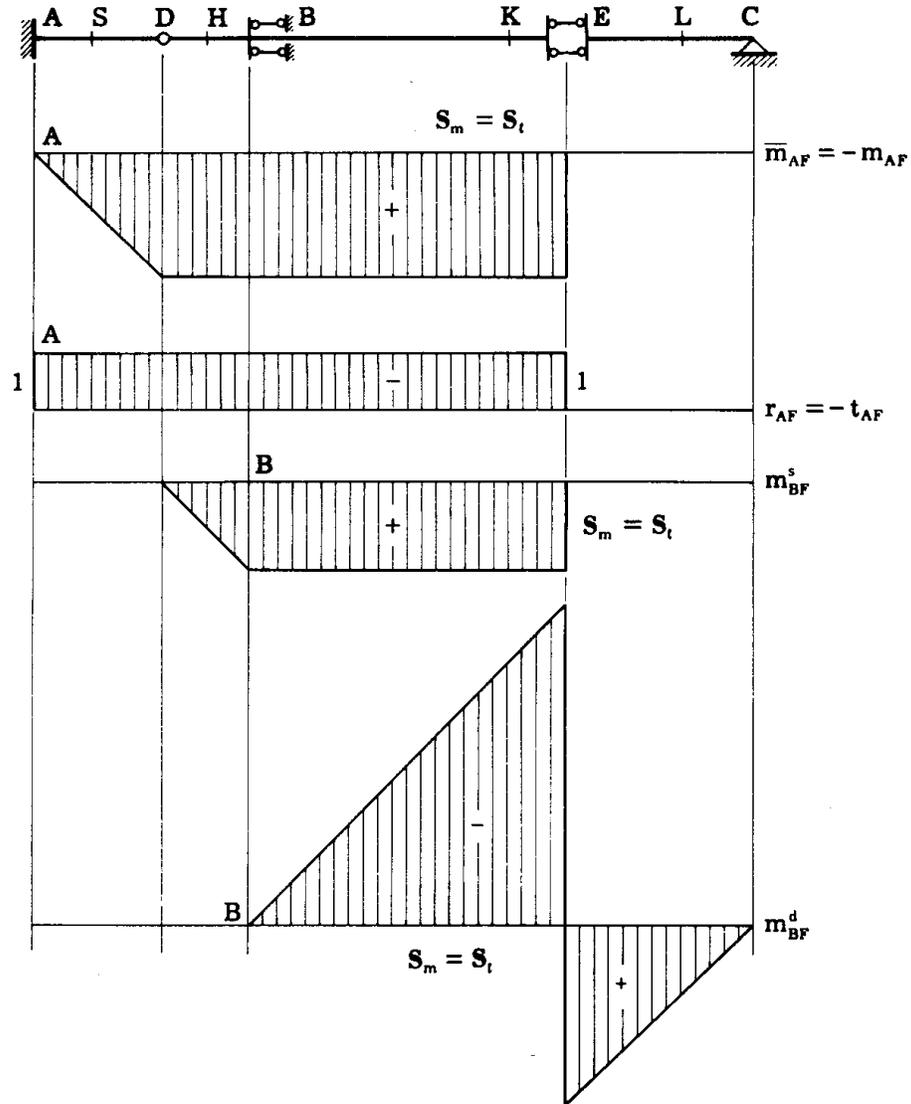


FIG. 7-65 a

r_{AF} , linea d'influenza della reazione in A, coincidente con quella del taglio in A cambiata di segno.

m_{BF}^s , linea d'influenza del momento nella sezione immediatamente a sinistra del vincolo in B.

m_{BF}^d , linea d'influenza del momento nella sezione immediatamente a destra del vincolo in B.

\overline{m}_{BF} , linea d'influenza della coppia reattiva esercitata dal vincolo B sulla

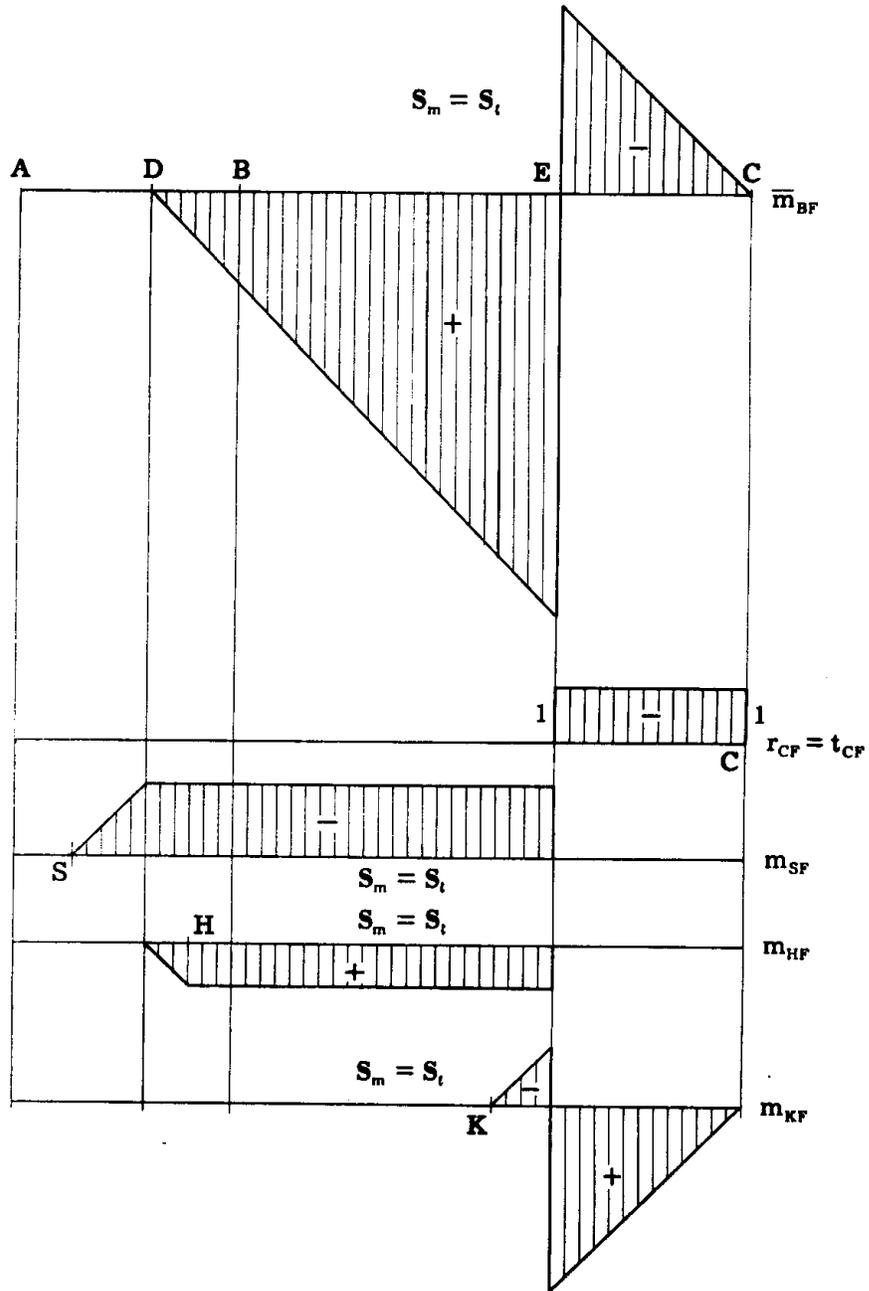


FIG. 7-65 b

trave. Tale coppia è intesa positiva se, agente sulla trave, ha verso antiorario; si verifica facilmente la relazione

$$\overline{m}_{BF} = m_{BF}^s - m_{BF}^d .$$

t_{CF} , linea d'influenza del taglio in C, coincidente con quella della reazione in C.

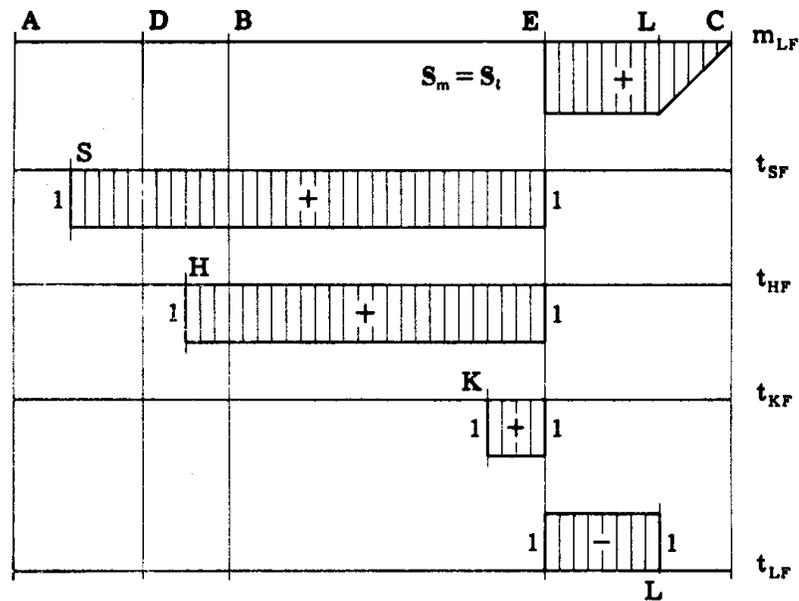


FIG. 7-65 c

m_{SF} , m_{HF} , m_{KF} , m_{LF} , linee d'influenza del momento in S, H, K, L.

t_{SF} , t_{HF} , t_{KF} , t_{LF} , linee d'influenza del taglio in S, H, K, L.