

CAPITOLO VI
LA STATICA DELLE TRAVI

1. Definizioni.

Si richiamano in questa sede alcune definizioni già date saltuariamente nei precedenti capitoli. Si dà il nome di *trave* o *struttura monodimensionale* ad un solido in cui una dimensione predomina sulle altre due; essa può in ogni caso intendersi generata da una figura geometrica piana S che si muove in modo che il suo baricentro appartenga sempre ad una curva s ; durante il movimento il piano della figura S deve mantenersi sempre normale alla curva s , mentre la figura può comunque variare di forma.

La curva s prende nome di *asse* della trave, la figura S all'ascissa generica si chiama *sezione retta*, o *sezione normale*, della trave a quell'ascissa.

Si fa l'ipotesi — e in caso contrario se ne darà esplicito avviso — che la geometria della trave consenta l'uso dei risultati del De Saint-Venant; e cioè si ammette che il raggio di curvatura dell'asse sia così grande e le variazioni delle dimensioni della sezione così piccole, in rapporto alle dimensioni medie della sezione retta, da consentire l'assimilazione del generico tronco lungo $2d_e$ (Vol. II, Cap. II) ad un prisma. Ciò si esprime dicendo che si trattano le travi a *piccola curvatura* ed a *sezione debolmente variabile*.

Si definisce *trave piana* una trave il cui asse sia contenuto in un piano, e simmetrica rispetto a tale piano; se essa è simmetricamente caricata rispetto a tale piano, anche gli spostamenti sono simmetrici rispetto ad esso; in particolare, gli spostamenti dell'asse sono contenuti nel piano dell'asse stesso (*sistema monodimensionale piano*).

2. Le sollecitazioni esterne.

Si consideri il tronco elementare compreso tra la generica sezione retta S e quella che la precede alla distanza ds (fig. 6-1), ed un riferimento

cartesiano triortogonale avente l'origine nel baricentro di S , l'asse t normale alla sezione S ed orientato nel verso delle ascisse s crescenti, gli assi m ed n orientati in modo che la terna $m n t$ risulti destrorsa. Siano

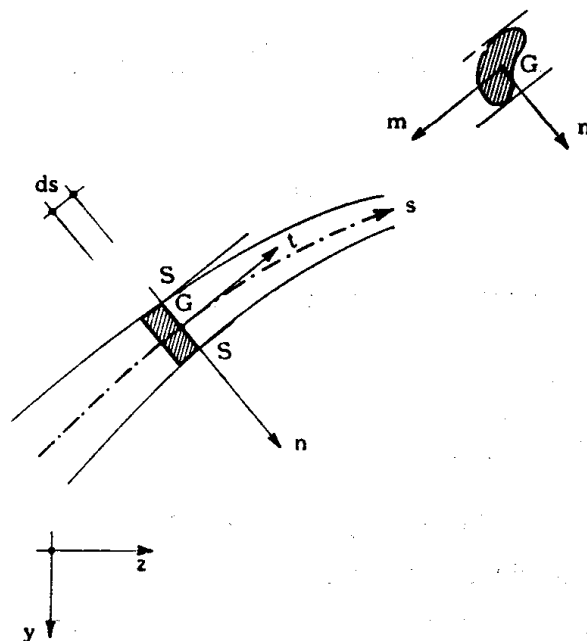


FIG. 6-1

dF_m , dF_n , dF_t e $d\mathcal{M}_m$, $d\mathcal{M}_n$, $d\mathcal{M}_t$ le componenti secondo gli assi $m n t$ del vettore forza $d\bar{F}$ e del vettore coppia $d\bar{\mathcal{M}}$ risultanti delle forze di massa e superficiali agenti sul tronco; le quantità

$$\begin{aligned}
 q_m &= \frac{dF_m}{ds} & m_m &= \frac{d\mathcal{M}_m}{ds} \\
 q_n &= \frac{dF_n}{ds} & m_n &= \frac{d\mathcal{M}_n}{ds} \\
 q_t &= \frac{dF_t}{ds} & m_t &= \frac{d\mathcal{M}_t}{ds}
 \end{aligned} \tag{1}$$

si chiamano *componenti secondo gli assi m, n, t del carico distribuito e della coppia distribuita lungo la trave*. La q_t è la *componente assiale del carico distribuito*, le q_m e q_n sono le *due componenti taglianti*, la m_t è la *componente torcente* della coppia distribuita, le m_m ed m_n le *componenti flettenti*.

Le dimensioni fisiche delle q sono $[F l^{-1}]$, quelle delle m sono $[F]$.

Sia le q che le m sono funzioni dell'ascissa s . Il vettore

$$\bar{q} = \frac{d\bar{F}}{ds}, \quad (2)$$

anch'esso funzione di s , si chiama *carico distribuito* lungo la trave; il vettore

$$\bar{m} = \frac{d\bar{\mathcal{M}}}{ds} \quad (3)$$

si chiama *coppia distribuita* lungo la trave.

Più esattamente la \bar{q} e la \bar{m} , e così le loro componenti, si definiscono — in modo analogo a quello seguito per definire le tensioni considerando i vettori $\Delta\bar{F}$ e $\Delta\bar{\mathcal{M}}$ agenti sul tronco di lunghezza Δs , e facendone il limite per $\Delta s \rightarrow 0$.

Se il valore di \bar{q} all'ascissa generica s è infinitamente grande, e il prodotto $\bar{q} \Delta s$ in s tende al limite \bar{F} per $\Delta s \rightarrow 0$, all'ascissa s agisce il *carico concentrato* \bar{F} ; analogamente si genera la *coppia concentrata* $\bar{\mathcal{M}}$.

Questi due casi sono però soltanto teorici, anche se spesso molto vicini alla realtà, perchè \bar{q} ed \bar{m} , per quanto grandi, non possono mai attingere un valore infinitamente grande, altro non fosse per ragioni di deformabilità dei materiali. Anche per \bar{F} ed $\bar{\mathcal{M}}$ si definiscono le tre componenti secondo gli assi $m n t$, analogamente a quanto fatto per le (6-1).

Con riferimento allo stesso tronco della fig. 6-1, siano $d\xi, d\eta, d\zeta$ le componenti secondo gli assi $m n t$ dello spostamento relativo, indipendente dalle forze applicate, tra le sezioni situate alle ascisse $s - ds$ ed s , e $d\varphi_m, d\varphi_n, d\varphi_t$ le componenti secondo gli stessi assi della rotazione relativa, indipendente dalle forze applicate, tra le stesse sezioni (questi spostamenti siano tali da rispettare la planeità delle sezioni).

Le componenti $d\xi, d\eta, d\zeta$ sono positive se gli spostamenti $\xi \eta \zeta$ della sezione all'ascissa s sono maggiori di quelli all'ascissa $s - ds$; e cioè se gli spostamenti della sezione all'ascissa s , considerata fissa la sezione all'ascissa $s - ds$, sono diretti secondo gli assi $m n t$. Ciò corrisponde a definire $d\xi = \xi_d - \xi_s$ etc., dove l'indice s è relativo all'ascissa $s - ds$, l'indice d all'ascissa s . Analoga considerazione può farsi per le rotazioni $d\varphi_m, d\varphi_n, d\varphi_t$.

Le quantità

$$\vartheta_m = - \frac{d\xi}{ds} \qquad \mu_m = - \frac{d\varphi_m}{ds}$$

$$\begin{aligned} \vartheta_n &= - \frac{d\eta}{ds} & \mu_n &= - \frac{d\varphi_n}{ds} \\ \lambda &= - \frac{d\zeta}{ds} & \omega &= - \frac{d\varphi_t}{ds} \end{aligned} \quad (4)$$

si chiamano *componenti secondo gli assi $m n t$ della distorsione di Volterra di traslazione relativa e di rotazione relativa distribuita lungo la trave*. La λ è la *distorsione di Volterra di spostamento assiale relativo*, e se positiva corrisponde ad un avvicinamento delle due sezioni distanti ds . Le ϑ_m e ϑ_n sono le *distorsioni di Volterra di scorrimento relativo*; se positive, la sezione all'ascissa s si sposta, rispetto a quella all'ascissa $s - ds$, nel verso negativo degli assi m ed n . Le μ_m e μ_n sono le *distorsioni di Volterra di rotazione flessionale relativa*; se positive, i vettori rappresentativi della rotazione della sezione all'ascissa s rispetto a quella all'ascissa $s - ds$ sono diretti nel verso negativo degli assi m ed n ; per esempio nel caso della fig. 6-1 per la μ_m positiva la faccia all'ascissa s ruota in verso orario ($t \rightarrow n$) rispetto a quella all'ascissa $s - ds$. La ω è la *distorsione di Volterra di rotazione torsionale relativa*; se positiva, il vettore rappresentativo della rotazione della sezione all'ascissa s rispetto a quella all'ascissa $s - ds$ è diretto nel verso negativo dell'asse t .

Nel caso dei sistemi monodimensionali piani le (6-1) si riducono alle q_n , q_t ed m_m , avendo scelto l'asse n contenuto nel piano yz dell'asse, e le (6-4) alle ϑ_n , λ e μ_m . Le definizioni fornite già al n. 14 del Cap. I rientrano in quelle delle (6-4), anche per quanto riguarda il segno.

Se il valore di μ_m all'ascissa generica s è infinitamente grande, e il prodotto $\mu_m \Delta s$ in s tende al limite D_{φ_m} per $\Delta s \rightarrow 0$, all'ascissa s agisce la *distorsione concentrata* di rotazione flessionale relativa D_{φ_m} ; analogamente si generano le altre distorsioni concentrate. In realtà anche le distorsioni concentrate, come le forze e le coppie, sono astrazioni, essendo sempre finita — per quanto piccola — la distanza tra le due sezioni tra le quali si genera una distorsione effettiva; a volte esse sono una comoda ipotesi di lavoro (linee d'influenza).

3. Le caratteristiche della sollecitazione interna.

Si effettui un taglio secondo la sezione retta S , e si rimuova (*) la parte di trave la cui normale in S (la normale è sempre orientata verso

(*) Se la struttura è *aperta* (§ 1-7), ciò può sempre farsi, perchè i vincoli possono essere sostituiti dalle reazioni; se è *chiusa* occorre effettuare un secondo taglio ad una ascissa successiva a quella di S , ed asportare il tronco.

l'esterno) è contraria a t (fig. 6-2). La risultante \bar{R} per G e la coppia risultante $\bar{\mathcal{M}}$ delle forze che la parte rimossa esercitava, prima del taglio, sulla parte restante, coincidono nelle strutture aperte con la risultante e la coppia risultante delle forze — ivi comprese le reazioni di vincolo —

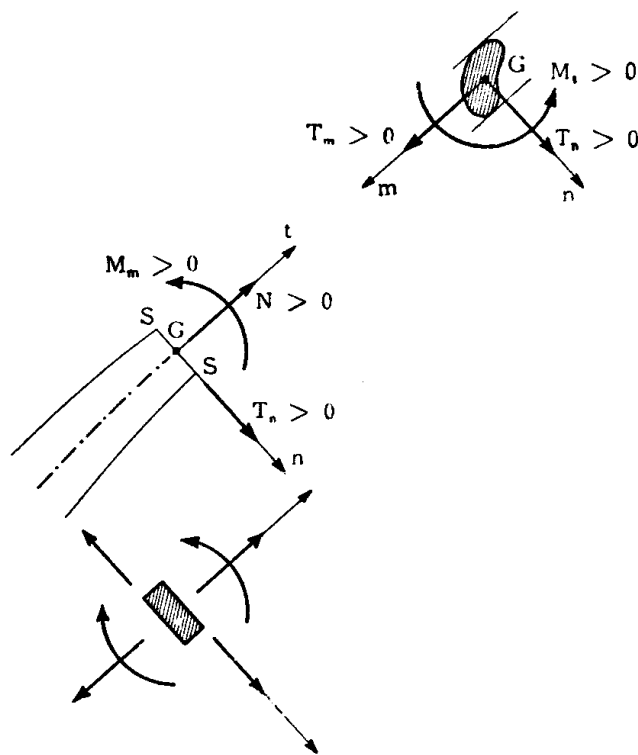


FIG. 6-2

agenti sulla parte rimossa, e sono uguali e contrari alla risultante ed al momento risultante delle forze agenti sulla parte restante; ciò per ragioni elementari di equilibrio. Le tre componenti di \bar{R} e di $\bar{\mathcal{M}}$ secondo gli assi m n t prendono nome di *caratteristiche della sollecitazione interna* in S ; esse sono, in particolare, le seguenti:

$$\begin{aligned}
 R_m &= T_m \text{ Sforzo di taglio secondo } m \\
 R_n &= T_n \text{ Sforzo di taglio secondo } n \\
 R_t &= N \text{ Sforzo normale} \\
 \mathcal{M}_m &= M_m \text{ Momento flettente relativo ad } m \\
 \mathcal{M}_n &= M_n \text{ Momento flettente relativo ad } n \\
 \mathcal{M}_t &= M_t \text{ Momento torcente.}
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Le sei componenti definite dalle (6-5), considerate come componenti di vettori, hanno segni opposti secondo che agiscano sulla faccia di normale concorde o contraria a t . Per evitare appunto questo inconveniente

ci si riferisce, nella definizione, ad una sola delle due facce; le (5-5) sono positive se, considerate come agenti sulla sezione retta di normale concorde a t , sono dirette nel verso positivo degli assi. Nella fig. 6-2 sono riportate le caratteristiche positive agenti su ambedue le facce del tronco elementare (*).

Le caratteristiche della sollecitazione interna già definite al § 6-4 del I Vol. rientrano nella definizione ora data, e sono con essa d'accordo anche nel segno. Così pure rientrano nell'attuale definizione le caratteristiche del solido di De Saint-Venant (§ 2-7 del II Vol.); è opportuno notare che queste variano lungo l'asse del solido secondo le leggi della mensola, mentre le (8-5) possono variare lungo l'asse della trave con qualsiasi legge, dipendentemente dai carichi applicati.

Si osservi pure che le distorsioni di Volterra definite dalle (8-4) e agenti sul tronco elementare, sono tali che, se positive, fanno compiere lavoro negativo alle caratteristiche della sollecitazione positive agenti sul tronco, e lavoro positivo alle caratteristiche stesse agenti sulle facce risultanti dall'asportazione del tronco.

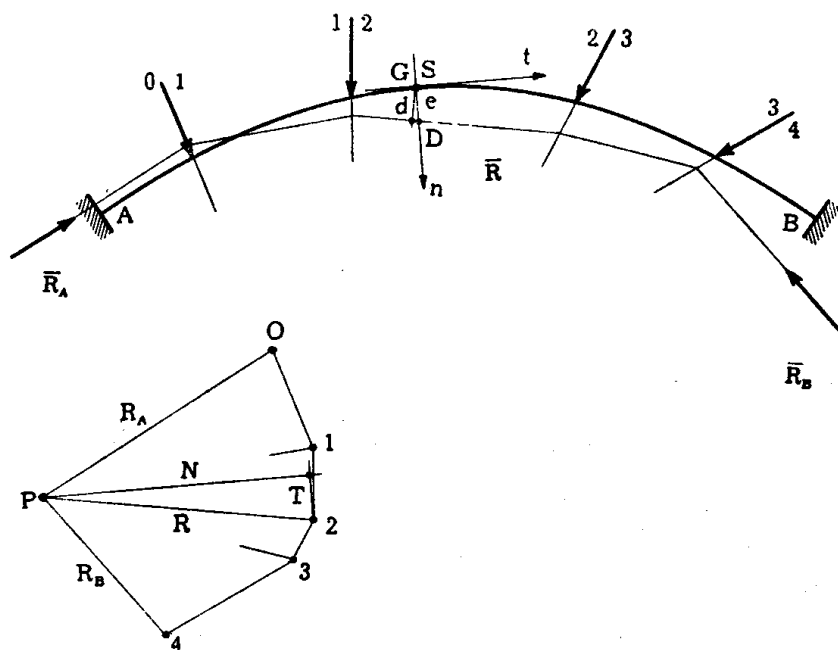


FIG. 6-3

Nel caso di un sistema monodimensionale piano AB (fig. 6-3), \bar{R} ed \bar{M} relativi a una generica sezione S si possono ridurre a una sola forza ri-

(*) Si osservi che, con la convenzione ora proposta, N è, comunque, positivo se di trazione.

Nel caso dei sistemi piani, si sceglie m normale al piano ed orientato verso il lettore; il verso $n \rightarrow t$ è così antiorario. Una volta fissato il verso di m , il segno del taglio è definito, non dipende cioè dal verso di t ; esso è positivo se, da qualsiasi delle due parti si guardi la trave, il taglio sulla faccia S di sinistra è diretto verso il basso, quello sulla faccia S di destra verso l'alto. Invece il momento flettente dipende dal verso di t e quindi di n ; esso è positivo se risultano tese le fibre dalla parte delle n positive, e cioè alla destra di t .

sultante \bar{R} contenuta nel piano del sistema; la \bar{R} è definita per ogni sezione in modo rapido ed elegante attraverso il tracciamento del *poligono delle successive risultanti*, e cioè del poligono funicolare che connette le forze applicate nell'ordine in cui esse si susseguono percorrendo l'asse della trave, e i cui lati estremi coincidono con le rette d'azione delle reazioni \bar{R}_A ed \bar{R}_B . Con riferimento ad una sezione S compresa tra le forze 1-2 e 2-3, le forze a sinistra sono la \bar{R}_A , la 0-1 e la 1-2, la cui risultante ha per intensità $\bar{R} = P-2$, e per retta d'azione il lato del poligono compreso tra le forze 1-2 e 2-3, come si riconosce componendo successivamente le forze \bar{R}_A , 0-1, 1-2. I valori di N e $T_n = T$ si ottengono decomponendo \bar{R} secondo n e t , rispettivamente normale e tangente all'asse della trave in S.

Circa i segni si riconosce che nel caso in esame \bar{R} è diretta nel verso P-2 se considerata come risultante delle forze a sinistra di S, e cioè come azione in S sulla faccia di destra, mentre è diretta nel verso 2-P se considerata come risultante delle forze a destra di S, e cioè come azione in S sulla faccia di sinistra. Su questa perciò, di normale concorde a t , N è di verso contrario a quello dell'asse t , e quindi negativo, T di verso contrario a quello di n , e quindi anch'esso negativo. Il momento $M_m = M$ è fornito da

$$M = R d = N e \quad (6)$$

ove d è la distanza del baricentro G di S dalla retta d'azione di \bar{R} , ed e (eccentricità) la stessa distanza misurata nella direzione di n , e cioè il segmento di n compreso tra il baricentro di S e il punto d'incontro D di n con la retta d'azione di \bar{R} ; infatti scomponendo la \bar{R} in D nei due vettori N e T, il momento di \bar{R} rispetto a G è pari alla somma dei momenti di N e di T; il primo è pari a $N \cdot e$, il secondo è nullo. Circa il segno, nel caso in esame M, supposto agente sulla faccia di normale concorde a t , è orario ($t \rightarrow n$) e perciò negativo.

4. I vincoli.

Si considerano in questa sede le strutture ed i vincoli con riferimento ai soli sistemi monodimensionali piani. Il tipo di vincolo più generale è quello che costringe un punto della struttura su una superficie (§ 5-1 del Vol. I); da esso deriva il vincolo che costringe un punto su una curva, intersezione di due superfici, o che immobilizza il punto stesso all'incontro di tre superfici. Si sa dalla Meccanica Razionale che agli effetti statici un vincolo può essere sostituito da una forza, detta *reazione vincolare*; essa

in assenza di attriti è applicata al punto vincolato, ed è normale alla superficie di vincolo, se il punto è obbligato su una superficie, o giace nel piano normale alla curva di vincolo, se il punto è obbligato su una curva.

Nel caso dei sistemi monodimensionali piani, ogni sezione retta, considerata come rigida, ha tre gradi di libertà (corrispondenti per esempio alle coordinate di un punto, e al coefficiente angolare di una retta).

Un vincolo che interessi la sezione annulla uno (vincolo semplice) due (vincolo doppio) o tre (vincolo triplo) gradi di libertà.

Per esempio, un punto A di S sia obbligato sulla retta a ; i gradi di libertà si riducono a due, poichè del punto A può fissarsi ad arbitrio una sola coordinata; il possibile movimento della sezione, nell'ipotesi di piccoli spostamenti, è una rotazione intorno ad un asse normale al piano yz e la cui traccia si trovi sulla normale per A alla retta a . La reazione \bar{R}

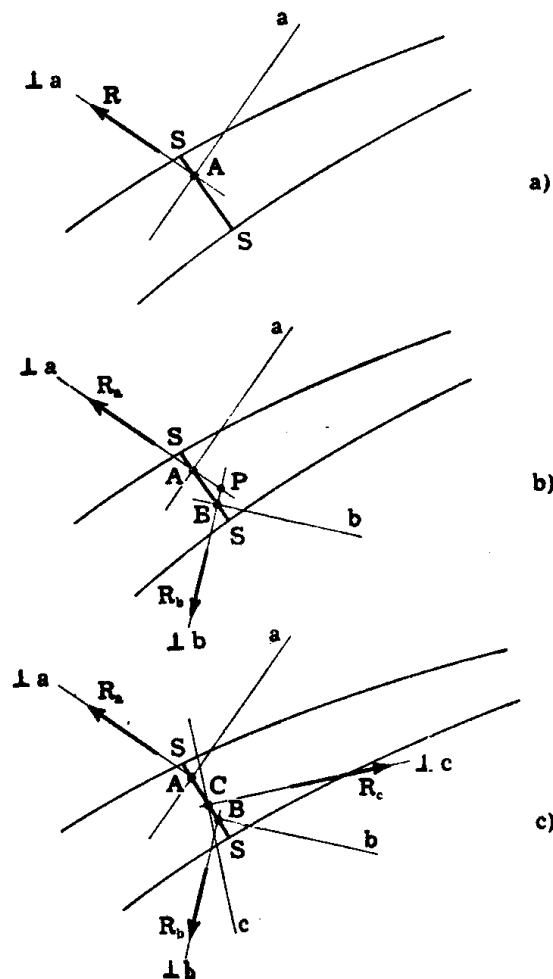


FIG. 6-4

passa per A ed è normale ad a (fig. 6-4 a); essa è perciò definita da un solo parametro.

Se sono due i punti vincolati, A sulla retta a e B sulla retta b

(fig. 6-4 b), i gradi di libertà si riducono ad uno, poichè nessuna delle due coordinate di P, punto d'incontro della normale ad a per A e della normale a b per B, può essere fissata ad arbitrio; il possibile movimento della sezione è una rotazione intorno ad un asse normale al piano yz e di traccia P. La reazione \bar{R} passa per P, e può avere una componente finita normale ad a ed una normale alla b ; essa ha perciò qualsiasi valore e direzione, ed è definita da due parametri, per esempio le sue componenti normali alle rette a e b .

Se i punti vincolati sono tre, A su a , B su b e C su c (fig. 6-4 c), e le normali in A, B, C, alle tre rette $a b c$ non concorrono in un punto, le tre libertà sono tutte e tre annullate. La reazione \bar{R} può essere qualsiasi in valore e retta d'azione, ed è perciò definita da tre parametri, per esempio le sue componenti normali alle rette $a b c$.



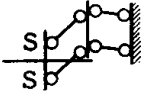

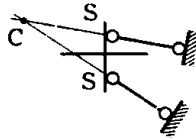
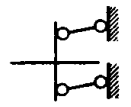

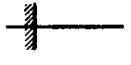
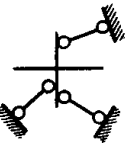
Vincoli semplici	 Appoggio scorrevole	 Pendolo	 Pendolo improprio	
Vincoli doppi	 Cerniera reale	 Cerniera ideale	 Bipendolo	 Incastro scorrevole
Vincoli tripli	 Incastro	 Tripendolo		

FIG. 6-5

Il vincolo semplice si realizza (fig. 6-5) mediante un *appoggio scorrevole*, o un *appoggio pendolare* (*pendolo* o *biella*). Il punto vincolato può spostarsi soltanto secondo la parallela alla traccia del piano di scorrimento dell'appoggio, o secondo la normale (si è nell'ambito dei piccoli spostamenti) all'asse del pendolo; la retta d'azione della reazione è normale alla traccia del piano di scorrimento dell'appoggio, e coincide con l'asse del pendolo.

Il vincolo doppio si realizza con una *cerniera*, o con due appoggi pendolari.

Se i due pendoli sono paralleli, il punto P intorno a cui la sezione può ruotare è il punto improprio della direzione comune agli assi dei due pendoli, e cioè la sezione può soltanto traslare secondo la normale a tale direzione. La reazione del vincolo è composta di due forze aventi per rette d'azione gli assi dei pendoli; e cioè, può anche dirsi, di una forza avente per retta d'azione la retta passante per il baricentro della sezione e parallela agli assi dei pendoli, e di una coppia; o anche di una forza parallela all'asse dei pendoli, ed avente rispetto alla suddetta retta una certa eccentricità. Questo vincolo è il *bipendolo* o *cerniera impropria*; un suo caso particolare (asse dei pendoli normale all'asse della trave) è l'*incastro scorrevole*, che può anche essere realizzato mediante un cuscinetto, o due guide lubrificate.

Il vincolo triplo, o *incastro completo*, o più semplicemente *incastro*, si realizza bloccando la sezione al suolo, o anche vincolando con tre pendoli ad assi non concorrenti due o tre punti della sezione. La reazione è qualsiasi; come suoi parametri possono prendersi le componenti secondo due rette ortogonali del piano e il momento rispetto a un punto del piano, in particolare rispetto al baricentro della sezione.

I pendoli che vincolano la sezione possono anche interessare punti rigidamente collegati alla sezione, ma esterni ad essa. Come caso particolare interessante si addita quello del pendolo avente per retta d'azione la retta impropria; esso può essere in pratica realizzato (fig. 6-5) con due bipendoli, rappresentando ognuno di essi con la sua direzione uno dei due estremi del pendolo ad asse improprio. Questo vincolo, che può chiamarsi pendolo improprio, o *incastro semplice*, è un vincolo semplice; infatti esso impedisce solo la rotazione della sezione, consentendo qualsiasi traslazione. La reazione corrispondente è una forza avente per retta d'azione la retta impropria, e cioè una coppia.

Si è considerata la sezione retta come rigida per potere classificare i vincoli in semplici, doppi e tripli in base alle tre libertà che essa così possiede. La sezione retta generica si comporta però come rigida, e cioè si conserva piana, solo se è soggetta a tensioni da sforzo assiale e da momento flettente distribuite alla De Saint-Venant. Ciò in realtà non accade, sia per la presenza del taglio, sia per il divario tra la distribuzione reale delle tensioni e quella alla De Saint-Venant, divario dovuto all'azione del vincolo sulla sezione stessa. Nella teoria tecnica delle travi, però, si ammette — e di ciò si è già detto nel § 1-1 — che gli spostamenti dei punti della sezione dovuti alla deformazione di tutta la struttura, per i quali la sezione non si ingobba, siano preponderanti rispetto a quelli connessi con l'ingobbimento, dovuti alla sollecitazione tagliente locale, ed al divario fra l'effettiva distribuzione delle tensioni e quella alla De Saint-Venant in relazione alla presenza della reazione vincolare.

Si potrebbe obiettare che proprio nei riguardi delle sezioni vincolate spesso gli spostamenti dovuti alle deformazioni del complesso della struttura non sono preponderanti rispetto a quelli dell'ingobbimento; si pensi per esempio ad un incastro. Si tenga presente però che in definitiva ciò che interessa conoscere sono le caratte-

ristiche della reazione di vincolo, e non la legge secondo cui tale reazione è distribuita sulla sezione; tali caratteristiche si valutano con ragionamenti di congruenza — quale che sia il metodo di calcolo in pratica seguito — e cioè uguagliando gli spostamenti della sezione dovuti alle forze applicate a quelli provocati dalla reazione, cambiati di segno. Sia i primi che i secondi spostamenti sono preponderanti rispetto a quelli connessi con l'ingobbimento della sezione, e perciò nel calcolo delle caratteristiche della reazione questi ultimi possono essere trascurati. Si avverte che quanto detto in questa sede si estende ai sistemi spaziali considerando, con il taglio, il momento torcente. Si avverte pure che degli effetti del taglio e del momento torcente lungo tutta la struttura sugli spostamenti della sezione si tiene conto attraverso gli spostamenti relativi medi e la rotazione torsionale relativa media tra le basi dei diversi tronchi elementari.

Il vincolo *perfetto* è quello che elimina del tutto uno o più gradi di libertà della sezione; in realtà nessun vincolo è perfetto, e quindi esso riduce, ma non annulla le possibilità di spostamento connesse con i parametri lagrangiani che esso impegna. Il vincolo presenta cioè dei *cedimenti*: un appoggio presenta spostamenti del punto vincolato normali al suo piano di scorrimento, una cerniera presenta spostamenti del punto vincolato secondo due rette del piano, un incastro presenta due traslazioni e una rotazione della sezione vincolata. Tali cedimenti sono di due tipi distinti: *anelastici*, indipendenti cioè dalle corrispondenti reazioni, e quindi dalle forze applicate (imposti, per così dire, dal vincolo alla struttura) ed *elastici*, dipendenti cioè dalle corrispondenti reazioni, ed annullantisi con esse.

Si fa l'ipotesi che il legame tra i cedimenti elastici e le corrispondenti reazioni sia lineare, e ciò equivale a dire che anche il legame tra i cedimenti elastici e le forze applicate è lineare; di più, quasi sempre si ammette che le componenti del cedimento elastico dipendano solo dalle corrispondenti componenti della reazione totale del vincolo e siano perciò ad esse proporzionali, ciascuna secondo una propria costante. Ciò spesso segue dalla stessa costituzione del vincolo.

In un incastro la rotazione elastica della sezione intorno al baricentro è, in tale ipotesi, proporzionale al momento della reazione rispetto a tale punto, e indipendente dalle due componenti della reazione stessa; e così la traslazione elastica verticale della sezione è proporzionale alla componente verticale della reazione, e indipendente dalla componente orizzontale e dal momento.

Come già noto i cedimenti sono positivi se avvengono nel verso positivo degli assi (in particolare, la rotazione è positiva se nel verso $y \rightarrow z$); le componenti della reazione sono positive se, intese come azioni del vincolo sulla struttura, sono dirette secondo gli assi (in particolare, il momento d'incastro è positivo se nel verso $y \rightarrow z$) (*).

(*) Se la reazione ha direzione definita (es. pendolo) può fissarsi il segno per la reazione totale invece che per le sue componenti, con riferimento a quella

Il generico cedimento elastico Δ_{ej} avviene nello stesso verso della reazione esercitata dalla struttura sul vincolo; perciò può porsi, chiamando R_j la corrispondente componente della reazione,

$$\Delta_{ej} = - c_j R_j \quad (7)$$

ove c_j è la *costante elastica di cedimento*, o *cedibilità elastica*, del vincolo. Per esempio un pendolo di lunghezza l , area A e modulo elastico E è un

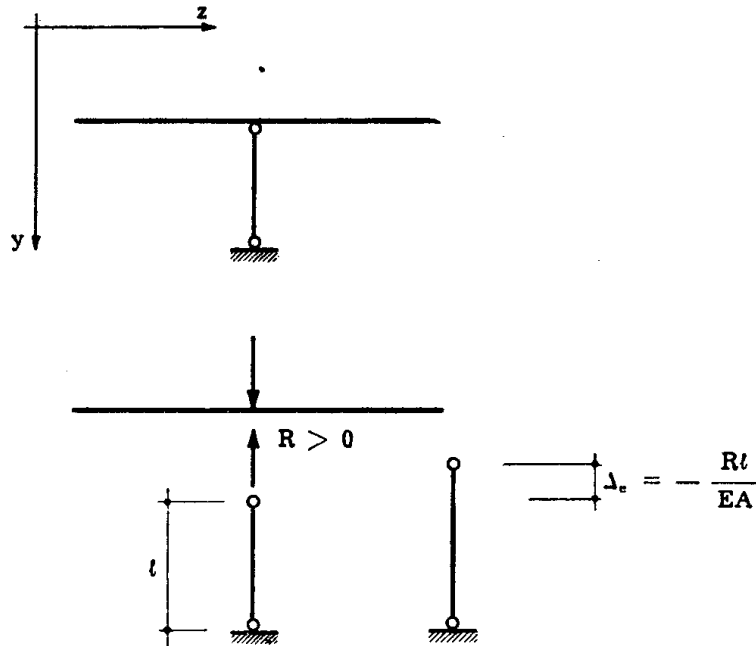


FIG. 6-6

vincolo semplice con cedibilità elastica (fig. 6-6)

$$c = \frac{l}{EA} \quad (a)$$

e presenta un cedimento elastico

$$\Delta = - \frac{R l}{EA} \quad (b)$$

Un bipendolo invece (fig. 6-7) presenta una cedibilità secondo la direzione dei pendoli pari a

$$c_R = \frac{l}{2 EA} \quad (c)$$

esercitata dal vincolo sulla struttura. Il cedimento è positivo se quest'ultima reazione compie per esso lavoro positivo.

e una cedibilità alla rotazione pari a

$$c_M = \frac{2l}{EAh^2} \quad (d)$$

Quelli finora esaminati sono i *vincoli esterni*, che vincolano una o più punti della struttura al suolo. Un vincolo può anche però impedire gli spo-

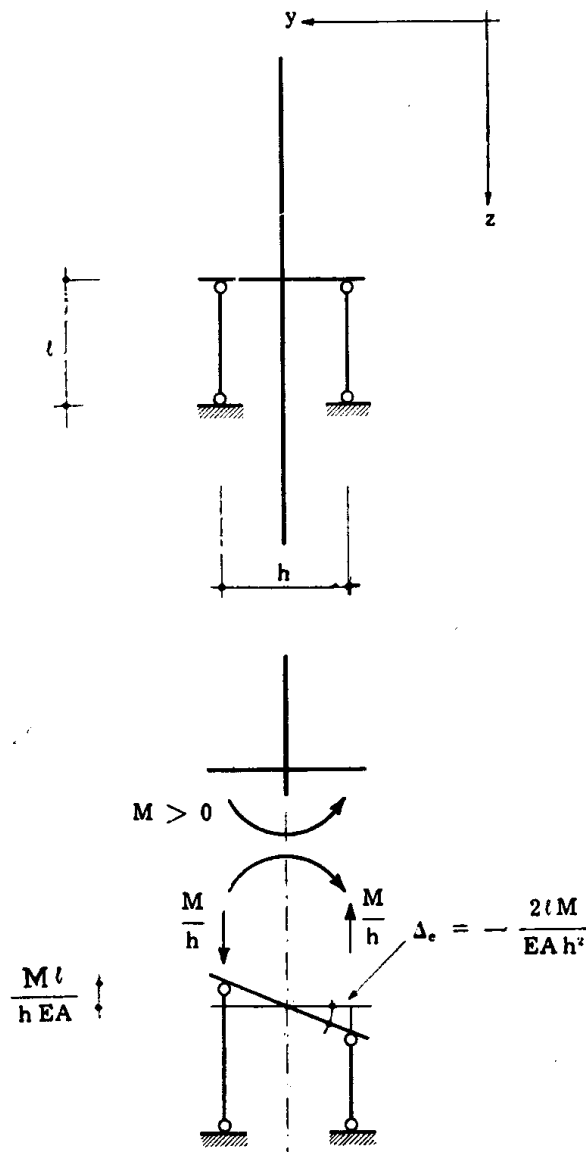


FIG. 6-7

stamenti relativi tra due punti (*), o tra due sezioni (*vincolo interno*); in questo caso si sostituisce alla componente assoluta dello spostamento quel-

(*) Per spostamento relativo tra due punti si intende la variazione della distanza tra i punti stessi.

la *relativa*, ed alla forza esercitata dal suolo sulla struttura (reazione) le due forze uguali e contrarie che il vincolo esercita sulla struttura (*reazioni interne o interazioni*).

Le interazioni sono positive quando, considerate come azioni del vincolo sulla struttura, hanno un determinato verso; per esempio, con riferimento ad un pendolo (fig. 6-8), quando sono concorrenti (*pendolo ti-*

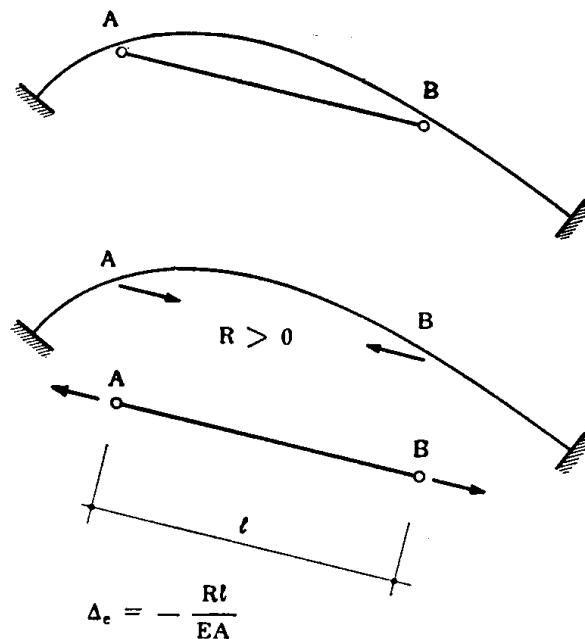


FIG. 6-8

rante). Gli spostamenti relativi sono positivi se per essi le corrispondenti reazioni positive agenti sulla struttura compiono lavoro positivo. I cedimenti relativi elastici sono perciò anche in tal caso sempre di segno contrario a quello della reazione corrispondente; per esempio, nel caso della fig. 6-8, se la reazione è positiva il cedimento elastico tra A e B corrisponde ad un allungamento del pendolo, e cioè ad un allontanamento dei due punti A e B, e quindi è negativo.

Spesso le due sezioni vincolate sono a contatto, come quelle derivanti da un taglio della trave secondo una sezione retta. In tal caso le interazioni coincidono con le caratteristiche della sollecitazione interna, e la coincidenza si estende anche ai segni, se per le interazioni si adotta la stessa convenzione delle caratteristiche. Se il vincolo è triplo, le tre caratteristiche sono tutte diverse da zero, e possono assumere ciascuna qualsiasi valore. Se il vincolo è doppio, o una caratteristica è nulla, o le tre caratteristiche sono legate da una relazione lineare; per esempio un bipendolo con gli assi paralleli all'asse della trave annulla il taglio, mentre un bipendolo qualsiasi impone (fig. 6-9) la condizione che T ed N diano

una risultante parallela all'asse del pendolo:

$$T \cos \alpha + N \sin \alpha = 0 .$$

Se il vincolo è semplice, o due caratteristiche sono nulle, o tra le tre

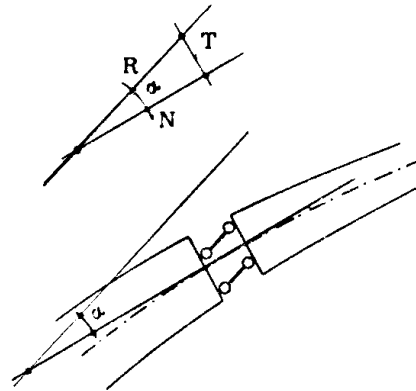


FIG. 6-9

caratteristiche esistono due relazioni lineari.

Nella fig. 6-10 sono classificati i vari tipi di *vincoli interni tra sezioni a contatto*, a seconda delle caratteristiche che annullano, e la loro

Sconnessioni semplici	 $M = 0$	 $T = 0$	 $N = 0$
Sconnessioni doppie	 $M = T = 0$	 $M = N = 0$	 $N = T = 0$
Sconnessione tripla	 $M = T = N = 0$		

FIG. 6-10

simbologia grafica; essi prendono anche nome di *snodi* o *sconnessioni interne*, e si classificano come *sconnessioni semplici, doppie* o *triple* secondo

che il vincolo è doppio, semplice, o non esiste affatto. Si avverte che si può parlare di sconnessioni interne anche quando i vincoli tra le due facce non sono tali da annullare una, due o tre caratteristiche della sollecitazione (fig. 6-9); infatti effettuare una sconnessione semplice in corrispondenza di una sezione retta significa, in senso lato, tagliare la trave secondo quella sezione, e al vincolo triplo che prima esisteva tra le due sezioni sostituire un vincolo doppio, qualunque esso sia, in modo da concedere una libertà lagrangiana qualsiasi al moto relativo tra le due sezioni risultanti dal taglio.

Si osservi che un tronco elementare di lunghezza ds non è altro che un vincolo triplo tra le due sezioni della struttura che esso unisce. Esso presenta le tre costanti elastiche

$$c_M = \frac{ds}{EI}$$

$$c_N = \frac{ds}{EA}$$

$$c_T = \chi \frac{ds}{GA}$$

relativamente alle componenti della reazione interna. Queste ultime si prendono coincidenti, anche in segno, con le caratteristiche MNT. I cedimenti elastici sono

$$d\varphi_e = - M \frac{ds}{EI}$$

$$d\zeta_e = - N \frac{ds}{EA}$$

$$d\eta_e = - T\chi \frac{ds}{GA}$$

I cedimenti anelastici sono invece

$$d\varphi_a = \mu ds$$

$$d\zeta_a = \lambda ds$$

$$d\eta_a = \vartheta ds$$

ove μ λ ϑ sono le distorsioni di Volterra, con il loro segno. In tal senso, come già avvertito al Cap. I, le distorsioni possono intendersi come cedimenti vincolari anelastici.

5. Strutture labili, isostatiche, iperstatiche.

Dal punto di vista della Meccanica Razionale una struttura monodimensionale può considerarsi come un sistema di parti indeformabili, vincolate tra loro e con il suolo.

Tale sistema può avere dei gradi di libertà (sistema olonomo); in tal caso esso è *labile*, e l'*ordine di labilità* è il numero dei gradi di libertà.

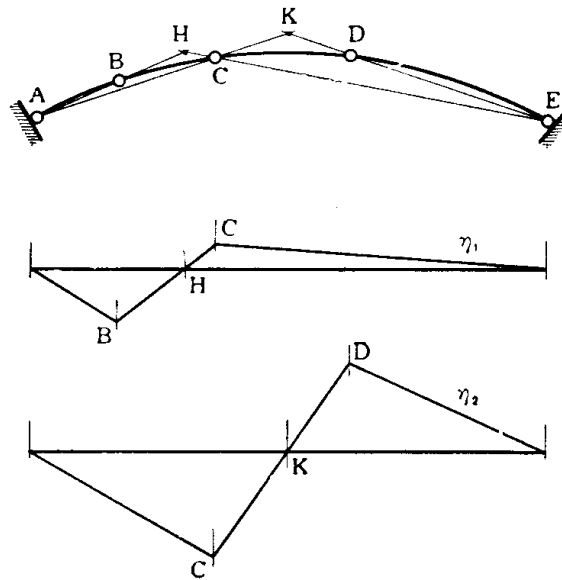


FIG. 6-11

L'arco a cinque cerniere della fig. 6-11 è due volte labile; gli spostamenti corrispondenti ai due gradi di libertà si possono ottenere bloccando prima la cerniera D (def. η_1) e poi la cerniera B (def. η_2); qualunque pos-

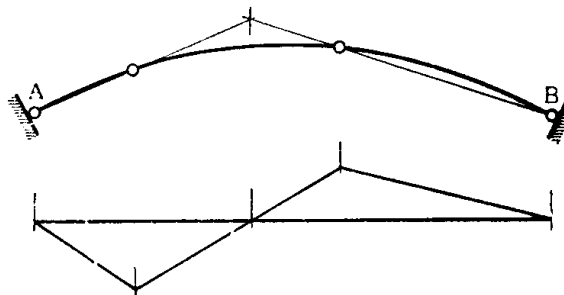


FIG. 6-12

sibile spostamento è combinazione lineare di quelli relativi ai due gradi di libertà. L'arco a quattro cerniere (fig. 6-12) è invece una sola volta labile, e ad esso corrisponde un unico possibile spostamento, definito a meno di

una costante (per *spostamento* si intende, conformemente alla simbologia della Meccanica Razionale, un insieme di spostamenti connessi con un possibile atto di moto rigido, e cioè un insieme di spostamenti rispettanti le condizioni di rigidità e di vincolo, e piccoli nel senso noto). A volte si distingue una *labilità per vincoli esterni* da una *labilità per vincoli interni*; la prima è dovuta ad insufficienza o cattiva disposizione di vincoli esterni (che devono essere, o equivalere, per lo meno a tre vincoli semplici nei sistemi piani, e a sei nelle strutture spaziali e, come si osserverà presto, devono essere sistemati in modo che siano evitate particolari condizioni); la seconda si ha quando una struttura, privata dei vincoli esterni, diviene labile di ordine ≥ 4 nei sistemi piani, ≥ 7 nelle strutture spaziali.

Nelle figg. 6-13, 6-20 e 6-21 sono riportati esempi del primo caso, nelle figg. 6-11, 6-12, 6-14, 6-15, 6-18 sono riportati esempi del secondo.

Si avverte esplicitamente che una struttura labile per vincoli esterni è necessariamente labile, mentre una struttura labile per vincoli interni può non essere labile, per sovrabbondanza di vincoli esterni.

Si sa dalla Meccanica Razionale che condizione necessaria e sufficiente perchè una configurazione di un sistema labile sia di equilibrio sotto un

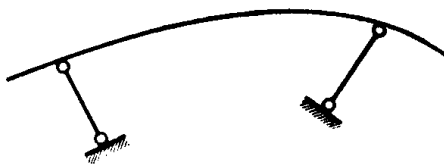


FIG. 6-13

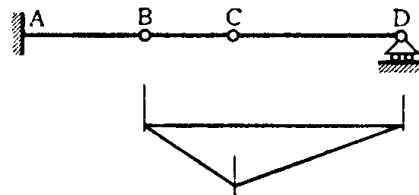


FIG. 6-14

determinato insieme di forze applicate è l'annullarsi del lavoro del primo ordine compiuto da queste forze per qualsiasi spostamento; perciò solo



FIG. 6-15

particolari sistemi di forze possono essere applicati sui sistemi labili; da questa circostanza deriva l'aggettivo *labile*.

Il principio dei lavori virtuali permette, come è noto, di conoscere il valore della componente di una reazione vincolare se la soppressione del vincolo corrispondente conferisce alla struttura un grado di libertà; in tal caso la struttura si dice *isostatica rispetto a quella componente di reazione*

vincolare, nel senso che quella componente è ottenibile attraverso le sole leggi della statica dei corpi rigidi. Una struttura può essere isostatica rispetto a tutte le reazioni esterne ed interne; ciò accade, per esempio, per l'arco a tre cerniere della fig. 6-15, per il telaio ad una maglia (quadro) della fig. 6-21, per la struttura reticolare della fig. 6-32. Può invece accadere che una struttura sia isostatica solo rispetto ad alcune reazioni. Per esempio la trave della fig. 6-18 è isostatica solo rispetto alla reazione

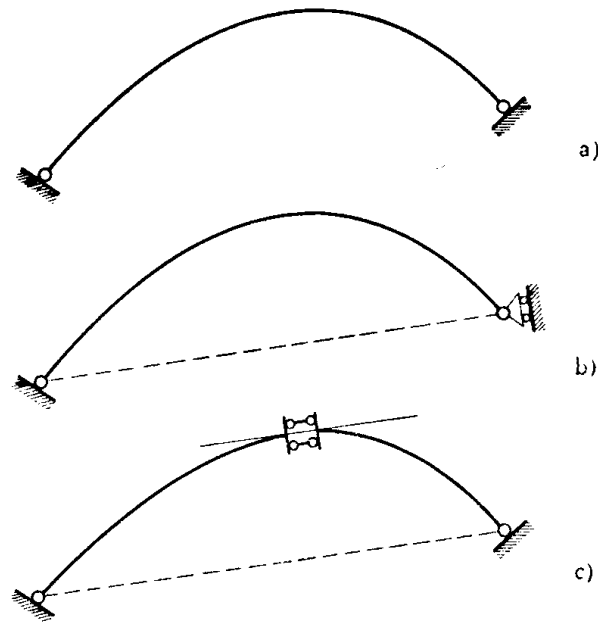


FIG. 6-16

dell'appoggio C e della cerniera intermedia. L'arco a due cerniere è isostatico rispetto alle componenti delle due reazioni di imposta normali alla congiungente le cerniere (fig. 6-16 b) ed al taglio nella sezione la cui



FIG. 6-17

normale è parallela alla stessa congiungente (fig. 6-16 c). Il telaio della fig. 6-19 è isostatico solo rispetto alle reazioni esterne.

E' opportuno precisare che ogni struttura labile può essere nello stesso tempo isostatica; per esempio la struttura della fig. 6-13 è labile ed isostatica, nel senso che se la trave è soggetta ad un sistema di forze la cui risultante passi per il punto d'incontro dei due pendoli la configurazione è di equilibrio, e qualsiasi reazione (esterna o interna) può essere calcolata eliminando il vincolo re-

lativo, perchè in qualsiasi caso questa eliminazione introduce un nuovo grado di libertà; così pure è labile ed isostatica per le reazioni esterne la struttura della fig. 6-20, labili per vincoli esterni ed isostatiche per tutte le reazioni interne quelle delle figg. 6-21 e 6-32.

E' ormai invalso nell'uso corrente, e nel seguito si seguirà quest'uso, definire con il solo aggettivo *isostatica* una struttura non labile e isostatica rispetto a tutte le reazioni (fig. 6-15); con l'aggettivo *isostatica per vincoli interni* una struttura che, privata dei vincoli esterni, sia caratterizzata dalle sole tre libertà del moto piano dei sistemi rigidi, e isostatica nei riguardi di tutte le reazioni interne (figg. 6-21 e 6-32); con l'aggettivo *isostatica per vincoli esterni* una struttura che nei riguardi dei soli vincoli esterni — e cioè nell'ipotesi che gli eventuali vincoli interni siano solidificati — sia non labile e isostatica, come quelle riportate nelle figure 6-19 e 6-22.

Una struttura isostatica può non essere isostatica sia per vincoli interni che per vincoli esterni; l'arco a tre cerniere (fig. 6-15) non è isostatico, ma labile, per vincoli interni, e non è isostatico per vincoli esterni.

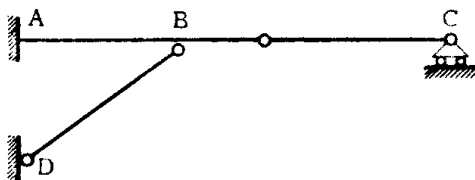


FIG. 6-18

Una struttura è *iperstatica nei riguardi di una componente di una reazione vincolare* se, soppresso il vincolo semplice corrispondente, la struttura non acquista un grado di libertà; se, cioè, quella componente di reazione non può essere determinata attraverso le sole leggi della statica dei corpi rigidi. Di qui deriva l'aggettivo *iperstatico*, nel senso che occorrono delle conoscenze che vanno al di là della statica dei corpi rigidi per la risoluzione del problema. Una struttura può essere iperstatica e labile (figg. 6-20, 6-26 b, 6-27 b, 6-28 b, 6-23 b, d, f) o iperstatica e non labile (figg. 6-19, 6-22, 6-23).

Generalmente si chiama con il solo aggettivo *iperstatica* una struttura in cui almeno una reazione è iperstatica, e cioè una struttura che non è isostatica nei riguardi di tutte le reazioni vincolari; *iperstatica per vincoli esterni* una struttura in cui i vincoli esterni sono sovrabbondanti rispetto a quelli necessari per vincolare completamente un corpo rigido nel piano o nello spazio; *iperstatica per vincoli interni* una struttura che, privata dei vincoli esterni, sia iperstatica rispetto ad almeno una reazione.

Una struttura iperstatica per vincoli esterni può essere nel complesso isostatica, come avviene nell'arco a tre cerniere, o labile, e ciò per virtù di labilità interne; invece una struttura iperstatica per vincoli interni è senz'altro iperstatica.

Si precisa fin da adesso che in una struttura iperstatica nei riguardi di tutte le reazioni, non è necessario ricorrere a cognizioni iperstatiche per ogni reazione o caratteristica che si voglia conoscere; è sufficiente infatti, assegnate le forze applicate, calcolare le reazioni corrispondenti ai vincoli che basta sopprimere per rendere la struttura isostatica, e così il problema è ricondotto ad un problema di statica dei corpi rigidi; solo il calcolo delle suddette reazioni (*iperstatiche*) deve essere condotto sfruttando conoscenze iperstatiche.

Per esempio nell'arco a due cerniere, iperstatico rispetto a tutte le reazioni che non siano le componenti di R_A ed R_B normali alla AB, è sufficiente conoscere il momento flettente in una generica sezione, e con questo il problema è ricondotto a quello dell'arco a tre cerniere.

L'arco con imposte incastrate (fig. 6-17) è iperstatico; in particolare, lo è rispetto a tutte le reazioni e caratteristiche.

La parte della struttura della fig. 6-18 compresa tra le sezioni A e B è iperstatica.

Il quadro delle figg. 6-19 e 6-20 è iperstatico per vincoli interni. La trave Vierendeel della fig. 6-22 è isostatica per vincoli esterni, e iperstatica per vincoli interni. Il telaio della fig. 6-23 è iperstatico nei riguardi di tutte le reazioni.

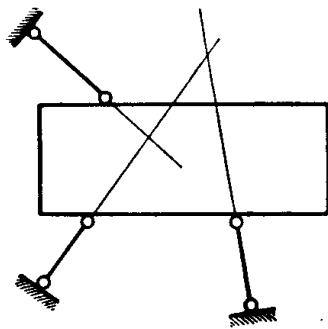


FIG. 6-19

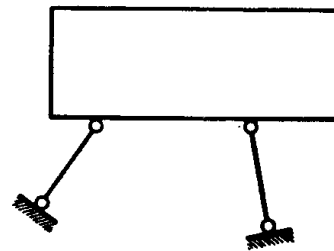


FIG. 6-20

Si dice *ordine di iperstaticità* il numero di vincoli semplici che occorre sopprimere (*) perchè la struttura diventi isostatica rispetto a tutte le reazioni. L'arco a due cerniere è così una volta iperstatico, l'arco incastrato tre volte iperstatico, la struttura della fig. 6-18 una volta iper-

(*) Si avverte che abbassare di un'unità l'ordine di un vincolo multiplo, o introdurre una sconnessione semplice, equivale ad eliminare un vincolo semplice; abbassare l'ordine del vincolo di n unità, o introdurre una sconnessione di ordine n , equivale ad eliminare n vincoli semplici.

statica, il quadro delle figg. 6-19 e 6-20 tre volte iperstatico. La trave Vierendeel della fig. 6-22 è costituita da dieci riquadri; basta tagliare

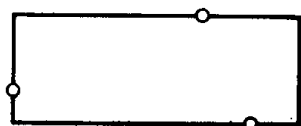


FIG. 6-21

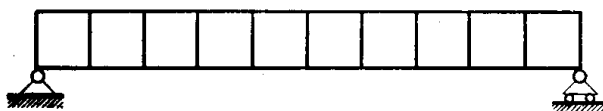


FIG. 6-22

dieci montanti per renderla isostatica, quindi essa è trenta volte iperstatica. Nel telaio della fig. 6-23 basta effettuare nove tagli per rendere la struttura isostatica, esso è perciò ventisette volte iperstatico.

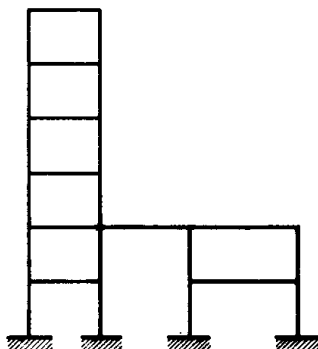


FIG. 6-23

Il metodo concettualmente più immediato per calcolare l'ordine di iperstaticità di una struttura è proprio quello utilizzato negli esempi precedenti, e cioè, seguendo la definizione, eliminare dei vincoli, finché la struttura diviene manifestamente isostatica rispetto a tutte le reazioni; il numero dei vincoli semplici (o equivalenti) eliminati fornisce il grado di iperstaticità. Il metodo, estremamente semplice, non sempre è facilmente applicabile; soprattutto la difficoltà consiste nel riconoscere se una struttura è isostatica, e mentre ciò non è difficoltoso per strutture semplici, lo diviene per strutture complesse.

Per esempio, si riconosce che la struttura della fig. 6-30 diviene isostatica eliminando il pendolo ML ; infatti la trave BH e quella HE , unite attraverso una cerniera in H e uno snodo FG , costituiscono un insieme isostatico, unito al suolo mediante tre vincoli semplici: il pendolo in H , il pendolo ideale AB (con estremo B improprio) e l'altro pendolo ideale (con asse coincidente con la retta impropria del piano) avente un estremo ideale nel punto improprio definito dal bipendolo D , e un altro estremo ideale nel punto d'incontro dell'asse del pendolo HI e dell'asse del pendolo

improprio E. Non altrettanto semplice è riconoscere invece l'isostaticità della struttura riportata nella fig. 6-29; si osserva che essa è due volte labile per vincoli interni (può schematizzarsi in un telaio chiuso con cinque cerniere, e perciò due volte labile), e che è pure due volte iperstatica per vincoli esterni, ma non si riconosce immediatamente l'acquisto di un grado di libertà per la soppressione di un vincolo.

Il metodo è molto pregevole anche perchè fornisce immediatamente il sistema principale e le incognite iperstatiche per la risoluzione attraverso il principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili, e contiene implicito il riconoscimento dell'efficacia o meno dei vincoli; però in alcuni casi più complessi — per fortuna solo pochi — esso non è, come già detto, agevolmente applicabile. Si può allora seguire il metodo che si passa ad esporre con riferimento ai sistemi piani, ma che è di carattere del tutto generale. Si eliminano tutti i vincoli esterni ed interni e si effettuano tagli secondo sezioni rette in modo che la struttura risulti scomposta in t parti, ciascuna isostatica per vincoli interni; in particolare, in t travi monoconnesse; è evidente che tale scomposizione può farsi in infiniti modi, conviene quello per cui t risulti minore. La struttura ha così in complesso $3t$ gradi di libertà, ed è isostatica. Si introducono poi i vincoli, calcolando il numero s di vincoli semplici equivalenti, e cioè il massimo numero di gradi di libertà che essi sono in grado di eliminare.

Si è adottata la dicitura «sono in grado di eliminare» e non quella «eliminano», perchè può darsi che un vincolo non sopprima alcun grado di libertà; per esempio un pendolo che unisce due punti di una trave non labile, come quelli LM ed LN della fig. 6-28 b, non elimina nessuna possibilità di movimento; in tal caso però la struttura è iperstatica rispetto a quel vincolo, e perciò il vincolo introduce un grado di iperstaticità. Quindi un vincolo di ordine r elimina r gradi di libertà, o introduce r gradi di iperstaticità. Se ne trae che, chiamando l l'ordine di labilità ed i l'ordine di iperstaticità della struttura, la somma s degli ordini dei vincoli introdotti in parte serve per eliminare $3t - l$ gradi di libertà, in parte per introdurre i gradi di iperstaticità:

$$s = 3t - l + i$$

da cui

$$3t - s = l - i . \quad (8)$$

Dalla (6-8) si trae che la condizione

$$3t - s > 0 \quad (e)$$

è sufficiente perchè la struttura sia labile; poichè infatti sia l che i sono positivi, la condizione $l - i > 0$ importa l'altra $l > 0$.

Essa non è necessaria, perchè può darsi che per $l - i \leq 0$ sia $l > 0$, dipendentemente dai valori di i ; in altre parole, può darsi che una struttura sia iperstatica e labile, e che l'ordine di iperstaticità uguagli o superi quello di labilità. Dalla (6-8) si trae

$$\begin{aligned} l &\geq 3t - s \\ i &\geq s - 3t. \end{aligned}$$

Dalla (6-8) si trae pure che la condizione

$$3t - s < 0 \quad (f)$$

è sufficiente perchè la struttura sia iperstatica; infatti la condizione $l - i < 0$ importa l'altra $i > 0$. Essa non è necessaria, perchè può darsi che per $l - i \geq 0$ sia $i > 0$, dipendentemente dai valori di l ; in tal caso la struttura è iperstatica e labile, e l'ordine di labilità uguaglia o supera quello di iperstaticità.

La condizione

$$3t - s = 0 \quad (g)$$

è necessaria per l'isostaticità del sistema; infatti se $3t - s > 0$ la struttura è labile, se $3t - s < 0$ è iperstatica; la (g) importa $l - i = 0$.

Inoltre la condizione

$$l = i = 0 \quad (h)$$

è per definizione sufficiente perchè la struttura risulti isostatica.

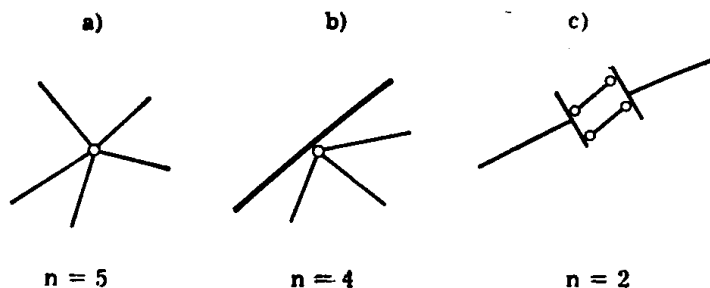


FIG. 6-24

Per quel che riguarda il computo dei gradi di libertà soppressi dai vincoli, si tenga presente che una cerniera interna nella quale concorrono n travi (*nodo cerniera*, fig. 6-24 a, b) elimina due gradi di libertà del movimento relativo tra la prima e la seconda trave, due gradi di libertà del movimento relativo tra la prima e la terza, e così via, e cioè in definitiva $2(n - 1)$ gradi di libertà. Un vincolo doppio costituito da due pendoli, in particolare un bipendolo, non può impegnare che due elementi

(fig. 6-24 c), e perciò sopprime due gradi di libertà (*). Un incastro interno, e cioè un nodo nel quale concorrono n travi le cui estremità non possono compiere movimenti relativi (*nodo incastro*) elimina $3(n-1)$ gradi di libertà. Un vincolo semplice, pendolo proprio od improprio, sottrae un grado di libertà. I vincoli esterni tripli, doppi o semplici cancellano rispettivamente tre, due o un grado di libertà.

Qualche cenno è opportuno circa le combinazioni di più vincoli, circa quelli cioè che potrebbero chiamarsi *vincoli misti*.

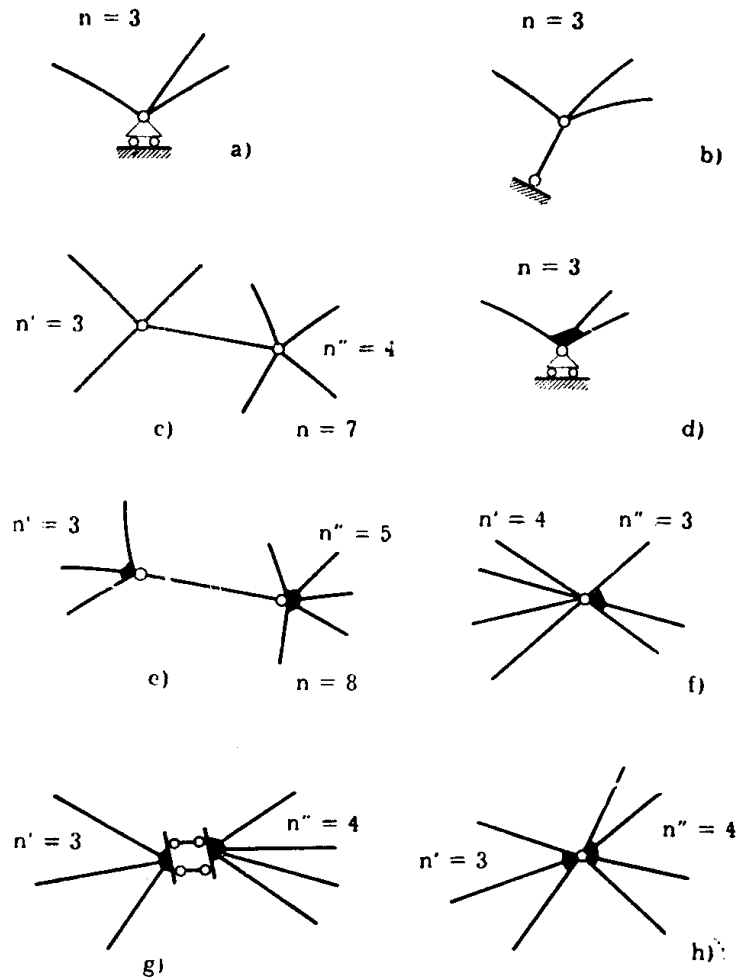


FIG. 6-25

Il computo dei gradi di libertà da essi cancellati è preferibile sia fatto calcolando quelli relativi a ciascuno di essi, e sommandoli; se però si vuole considerarli come vincoli unici, e calcolare in anticipo i gradi di libertà che essi sopprimono, possono essere utili le considerazioni che seguono. Un appoggio esterno impegni un nodo cerniera in cui concorrono

(*) Nulla cambia di quanto si sta esponendo se nella cerniera o negli altri vincoli concorrono t insieme di travi isostatici per vincoli interni, per esempio t travature reticolari, o t fra travi e insieme isostatici.

no n travi (fig. 6-25 a, b); si computano prima le libertà sopresse dal nodo cerniera, che sono $2(n-1)$, e poi quelle sopresse dal pendolo, che si riducono ad una sola; in complesso, la combinazione dei due vincoli potrebbe riguardarsi come un vincolo unico che sopprime $2n-1$ libertà. Così pure, se la cerniera fosse vincolata al suolo da due pendoli (cerniera fissa) le libertà eliminate sarebbero $2n$, essendo $2n-2$ quelle tolte dalla cerniera considerata come interna, e due quelle sopresse dal vincolo che fissa la cerniera. Se l'appoggio impegna un nodo incastro (fig. 6-25 d) in cui concorrono n travi, le libertà eliminate sono $3(n-1)$ per il nodo considerato come interno, e una per l'appoggio, e cioè in complesso $3n-2$; se invece il vincolo che impegna il nodo incastro è una cerniera, le libertà sopresse sono $3n-1$. Un vincolo semplice interno interessa due nodi cerniera (fig. 6-25 c), nei quali concorrano rispettivamente n' ed n'' travi ($n'+n''=n$); i due nodi cerniera eliminano $2(n'-1) + 2(n''-1) = 2n-4$ gradi di libertà, il vincolo semplice uno, dunque in totale si sopprimono $2n-3$ libertà. Se invece il vincolo semplice interessa due nodi incastro (fig. 6-25 e) questi ultimi cancellano $3(n'-1) + 3(n''-1) = 3n-6$ libertà, il vincolo uno, quindi in complesso si eliminano $3n-5$ libertà.

L'unione di un nodo cerniera ad n' aste con un nodo incastro ad n'' aste (fig. 6-25 f) elimina $2(n'-1) + 3(n''-1) + 2 = 2n' + 3n'' - 3$ libertà; l'unione di due nodi incastro mediante vincolo doppio (fig. 6-25 g, h) elimina $3(n'-1) + 3(n''-1) + 2 = 3n - 4$ libertà.

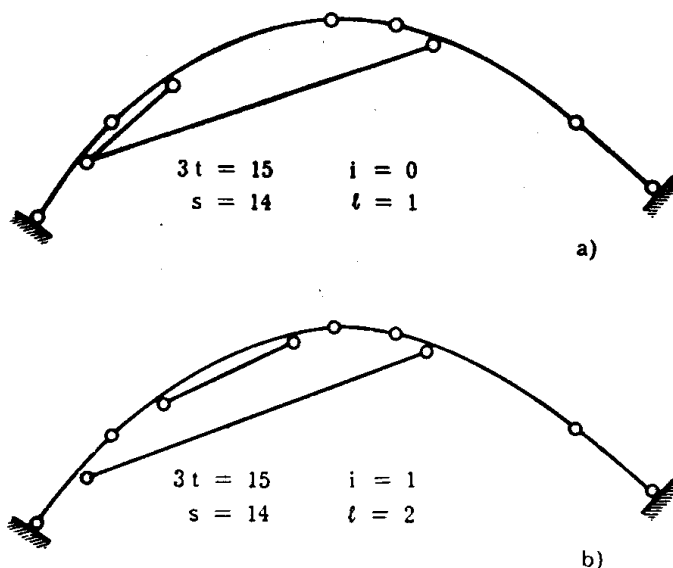


FIG. 6-26

Conoscendo così le libertà sopresse dai vincoli, la (6-8) e le (e) (f) (g) (h) permettono di giudicare della labilità, isostaticità o iperstaticità della struttura; giova intanto qualche esempio semplice ed immediato relativo alle formule adesso citate. Nella fig. 6-26 sono riportate due strut-

ture per le quali è valida la (e); si ha infatti per ambedue

$$3t - s = 15 - 14 > 0 .$$

Per esse, sicuramente labili, è

$$l - i = 1 ;$$

nella prima non esistono iperstaticità, quindi è $i=0$, $l=1$, la seconda invece, per la presenza del pendolo HK, è una volta iperstatica, e quindi $i=1$, $l=2$.

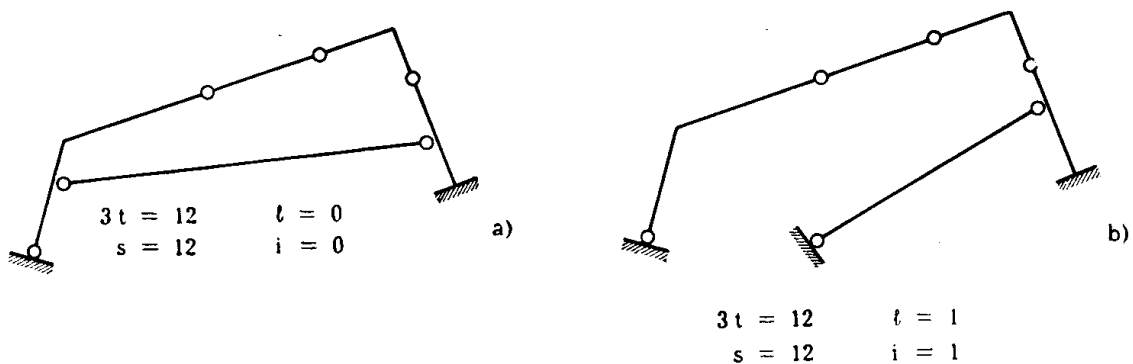


FIG. 6-27

Nella fig. 6-27 sono riportate due strutture per le quali è valida la (g), essendo

$$3t - s = 12 - 12 = 0 ;$$

è rispettata perciò la condizione necessaria di isostaticità. Nella prima è $i=0$, e quindi anche $l=0$; essa è perciò isostatica. Nella seconda invece è $i=1$, ed $l=1$; essa perciò non è isostatica.

Le due strutture della fig. 6-28 rispettano invece la (f):

$$3t - s = 12 - 13 < 0 .$$

Per esse, sicuramente iperstatiche, è $i-l=1$; la prima è una volta iperstatica, per la presenza del pendolo LM, e quindi per essa è $i=1$, $l=0$; la seconda è due volte iperstatica, per la presenza dei due pendoli LM ed LN, e quindi per essa è $i=2$, $l=1$; infatti si riconosce che la parte HK non è altro che un arco a quattro cerniere.

Il punto debole del procedimento è insito nel fatto che esso fornisce la differenza $l-i$, ma non i valori di i e di l , che occorre determinare con indagine diretta; a volte è più facile determinare i , e questo

avviene in genere nelle strutture in cui $l-i > 0$, che possono chiamarsi *prevalentemente labili*; altre volte è più agevole determinare l , e questo succede quasi sempre nelle strutture in cui $l-i < 0$, che possono chiamarsi *prevalentemente iperstatiche*. Alcuni esempi varranno a

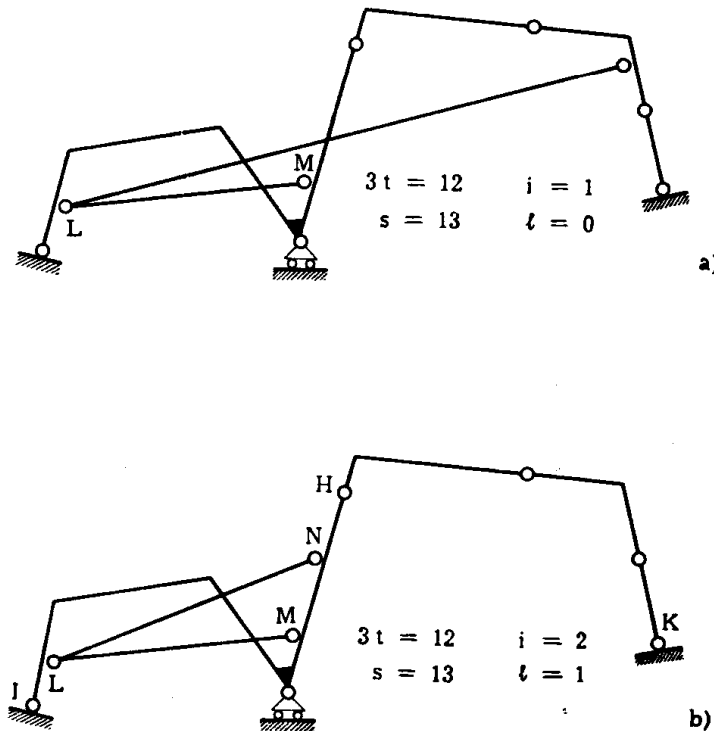


FIG. 6-28

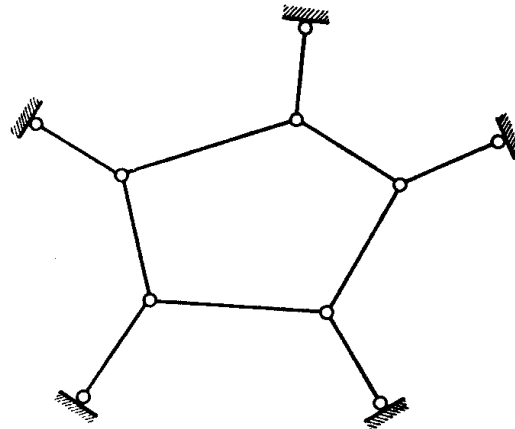
chiarire la pratica del procedimento. La trave Vierendeel della fig. 6-22 può scomporsi in 31 pezzi; è quindi $3t = 93$; esistono poi un vincolo doppio e un vincolo semplice esterni, quattro nodi incastro in cui concorrono due travi, e diciotto nodi incastro in cui concorrono tre travi; in complesso si eliminano $3 + (3 \cdot 4) + (6 \cdot 18) = 123$ gradi di libertà. E' perciò $s - 3t = 123 - 93 = 30$; facilmente si riconosce che è $l = 0$, quindi può dirsi che è $i = 30$. La struttura può anche scomporsi in 27 travi monoconnesse, considerando come unica trave il montante estremo con i due traversi che in esso concorrono; in tal caso è $3t = 81$, $s = 3 + (6 \cdot 18) = 111$, $s - 3t = 30$. Altra possibile scomposizione è quella in un'unica trave monoconnessa, mediante tagli in corrispondenza di ogni traverso superiore ed eliminazione dei vincoli esterni; è anche in tal caso $3t = 3$, $s = 3 + (3 \cdot 10) = 33$, $s - 3t = 30$.

Il telaio della fig. 6-23 può scomporsi in 25 travi; esistono poi quattro incastri esterni, tre nodi incastro in cui concorrono due travi, dodici in cui ne concorrono tre, uno in cui ne concorrono quattro; è perciò

$$s = 12 + (3 \cdot 3) + (6 \cdot 12) + (9 \cdot 1) = 102, \quad s - 3t = 102 - 75 = 27.$$

Poichè $l=0$, è $i=27$. Lo stesso telaio può scomporsi, tagliando tutti i traversi ed eliminando i vincoli esterni, in quattro travi monoconnesse; è $3t=12$, $s=12+(3 \cdot 9)=39$, $s-3t=27$.

Per la struttura della fig. 6-29 è $t=5$, $3t-s=15-15=0$; in questo caso è facile riconoscere che è $i=0$, quindi anche $l=0$, e perciò la struttura è isostatica.

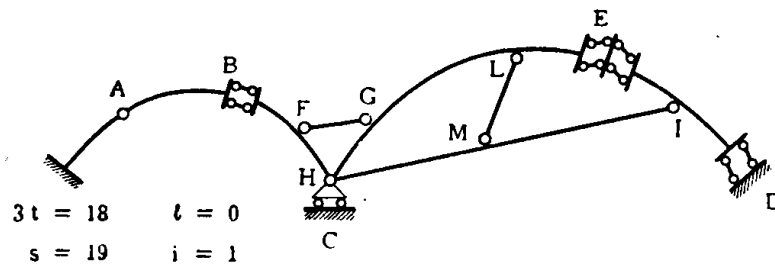


$$\begin{array}{ll} 3t = 15 & i = 0 \\ s = 15 & l = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 3t' = 10 & \\ s = 10 & \end{array}$$

FIG. 6-29

Nella struttura della fig. 6-30 è $t=6$, se si considerano FG ed LM come pendoli (HI non può essere visto come tale perchè è vincolato in M ad ML, se ne ha riprova considerando che le reazioni in H ed I non possono



$$\begin{array}{ll} 3t = 18 & l = 0 \\ s = 19 & i = 1 \end{array}$$

FIG. 6-30

sono perciò essere uguali e contrarie); è perciò $3t=18$. Si hanno poi 6 gradi di libertà soppressi per vincoli esterni, e 13 per vincoli interni; risulta $s-3t=19-18=1$. Si riconosce facilmente che $l=0$, e quindi $i=1$.

Nella struttura della fig. 6-31 è $3t=42$; esistono poi due incastri esterni, quattro nodi cerniera a due travi, cinque nodi cerniera a tre travi,

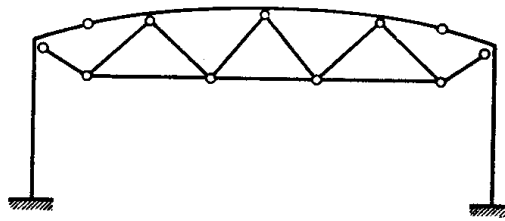


FIG. 6-31

due nodi cerniera a quattro travi, e cioè 46 gradi di libertà soppressi; è perciò $s - 3t = 46 - 42 = 4$, ed essendo $l=0$, è $i=4$.

Con riferimento alla stessa struttura, si possono considerare le travi comprese tra due cerniere come pendoli; le cerniere, in numero di $t'=4$, in cui concorrono solo pendoli, possono essere considerate come travi piccolissime, e cioè come elementi puntiformi, vincolate dai pendoli stessi; ognuna di esse considerata come libera possiede non tre, ma due soli gradi di libertà. E' perciò $t=3$, $t'=4$, $3t + 2t' = 17$; esistono poi due incastri esterni, due nodi cerniera a due travi, undici pendoli, in complesso $s = 6 + (2 \cdot 2) + 11 = 21$, $s - 3t - 2t' = 4$.

La travatura reticolare della fig. 6-32 è composta di 19 aste, è perciò $3t=57$; esistono poi due cerniere a due travi, due a tre, e sette a

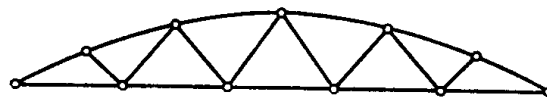


FIG. 6-32

quattro, e cioè $s = (2 \cdot 2) + (4 \cdot 2) + (6 \cdot 7) = 54$. Risulta perciò $3t - s = 57 - 54 = 3$; poichè la struttura ha tre gradi di libertà ($l=3$), è $i=0$, e cioè la struttura è isostatica per vincoli interni. Considerando le aste come pendoli, si hanno 11 elementi a due gradi di libertà vincolati da 19 pendoli; quindi $2t' = 22$, $s = 19$, $2t' - s = 3$.

Con riferimento alle travature reticolari, sia a il numero della aste, c quello delle cerniere, v il numero di gradi di libertà soppressi dai vincoli esterni; la relazione (6-8) si scrive, considerando la struttura costituita da c punti (ognuno quindi con due sole libertà) collegati da a pendoli,

$$l - i = 2c - a - v. \quad (9)$$

La relazione

$$2c - a - v > 0 \quad (i)$$

è condizione sufficiente di labilità (fig. 6-23 a, b); se è $i = 0$, è $2c - a - v = l$ e la struttura è labile e non iperstatica (fig. 6-23 a),

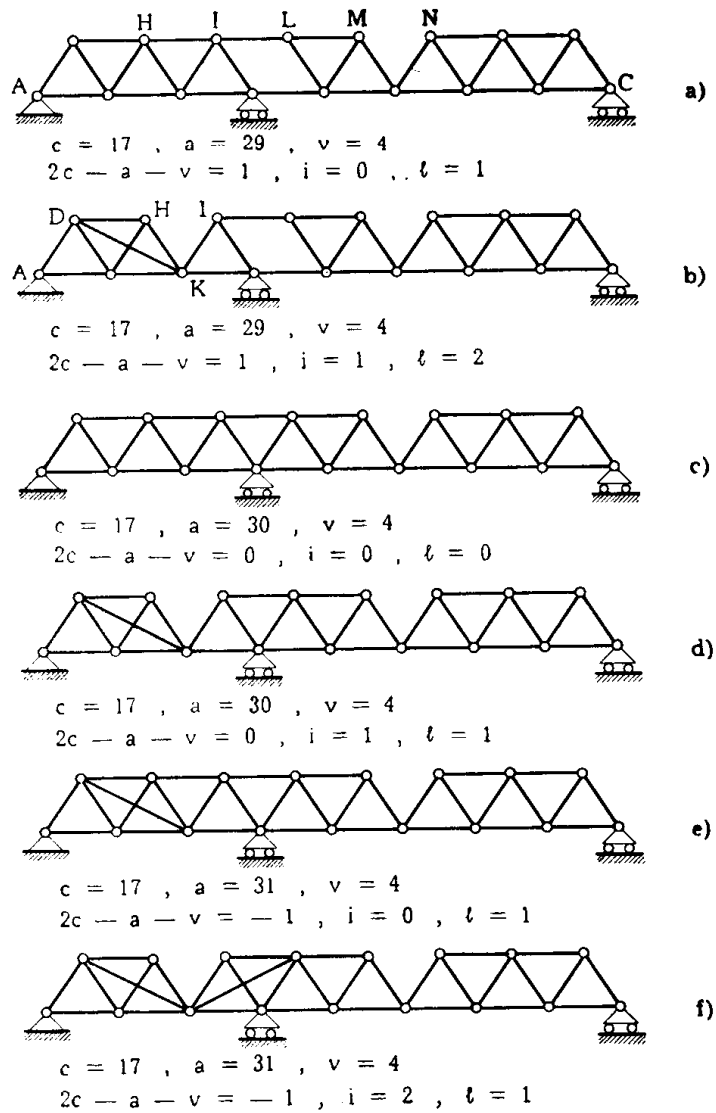


FIG. 6-33

in caso contrario è $2c - a - v = l - i$, e la struttura è labile e iperstatica (fig. 6-33 b).

La relazione

$$2c - a - v < 0 \quad (l)$$

è condizione sufficiente di iperstaticità (fig. 6-33 e, f); se è $l = 0$, è $a + v - 2c = i$, e la struttura è iperstatica e non labile (fig. 6-33 e); in caso contrario è $a + v - 2c = i - l$ e la struttura è iperstatica e labile (fig. 6-33 f).

La relazione

$$2c - a - v = 0 \quad (m)$$

è condizione necessaria di isostaticità, e unita all'altra relazione

$$l = i = 0 \quad (n)$$

fornisce le condizioni sufficienti di isostaticità. Le due strutture delle fig. 6-33 c, d rispettano la (m); la prima è isostatica, essendo anche rispettata la (n), la seconda non lo è, e risulta labile e iperstatica.

Se la struttura si considera nei soli riguardi dei vincoli interni, la (6-9) diviene

$$l - i = 2c - a - 3 \quad (10)$$

e le condizioni (i) (l) (m) si riducono alle altre

$$2c - a \geq 3. \quad (o)$$

L'ordine di labilità o di iperstaticità di una struttura dipende a volte non solo dal numero delle travi e dei vincoli e dalla loro distribuzione reciproca, ma anche, a parità di questi elementi, dalla loro posizione reciproca, e cioè dalla geometria del complesso; si verifica però che, fissata

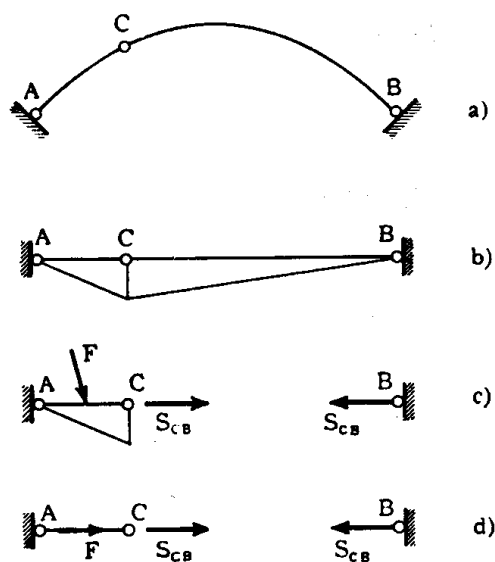


FIG. 6-34

la distribuzione delle travi e dei vincoli, in genere i ed l hanno determinati valori, e questi solo per eccezionali posizioni reciproche delle travi e dei vincoli possono variare.

L'arco a tre cerniere (fig. 6-34 a) è in genere isostatico, essendo

$3t - s = 6 - 6 = 0$, $l = 0$ ed $i = 0$. Se però le tre cerniere ABC sono allineate (fig. 6-34 b) risulta $l = 1$, poichè nell'ambito dei piccoli spostamenti è consentito che la cerniera C si sposti normalmente alla retta ACB; corrispondentemente è $i = 1$, e ciò si riconosce osservando per esempio che l'eliminazione dell'asta CB, considerata come pendolo, non conferisce un nuovo grado di libertà al sistema.

Nella struttura della fig. 6-35 è $3t - s = 3 - 3 = 0$; se i tre pendoli non concorressero in un punto O, sarebbe $l = 0$, e quindi $i = 0$, e la struttura risulterebbe isostatica. Poichè però i tre pendoli concorrono in O, è consentita la rotazione della trave intorno ad O; è quindi $l = 1$. Deve di conseguenza essere $i = 1$, e ciò si riconosce perchè l'eliminazione di un pendolo non conferisce un nuovo grado di libertà alla struttura.

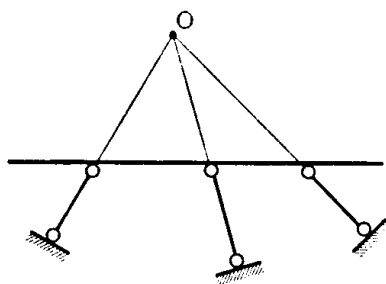


FIG. 6-35

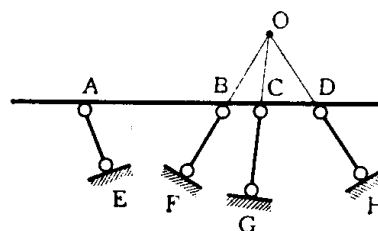


FIG. 6-36

Nella struttura della fig. 6-36 è $3t - s = 3 - 4 = -1$, e quindi $i - l = 1$; poichè è $l = 0$, è pure $i = 1$; e infatti, eliminando uno dei tre pendoli FB, GC o HD, la struttura non acquista alcun grado di libertà. Rispetto al pendolo EA la struttura è isostatica, mentre sarebbe stata iperstatica anche rispetto ad esso se i tre pendoli FB, GC e HD non fossero concorsi in un punto.

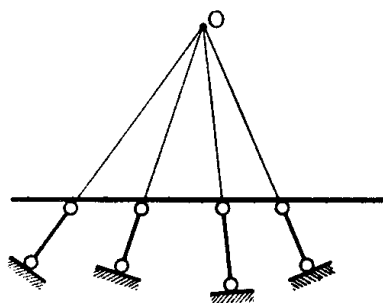


FIG. 6-37

Nella struttura della fig. 6-37 è ancora $3t - s = -1$, ma è pure $l = 1$, e quindi $i = 2$; e infatti occorre eliminare tre pendoli perchè la struttura acquisti un nuovo grado di libertà.

La struttura della fig. 6-38 a si può ricondurre a quella della fig. 6-35 considerando le parti AB e DE come pendoli, se è caricata la sola parte BD, oppure a quella della figura 6-34 b se è caricata solo la parte AB (tre cerniere in ABO), o solo la parte DE (tre cerniere in ODE).

Nella struttura della fig. 6-38 b è $3t - s = 18 - 18 = 0$; in genere è $t = 0$, e quindi $i = 0$, e la struttura è isostatica; se però le rette d'azione

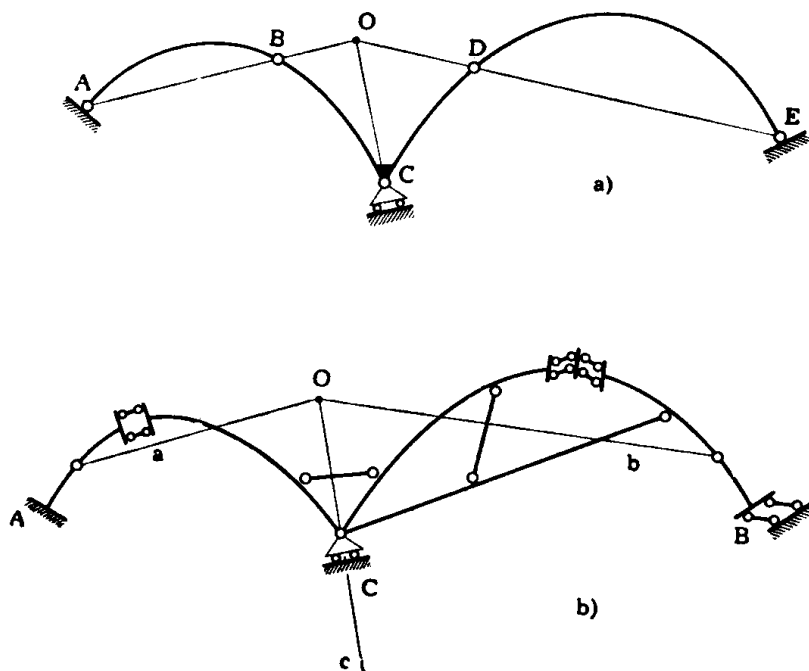


FIG. 6-38

a b c delle reazioni esterne concorrono in un punto O si ricade nel caso della fig. 6-38 a, ed è $t = 1$, $i = 1$.

Nei casi semplici è facile riconoscere a vista se la geometria della struttura è tale da indurre di per sé dei gradi di libertà; nei casi più complessi si può seguire un procedimento basato sulla determinazione dei centri di rotazione assoluta e relativa, che si esporrà nel § 7, o un altro basato sulla ricerca delle reazioni vincolari, e che si esporrà al § 10.

6. Valori indeterminati o infinitamente grandi delle reazioni.

Per ottenere il valore di una reazione vincolare si può sfruttare il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi: soppresso il vincolo, per qualsiasi spostamento virtuale del sistema il lavoro delle forze applicate, ivi compresa la reazione del vincolo eliminato, deve essere, per l'equilibrio, nullo. Con riferimento ad uno degli spostamenti virtuali, deve es-

sere perciò $L_F + R \Delta_R = 0$, da cui.

$$R = - \frac{L_F}{\Delta_R}, \quad (11)$$

ove L_F è il lavoro delle forze applicate, Δ_R lo spostamento del punto di applicazione di R nella direzione e nel verso di R . Se rispetto al vincolo in esame la struttura è iperstatica (fig. 6-39, pendolo 2) Δ_R è comunque nullo, ed R è perciò ∞ o indeterminata. Il primo caso ($R = \infty$) si può veri-

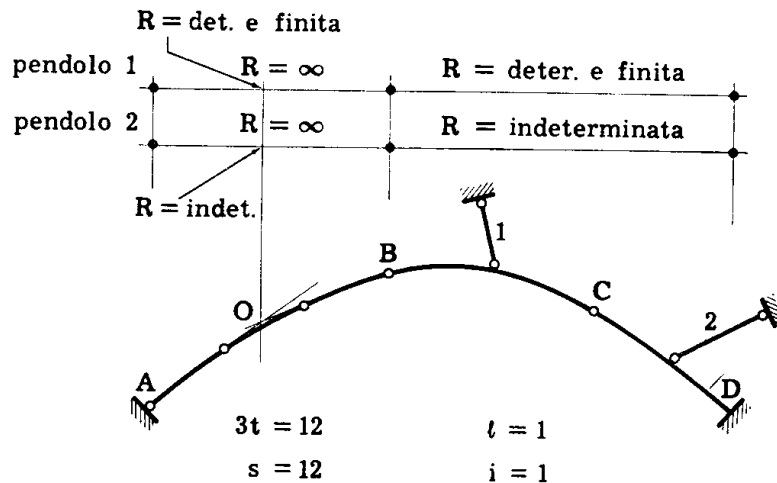


FIG. 6-39

ficare solo se L_F può essere diverso da zero, e cioè solo se la struttura è anche labile; infatti l'eliminazione del vincolo non introduce un nuovo grado di libertà. Il secondo caso (R indeterminata) si verifica di necessità se la struttura è iperstatica e non labile. Se invece rispetto al vincolo in esame la struttura è isostatica (fig. 6-39, pendolo 1) Δ_R è diverso da zero, ed R è finita (in particolare zero) o infinita, comunque determinata. Il caso $R = \infty$ si può verificare — per forze applicate finite — solo se la struttura è anche labile; solo in tal caso infatti, scrivendo la relazione (6-11) con riferimento agli spostamenti possibili senza la soppressione del vincolo, si ha

$$R = \frac{L_F}{0} = \infty .$$

Il secondo caso invece (R determinata e finita) si ha di necessità se la struttura, oltre che isostatica rispetto a quel vincolo, è non labile.

Riassumendo si può quindi dire che la condizione

$$R = \begin{cases} \infty \\ \text{indeterminata} \end{cases} \quad (p)$$

per un vincolo e per ogni sistema di forze applicate è necessaria perchè la struttura sia iperstatica rispetto a quel vincolo, e labile. Si ha $R = \infty$ se le forze sono applicate sulla parte impegnata nel movimento che la labilità consente, $R = \text{indeterminata}$ in caso contrario (fig. 6-39).

La condizione

$$R = \begin{cases} \infty \\ \text{determinata e finita} \end{cases} \quad (q)$$

per un vincolo e per ogni sistema di forze applicate è necessaria perchè la struttura sia isostatica rispetto a quel vincolo e labile. Si ha anche qui $R = \infty$ se le forze sono applicate sulla parte impegnata nel movimento possibile prima della soppressione del vincolo, $R = \text{determinata}$ in caso contrario (fig. 6-39).

La condizione

$$R = \text{indeterminata} \quad (r)$$

per un vincolo e per ogni sistema di forze applicate è necessaria perchè la struttura sia iperstatica rispetto a quel vincolo e non labile; la condizione

$$R = \text{determinata e finita} \quad (s)$$

per un vincolo e per ogni sistema di forze applicate è necessaria perchè la struttura sia isostatica rispetto a quel vincolo e non labile.

La condizione

$$R = \infty \quad (t)$$

per un generico vincolo e per un generico sistema di forze applicate è sufficiente perchè la struttura sia labile; infatti non sono rispettate le (r) ed (s). La condizione.

$$R = \text{indeterminata} \quad (u)$$

rispetto ad un vincolo e per un generico sistema di forze applicate è sufficiente perchè la struttura sia iperstatica rispetto a quel vincolo; infatti non sono rispettate le (q) ed (s).

La condizione

$$R = \text{determinata e finita}$$

rispetto ad un vincolo e per un generico sistema di forze applicate è sufficiente perchè la struttura sia isostatica rispetto a quel vincolo; infatti non sono rispettate le (p) ed (r).

Il caso di maggiore interesse è quello delle strutture per cui $3t - s = 0$; se esse sono caratterizzate da una reazione infinitamente grande o indeterminata sotto un generico sistema di forze applicate, certamente sono labili e iperstatiche; se invece tutte le reazioni indotte da un generico sistema di forze sono determinate e finite, la struttura è isostatica rispetto a tutti i vincoli (perchè le (p) e (r) non sono rispettate), quindi è $i = 0$, $l = 0$, e la struttura è isostatica.

Si osservi che se, per un determinato sistema di forze, la reazione di un vincolo è ∞ , sono tali anche le reazioni degli altri vincoli, interni ed esterni, e quindi le caratteristiche della sollecitazione interna. Se infatti così non fosse, per quel sistema di forze — che sicuramente interessa la parte impegnata dal movimento connesso con la labilità — non si verificherebbero nè la (p) nè la (q), condizioni invece necessarie perchè la struttura sia labile.

Nella struttura della fig. 6-34 b, la reazione S_{CB} della trave CB considerata come pendolo è indeterminata se la forza F che agisce sulla parte AC ha per retta d'azione la AC (fig. 6-34 d) infinitamente grande in caso contrario (fig. 6-34 c): la struttura è labile e iperstatica.

Nelle strutture delle figg. 6-35, 6-37, 6-38a, e 6-38 b, le reazioni sono infinitamente grandi per una forza che non passa per O, indeterminate in caso contrario: le strutture sono labili e iperstatiche. Nella struttura della fig. 6-36 la reazione del pendolo AE è determinata e finita, le reazioni degli altri tre pendoli sono indeterminate, qualsiasi sistema di forze agisca sulla trave; la struttura è iperstatica rispetto ai tre pendoli BF, CG e DH.

7. La ricerca delle reazioni vincolari e delle caratteristiche attraverso il principio dei lavori virtuali per i sistemi olonomi: il procedimento delle catene cinematiche.

Le strutture che interessano il tecnico sono ovviamente quelle non labili; per esse le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione interna possono essere determinate o indeterminate, secondo che la struttura rispetto ad esse è isostatica o iperstatica. Per il calcolo delle reazioni o caratteristiche della sollecitazione interna rispetto alle quali la struttura è isostatica, sono sufficienti le sole equazioni della statica.

Per il calcolo invece delle reazioni o caratteristiche rispetto alle quali la struttura è iperstatica, il problema si presenta indeterminato.

Per superare questa indeterminatezza occorre far ricorso ad altre condizioni, diverse da quelle dell'*equilibrio* di cui la statica si occupa; queste nuove condizioni sono quelle di *congruenza*, ed esprimono il fatto che nella struttura resa isostatica (nella quale quindi sono stati soppressi i vincoli semplici o equivalenti) gli spostamenti in corrispondenza delle reazioni eliminate devono soddisfare le reali condizioni di vincolo.

Il procedimento si riduce quindi al calcolo di *i* spostamenti provocati sulla struttura isostatica da forze applicate, comprendendo in queste le forze realmente applicate e le reazioni soppresse; questi spostamenti, funzioni delle forze applicate, delle reazioni soppresse e della geometria della struttura, si pongono uguali a quelli che in realtà i vincoli, sotto le reazioni corrispondenti, presentano; sorgono così *i* equazioni nelle incognite *i* reazioni (*incognite iperstatiche*, o semplicemente *iperstatiche*) e il problema è risolto. Se vale il principio di sovrapposizione, le equazioni sono lineari, e di esse si è avuto esempio nel capitolo II dedicato al principio dei lavori virtuali.

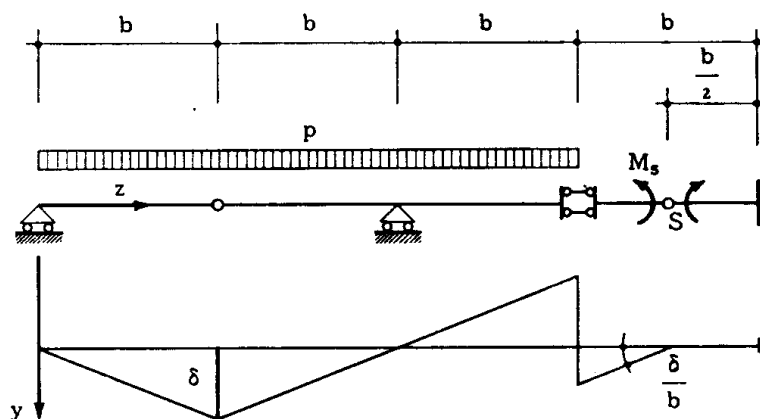


FIG. 6-40

Un problema relativo ad una qualsiasi struttura si riduce perciò sempre, in ultima analisi, allo studio di strutture isostatiche; si esporranno, in questo paragrafo e in quelli che seguono, i principali metodi per la ricerca delle reazioni e delle caratteristiche con riferimento ai sistemi isostatici monodimensionali piani, conoscenze indispensabili per il calcolo degli spostamenti e quindi per la risoluzione di qualsiasi problema. Il principio dei lavori virtuali per i sistemi olonomi permette, come già più volte detto, di calcolare le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione rispetto alle quali la struttura sia isostatica attraverso equazioni lineari che contengono ciascuna una sola incognita, e dunque direttamente fornisce tali incognite in forma di rapporto (6-11). Si consideri per esempio la trave isostatica della fig. 6-40, della quale oc-

corre conoscere il momento flettente in corrispondenza della generica sezione S; si elimina il vincolo corrispondente, realizzando in S una sconnessione semplice per cui sia nullo il momento flettente; si taglia cioè la sezione in S, e si uniscono le due facce con una cerniera nel baricentro di S. Creata la sconnessione semplice in S, si fanno agire come forze esterne sulla struttura labile le interazioni corrispondenti al vincolo eliminato, e cioè due coppie M_s uguali e contrarie sulle due facce, di valore e segno pari al momento flettente che prima del taglio si trasmetteva attraverso S. Uno degli infiniti spostamenti virtuali resi possibili dalla eliminazione del vincolo in S (tutti tra loro affini, perchè la struttura ha un solo grado di libertà) è quello della fig. 6-40. Il lavoro compiuto dalle forze applicate è

$$L_F = p \left(b \delta - b \frac{\delta}{2} \right) = \frac{pb\delta}{2} ;$$

lo spostamento Δ_R (*) corrispondente ad M_s è (essendo piccoli gli spostamenti, l'angolo Δ_R va misurato confondendolo con la sua tangente trigonometrica)

$$\Delta_R = \frac{\delta}{b} .$$

Il lavoro complessivo è nullo:

$$\frac{pb\delta}{2} + M_s \frac{\delta}{b} = 0$$

da cui

$$M_s = - \frac{pb^2}{2} .$$

Mentre il disegno degli spostamenti per una trave ad asse rettilineo è immediato, non altrettanto può dirsi per un sistema piano qualsiasi; conviene allora operare graficamente, e riferirsi al procedimento cosiddetto delle *catene cinematiche*. Si consideri una trave piana rigida di asse AB (fig. 6-41); un qualsiasi spostamento della trave nel piano dell'asse può essere assimilato (teorema di Eulero: § 1-1) ad una rotazione intorno ad un punto C (*centro di rotazione assoluta*). Se gli spostamenti sono piccoli nel senso noto, le componenti secondo due assi ortogonali y e z dello

(*) Il Δ_R della fig. 6-40 è negativo se considerato come rotazione relativa, positivo come rotazione assoluta o come distorsione.

spostamento PP' di un punto P qualsiasi della trave sono fornite da

$$v_P = -\varphi z_{PC} \quad (12)$$

$$w_P = \varphi y_{PC}$$

ove φ è l'ampiezza della rotazione, y_{PC} e z_{PC} le componenti secondo y e z del vettore CP .

In genere può quindi dirsi che lo spostamento di un punto P si effettua secondo la normale alla congiungente P con il centro C di rotazione, e il valore della componente di tale spostamento secondo una retta r orientata qualsiasi passante per P è data dal prodotto della rotazione φ per la distanza del centro C dalla retta r . Si ricorda che φ è positiva se

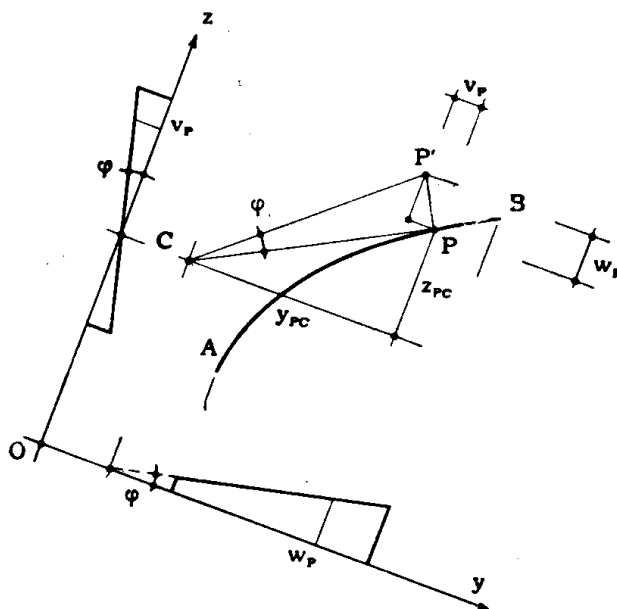


FIG. 6-41

antioraria, e la distanza di C dalla retta è positiva se C è a sinistra della retta stessa. Il diagramma delle componenti v_P degli spostamenti dei punti P prese secondo una retta y , riportate su una retta z normale ad y , è perciò una retta, che taglia la retta z in corrispondenza della proiezione di C . Questa retta è inclinata dell'angolo φ sulla retta z ; è infatti

$$\varphi = -\frac{v_P}{z_{PC}};$$

il verso dell'inclinazione è quello stesso della rotazione. Si trae da quanto sopra che il diagramma delle w_P riportate su una perpendicolare a z è

una retta ortogonale al diagramma delle v_P riportate su una perpendicolare ad y . Il possesso dei due diagrammi v_P e w_P permette di ottenere lo spostamento di qualsiasi punto P della trave; se per esempio si desidera conoscere la componente PP_r dello spostamento di P secondo una retta r passante per P , si può costruire lo spostamento complessivo PP' di P e proiettarlo su r (fig. 6-42 a), oppure si può misurare la distanza d_r di C dalla r e moltiplicarla per φ (fig. 6-42 b).

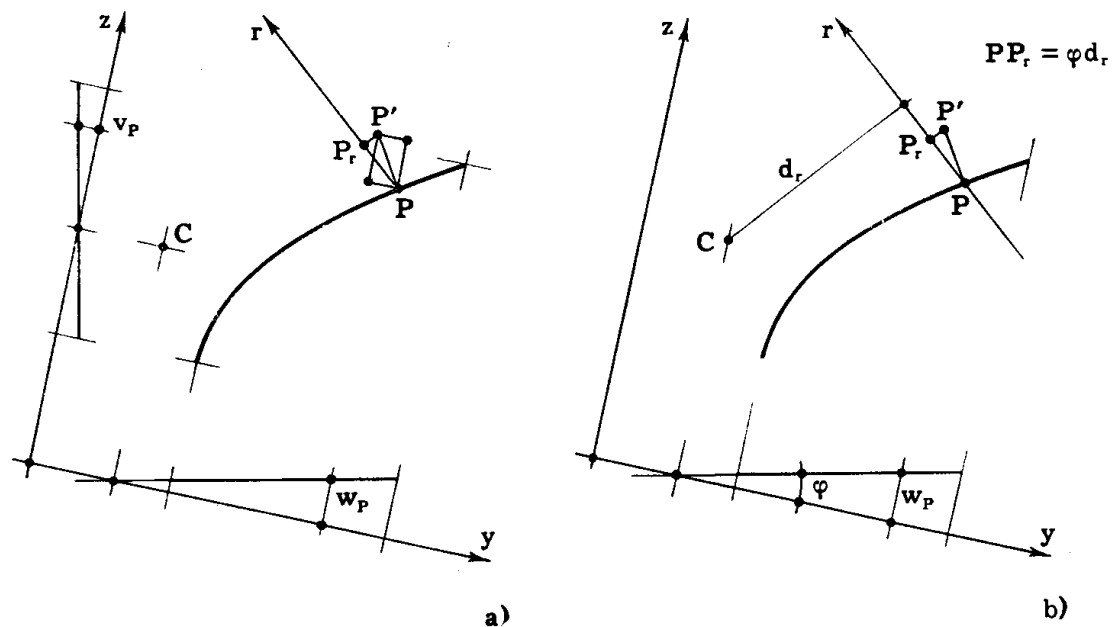


FIG. 6-42

Si considerino poi due travi rigide, i cui centri assoluti di rotazione siano C_1 e C_h , e i cui diagrammi delle componenti secondo le rette y e z siano le rette v_i e v_h , w_i e w_h .

Il punto d'incontro delle due rette v_i e v_h e quello delle due rette w_i e w_h (fig. 6-43) forniscono con l'intersezione delle loro proiezioni rispettivamente secondo y e z il centro C_{ih} della rotazione cui può ridursi lo spostamento rigido relativo tra le due travi (*centro di rotazione relativa*). Infatti il punto C_{ih} ha lo stesso spostamento, sia che si consideri appartenente ad una trave, che all'altra. Si osserva che C_{ih} si trova sulla congiungente $C_1 C_h$, e divide il segmento $C_1 C_h$ in quantità inversamente proporzionali alle rotazioni φ_1 e φ_h ; infatti si riconosce (fig. 6-43) che la costruzione di C_{ih} coincide con quella del baricentro di due masse concentrate in C_1 e C_h e di valori m_1 e m_h forniti da

$$m_1 = -\lambda \operatorname{tg} \varphi_1$$

$$m_h = \lambda \operatorname{tg} \varphi_h ;$$

poichè φ_i e φ_h sono così piccoli da poterli confondere con le loro tangenti, le masse m_i ed m_h sono proporzionali a $-\varphi_i$ e φ_h , e il centro C_{ih} risulta essere il baricentro delle due masse $-\varphi_i$ e φ_h concentrate in C_i e C_h .

Dalla condizione che $C_i C_h C_{ih}$ sono allineati deriva l'altra, che C_{ih} , C_{ij} , C_{hj} sono pure essi allineati. Infatti considerando la trave i -esima ferma, ed il suolo come un elemento rigido mobile, i centri di rotazione non variano, perchè dipendono dalla geometria del complesso, ma cambia il loro significato: il generico centro C_{ih} della rotazione relativa tra i ed h

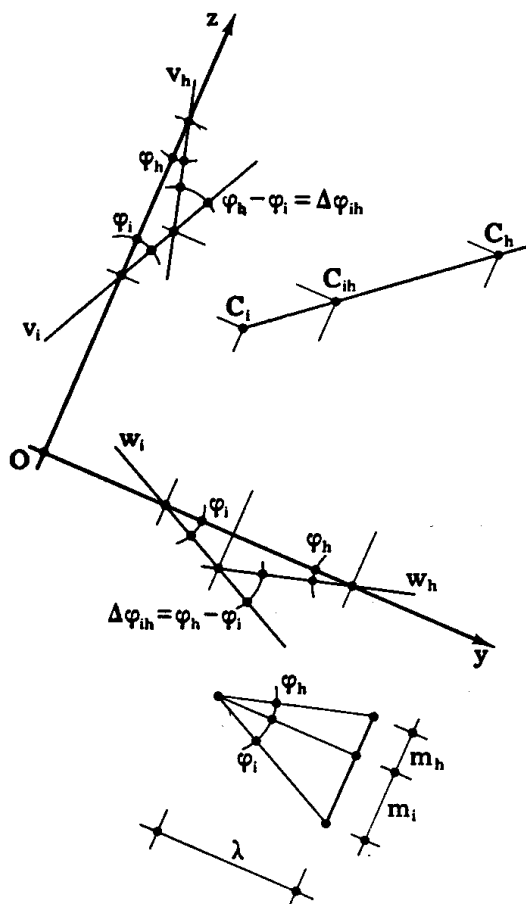


FIG. 6-43

diviene centro C_h della rotazione assoluta di h , mentre il generico centro C_h della rotazione assoluta di h diviene centro C_{hs} della rotazione relativa tra h e il suolo. Per quanto già detto, i nuovi centri $C_h C_j C_{hj}$ devono essere allineati, e quindi lo sono anche i vecchi centri $C_{ih} C_{ij} C_{hi}$, che coincidono con essi. Si possono così enunciare i due teoremi fondamentali delle catene cinematiche:

- 1) i centri delle rotazioni assolute C_i e C_h di due elementi i e h

di un sistema olonomo piano e il centro della rotazione relativa C_{ih} , sono allineati;

2) i centri C_{ij} , C_{ih} , C_{jh} delle rotazioni relative di tre elementi i , j ed h sono allineati.

Attraverso questi due teoremi si ricavano tutti i centri assoluti e relativi e quindi i diagrammi v e w , una volta assegnate le travi componenti il sistema ed i vincoli che le collegano tra loro ed il suolo. La via da seguire è la seguente. I vincoli doppi permettono di disegnare i centri ad essi inerenti, i vincoli semplici fissano una retta sulla quale i centri devono essere ubicati; una cerniera che unisce due travi i ed h , reale o ideale che sia (fig. 6-5) fissa in se stessa il centro C_{ih} , un bpendolo fissa il centro C_{ih} nel punto improprio degli assi dei due pendoli; un pendolo che unisce due travi i ed h impone che il centro C_{ih} sia ubicato sul suo asse, un pendolo improprio impone che il centro C_{ih} sia un punto improprio. Quanto detto per i centri relativi vale anche per i centri assoluti. Avute le posizioni di tutti quei centri (o le rette cui essi appartengono), che i vincoli consentono di determinare, si passa a fissare gli altri centri necessari per la costruzione dei diagrammi v e w attraverso applicazioni ripetute dei due teoremi delle catene cinematiche.

Si avverte che è necessario preventivamente riconoscere le parti internamente non labili, che si considerano come una trave unica. Si avverte pure che è preferibile considerare le travi, vincolate solo con due cerniere, come pendoli, esterni o interni: salvo casi eccezionali, ciò porta sempre a snellire i calcoli.

Fissati i centri, è immediato tracciare i diagrammi v e w ; ognuno di questi è composto di segmenti di retta; ogni segmento è relativo ad una trave (o ad una parte internamente non labile), e compreso tra le due ridenti alla trave parallele alla direzione delle componenti dello spostamento. La retta cui appartiene il segmento relativo alla trave i -esima taglia la retta di riferimento in corrispondenza della proiezione del centro C_i , le rette cui appartengono i segmenti relativi alle travi i ed h si tagliano sulla proiettante il centro C_{ih} ; si avverte che le componenti v degli spostamenti parallele ad una generica retta y vengono riportate su una retta normale ad y , e le proiezioni dei centri C_i e C_{ih} si eseguono secondo rette parallele ad y .

Si prenda in esame l'arco a tre cerniere ABC della fig. 6-44 a, sollecitato dalle due forze F_a ed F_b e dalla coppia \mathcal{M} ; si desidera conoscere il momento flettente M_s in corrispondenza della generica sezione S. Si crea in S la sconnessione semplice che annulla M_s , e si sollecitano le due facce con due coppie uguali e contrarie, di valore e segno pari a quello di M_s ; se M_s è positivo, le due coppie sono dirette come nella figura 6-44 a.

La struttura è una volta labile; i centri 1, 1 · 2, 2 · 3, 3 (si indicano per semplicità con un numero il centro della rotazione assoluta della trave

caratterizzata da quel numero, e con due numeri il centro della rotazione relativa delle due travi caratterizzate da quei numeri) sono noti (fig. 6-

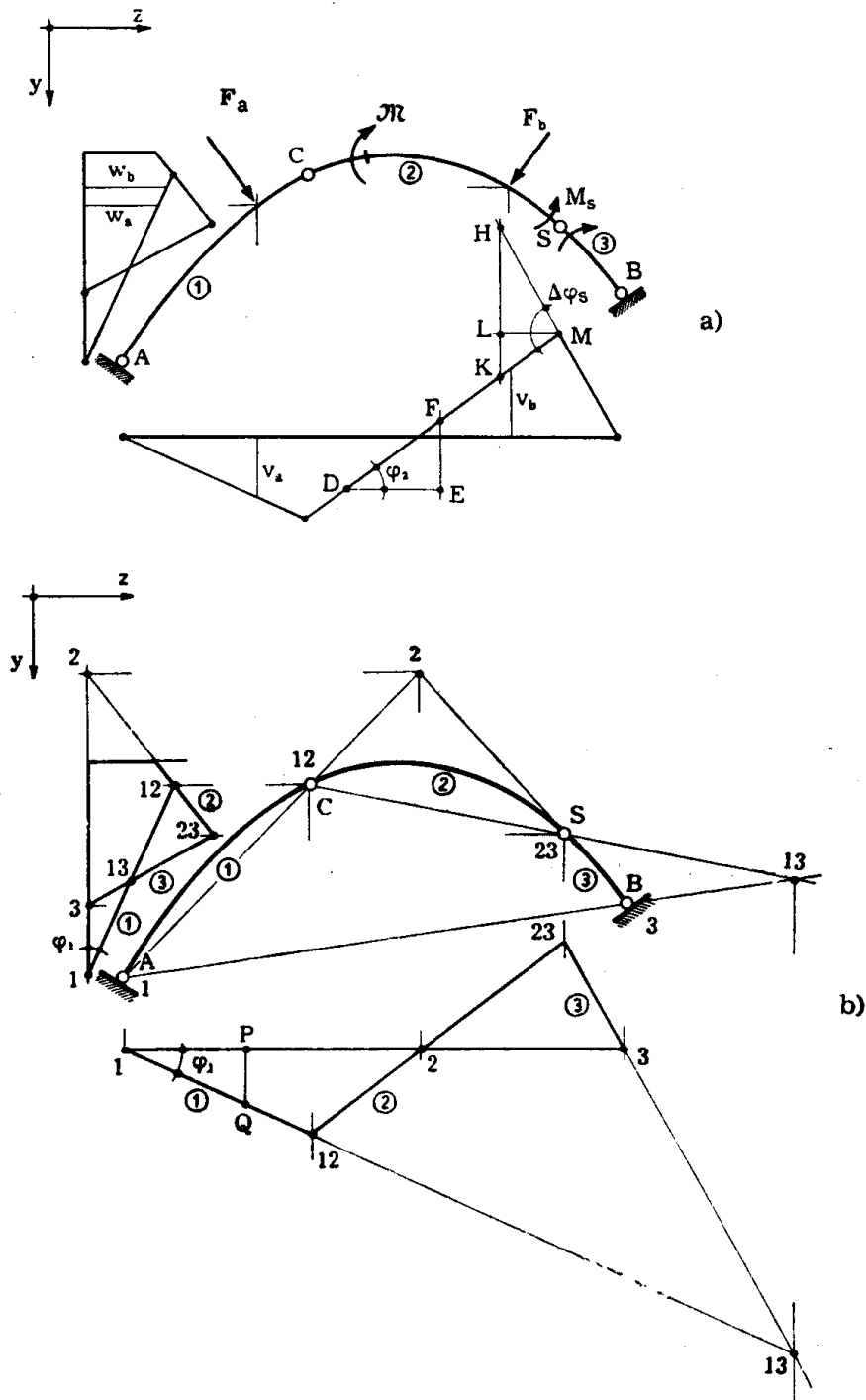


FIG. 6-44

44 b). Il centro 2 è l'intersezione della retta 1, 1 · 2 con la retta 3, 2 · 3; il centro 1 · 3 (la sua conoscenza in realtà è utile solo per una verifica gra-

fica, poichè è sufficiente, per il disegno dei diagrammi v e w , la conoscenza di cinque centri, (*). Scelto un arbitrario riferimento cartesiano ortogonale yz , in particolare la verticale e l'orizzontale, si disegna (fig. 6-44 b) il diagramma delle componenti v . Il segmento ① relativo alla trave 1 interseca la fondamentale (parallela a z), in corrispondenza della proiezione secondo y del centro 1; l'angolo che esso forma con la fondamentale è arbitrario. La retta cui appartiene il segmento ② relativo alla trave 2 interseca la retta del segmento ① in corrispondenza della proiettante il centro 1 · 2, e taglia la fondamentale nella proiezione del centro 2. La retta del segmento ③ relativo alla trave 3 taglia la retta del segmento ② sulla proiettante del centro 2 · 3, e la fondamentale nella proiezione del centro 3.

In maniera analoga si determina il diagramma delle componenti w ; i segmenti corrispondenti alla stessa trave nei diagrammi v e w devono essere ortogonali, è necessario perciò che il primo dei segmenti w che si disegna (per esempio quello relativo alla trave 1) soddisfi tale proprietà, gli altri la soddisferanno di conseguenza. Del centro 1 · 3 nella costruzione del diagramma v non si è fatto cenno, e così pure accade nella costruzione del diagramma w ; esso è utile però per una verifica: le rette cui appartengono i segmenti ① e ③ devono intersecarsi in corrispondenza della proiettante il centro 1 · 3.

Le ordinate v e w sono piccole nel senso noto (solo in tal caso il principio dei lavori virtuali è valido) e, se fossero riportate nella stessa scala S_i delle lunghezze, non potrebbero neppure apprezzarsi; la scala S_v delle componenti v e w è perciò molto più piccola di quella S_i , per esempio S_i può essere pari a cento, ed S_v pari ad uno. Gli angoli di rotazione sono perciò molto più piccoli in realtà che nel disegno; l'angolo φ_1 che il segmento ① forma con la fondamentale (fig. 6-44 b), pari per quanto già detto all'angolo di rotazione della trave 1, è fornito (§ 4-7) da

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = - \frac{\overline{PQ}}{\overline{1P}} \frac{S_v}{S_i}$$

e poichè $\operatorname{tg} \varphi_1$ è molto piccola, si può porre

$$\varphi_1 = - \frac{\overline{PQ}}{\overline{1P}} \frac{S_v}{S_i}$$

confondendo l'angolo con la sua tangente trigonometrica.

(*) Per disegnare il diagramma v o w relativo ad n tratti consecutivi basta conoscere $2n - 1$ centri, per esempio gli n centri assoluti e gli $n - 1$ centri relativi; nel caso della fig. 6-44 basta conoscere 1, 1-2, 2-3, 2, 3; oppure 1, 3, 1-2, 2-3, 1-3. I tratti n possono essere anche una parte dei tratti t complessivi della struttura; è il caso della fig. 6-69, se le forze viaggiano sull'arco.

Costruiti i diagrammi v e w (fig. 6-44 b) si può esprimere il lavoro L_F compiuto dalle forze applicate e quello $M_s \Delta_R$ effettuato dalle due coppie M_s (fig. 6-44 a):

$$L_F = F_{ay} v_a + F_{az} w_a + F_{by} v_b + F_{bz} w_b + \mathcal{M} \varphi_2$$

$$M_s \Delta_R = - M_s \Delta\varphi_s .$$

Gli spostamenti $v_a v_b w_a w_b$ si ottengono moltiplicando i corrispondenti segmenti, con il loro segno, per la S_v , l'angolo φ_2 è fornito (§ 4-7) da (fig. 6-44 a)

$$\varphi_2 = - \frac{\overline{EF}}{\overline{DE}} \frac{S_v}{S_t}$$

e l'angolo $\Delta\varphi_s$ da

$$\Delta\varphi_s = \varphi_3 - \varphi_2 = \left(\frac{\overline{LH}}{\overline{LM}} - \frac{\overline{LK}}{\overline{LM}} \right) \frac{S_v}{S_t} = \frac{\overline{KH}}{\overline{LM}} \frac{S_v}{S_t} .$$

Le quantità $F_x F_y \mathcal{M} v w \varphi$ vanno prese con il loro segno, in relazione all'orientamento degli assi y e z ; nel caso in esame è $F_{ay} > 0$, $F_{az} > 0$, $F_{by} > 0$, $F_{bz} < 0$, $\mathcal{M} < 0$, $v_a > 0$, $w_a > 0$, $v_b < 0$, $w_b > 0$, $\varphi_2 > 0$; ponendo $\Delta\varphi_s = \varphi_3 - \varphi_2$, $\Delta\varphi_s$ è positivo quando la faccia 3 ruota nel senso $y \rightarrow z$ rispetto a quella 2, e cioè quando M_s positivo (fig. 6-44 a) compie lavoro negativo; ciò è conforme alla già fatta convenzione sul segno delle rotazioni relative.

Dall'uguaglianza

$$L_F + M_s \Delta_R = 0$$

si ottiene M_s in valore e segno.

Nella fig. 6-45 è rappresentata una trave ad asse circolare con tre cerniere $A B C$, isostatica quindi per vincoli interni, soggetta a tre forze $F_1 F_2 F_3$ in equilibrio; si vuole il momento flettente M_s in S . Si introduce una cerniera in S , e si determinano i centri, che sono tutti di rotazione relativa, non esistendo vincoli esterni: conosciuti $1 \cdot 2$, $2 \cdot 3$, $3 \cdot 4$, $4 \cdot 1$, si determinano i centri

$$2 \cdot 4 \begin{cases} 1 \cdot 2 - 1 \cdot 4 \\ 3 \cdot 2 - 3 \cdot 4 \end{cases} \quad 1 \cdot 3 \begin{cases} 2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \\ 4 \cdot 1 - 4 \cdot 3 \end{cases} .$$

Si suppone poi fissa una delle quattro travi, per esempio la 1; i centri $1 \cdot 2$, $1 \cdot 3$, $1 \cdot 4$ si comportano allora come centri di rotazione assoluta, e

fissata una coppia di assi y e z il procedimento non differisce da quello già seguito nell'esempio precedente.

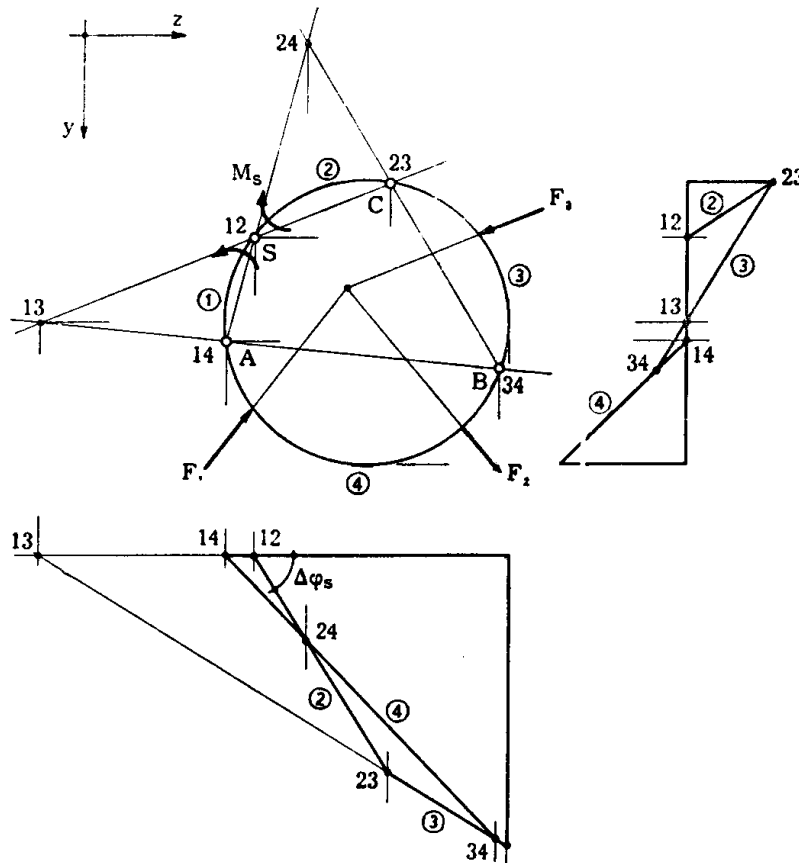


FIG. 6-45

Struttura del tutto analoga a quella ora trattata è il quadro della fig. 6-46, soggetto a due forze F e $-F$ uguali e contrarie; si ha

$$L_R = F (\overline{DE} - \overline{GH}) S_v$$

$$M_S \Delta_R = - M_S \Delta\varphi_S = M_S \frac{\overline{OL}}{\overline{MN}} \frac{S_v}{S_t}$$

da cui

$$M_S = - F (\overline{DE} - \overline{GH}) \frac{\overline{MN}}{\overline{OL}} S_t .$$

Poichè è $GH > DE$, ed $OL < 0$, è pure $M_S < 0$.

Nella fig. 6-47 è riportata la deformata della struttura

Gli spostamenti v e w dipendono da un unico parametro δ che rappresenta il grado di libertà del sistema; esplicitando tale dipendenza, ed

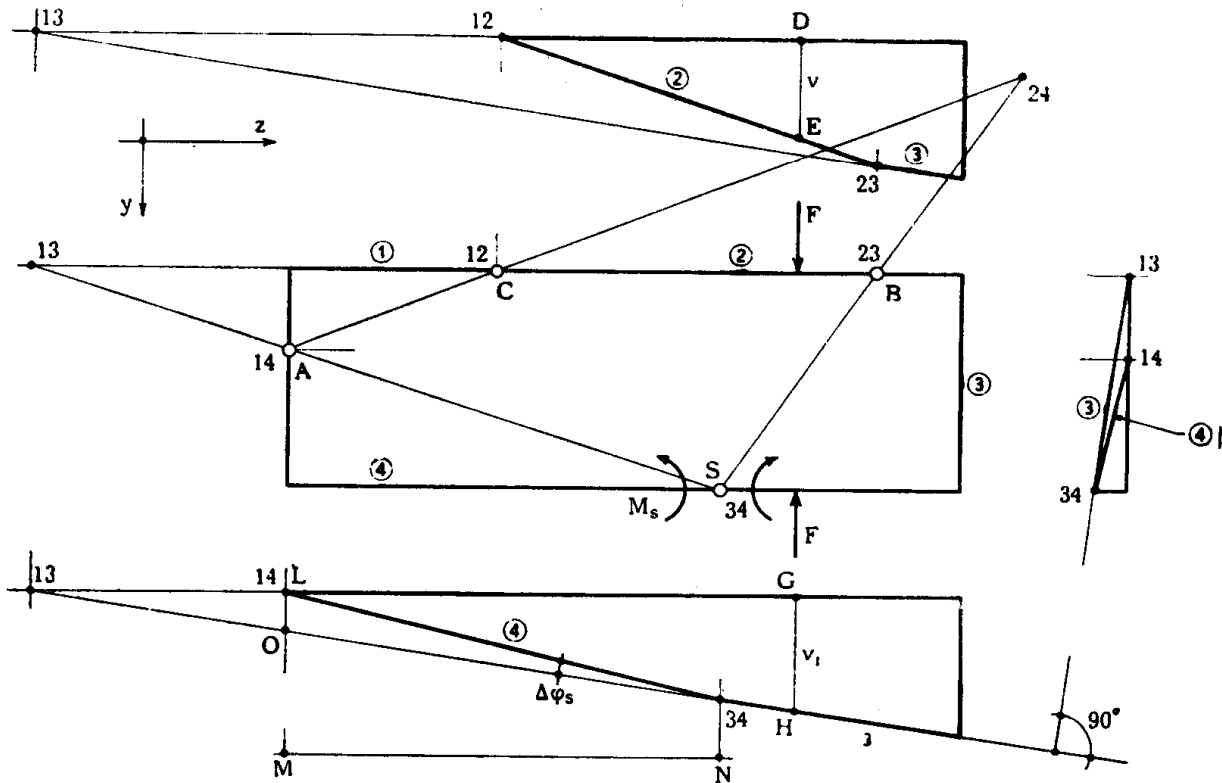


FIG. 6-46

eliminando δ dalla relazione $L_F + R \Delta_R = 0$, si ottiene l'espressione analitica di R in funzione delle caratteristiche geometriche della struttura e

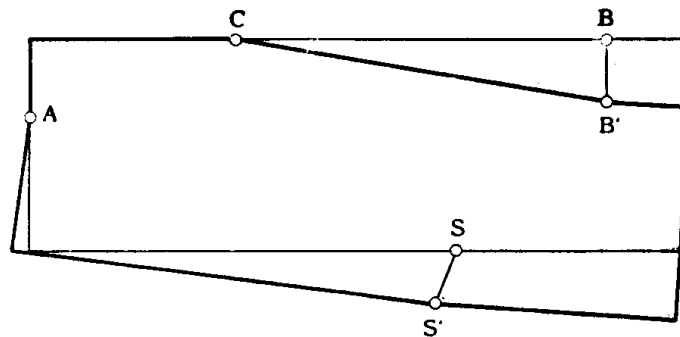


FIG. 6-47

delle forze applicate. Naturalmente ciò è sempre possibile in linea teorica, ma in pratica può eseguirsi soltanto se la struttura è così semplice da consentire un calcolo agevole dei fattori di proporzionalità tra v , w e δ

in funzione delle caratteristiche geometriche della struttura; in caso contrario, al procedimento analitico è preferibile quello grafico, in cui si perviene al valore numerico della reazione o della caratteristica della sollecitazione, rinunciando a conoscere la sua espressione analitica. Una struttura in cui è possibile pervenire agevolmente all'espressione analitica di R è quella della fig. 6-40, già incontrata. Altro esempio è quello della struttura della fig. 6-48; ove si ricerchi il valore della componente verti-

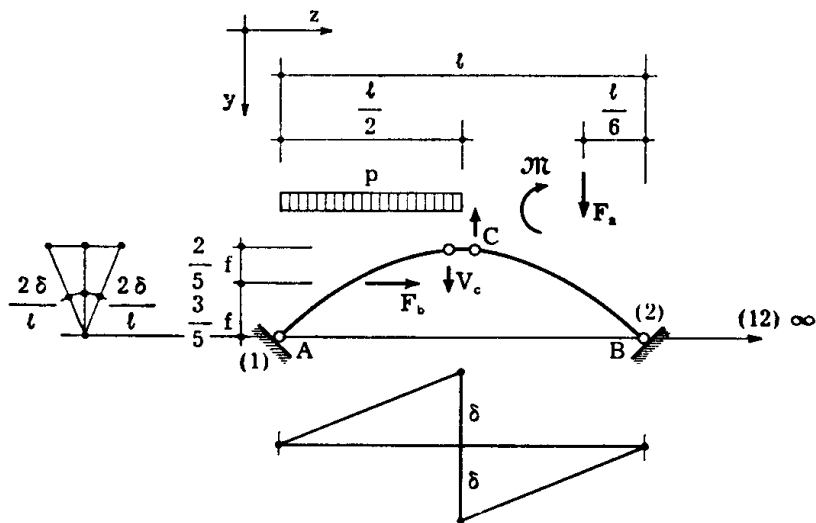


FIG. 6-48

cale V_c dell'interazione in chiave, si sostituisce alla cerniera un pendolo ad asse orizzontale, si imprime lo spostamento virtuale caratterizzato dallo spostamento relativo 2δ delle sezioni in C, e si scrive

$$-p \frac{\delta l}{4} + F_a \frac{\delta}{3} - \mathcal{M} \frac{2\delta}{l} - F_b \frac{6}{5} \delta \frac{f}{l} - 2V_c \delta = 0$$

da cui

$$V_c = -\frac{pl}{8} + \frac{F_a}{6} - \frac{\mathcal{M}}{l} - \frac{3}{5} F_b \frac{f}{l}$$

Se si desidera invece conoscere il valore della componente orizzontale H_A della reazione in A per la stessa struttura e gli stessi carichi, lo spostamento da considerare è quello della fig. 6-57, e si ha

$$p \frac{\delta l}{4} + F_a \frac{\delta}{3} - \mathcal{M} 2 \frac{\delta}{l} - F_b \frac{14}{5} \delta \frac{f}{l} - H_A 4 \delta \frac{f}{l} = 0$$

da cui

$$H_A = \frac{pl^2}{16f} + F_a \frac{l}{12f} - \frac{\mathcal{M}}{2f} - \frac{7}{10} F_b .$$

Le condizioni espresse dai due teoremi delle catene cinematiche sono necessarie perchè alla struttura possa imprimersi uno spostamento virtuale, e cioè perchè la struttura sia labile; il loro contemporaneo verificarsi è anche sufficiente perchè uno spostamento virtuale della struttura sia possibile.

In una struttura — o in una sua parte — non labile il problema della costruzione dei centri di rotazione non ha soluzione, e viceversa si riconosce che, se il problema non ha soluzione, la struttura non è labile; per esempio nell'arco a tre cerniere A B C (fig. 6-49) i tre centri 1, 2 ed 1·2 non sono allineati. In una struttura labile più di una volta il problema invece ha più soluzioni. Nell'arco

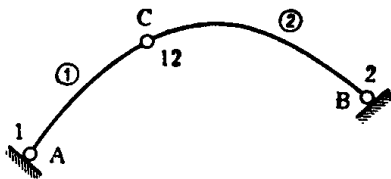


FIG. 6-49

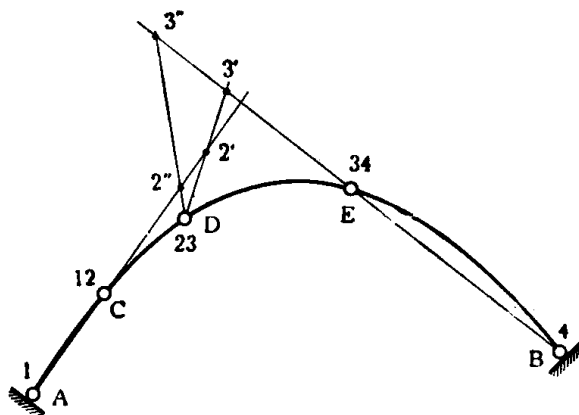


FIG. 6-50

a cinque cerniere (fig. 6-50), struttura due volte labile, ad ogni posizione del centro 2 sulla retta AC corrisponde un possibile insieme di centri di rotazione; il problema è quindi indeterminato, e dipende da un parametro (ascissa di 2 sulla retta AC).

In genere in una struttura l volte labile il problema dipende da $l-1$ parametri.

Particolare interesse presenta il caso dei sistemi in cui $3t-s=l-i=0$, ed è $l \neq 0$ per una particolare posizione reciproca delle travi e dei vincoli. In tal caso si ha che il problema della determinazione dei centri, che in genere non avrebbe soluzione, ne presenta invece una per quella particolare geometria della struttura.

Si consideri per esempio la struttura della fig. 6-51 a; in genere, il centro 1·3 dovrebbe nello stesso tempo essere l'intersezione O delle rette AD e BC, e trovarsi sull'asse del pendolo, e ciò è impossibile. Se però l'asse del pendolo passa per il punto O, il problema ha soluzione (fig. 6-51 b). Così pure nella struttura della fig. 6-52 a, il centro 2 dovrebbe nello stesso tempo essere l'intersezione O delle due rette AB e DE, e trovarsi sulla normale all'appoggio; se questa normale passa per O, il problema però ha soluzione.

E' interessante notare che nei casi in cui $3t-s=0$, e la struttura è una

volta labile per particolarità della sua geometria, l'introduzione di una qual-

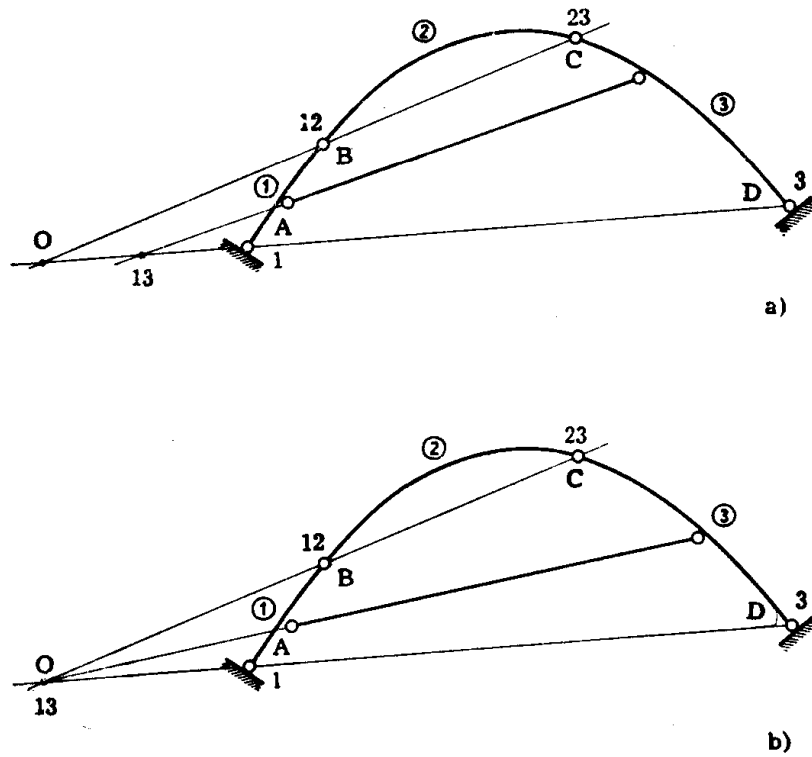


FIG. 6-51

siasi sconessione semplice interna o esterna non introduce una nuova labilità.

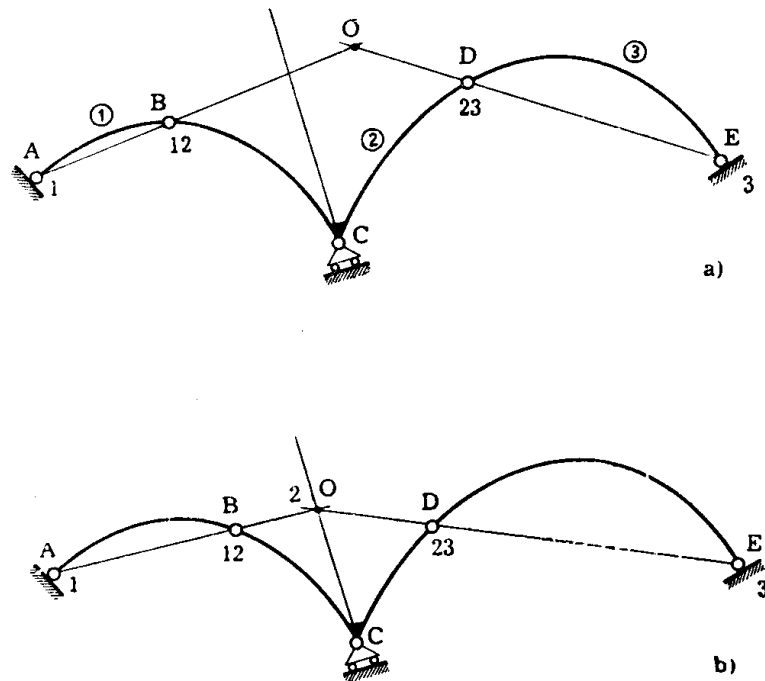


FIG. 6-52

Ciò è in accordo con l'essere $i = 1$. Si prenda in esame la struttura della fig. 6-51 a,

e si crei in essa una sconnessione semplice in S; la struttura acquista un grado di libertà, e la posizione dei centri non presenta alcuna anomalia (fig. 6-53 a):

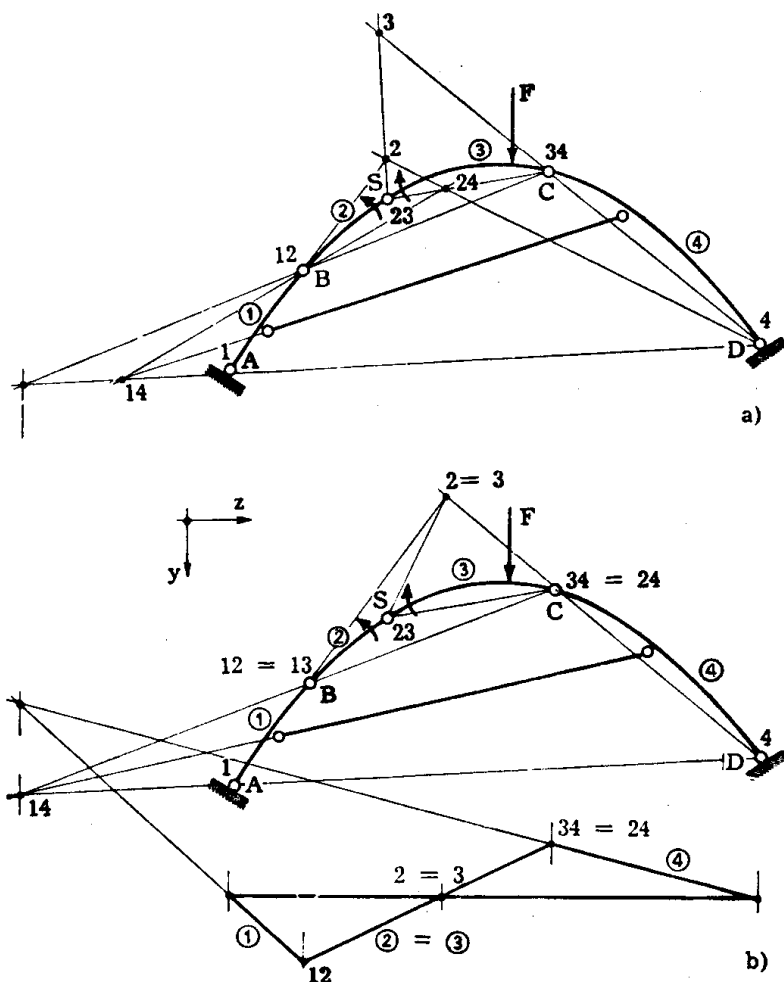


FIG. 6-53

conosciuti a priori i centri 1, 1 · 2, 2 · 3, 3 · 4, 4 e la retta a su cui giace 1 · 4 (asse del pendolo che unisce le travi 1 e 4) si ha successivamente

$$1 \cdot 4 \begin{cases} 1 - 4 \\ a \end{cases} \quad 2 \cdot 4 \begin{cases} 1 \cdot 2 - 1 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} 4 - 2 \cdot 4 \\ 1 - 1 \cdot 2 \end{cases} \quad 3 \begin{cases} 4 - 3 \cdot 4 \\ 2 - 2 \cdot 3 \end{cases}$$

Se invece la struttura è quella della fig. 6-51 b il problema dei centri ha ancora soluzione (fig. 6-53 b), ma questa è anormale, perchè non differisce da quella che già esiste in assenza di sconnessione; infatti il centro 2 coincide con il cen-

tro 3, il centro 1·2 con il centro 1·3, il centro 2·4 con il centro 3·4, e ciò significa che la parte 2 non presenta spostamenti rispetto alla parte 3. L'angolo $\Delta\varphi_s$ è nullo, e ciò significa che il momento M_s è in genere ∞ , e risulta indeterminato solo nel caso che la forza F passi per il centro 2 = 3.

Questo risultato è in accordo con le condizioni (p) necessarie perchè il sistema sia iperstatico e labile.

8. Le linee d'influenza delle reazioni e delle caratteristiche per forze viaggianti sulle strutture isostatiche.

Si consideri di nuovo la struttura della fig. 6-44; la costruzione dei due diagrammi v e w permette, fatta una volta per sempre, di ottenere il valore di M_s per qualunque condizione di carico. Si profila così il vantaggio del procedimento in esame quando la sezione da studiare è una

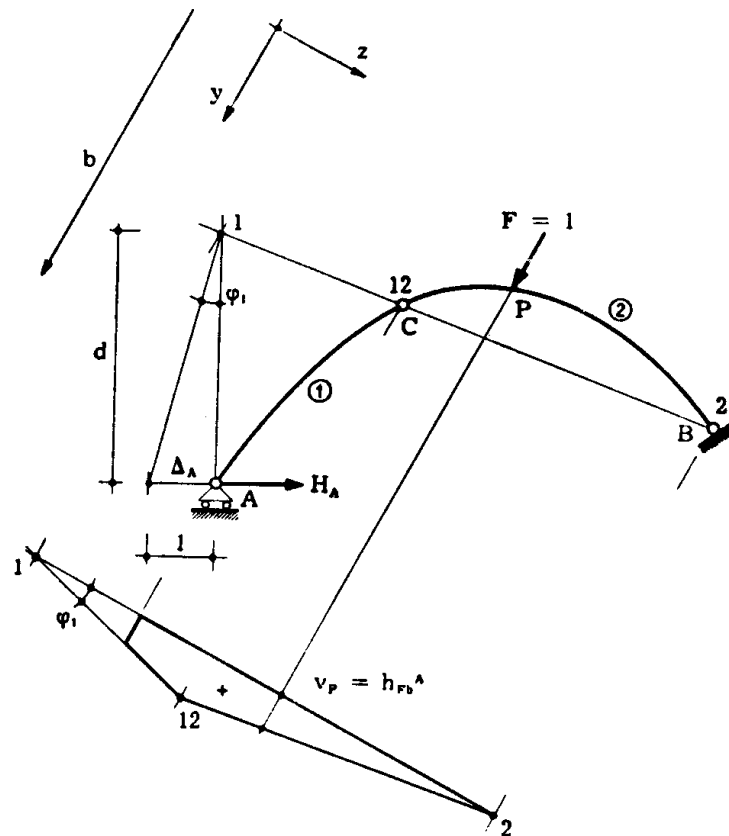


FIG. 6-54

sola — o alcune — e le condizioni di carico sono parecchie. Questo vantaggio si precisa attraverso il concetto di linea d'influenza. Si consideri una struttura qualunque, per esempio l'arco a tre cerniere della fig. 6-54; una forza positiva unitaria viaggia sulla struttura, mantenendosi sempre

parallela ad una retta orientata b ; un diagramma che fornisce attraverso le sue ordinate lette in corrispondenza della posizione generica della forza — mobile — il valore di una reazione o di una caratteristica in una sezione — fissa — si chiama *linea d'influenza* (Cap. IV) di quella reazione, o di quella caratteristica, in quella sezione, e per quella forza viaggiante. Tali linee si ottengono come diagrammi di componenti di spostamento della struttura resa labile in una determinata maniera. Si desideri, per esempio, conoscere la linea di influenza h_{Fb}^A della componente orizzontale H_A della reazione in A per effetto di una forza viaggiante, parallela ad una retta orientata b , unitaria e positiva. Si crea la sconnessione semplice corrispondente alla H_A , facendo agire la H_A come forza applicata; essa è positiva se, agendo sulla struttura, è diretta verso destra.

Sia v il diagramma delle componenti degli spostamenti secondo la retta b , riportati su una normale alla b , e Δ_A lo spostamento corrispondente ad H_A . Lo spostamento Δ_A è fornito da $\varphi_1 d$, ove φ_1 è la rotazione del tratto 1, e d è la distanza del centro 1 dalla orizzontale per A . Il principio dei lavori virtuali permette di scrivere, per la forza $F = +1$ agente in un generico punto P ,

$$1 \cdot v_P + H_A \Delta_A = 0 \quad (v)$$

da cui si trae

$$H_A = - \frac{v_P}{\Delta_A}$$

Se Δ_A è negativo, e cioè tale che per esso la H_A positiva compie lavoro negativo, la v_P , divisa per il valore assoluto di Δ_A , è la linea di influenza di H_A .

Sia v_P che Δ_A vanno letti nella scala S_v , perciò H_A è data anche dal rapporto dei segmenti rappresentativi di v_P e di Δ_A ; ciò equivale a misurare il segmento rappresentativo di v_P adottando come unità di misura il segmento rappresentativo di Δ_A . In tal senso è giustificato dire che la linea d'influenza di H_A è fornita dal diagramma delle componenti degli spostamenti indotti dallo spostamento unitario negativo corrispondente ad H_A , e in genere che la linea d'influenza di una reazione per una forza unitaria viaggiante è il diagramma delle componenti degli spostamenti corrispondenti alla forza viaggiante e indotti, sulla struttura resa una volta labile dalla soppressione del vincolo semplice relativo alla reazione in esame, da uno spostamento unitario negativo corrispondente alla reazione. Si ricorda ancora che la teoria è basata sull'ipotesi di piccolezza degli spostamenti, che a sua volta condiziona il principio dei lavori virtuali per i sistemi olonomi.

La linea d'influenza così ottenuta è sufficiente per conoscere il valore di H_A determinato da un qualsiasi assieme di forze parallele alla retta b . Poichè un generico insieme di forze è scomponibile in due insiemi di forze parallele a due assi y e z , la conoscenza delle due linee d'influenza della H_A per forze viaggianti parallele rispettivamente ad y e z permette di conoscere il valore di H_A per qualsiasi tipo di sollecitazione. I due assi y e z si scelgono quasi sempre sempre coincidenti con la verticale e l'orizzontale, essendo queste le direzioni delle forze che più frequentemente si introducono nei calcoli (peso, spinta del vento e del terreno, sollecitazioni dinamiche e sismiche, etc.). Nella fig. 6-55 sono riportate le linee d'influenza di H_A

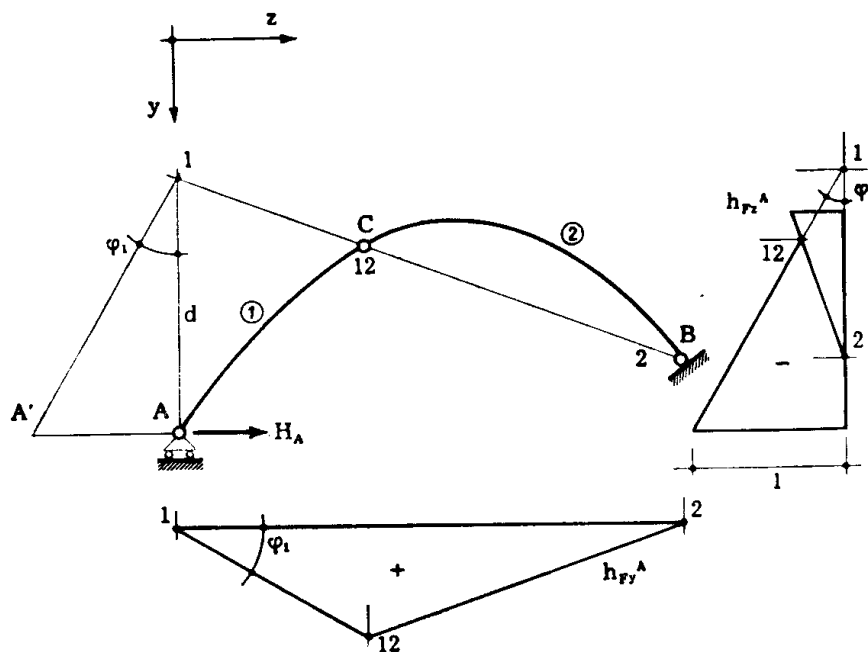


FIG. 6-55

per la stessa struttura della fig. 6-54, per forze verticali ed orizzontali viaggianti: lo spostamento AA' di A è fornito sempre da $\varphi_1 d$, e può essere ricavato con la costruzione della fig. 6-54, o letto direttamente nel diagramma degli spostamenti orizzontali.

Se in P agisce invece della forza $F = +1$ una coppia $\mathcal{M} = +1$, la (v) si scrive

$$1 \cdot \varphi_P + H_A \Delta_A = 0$$

da cui

$$H_A = - \frac{\varphi_P}{\Delta_A} = - \frac{\varphi_2}{\Delta_A}$$

La linea v , ottenuta, come già detto, per $\Delta_A < 0$, fornisce quindi il valore di H_A , provocato da una coppia agente in P, attraverso il valore della rotazione in corrispondenza del punto P. Il diagramma delle rotazioni φ , e cioè delle inclinazioni di v cambiate di segno (1-1), è perciò la linea di influenza h_m^A di H_A per una coppia unitaria viaggiante (fig. 6-56). I segmenti rappresentanti le rotazioni φ possono ottenersi conducen-

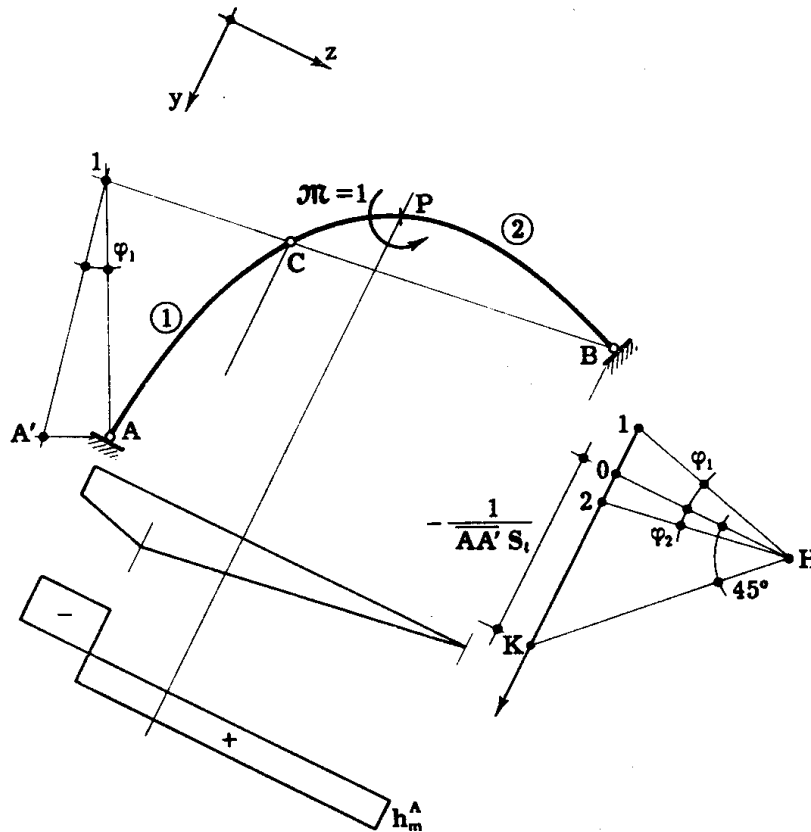


FIG. 6-56

do da un polo H le parallele ai segmenti costituenti il diagramma v ; risulta così

$$\varphi_1 = \frac{\overline{O1}}{\overline{OH}} \frac{S_v}{S_t}$$

$$\varphi_2 = \frac{\overline{O2}}{\overline{OH}} \frac{S_v}{S_t}$$

Per ottenere la scala in cui leggere il diagramma h_m^A basta considerare il segmento $OK = OH$; esso corrisponde ad un rapporto $\frac{OK}{OH} = 1$,

e quindi ad una rotazione S_v/S_t , e ad una H_A fornita da ($\Delta_A = \overline{AA'} S_v$, dove AA' è positivo se A' è alla destra di A)

$$H_A = - \frac{S_v}{S_t} \frac{1}{\overline{AA'} S_v} = - \frac{1}{\overline{AA'}} \frac{1}{S_t};$$

la scala S_h della linea d'influenza h_m^A è fornita quindi da

$$H_A = OK = OH = \overline{OH} S_h = - \frac{1}{\overline{AA'}} \frac{1}{S_t},$$

e cioè si ha

$$S_h = - \frac{1}{\overline{OH} \cdot \overline{AA'}} \frac{1}{S_t}.$$

La scala S_h ha dimensioni m^{-1}/cm .

Il problema della scala è superato se si intende pervenire non al solo valore numerico, ma all'espressione analitica — in funzione delle caratteristiche geometriche della struttura — della linea d'influenza, e cioè all'espressione analitica delle ordinate dei punti di vertice di tale linea, costituita in ogni caso da segmenti

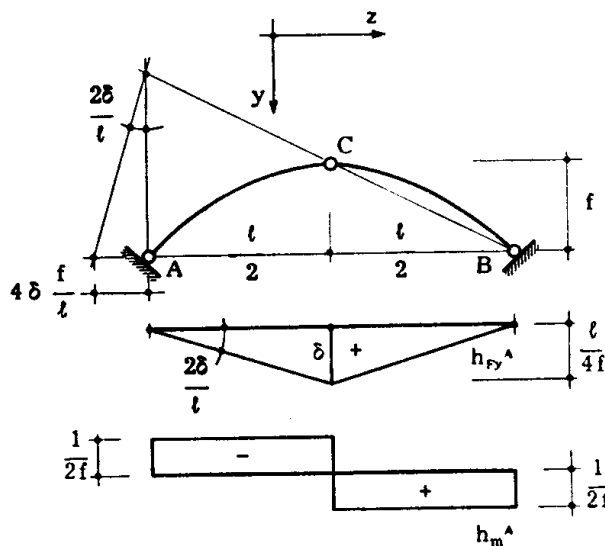


FIG. 6-57

di retta. Questo però è praticamente possibile solo in alcuni casi particolarmente semplici, e cioè quando, come già osservato nel paragrafo precedente, gli spostamenti sono facilmente esprimibili in funzione di un parametro δ .

Si prenda in esame, per esempio, l'arco a tre cerniere simmetrico della fig. 6-57, con imposte AB a livello. Lo spostamento δ della cerniera C implica uno

spostamento $— 4 \delta \frac{f}{l}$ di A; il valore in corrispondenza di C della linea h_{Fy}^A è perciò

$$\frac{\delta}{4 \delta \frac{f}{l}} = \frac{l}{4 f} .$$

Così pure l'inclinazione del diagramma v è $\pm 2 \delta/l$, e quindi il diagramma h_{m}^A è composto dei due segmenti di altezza

$$\pm \frac{\frac{2 \delta}{l}}{4 \delta \frac{f}{l}} = \pm \frac{1}{2 f} .$$

Un carico p distribuito uniformemente sull'intera linea fornisce

$$H_A = p \frac{l}{2} \frac{l}{4 f} = \frac{p l^2}{8 f} ;$$

una coppia \mathcal{M} agente sulla trave AC fornisce

$$H_A = - \frac{\mathcal{M}}{2 f} ,$$

come può agevolmente verificarsi.

Quanto detto per le reazioni vale anche per le caratteristiche della sollecitazione interna. Con riferimento ancora all'arco a tre cerniere (fig. 6-58) sia presente una forza $F=1$ verticale in P; si ponga una cerniera in S, e si facciano agire sulle due facce da essa unite due coppie uguali e contrarie, e pari in valore e in segno al momento flettente M_s che la F provoca in S prima della sconnessione. Si ha

$$1 \cdot v_P + M_s D_{\varphi S} = 0$$

Per $D_{\varphi S} < 0$, e cioè per uno spostamento che fa compiere lavoro negativo ad M_s , si ha

$$M_s = \frac{v_P}{|D_{\varphi S}|} . \quad (w)$$

La linea v ottenuta per $D_{\varphi S} < 0$, divisa per il valore assoluto di $D_{\varphi S}$,

è perciò la linea d'influenza m_{Fy}^s . Per quanto detto in nota al § 4-7 è

$$|D_{\varphi S}| = \frac{\bar{h}_s}{\bar{k}_s} \frac{S_v}{S_t}$$

e quindi

$$m_{Fy}^s = \bar{v} \frac{\bar{k}_s}{\bar{h}_s} S_t ;$$

è cioè (4-15)

$$S_m = S_t \frac{\bar{k}_s}{\bar{h}_s} .$$

Per ottenere che \bar{h}_s/\bar{k}_s sia unitario, e cioè $S_m = S_t$, basta eseguire la costruzione riportata nella stessa fig. 6-58: sulla verticale per 2 si abbassa

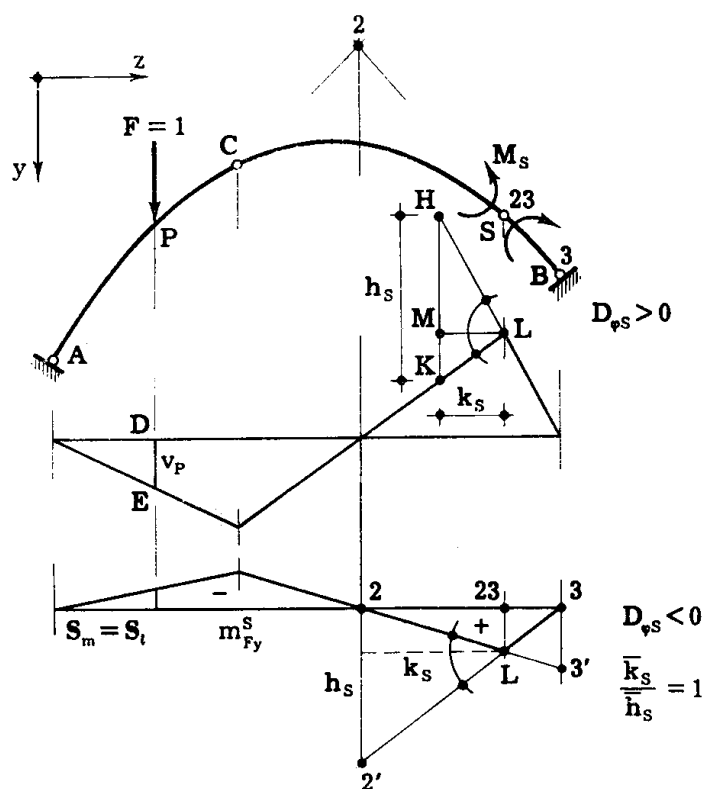


FIG. 6-58

il segmento $\overline{22'} = \overline{2-2 \cdot 3}$, la congiungente $3 \cdot 2'$ è il tratto 3 della linea d'influenza; per verifica si può ripetere la stessa costruzione con riferimento alla verticale per 3.

La costruzione testè riportata, del tutto generale, rimane inalterata se, come a volte accade, la verticale per 2·3 è esterna al tratto compreso tra le verticali

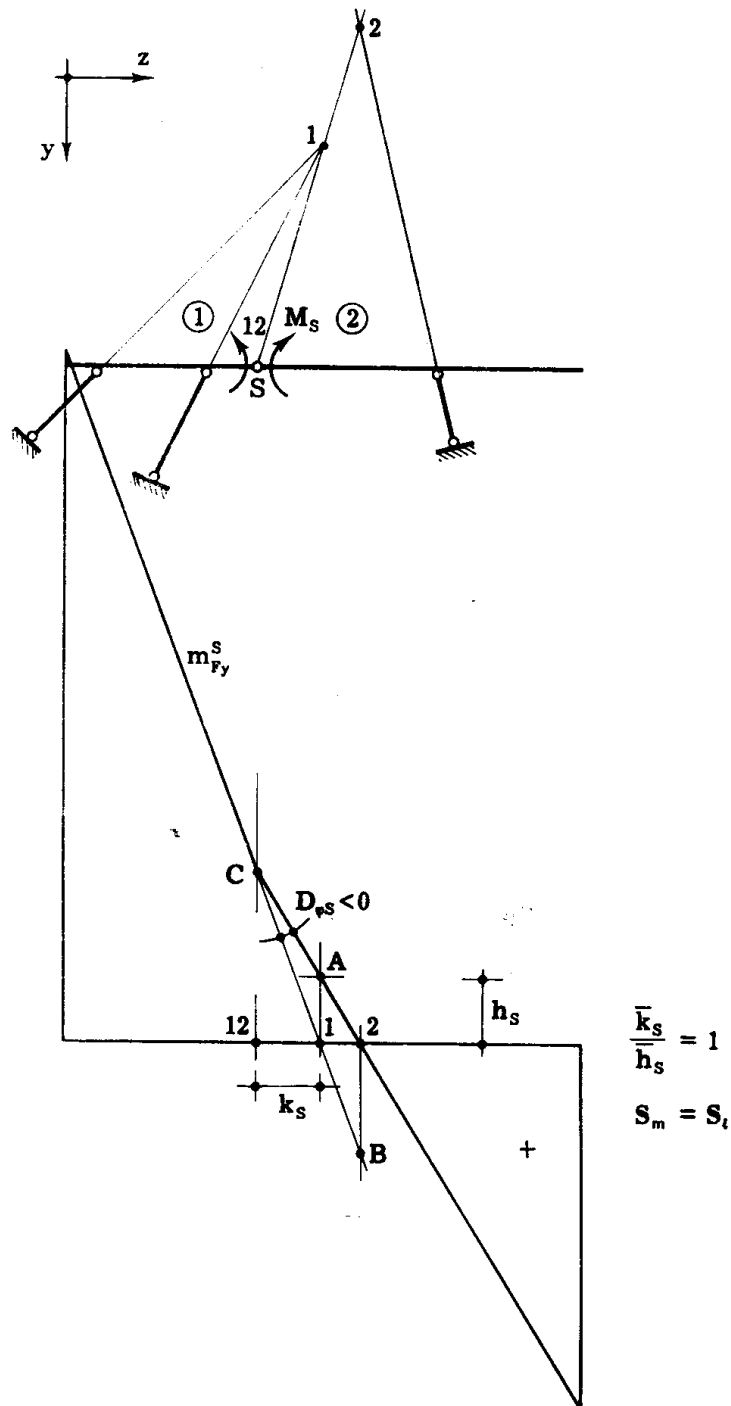


FIG. 6-59

per 2 e per 3; essa è riportata, con riferimento a tale caso, per la trave della fig. 6-59.

Nella fig. 6-60 è costruita la linea d'influenza m_{Fz}^S del momento in S per una forza orizzontale unitaria viaggiante.

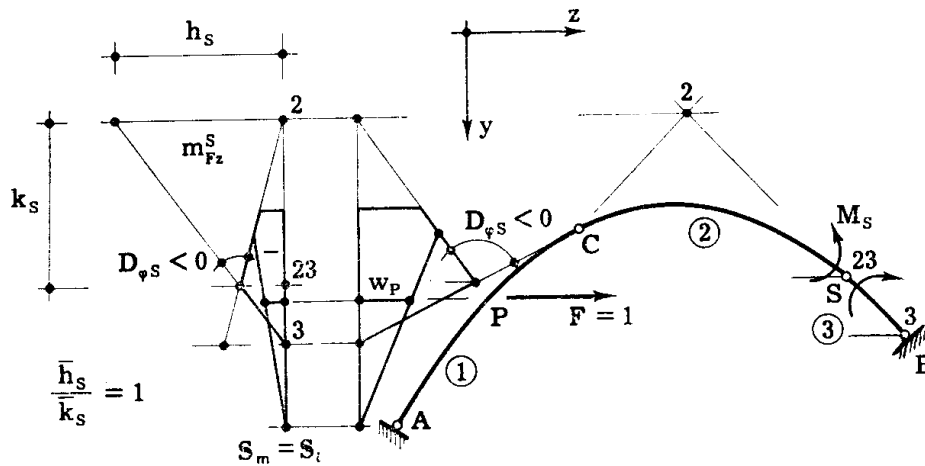


FIG. 6-60

Se sull'arco agisce invece della forza $F=1$ una coppia $\mathcal{M}=1$, si ha, invece della (w),

$$1 \cdot \varphi_P + M_S D_{\varphi S} = 0 .$$

Per $D_{\varphi S} < 0$ è perciò

$$M_S = \frac{\varphi_P}{|D_{\varphi S}|} = \frac{\frac{\overline{EF}}{\overline{DE}} \frac{S_v}{S_t}}{\frac{\bar{h}_s}{\bar{k}_s} \frac{S_v}{S_t}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{DE}} \cdot \frac{\bar{k}_s}{\bar{h}_s} .$$

Per $\frac{\bar{h}_s}{\bar{k}_s} = 1$ si ha

$$M_S = \frac{\overline{FE}}{\overline{DE}} = \bar{\varphi}_P .$$

Il diagramma delle φ (fig. 6-61) si costruisce come nella fig. 6-56; perchè si possa interpretare come linea d'influenza $m_{\mathcal{M}}^S$ del momento in S per una coppia unitaria viaggiante, il segmento unitario deve essere quello

rappresentante $\frac{\bar{h}_s}{\bar{k}_s}$.

Nella fig. 6-62 sono riportate le linee d'influenza dello sforzo di ta-

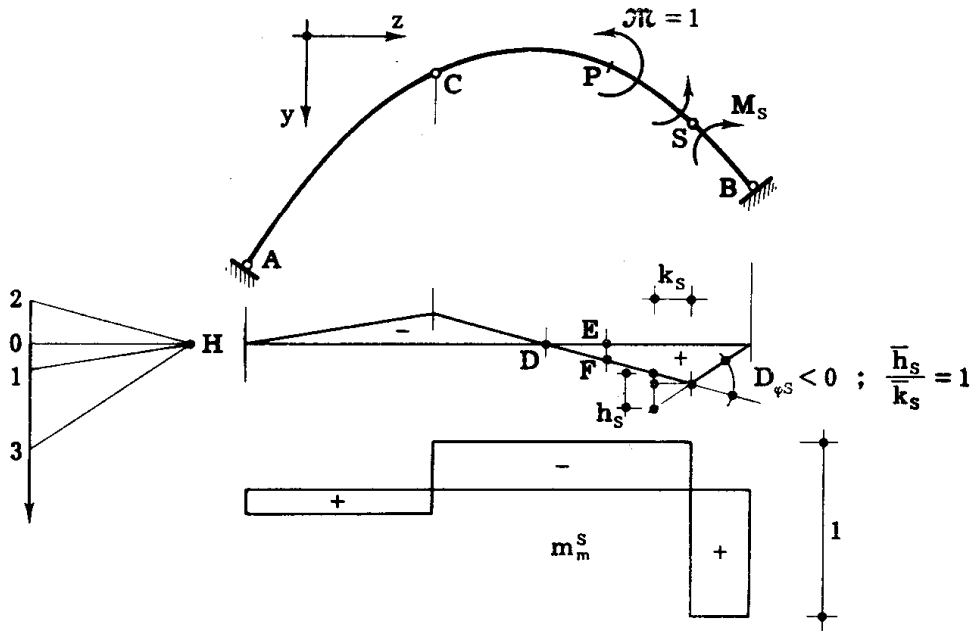


FIG. 6-61

glio in S per una forza verticale o orizzontale unitaria viaggiante; la scon-

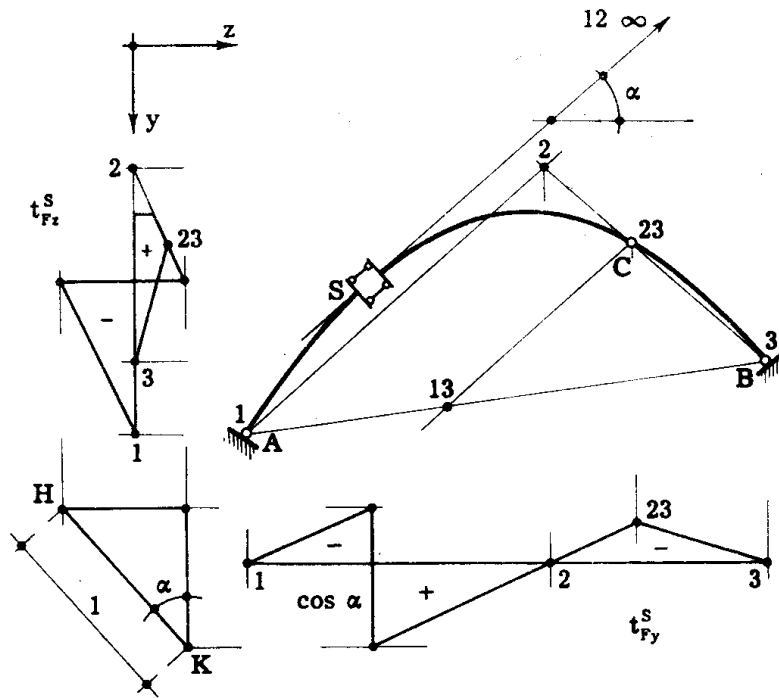


FIG. 6-62

essione semplice in S è tale da annullare il taglio. Lo spostamento è tale che T_s positivo compia lavoro negativo.

Lo spostamento relativo HK tra le due sezioni unite dal bipendolo in S si ottiene componendo le componenti verticale e orizzontale, fornite dai diagrammi v_p e w_p ; esso si effettua — come deve verificarsi — secondo la normale alla direzione dei pendoli. I due diagrammi v e w forniscono le linee d'influenza $t_{F_y}^S$ e $t_{F_z}^S$ se lette assumendo il segmento HK come unità di misura.

In maniera del tutto analoga sono disegnate (fig. 6-63) le linee d'influenza $n_{F_y}^S$ ed $n_{F_z}^S$ dello sforzo normale in S per una forza verticale ed orizzontale unitaria viaggiante.

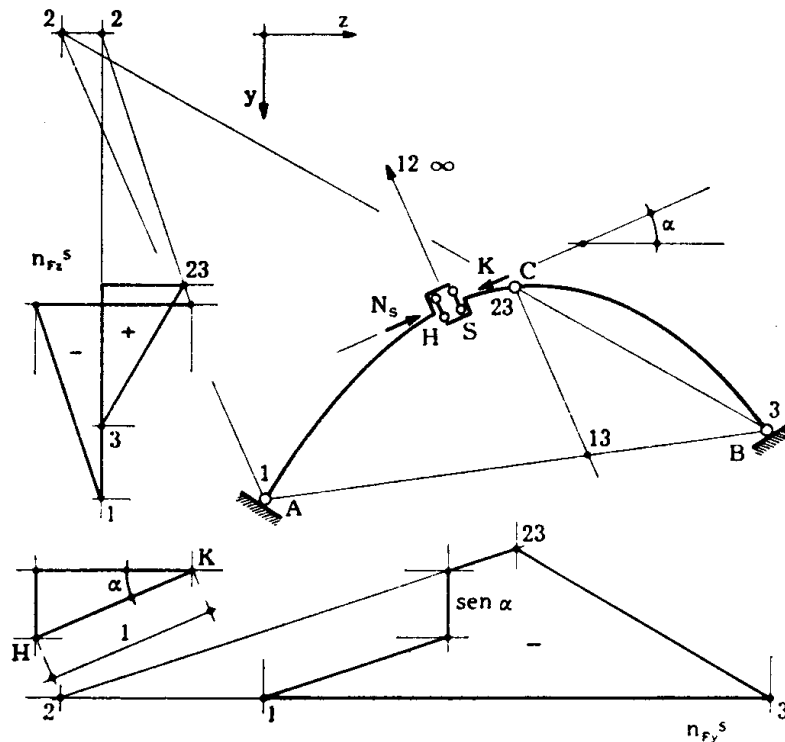


FIG. 6-63

In sintesi può dirsi che la linea d'influenza di una reazione o di una caratteristica per effetto di un ente (forza o coppia) viaggiante è il diagramma degli spostamenti corrispondenti all'ente viaggiante (componenti dello spostamento secondo la direzione della forza, o rotazioni) provocati, sulla struttura resa una volta labile dalla soppressione del vincolo semplice relativo alla reazione o alla caratteristica in esame, da uno spostamento relativo unitario e positivo o da un cedimento negativo corrispondente alla reazione o alla caratteristica stessa. Lo spostamento relativo positivo non è altro che una distorsione negativa.

E' necessario chiarire, come già fatto al § 4-7, che la dicitura «spostamento relativo unitario» sta solo a indicare che gli spostamenti o le rotazioni generiche devono essere divisi per lo spostamento relativo in S.

Si ritrova così, senza bisogno di ricorrere ad alcun teorema di reciprocità, la teoria delle linee d'influenza già esposta al Cap. IV; essa è basata solo sul principio dei lavori virtuali per i sistemi olonomi, ed è naturalmente limitata alle forze viaggianti, alle reazioni o alle caratteristiche della sollecitazione, e alle strutture isostatiche.

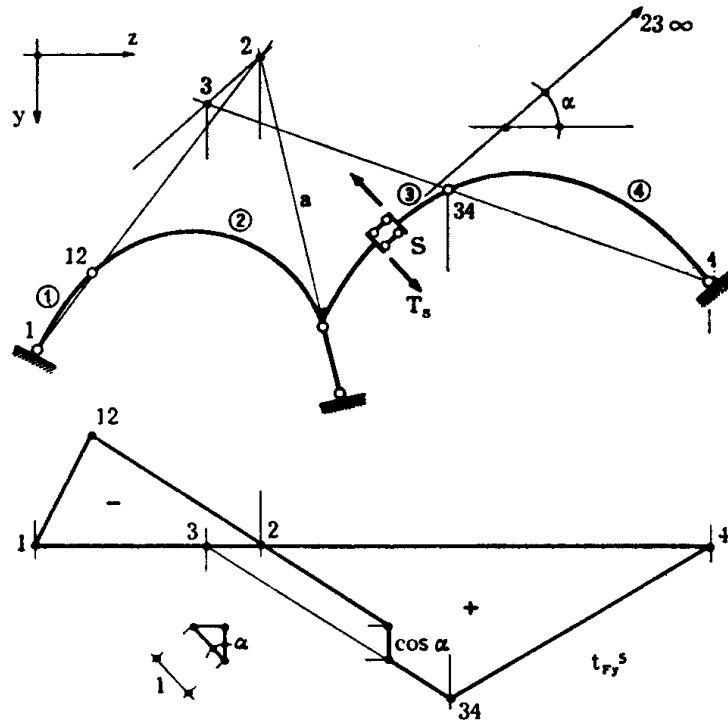


FIG. 6-64

Si riportano di seguito alcuni esempi di linee d'influenza. Nella figura 6-64 è tracciata la linea d'influenza del taglio in S per una forza

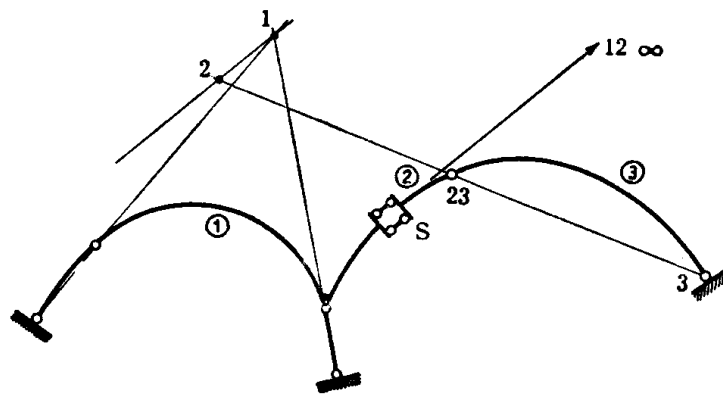


FIG. 6-65

verticale unitaria viaggiante; le travi rigide sono quelle numerate nella figura; i centri 1, 1 · 2, 2 · 3, 3 · 4 e 4 sono noti, così pure è nota la retta α

sulla quale giace il centro 2. Si ha così successivamente

$$2 \begin{cases} 1 - 1 \cdot 2 \\ a \end{cases} \quad 3 \begin{cases} 4 - 4 \cdot 3 \\ 2 - 2 \cdot 3 \end{cases}$$

Il segmento unitario è quello che ha per componente verticale la discontinuità sotto S, ed è pari allo spostamento relativo tra le due facce unite dal bipendolo in S. Si osservi che nulla sarebbe cambiato se la prima e l'ultima trave si fossero considerate come pendoli (fig. 6-65).

Nella fig. 6-66 è tracciata la linea d'influenza dello sforzo nel pendolo HK per effetto di una forza verticale e orizzontale unitaria viaggiante; lo

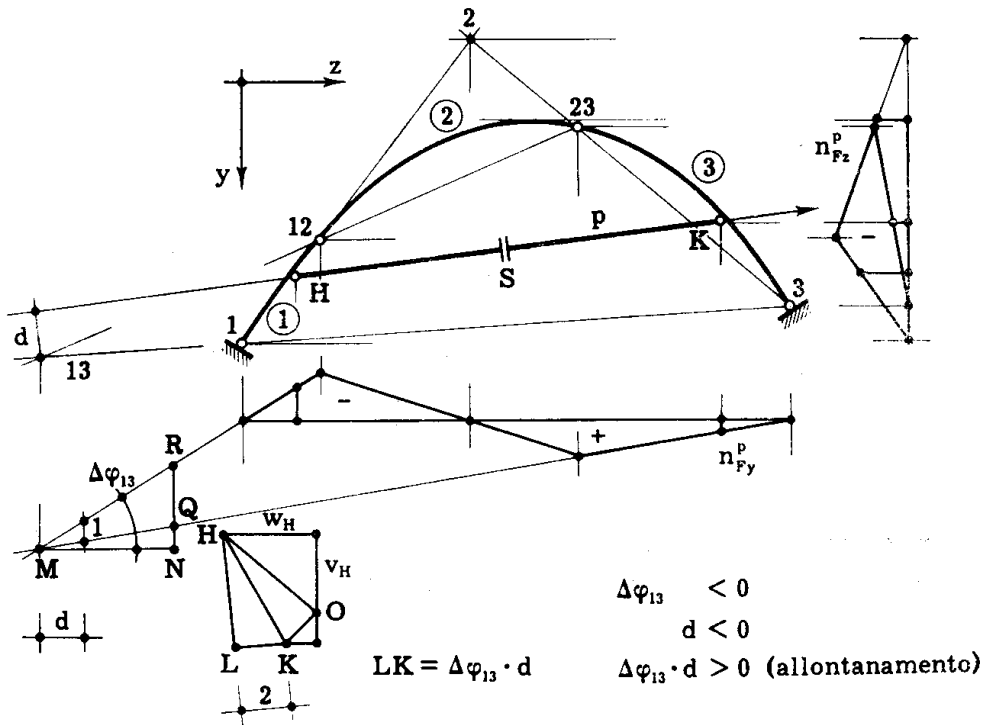


FIG. 6-66

sforzo in HK è considerato positivo se di trazione, quindi i due estremi H e K devono allontanarsi nello spostamento impresso. I centri 1, 1 · 2, 2 · 3, 3 sono noti; si trovano così gli altri

$$2 \begin{cases} 1 - 1 \cdot 2 \\ 3 - 3 \cdot 2 \end{cases} \quad 1 \cdot 3 \begin{cases} 1 - 3 \\ 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \end{cases}$$

I diagrammi v e w si tracciano pedissequamente; il segmento KL che nella stessa scala rappresenta la componente dello spostamento relativo

tra H e K secondo la congiungente HK (variazione della distanza tra H e K), e che è da assumersi come segmento unità, può aversi determinando lo spostamento assoluto OH di H (risultante dei due vettori v_H e w_H) e OK di K (risultante dei due vettori v_K e w_K). Il vettore HK rappresenta lo spostamento relativo di K rispetto ad H, e la sua proiezione LK sulla parallela all'asse del pendolo è il segmento da adottarsi come unità di misura (nella figura, per una maggiore evidenza grafica, il poligono degli spostamenti di H e K è stato rappresentato riportando gli spostamenti v e w raddoppiati, perciò il segmento LK è il doppio dell'unità).

Il segmento LK può anche ottenersi come prodotto della rotazione relativa $\Delta\varphi_{13}$ fra le due travi 1 e 3 cui H e K appartengono, per la distanza d tra il centro 1·3 e l'asse del pendolo HK. Infatti la proiezione su quest'asse dello spostamento OH di H è fornito da (6-12)

$$(\text{OH})_p = \varphi_1 d_1$$

ove φ_1 è la rotazione assoluta della trave 1 e d_1 la distanza del centro 1 dalla retta HK; la proiezione dello spostamento assoluto OK di K sulla retta HK è a sua volta fornita da

$$(\text{OK})_p = \varphi_3 d_3 ;$$

la proiezione dello spostamento relativo di K rispetto ad H sulla retta HK è fornita quindi, se H precede K sulla retta orientata p , da

$$(\text{OK})_p - (\text{OH})_p = (\text{HK})_p = \varphi_3 d_3 - \varphi_1 d_1 .$$

Essa risulta positiva quando corrisponde ad un allontanamento tra H e K. Poichè 1·3 (§ 6-7) è il baricentro della massa φ_1 concentrata in 1 e della massa φ_3 concentrata in 3, il momento statico delle due masse φ_1 in 1 e φ_3 in 3 rispetto alla retta HK deve essere eguale al momento statico della massa $\varphi_3 - \varphi_1 = \Delta\varphi_3$ in 1·3, da cui

$$(\text{HK})_p = \varphi_3 d_3 - \varphi_1 d_1 = \Delta\varphi_{13} d .$$

In genere può dirsi che la componente secondo una retta p dello spostamento relativo dei due punti H e K giacenti su p è fornito dal prodotto $\Delta\varphi_{ij} d$, ove $\Delta\varphi_{ij}$ è la rotazione relativa $\varphi_j - \varphi_i$ fra le due travi i ed j cui appartengono H e K, e d la distanza di C_{ij} dalla retta p orientata nel verso HK; se $(\text{HK})_p > 0$, è un allontanamento. Alla stessa proposizione si giunge in modo immediato se si considera la trave i (e con essa H) fissa, e quindi la rotazione $\Delta\varphi_{ij}$ come rotazione assoluta φ_j , e lo spostamento

relativo tra H e K come spostamento assoluto di K. Questo risultato è applicabile utilmente ogni volta che si ricerca lo sforzo in un pendolo, in particolare quindi nell'ambito delle travature reticolari.

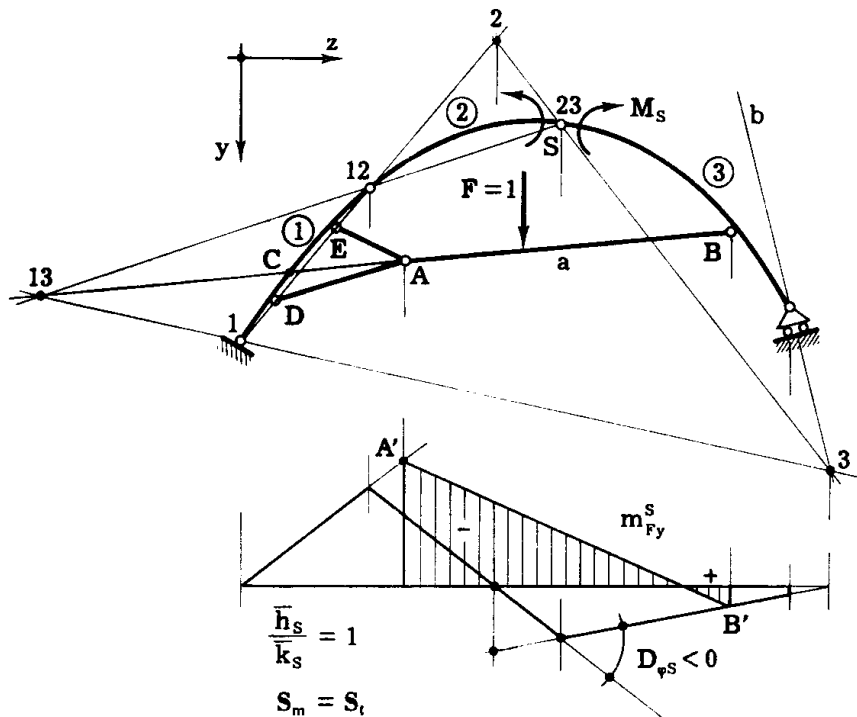


FIG. 6-67

Nella fig. 6-67 si ricerca la linea d'influenza del momento in S per una forza verticale unitaria che viaggia sulla trave AB; i centri noti a priori sono 1, 1 · 2, 2 · 3, inoltre si conosce la retta b su cui giace 3 e la retta a = AB su cui giace 1 · 3; si determinano così

$$1 \cdot 3 \begin{cases} a \\ 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \end{cases} \quad 3 \begin{cases} 1 - 1 \cdot 3 \\ b \end{cases} \quad 2 \begin{cases} 1 - 1 \cdot 2 \\ 3 - 3 \cdot 2 \end{cases}$$

La costruzione del diagramma delle v per le travi 1, 2 e 3 è fatta in modo che la scala della linea d'influenza del momento coincida con quella delle lunghezze. La costruzione del diagramma v per la trave AB, che è poi quello che interessa, si ottiene considerando che il punto B appartiene sia alla trave AB che alla trave 3, e quindi il diagramma v relativo alla trave AB deve passare per B'; inoltre il punto A, solidale con il tratto 1, ha il suo spostamento sul segmento relativo al tratto 1; perciò il diagramma relativo alla trave AB è il tratto A'B'.

Nella fig. 6-68 si riporta la linea d'influenza del momento in S per effetto di una forza verticale unitaria, che viaggia sull'arco; i centri conosciuti a priori sono 1, 1 · 2, 2 · 3, 1a, 2b, 3c, ab, bc, ca; si sa inoltre che il

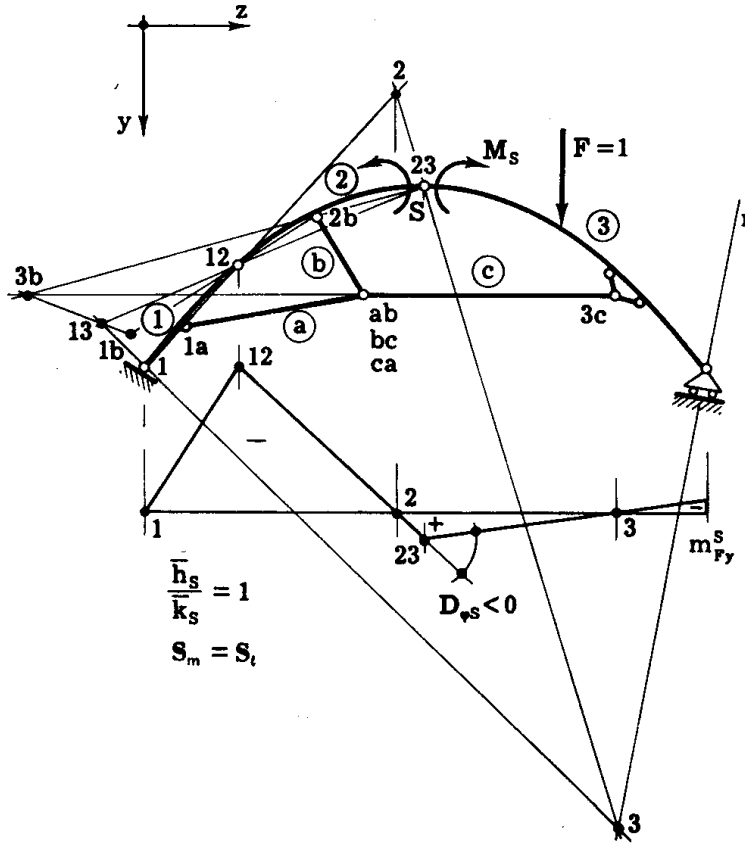


FIG. 6-68

centro 3 giace sulla retta r . Si determinano così successivamente

$$1 \cdot b \begin{cases} a \cdot b - 1 \cdot a \\ 1 \cdot 2 - 2 \cdot b \end{cases}$$

$$3 \cdot b \begin{cases} 2 \cdot b - 2 \cdot 3 \\ b \cdot c - 3 \cdot c \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} 1 - 1 \cdot 3 \\ r \end{cases}$$

$$1 \cdot 3 \begin{cases} 3 \cdot b - 1 \cdot b \\ 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} 1 - 1 \cdot 2 \\ 3 - 2 \cdot 3 \end{cases}$$

Nella fig. 6-69 si riporta la linea d'influenza della componente secondo BC dell'interazione nella cerniera C per effetto di una forza verticale unitaria viaggiante sull'arco; sono noti a priori i centri 1, 1 · 2, 3, a,

1b, 2c, ab, bc, ca; si sa inoltre che il centro 2 · 3 giace sulla normale n per C

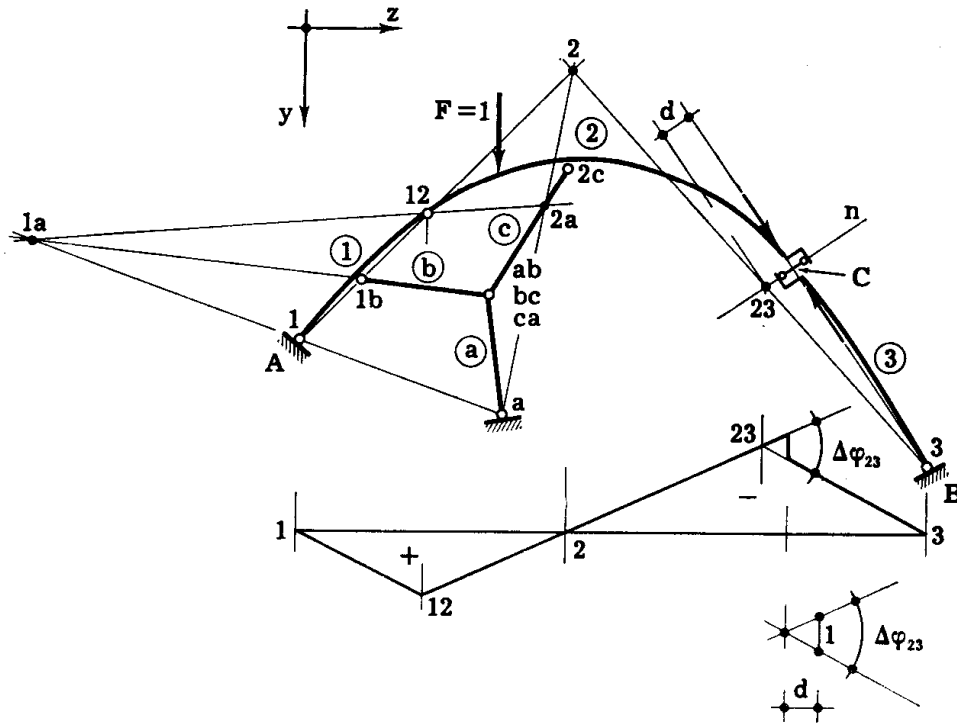


FIG. 6-69

alla retta BC. Si trovano così successivamente

$$1 \cdot a \begin{cases} 1 - a \\ 1 \cdot b - a \cdot b \end{cases} \quad 2 \cdot a \begin{cases} 1 \cdot a - 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot c - a \cdot c \end{cases} \quad 2 \begin{cases} a - 2 \cdot a \\ 1 - 1 \cdot 2 \end{cases} \quad 2 \cdot 3 \begin{cases} 2 - 3 \\ n \end{cases}$$

Nella fig. 6-70 è riportata la costruzione della linea d'influenza dello

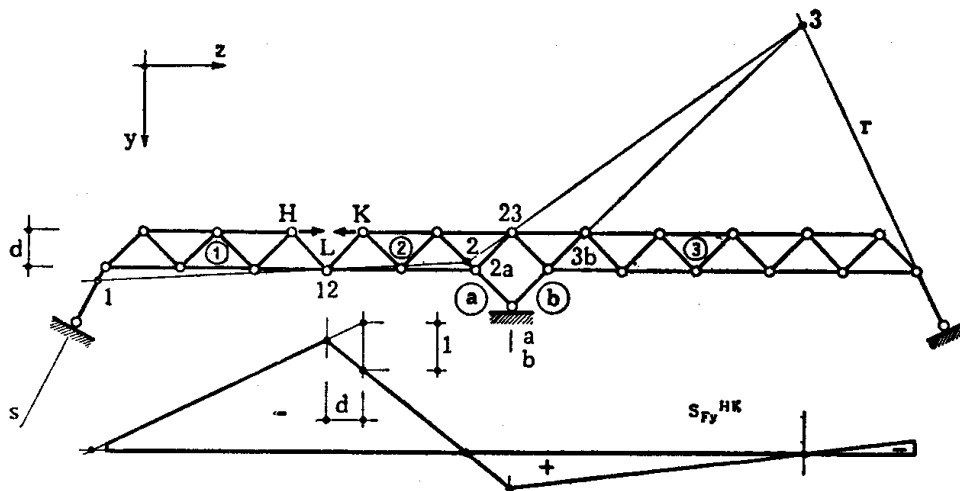


FIG. 6-70

sforzo nel pendolo HK (positivo se di trazione) per una forza verticale

unitaria viaggiante; le parti non labili per vincoli interni, da considerarsi come travi uniche, sono tre, inoltre esistono le travi a e b . I centri noti sono $1 \cdot 2$, $2 \cdot 3$, a , b , $2a$, $3b$; si sa inoltre che il centro 3 giace sulla retta r , e il centro 1 sulla retta s . Si determinano perciò di seguito

$$3 \begin{cases} b - 3 \cdot b \\ r \end{cases} \quad 2 \begin{cases} a - 2 \cdot a \\ 3 - 2 \cdot 3 \end{cases} \quad 1 \begin{cases} 2 - 1 \cdot 2 \\ s \end{cases}$$

Lo spostamento relativo tra H e K è fornito dal prodotto $\Delta\varphi_{12} d$, ove d è la distanza del polo L dell'asta dall'asse dell'asta stessa; tale segmento è l'unità di lettura.

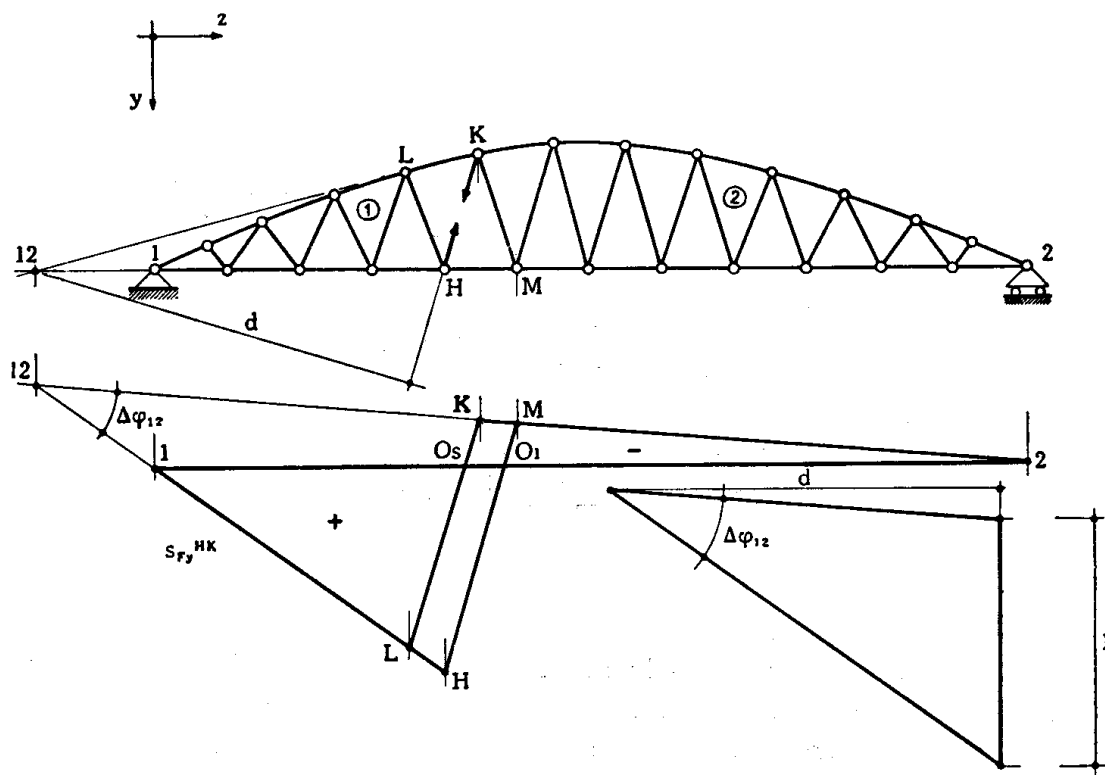


FIG. 6-71

Nella fig. 6-71 è riportata la linea d'influenza dello sforzo nell'asta HK per effetto di una forza verticale unitaria viaggiante. Soppressa l'asta HK , le parti internamente non labili sono due; i centri 1 e $1 \cdot 2$ sono noti a priori, il centro 2 si determina immediatamente. Il segmento $1H$ è relativo alla parte 1 , il segmento $2K$ alla parte 2 ; il segmento LK è relativo all'asta LK , e si considera nel caso che la forza viaggi sul corrente superiore; il segmento HM è relativo all'asta HM , e si utilizza se la forza viaggia sul corrente inferiore.

Il segmento che rappresenta la proiezione normale sulla retta HK dello spostamento relativo tra i due punti H e K è fornito dal prodotto

$\Delta\varphi_{12} d$, ove d è la distanza di $1 \cdot 2$ dalla retta HK; esso si può costruire come nella figura, e ad esso come unità di misura vanno riferite le ordinate del diagramma. Il verso dello spostamento virtuale impresso è tale che i due punti H e K si allontanano, come facilmente si verifica, e perciò le ordinate positive della linea d'influenza sono quelle disposte nel verso delle y positive. Si riconosce che forze verticali dirette verso il basso (peso) e agenti a sinistra della verticale per il punto di passaggio O_s (forze agenti sul corrente superiore) od O_i (forze agenti sul corrente inferiore) inducono in HK sempre sforzi di trazione; il contrario accade per le forze a destra. Su questa proprietà si basa il calcolo di una notevole struttura da ponte (trave Nielsen).

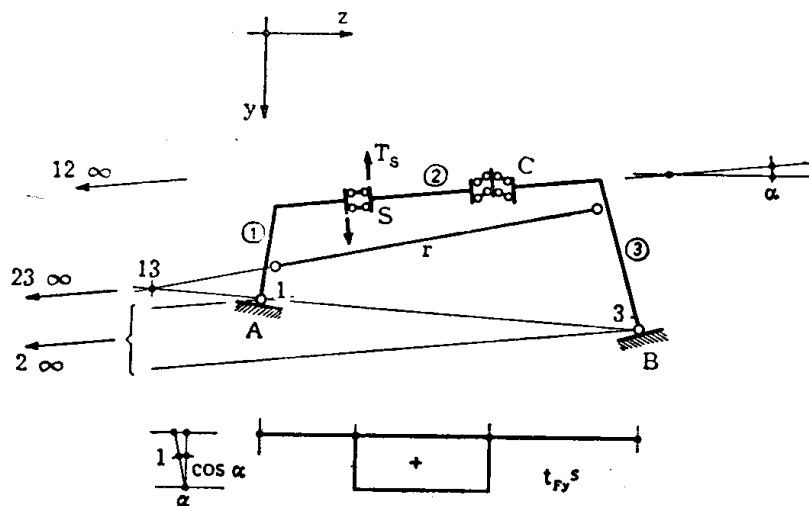


FIG. 6-72

Nella fig. 6-72 è riportata la linea d'influenza del taglio in S per una forza verticale unitaria viaggiante; i centri $1, 1 \cdot 2, 2$ sono noti a priori; si sa anche che il centro $2 \cdot 3$ giace sulla retta impropria, e il centro $1 \cdot 3$ sull'asse r del pendolo. Si determinano successivamente

$$1 \cdot 3 \begin{cases} 1 - 3 \\ r \end{cases} \quad 2 \cdot 3 \begin{cases} 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \\ \text{retta } \infty \end{cases} \quad 2 \begin{cases} 2 \cdot 3 - 3 \\ 1 \cdot 2 - 1 \end{cases}$$

Il diagramma v deve essere composto di tre segmenti paralleli, essendo tutti i centri di rotazione relativa impropri; il segmento relativo alla trave 2 deve essere parallelo alla fondamentale, perchè il centro 2 è improprio; quindi i segmenti relativi alle travi 1 e 3 giacciono sulla fondamentale.

9. La ricerca delle reazioni vincolari isostatiche attraverso le equazioni della statica.

Il procedimento di cui si tratta in questo paragrafo consiste nel sopprimere i vincoli, sostituendoli con le relative reazioni, interne ed esterne, e nello scrivere le equazioni dell'equilibrio fornite dalla statica per ogni trave costituente il sistema. Le equazioni della statica nel piano sono le tre

$$\begin{aligned}\Sigma Y &= 0 \\ \Sigma Z &= 0 \\ \Sigma M &= 0\end{aligned}\tag{13}$$

esprimenti l'annullarsi della somma delle componenti delle forze applicate alla trave secondo due assi y e z del piano, e l'annullarsi del momento delle forze stesse rispetto ad un punto qualsiasi P del piano. In genere le (6-13) si risolvono analiticamente. A volte (§ 6-10) si presenta la convenienza di operare graficamente.

Le equazioni (6-13) possono essere sostituite dalle

$$\begin{aligned}\Sigma Y &= 0 \\ \Sigma M' &= 0 \\ \Sigma M'' &= 0\end{aligned}$$

ove M' ed M'' sono i momenti rispetto a due punti distinti P_1 e P_2 la congiungente dei quali non sia normale ad y ; o ancora dalle

$$\begin{aligned}\Sigma M' &= 0 \\ \Sigma M'' &= 0 \\ \Sigma M''' &= 0\end{aligned}$$

ove M' , M'' ed M''' sono i momenti rispetto a tre punti non allineati $P_1 P_2 P_3$.

Una volta verificate le (6-13), ogni equazione di equilibrio alla traslazione rispetto ad una direzione diversa dalla y e dalla z , ed ogni equazione di equilibrio alla rotazione intorno ad un punto diverso da P , sono conseguenza delle prime tre.

Si perviene così a $3t$ equazioni nelle s incognite reazioni vincolari; queste equazioni sono algebriche e lineari, e costituiscono un sistema omogeneo se non sono presenti forze applicate, un sistema non omogeneo in caso contrario.

Il caso di maggiore interesse è naturalmente quello delle strutture isostatiche, per le quali è $3t = s$. Il numero delle equazioni è pari a quel-

lo delle incognite; se il determinante Δ dei coefficienti è diverso da zero, il sistema omogeneo ammette come unica soluzione quella banale, e il sistema non omogeneo ammette soluzione determinata e finita, in particolare nulla, per tutte le incognite. Può dirsi perciò che la condizione $\Delta \neq 0$ è sufficiente perchè la struttura sia isostatica.

Se il sistema omogeneo ha come unica soluzione quella banale, e il sistema non omogeneo ammette soluzione determinata e finita per tutte le incognite, cioè se la struttura è isostatica, il determinante Δ deve essere diverso da zero.

Dunque la condizione $\Delta \neq 0$ è necessaria e sufficiente perchè una struttura per cui $3t = s$ sia isostatica; è questo un ulteriore mezzo per riconoscere se alla condizione $3t = s$ si accompagna l'altra $l = i = 0$. Si osservi che Δ dipende solo dalla geometria della struttura, e non dalle forze applicate.

Se il determinante Δ è nullo, in genere il sistema omogeneo ammette, oltre a quella banale, una soluzione indeterminata, definita a meno di una o più costanti, mentre il sistema non omogeneo ammette in genere o la soluzione

$$X_1 = X_2 = \dots = X_s = \pm \infty,$$

o soluzione indeterminata. Il caso del sistema omogeneo è illustrato nella fig. 6-73; assegnato un qualsiasi valore alla reazione S del pendolo, si ottengono da una

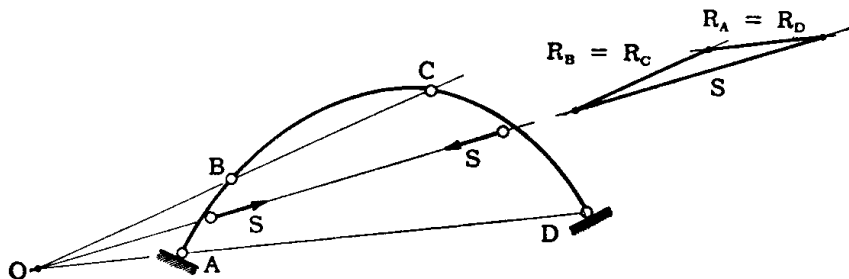


FIG. 6-73

semplice scomposizione le altre reazioni che assieme ad S soddisfano le equazioni della statica; queste reazioni sono proporzionali ad S .

Il caso del sistema non omogeneo con soluzione $\pm \infty$ è contemplato nella fig. 6-74 a, quello del sistema con soluzione indeterminata nella fig. 6-74 b; il primo si ha quando le forze applicate compiono lavoro per effetto del movimento connesso con la labilità, il secondo nel caso contrario. La soluzione della struttura della fig. 6-74 b dipende anche essa dal valore di S ; si dimostrerà nel § 10, attraverso le vie della geometria proiettiva, che qualsiasi valore di S è compatibile con le condizioni di equilibrio.

Può darsi il caso che, sempre nell'ipotesi di $\Delta = 0$, $3t'$ equazioni relative a t' travi forniscano i valori di s' reazioni, essendo $s' < 3t'$; il sistema si scinde così in due, uno di $3t'$ equazioni in s' incognite, l'altro di $3(t - t')$ equazioni in $s - s'$ incognite; nel primo il numero delle equazioni è maggiore di quello delle incognite, nel secondo il numero delle incognite è più elevato di quello delle equazioni. Si cade

così nel caso delle strutture in parte iperstatiche, in parte labili (figg. 6-27 e 6-39); di ciascuno di questi due tipi si parlerà tra poco. In questo caso la soluzione del sistema omogeneo è in parte nulla, in parte indeterminata. Quella del sistema non omogeneo è in parte $\pm \infty$ e in parte indeterminata se le forze applicate compiono

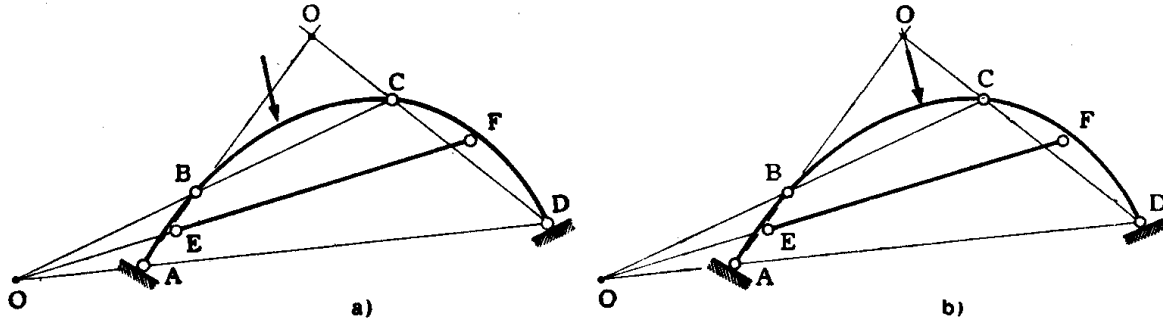


FIG. 6-74

lavoro per effetto della labilità; se invece le forze non compiono lavoro per effetto della labilità, la soluzione è in parte nulla, in parte determinata, in parte indeterminata (fig. 6-39).

Meno interessanti sono i casi in cui è $3t \neq s$, perchè in essi non rientrano le strutture isostatiche. Se è $s < 3t$, ed $i = 0$ (strutture labili e non iperstatiche), il sistema omogeneo (struttura scarica) delle $3t$ equazioni ammette come unica soluzione quella banale; il sistema non omogeneo ammette la sola soluzione

$$X_1 = X_2 = \dots = X_s = \pm \infty ,$$

oppure una soluzione determinata e finita per tutte le incognite se $3t - s$ equazioni sono combinazioni lineari delle altre s ; il primo caso corrisponde a forze applicate che compiono lavoro per effetto della labilità (fig. 6-75 a), il secondo a forze che non ne compiono (fig. 6-75 b).

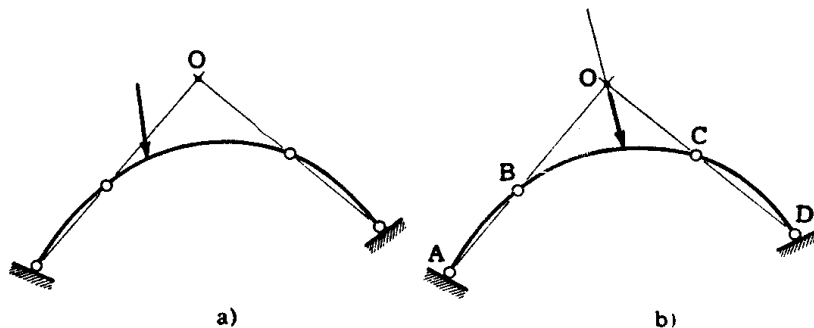


FIG. 6-75

Se è $s < 3t$ ed $i \neq 0$ (strutture labili ed iperstatiche) valgono le stesse considerazioni di cui sopra per le reazioni relative alla parte labile, mentre le reazioni della parte iperstatica sono comunque indeterminate.

Se è $s > 3t$, ed $i = 0$ (strutture iperstatiche e non labili), il sistema è $s - 3t$ volte indeterminato, omogeneo o non omogeneo che sia; può infatti esistere in

una struttura iperstatica scarica un insieme di tensioni dipendenti da $s - 3t$ reazioni vincolari di qualsiasi valore; l'origine può essere ascritta a distorsioni.

Se è $s < 3t$, ed $l \neq 0$ (strutture iperstatiche e labili) il sistema è $s - 3t + l$ volte indeterminato. Infatti da n equazioni possono ricavarsi, per la labilità, $n - l$ incognite, che risultano — come già notato — tutte nulle, o tutte $\pm \infty$, o tutte determinate. Le restanti $3t - n$ equazioni sono in $s - n + l$ incognite; la differenza $s - n + l - (3t - n) = s - 3t + l$ è il grado di iperstaticità della struttura. Se le forze non interessano la parte labile, le $n - l$ incognite sono nulle, e le altre in parte indeterminate (con grado di indeterminazione i) in parte determinate; quest'ultimo caso si può verificare se esiste anche una parte isostatica. Se le forze interessano la parte labile, le $n - l$ incognite sono tutte $\pm \infty$, o tutte determinate; le altre nel primo caso sono $\pm \infty$ e indeterminate, nel secondo caso in parte indeterminate, in parte determinate.

Spesso accade che convenga scrivere le $3t$ equazioni in maniera diversa da quella descritta, in modo da spezzare il sistema di equazioni in più sistemi parziali; si invoca perciò il *principio di solidificazione*, noto dalla Meccanica Razionale, per cui le tre equazioni di equilibrio (6-13) devono valere anche per un insieme di travi, una volta *solidificati* i vincoli che le uniscono.

Per esempio, si consideri la struttura della fig. 6-76; le (6-13), scritte per il complesso della struttura con le cerniere in B e in C solidificate, e cioè per le sole reazioni esterne, forniscono

$$\begin{aligned} V_A + V_D &+ F_y &= 0 \\ H_A + H_D &+ F_z &= 0 \quad (z) \\ -V_D (z_D - z_A) &- H_D (y_A - y_D) - F_y (z_P - z_A) - F_z (y_A - y_P) &= 0. \end{aligned}$$

La prima e la seconda sono le equazioni di equilibrio alla traslazione secondo gli assi y e z , la terza è l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno al punto A. Le tre equazioni (z) da sole non possono fornire le quattro reazioni esterne; si scrivono perciò anche le equazioni di equilibrio per la trave AB alla rotazione intorno a B, e per la trave CD alla rotazione intorno a C (fig. 6-76 b e c):

$$\begin{aligned} V_A (z_B - z_A) &+ H_A (y_A - y_B) &+ Sd_B &= 0 \\ -V_D (z_D - z_C) &+ H_D (y_D - y_C) - Sd_C &= 0. \end{aligned} \quad (a')$$

Le (z) ed (a') sono cinque equazioni nelle cinque incognite $V_A H_A V_D H_D S$, e bastano per determinarle.

Le altre quattro incognite $V_B H_B V_C H_C$ possono ottenersi scrivendo le tre equazioni della statica per la trave BC (fig. 6-76 d) e l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno al punto A delle due travi AB e BC soli-

dificate in B:

$$\begin{aligned}
 & -V_B + V_C & +F_y & = 0 & (b') \\
 & -H_B + H_C & +F_z & = 0 \\
 & -V_C(z_C - z_B) & -H_C(y_B - y_C) & -F_y(z_P - z_B) - F_z(y_B - y_P) = 0 \\
 & -V_C(z_C - z_A) & -H_C(y_A - y_C) - Sd_A & -F_y(z_P - z_A) - F_z(y_A - y_P) = 0.
 \end{aligned}$$

Nello scrivere la (z) (a') e (b'), si sono assunti come versi delle reazioni e delle interazioni positive quelli riportati nella figura 6-76.

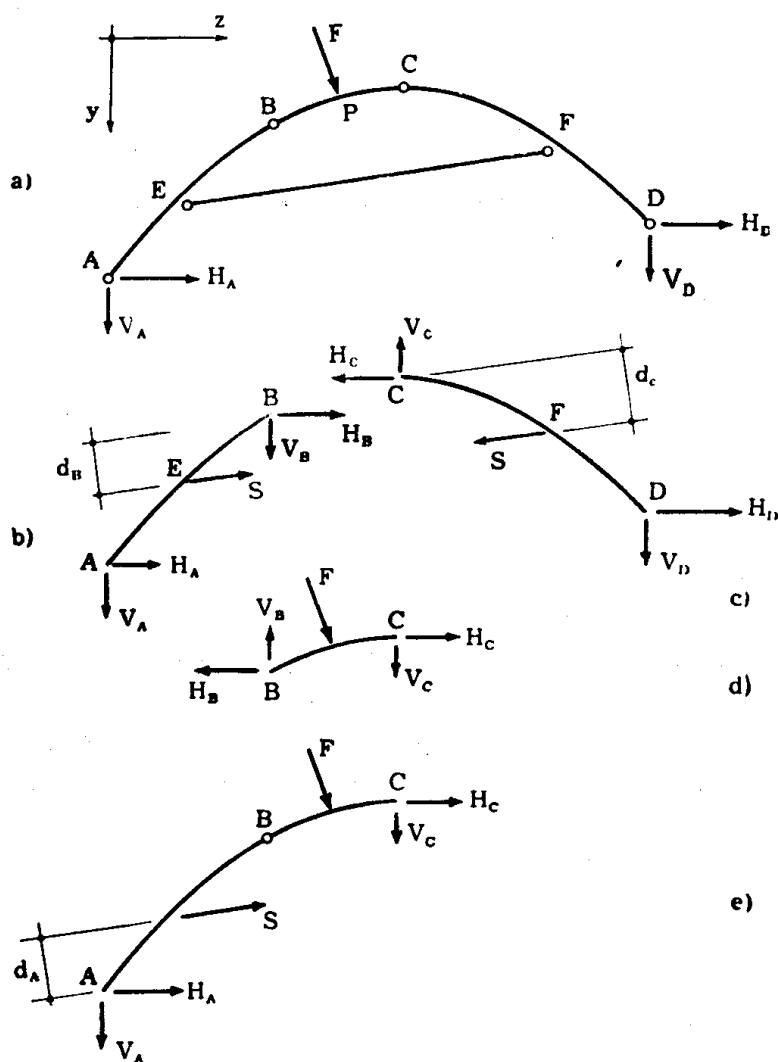


FIG. 6-76

Le equazioni (z) e l'ultima delle (b') sono conseguenze delle equazioni della statica scritte per le singole travi della struttura; anche per il siste-

ma (z) (a') (b') sono valide le considerazioni prima fatte circa i valori delle reazioni in dipendenza del valore di $3t-s$ e di i .

10. La ricerca delle reazioni vincolari isostatiche attraverso successive scomposizioni grafiche.

La ricerca grafica delle reazioni vincolari in presenza di più forze applicate si presenta semplice solo in alcuni casi particolari. Se per esempio le forze agiscono su una trave vincolata al suolo con una cerniera A e un appoggio B (fig. 6-77) il calcolo delle due forze equilibranti R_A ed

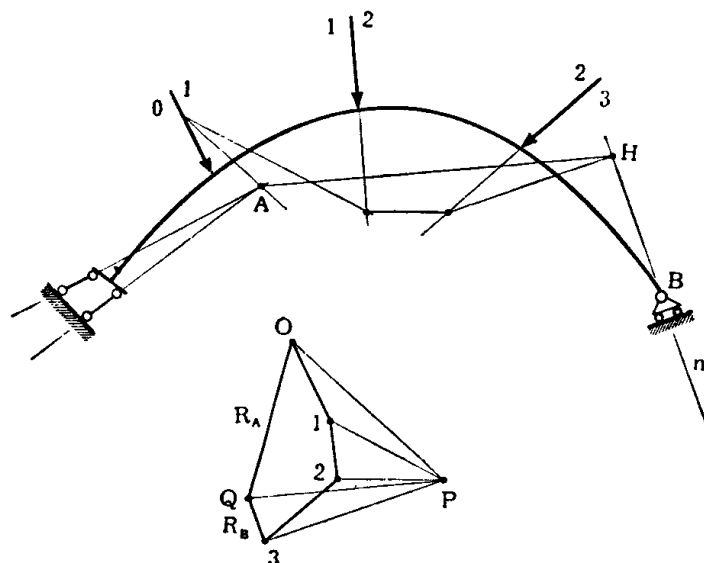


FIG. 6-77

R_B di cui R_A passante per A e la R_B diretta secondo la normale n al piano di scorrimento per B, e cioè delle due reazioni, si esegue, come è noto dalla statica grafica, costruendo un qualsiasi poligono funicolare il cui primo lato passi per A, determinando il punto H di incontro dell'ultimo lato del poligono con la retta n , congiungendo H con A, conducendo dal polo P la parallela alla HA che incontra in Q la parallela alla n per 3. Risulta così $3Q = R_B$, $QO = R_A$; e infatti questi due vettori soddisfano alle condizioni di chiusura del poligono delle forze e del poligono funicolare, e quindi assieme alle forze applicate formano un sistema di forze in equilibrio. Altrettanto semplice è il caso dell'arco a tre cerniere, risolvibile attraverso la costruzione del poligono passante per le tre cerniere. Nelle figg. 6-78 e 6-79 sono riportati due tipi di archi in cui una o due delle tre cerniere sono improprie (non possono essere improprie tutte le cerniere, perchè in tal caso la struttura sarebbe labile); si nota come la presenza di una cerniera impropria permetta di risparmiare uno dei due po-

ligoni funicolari di tentativo, così che nella fig. 6-78 si sono tracciati due poligoni, nella fig. 6-79 uno solo.

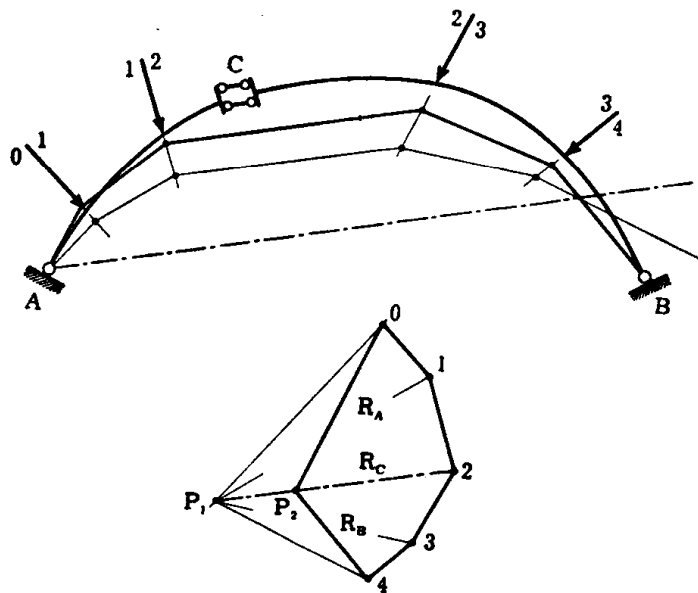


FIG. 6-78

Anche alcune strutture apparentemente complesse possono ridursi ai due casi semplici ora trattati; per esempio quella della fig. 6-80 si rico-

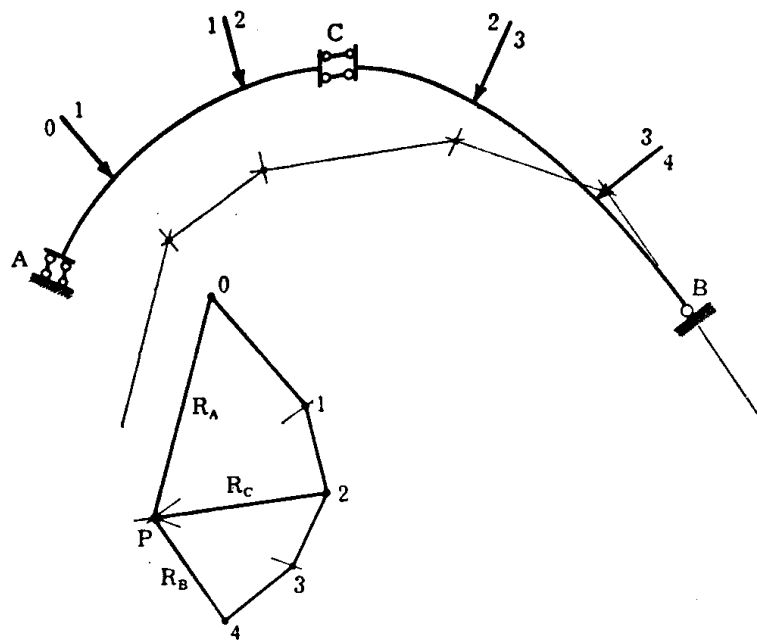


FIG. 6-79

nosce facilmente potersi ridurre ad un arco a tre cerniere ABC. In genere però ciò non accade; in tal caso la ricerca delle reazioni vincolari diviene

molto laboriosa. Il procedimento grafico non è per questo da rigettarsi; esso riacquista semplicità, pur conservando la peculiare evidenza fisica, se sulla struttura è applicata una sola forza. Ciò non limita la generalità del procedimento, perchè è noto che tutte le forze applicate su una parte di trave non labile possono — agli effetti del calcolo delle reazioni relative

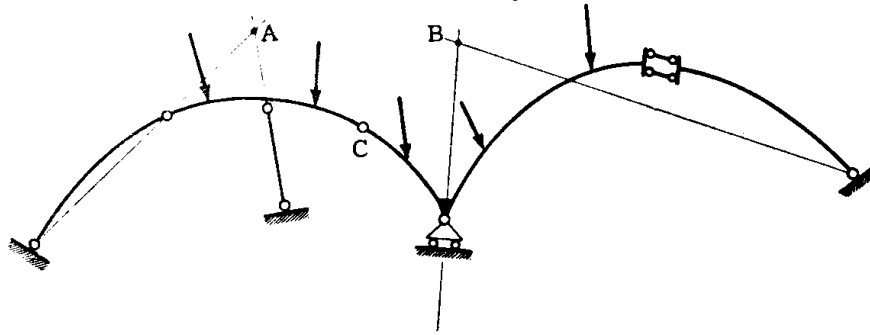


FIG. 6-80

ai vincoli che uniscono questa parte con la rimanente struttura e con il suolo — essere sostituite dalla risultante. Si possono perciò sostituire le forze applicate sulle singole parti non labili con le relative risultanti, calcolare le reazioni dovute a ciascuna di queste risultanti, e alla fine comporle vettorialmente.

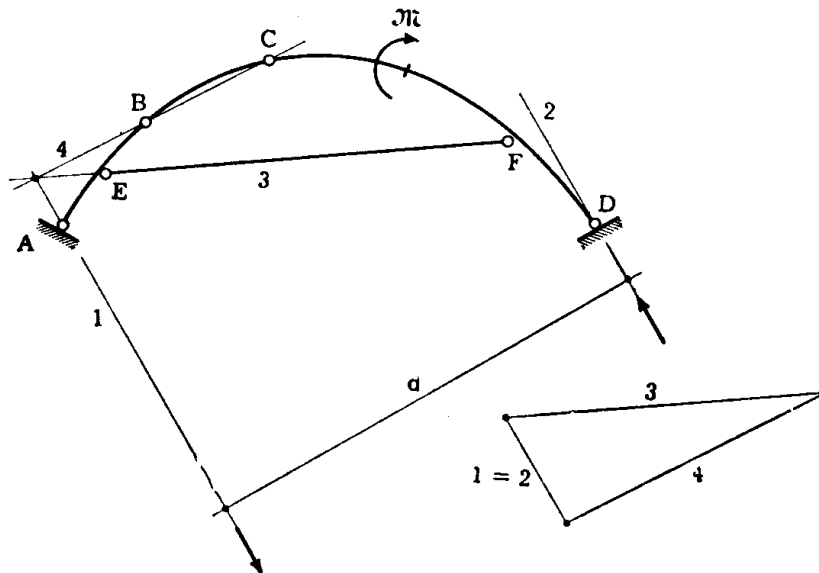


FIG. 6-81

In una struttura soggetta ad una sola forza — o ad una sola coppia — si esaminano prima le parti su cui non agiscono forze applicate. Se su una parte, isolata dal suolo e dalla rimanente struttura con opportuni tagli, agiscono solo due reazioni, come per le travi BC ed EF della fig. 6-81, tali

reazioni devono essere uguali e contrarie, e cioè devono avere la stessa retta d'azione; le reazioni in B e C hanno perciò per retta d'azione la BC, le reazioni in E ed F la EF. Se sulla parte invece agiscono tre reazioni, come per la trave AB, o una forza e due reazioni, esse devono concorrere in un punto; conoscendo perciò le rette d'azione di due reazioni, per esempio quelle in B ed E, si ottiene la retta d'azione della terza reazione in A. Nel caso della struttura in esame (fig. 6-81) tali considerazioni sono sufficienti; infatti, conosciuta la retta d'azione della reazione in A, per l'equilibrio di tutta la struttura la reazione in D deve essere parallela a quella in A; il valore comune è fornito da \mathcal{M}/d , ove d è la distanza normale tra le due rette d'azione, ed il verso è tale da costituire una coppia controverosa ad \mathcal{M} , e cioè antioraria. Conosciuti i valori 1=2 delle reazioni in A e B, è immediato ottenere graficamente le reazioni 3 del pendolo EF e 4 del pendolo BC (la trave BC si comporta, se non è soggetta a forze applicate,

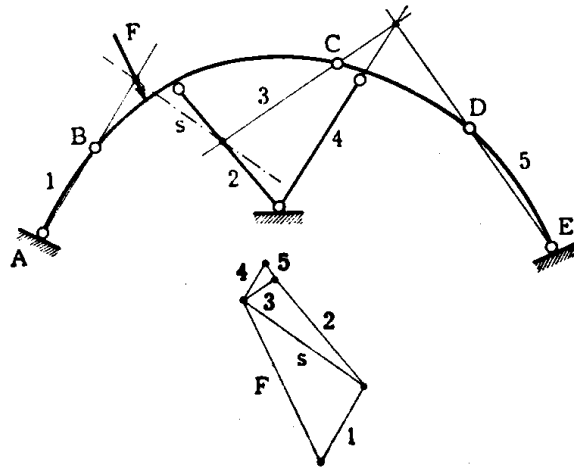


FIG. 6-82

come un pendolo di asse BC). I versi delle reazioni 3 e 4 sono tali da chiudere i poligoni delle forze relativi alle singole parti; la reazione 3 in E è perciò diretta — se considerata agente dal pendolo sulla trave — verso sinistra, e la reazione 4 in B — sempre considerata agente sulla trave — verso destra; il pendolo EF risulta perciò compresso, quello BC teso.

Anche per la struttura della fig. 6-82 le precedenti considerazioni sono sufficienti; le travi AB e DE si comportano come pendoli, dunque le rette d'azione delle reazioni 1 e 5 sono conosciute; la trave CD è soggetta a tre reazioni, di due delle quali (4 e 5) è nota la retta d'azione, perciò è nota anche la retta d'azione della terza (3); la trave BC è soggetta a quattro forze, di cui una, F, è nota, mentre delle altre (1, 2, 3) sono conosciute le rette d'azione; con l'aiuto della retta ausiliaria s si scompone la F nelle 1, 2 e 3, e poi la 3 nelle 4 e 5.

Così pure, nella struttura della fig. 6-83 sono note le rette d'azione delle reazioni in A e B (1), e in C e D (3); il tratto BC è in equilibrio sotto la forza F, nota, e le reazioni in B (1), in E (2), e in C (3), di cui sono note le rette d'azione; basta perciò scomporre la F secondo le rette 1, 2 e 3, con l'aiuto dell'ausiliaria s.

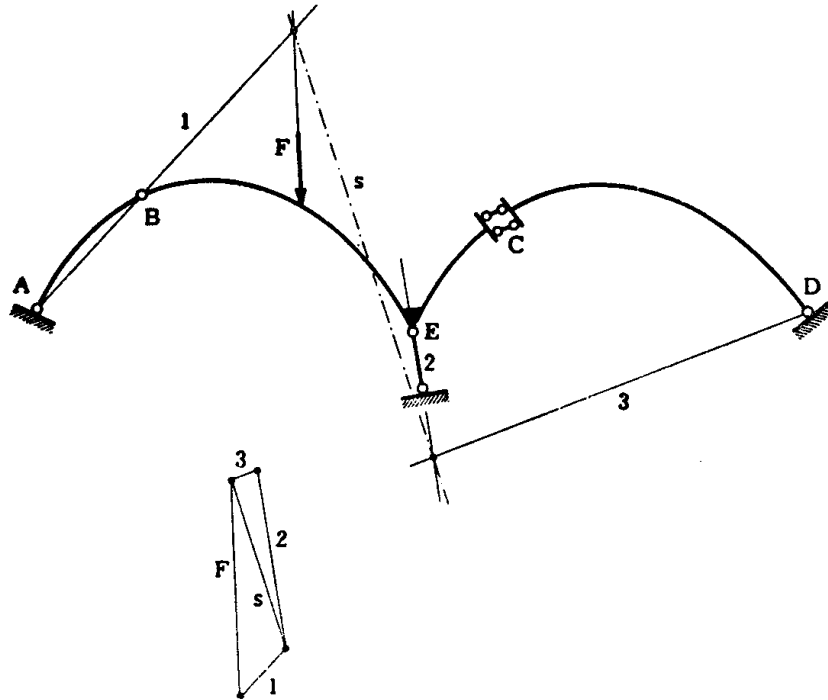


FIG. 6-83

Per la struttura della fig. 6-84 occorre aggiungere un'altra considerazione alle due già fatte: se una parte isolata dal suolo e dalla rimanente struttura con opportuni tagli è soggetta a quattro forze F_1, F_2, F_3, F_4 , siano esse applicate o reazioni, la risultante di due qualsiasi, F_1 ed F_2 , di esse deve essere uguale e contraria alla risultante delle altre due, F_3 ed F_4 , ed ha quindi per retta d'azione la congiungente il punto d'incontro delle rette d'azione di F_1 ed F_2 con il punto d'incontro delle rette d'azione di F_3 ed F_4 . La parte al disotto del taglio rappresentato nella figura è soggetta alle reazioni 5, 6, 3 e 4, di cui sono note le rette d'azione; quindi la retta d'azione della risultante di 5 e 6 (e di 3 e 4) è la retta r congiungente H e K. La parte al disopra del taglio è soggetta a quattro forze, la F nota, e le 1, 2 ed r di cui sono note le rette d'azione; si decompone perciò la F secondo le rette 1, 2 ed r , poi la r nelle 5 e 6, e nelle 3 e 4. Per verifica la risultante di 3 e 5, coincidente con quella di 4 e 6, deve essere parallela all'asse del pendolo 7, poichè è la reazione di questo.

Nella struttura della fig. 6-85 occorre fare la stessa considerazione;

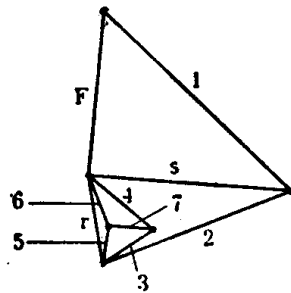
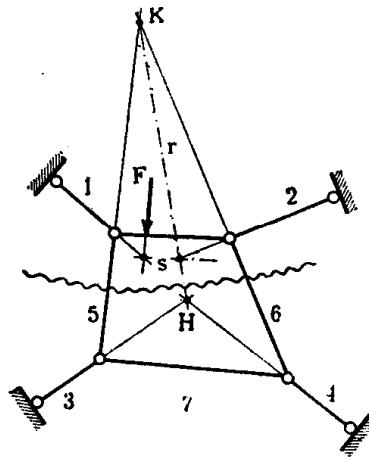


FIG. 6-84

la parte CD è soggetta alle reazioni 4, 2, 3 ed 1 delle quali sono note le

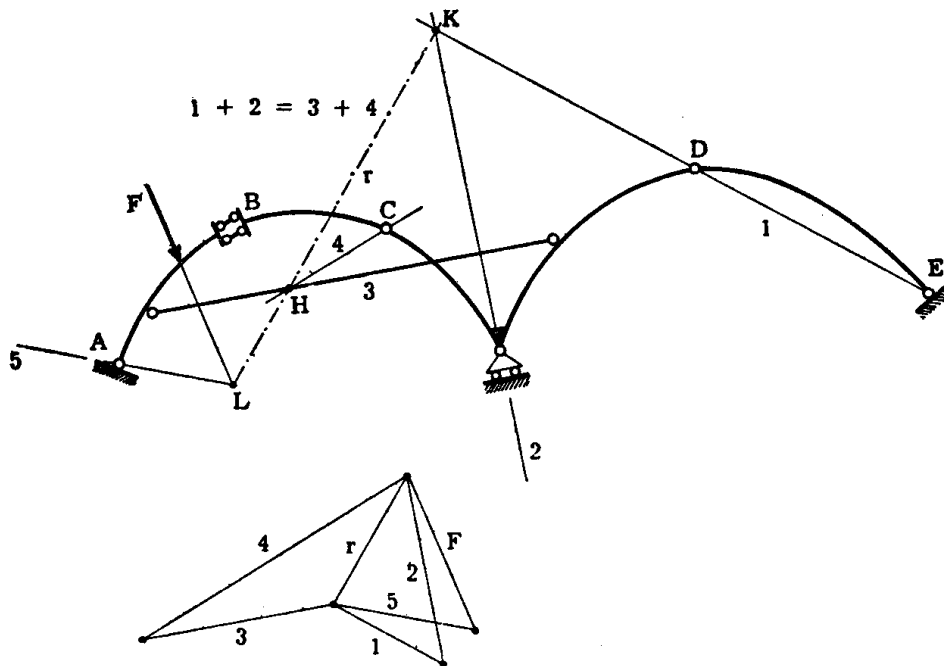


FIG. 6-85

rette d'azione; la retta d'azione r della risultante di 1 e 2 (e di 3 e 4)

è perciò la HK. La parte AC è soggetta alle tre forze F , 5, r ; la retta d'azione di 5 è quindi la congiungente A con il punto d'incontro L delle rette d'azione di F ed r . Si scompone la F secondo le rette 5 ed r , la r secondo 4 e 3, e secondo 1 e 2. Allo stesso risultato si perviene considerando tutta la struttura soggetta ad F , alla r (risultante di 1 e 2), ed alla 5.

11. La ricerca grafica delle reazioni isostatiche attraverso considerazioni proiettive.

Talora accade che le considerazioni fatte nel precedente paragrafo non siano sufficienti per giungere ai valori delle reazioni; ciò si verifica, per esempio, nella struttura già riportata nella fig. 6-81, se è caricata la parte BC (fig. 6-86). In tal caso si può utilmente far ricorso alla geometria proiet-

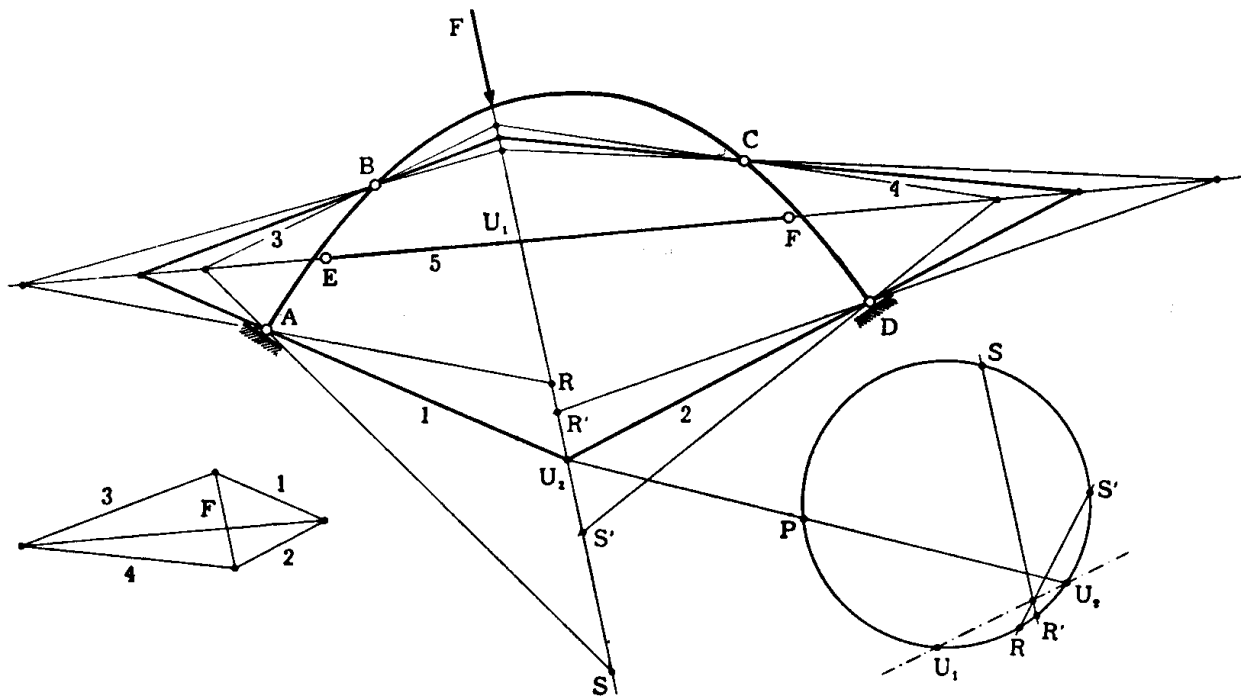


FIG. 6-86

tiva. Se la reazione in A ha la retta d'azione AR, sono univocamente determinate le rette d'azione delle reazioni in B, in C ed in D, considerando che le parti AB, BC e CD sono soggette ciascuna a tre forze; la retta d'azione della reazione in D dovrebbe così essere la DR'. Ma la forza F e le reazioni in A e D devono incontrarsi in un punto, e quindi la retta AR può soddisfare il problema solo se R' coincide con R. La retta AR che verifica tale condizione può essere ricercata per tentativi; ma questi si possono ri-

durre a tre, e a volte a due soltanto. Infatti i punti R ed R' si corrispondono in una proiettività tra due punteggiate sovrapposte, sulla retta d'azione della forza F , ottenendosi R' da R mediante operazioni di proiezione e sezione; e quindi, ottenute tre coppie RR' , SS' , TT' , la costruzione di Steiner permette di ricavare i punti uniti U_1 ed U_2 di tale proiettività. Tali punti possono essere reali e distinti (proiettività iperbolica), o reali e coincidenti (proiettività parabolica); non può verificarsi il caso di punti uniti immaginari (proiettività ellittica) perchè in tal caso il problema non avrebbe soluzione. Se, come spesso succede, uno dei due punti uniti è noto, basta costruire solo due coppie di punti corrispondenti; per esempio nel caso in esame si riconosce a priori che il punto d'incontro della retta d'azione della forza F con l'asse del pendolo è unito, e perciò è sufficiente la conoscenza dei punti RR' ed SS' per ottenere il secondo punto unito U_2 .

Nel caso in cui un punto unito U_1 è noto, la costruzione del secondo punto unito può eseguirsi anche come nella fig. 6-87, per il teorema di Desargues.

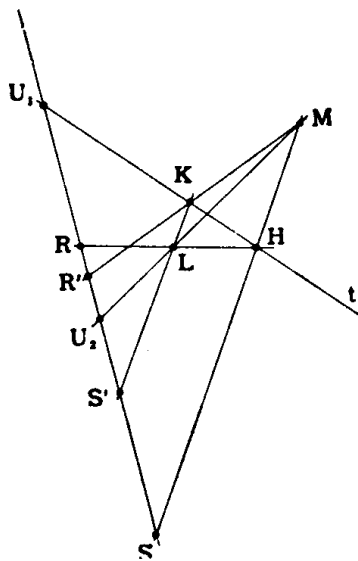


FIG. 6-87

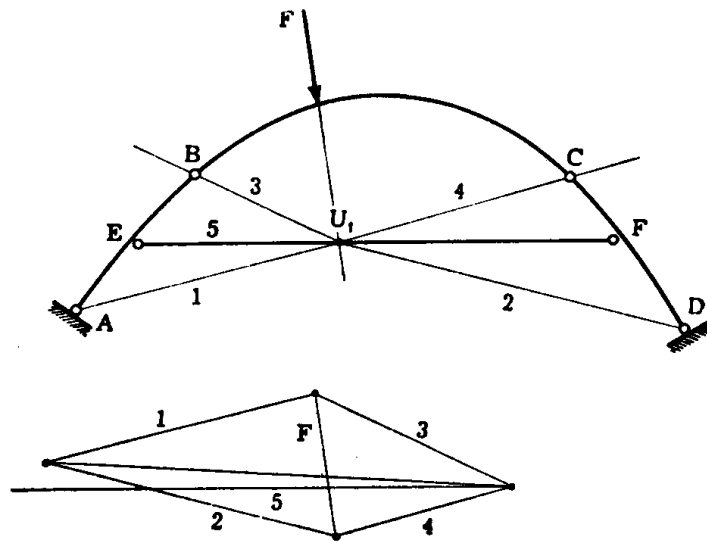


FIG. 6-88

Si osservi che dei due punti uniti uno solo in genere soddisfa il problema, nel senso che solo per uno di essi, eseguendo le operazioni di scomposizione, tutti i poligoni delle forze per le singole travi risultano chiusi; per esempio, nel caso in esame il punto U_1 non soddisfa, perchè la risultante di 1 e 3, (e di 2 e 4) non ha la direzione dell'asse del pendolo EF , e quindi non risultano chiusi nè il poligono 135 relativo al tratto AB , nè quello 245 relativo al tratto CD (fig. 6-88).

Se le rette AD , EF e BC sono allineate (fig. 6-89) il secondo punto unito U_2 si riconosce essere l'intersezione della retta d'azione di F con la retta AD ; e quindi $R_A = R_D = \infty$, conformemente al fatto che la struttura

è labile. Se, nello stesso caso della fig. 6-89, la forza F passa per il punto

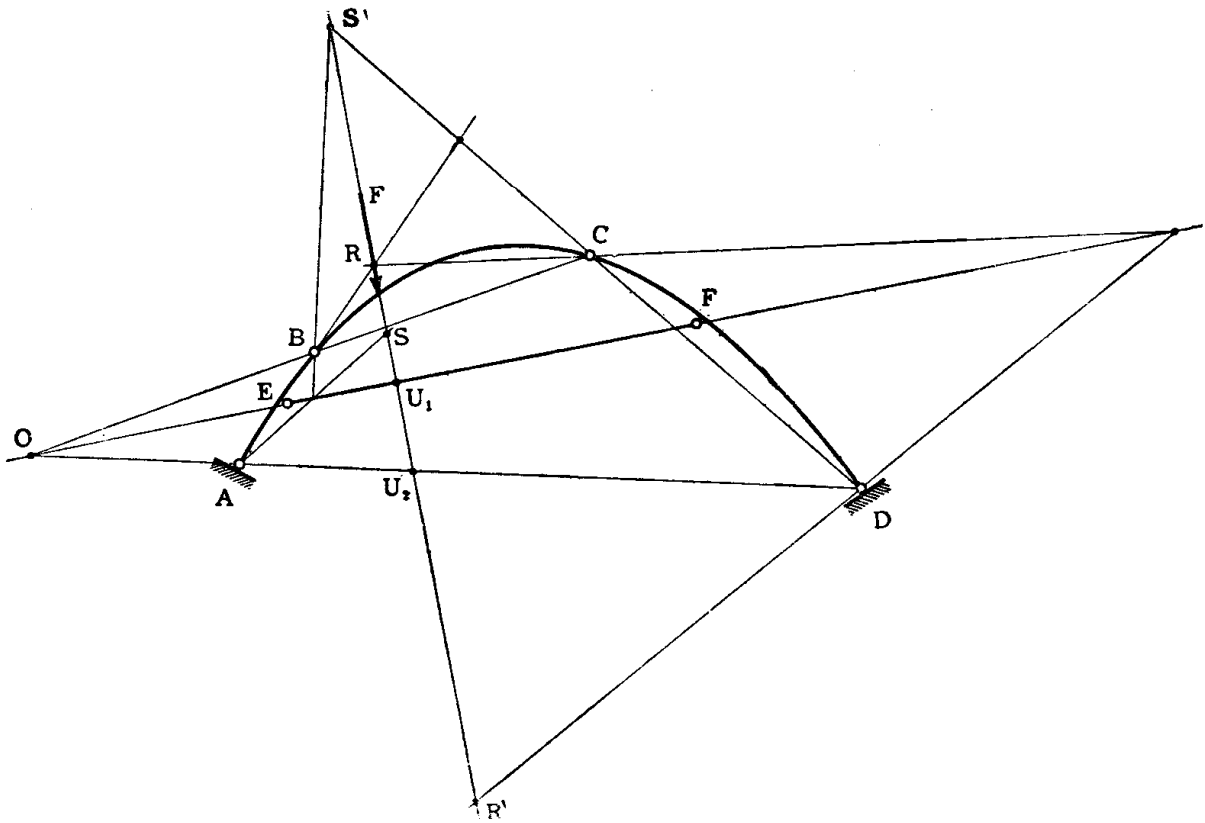


FIG. 6-89

d'incontro delle rette AB e CD (fig. 6-90) anche il punto intersezione della

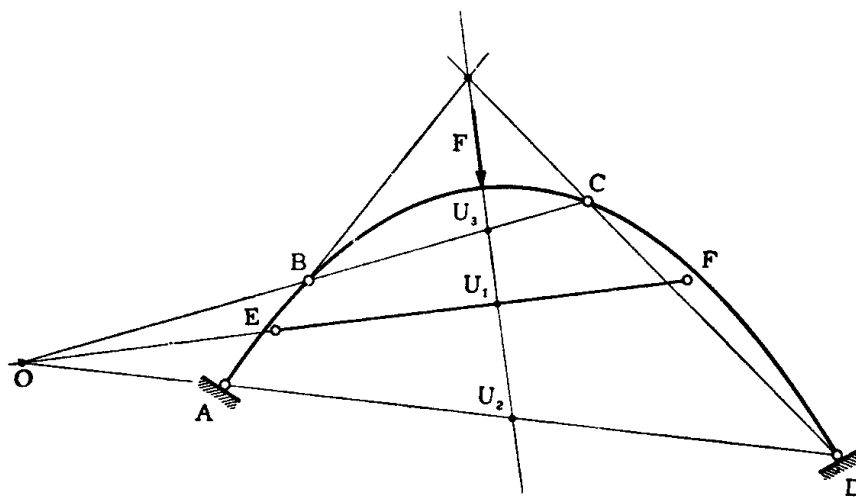


FIG. 6-90

retta d'azione della forza F con la retta BC è unito, e quindi la proiettività

è una identità. In tal caso esistono infinite soluzioni, e il problema è indeterminato; la sua soluzione dipende da un parametro, per esempio lo sforzo nel pendolo EF , e la struttura è una volta iperstatica.

La soluzione, nei casi come quello in esame, può spesso ottenersi anche scomponendo la forza in due, passanti per le estremità del tratto impegnato, calcolando le reazioni per ciascuna di esse, e poi componendole. Per esempio, nella struttura in studio le reazioni dovute ad una forza in B , o in C , sono immediatamente ricavabili (fig. 6-91). Si osservi pure che lo

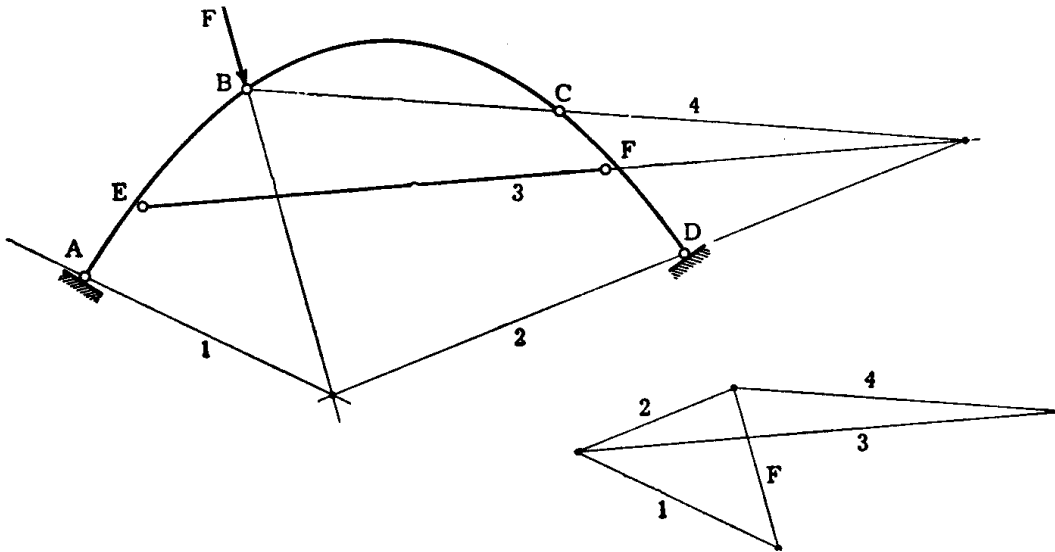


FIG. 6-91

stesso problema è risolvibile analiticamente, oppure attraverso il principio dei lavori virtuali.

Se il tratto BC è soggetto ad una coppia, la proiettività da considerare

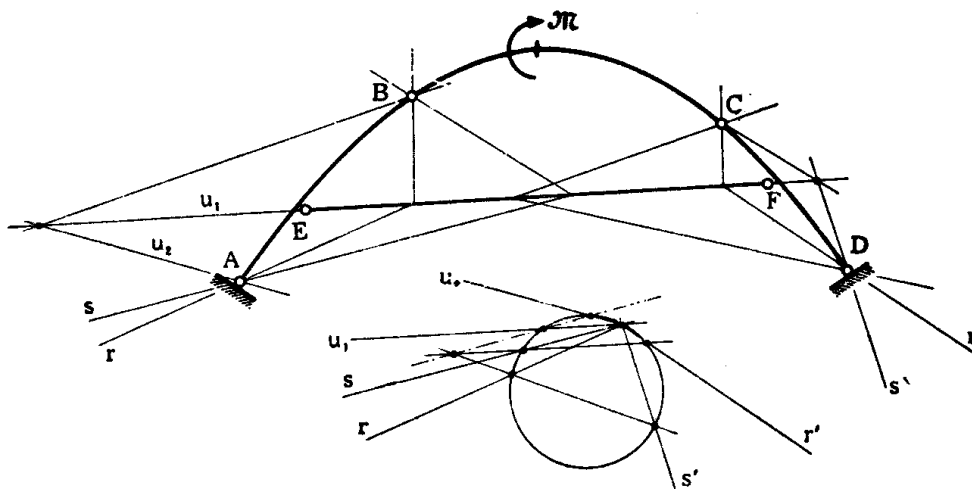


FIG. 6-92

è tra due fasci sovrapposti di rette, invece che tra due punteggiate sovrapposte, come facilmente si trae dalla fig. 6-92.

risultante di 2 e 3. La parte a sinistra del taglio è soggetta alle forze 1, 5, 2, 3; la risultante di 2 e 3 deve passare per il punto d'incontro R di 1 e 5, e quindi R' deve coincidere con R. I punti R ed R' si corrispondono in una proiezione sull'asse del pendolo 5; un punto unito U_1 è il punto di concorso dei tre pendoli, l'altro punto unito risolve il problema.

Nella struttura della fig. 6-94, fissata la retta d'azione della reazione 1 in A, risulta determinata anche quella della reazione 4 in D. Sulla parte BD agiscono la forza F e le reazioni 2, 5 e 4, tutte note in retta d'azione; è anche nota perciò la retta d'azione della risultante di 5 e 2. La parte a sinistra del taglio rappresentato nella figura è soggetta alle forze 1, 6, 5 e 2, perciò la risultante di 5 e 2 deve passare per il punto d'incontro R di 1 e 6. Sorge così una proiezione sull'asse del pendolo 6, di cui un punto unito U_1 è il punto di concorso dei tre pendoli, e l'altro punto unito risolve il problema.

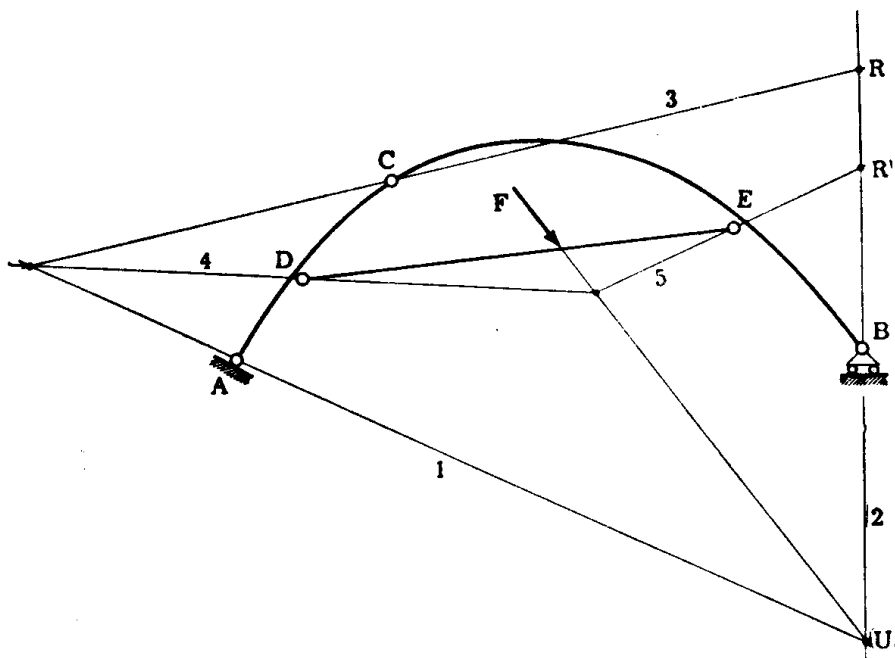


FIG. 6-95

Nella struttura della fig. 6-95 le rette d'azione delle reazioni 1 e 2 in A e B sono note; fissata quella della reazione 3 in C, sono determinate anche quelle delle reazioni 4 in D e 5 in E. Sulla parte CB agiscono la 2, la 3 e la 5, perciò la 3 e la 5 devono incontrarsi sulla 2. La proiezione determinata dalle coppie RR' sulla retta 2 ha un punto unito U_1 nell'intersezione di F e 2; l'altro punto unito risolve il problema.

Nella struttura della fig. 6-96, fissata la retta d'azione della reazione 1 in A, si determina quella della reazione 2 in D e 3 in E. La parte CG è

soggetta alle forze 4, 3, 5 e 6, di cui le rette d'azione sono note; è nota perciò anche la retta d'azione della risultante di 5 e 6. Poichè 1, 5, 6 ed F

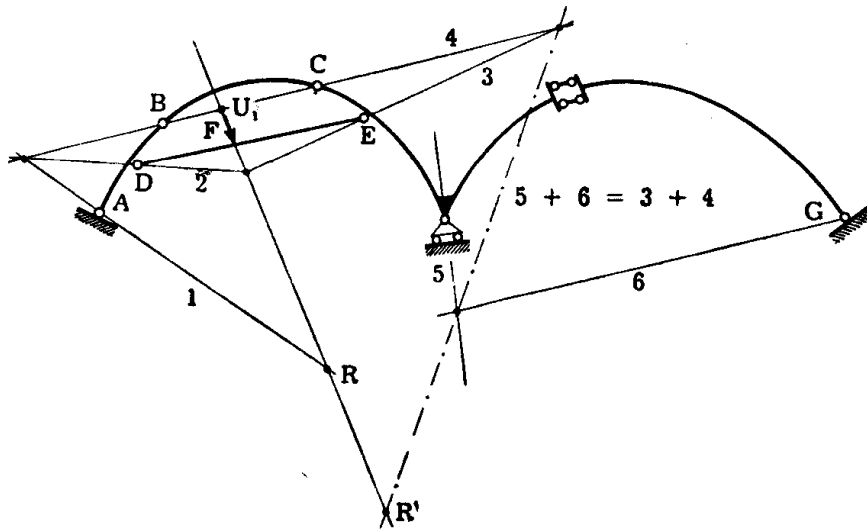


FIG. 6-96

sono in equilibrio, la risultante di 5 e 6 deve passare per il punto d'incontro R di 1 ed F. La proiettività RR' ammette il punto unito U_1 , incontro di F con la BC; l'altro punto unito risolve il problema.

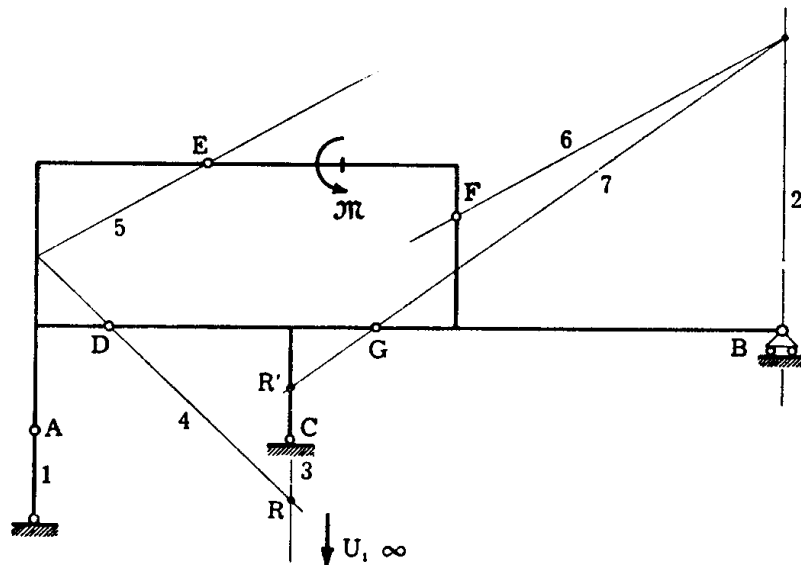


FIG. 6-97

Nella struttura della fig. 6-97 le rette d'azione delle reazioni 1 in A e 2 in B sono parallele, perciò anche la retta d'azione della reazione 3 in C è ad esse parallela. Fissata la retta d'azione della reazione 4 in D, si ricava quella della reazione 5 in E, 6 in F, 7 in G. Sulla parte DCG agiscono le reazioni 3, 4 e 7, perciò la 7 deve passare per il punto d'incontro

R di 3 e 4. La proiettività RR' ha un punto unito U_1 improprio, il secondo punto unito risolve il problema.

Particolarmente interessante è il caso della fig. 6-98. Fissata la retta d'azione della reazione 1 in A, si ricavano quelle delle reazioni 4 in C e 6

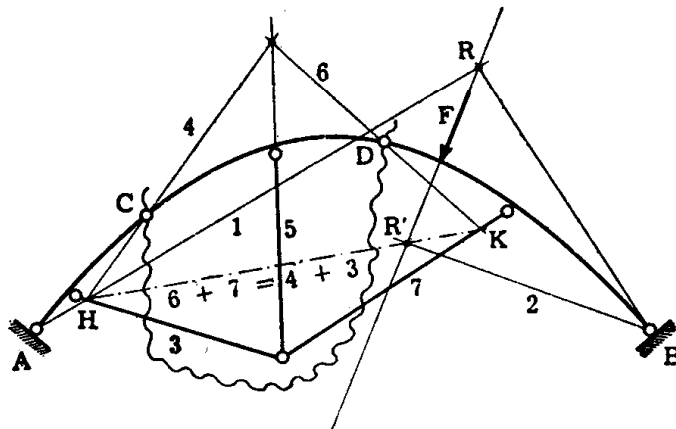


FIG. 6-98

in D. La parte compresa nel taglio è soggetta alle forze 4, 3, 6 e 7; la risultante di 6 e 7 e di 4 e 3 è la HK. Sulla parte a sinistra della verticale per D agiscono le forze 1, 6 e 7; la retta d'azione della risultante di 6 e 7 deve perciò coincidere con quella della 1, e R con R'. La proiettività RR' è parabolica; infatti (fig. 6-99) H corrisponde a K nell'omologia di asse 5,

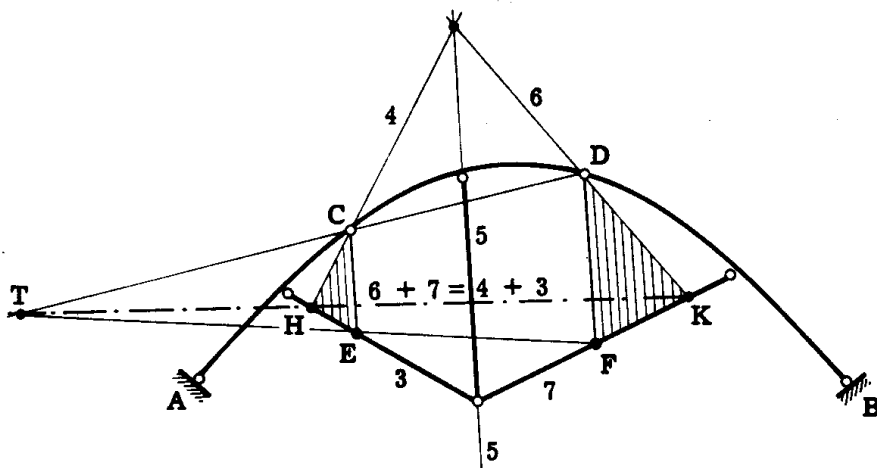


FIG. 6-99

rette corrispondenti 3 e 7, e punti corrispondenti C e D; quindi HK passa per il centro T dell'omologia, definito dall'incontro di CD con EF (E ed F intersezioni con 3 e 7 delle parallele alla 5 per C e D). Ciò deriva dal noto teorema di *Desargues* (1639) sui triangoli omologici.

La retta AH perciò coincide con la HK solo se è la AT. La retta d'azione della 1 è già determinata in base a queste considerazioni, e coincide appunto con la AT (fig. 6-100).

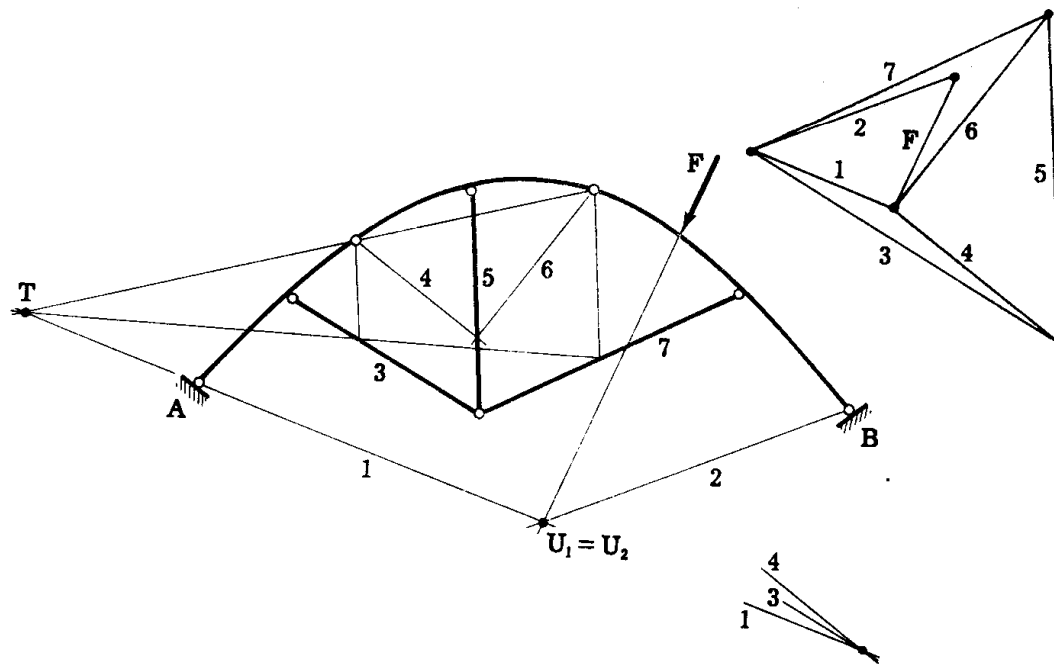


FIG. 6-100

In maniera analoga a quella seguita nel presente paragrafo si possono trattare anche alcuni problemi relativi alle catene cinematiche. Per esempio, nella struttura della fig. 6-101, in cui si vuol determinare la linea d'influenza del momento in S, la ricerca dei centri non è immediata.

Sono noti i centri 1, 1 · 2, 1 · b, 2 · 3, 3 · c, a, a · b, a · c, b · c; è inoltre noto che il centro 3 si trova sulla normale n al piano di scorrimento del carrello. Il centro b è fornito dalla intersezione della 1 — 1 · b con la a — a · b; il centro 1 · a è l'intersezione della 1 · a con la 1 · b — a · b. I centri 2 e 3 non possono determinarsi con i metodi ordinari (*).

(*) Nei casi meno semplici conviene operare la ricerca dei centri mediante tabelle. Nel caso in esame, per esempio, si scrivono prima i centri che entrano in gioco nel problema, circoscrivendo quelli noti. Per gli altri centri si scrivono poi le rette sulle quali essi devono giacere, tra queste, le congiungenti degli altri centri che soddisfano a tale condizione. Per esempio, il centro 2 · a giace sulle rette 2 - a; 2 · 1 - a · 1; 2 · 3 - a · 3; 2 · b - a · b; 2 · c - a · c. Si sottolineano poi di queste rette quelle note.

Per determinare un centro occorre conoscere almeno due delle rette su cui esso deve giacere. Ciò si verifica per 1 · a, che si trova sulle due rette, note, 1 - a, e 1 · b - a · b, e per b , che si trova sulle due rette note 1 · b - b ed a - a · b. Per il centro c si viene così a conoscere, oltre la a - a · c, anche la b - b · c; ma esse coincidono. Altrettanto accade per il centro 1 · c. Non è possibile perciò conoscere due almeno dei tre centri 2, 3, 1 · 3, necessari (e sufficienti) per costruire la linea d'influenza.

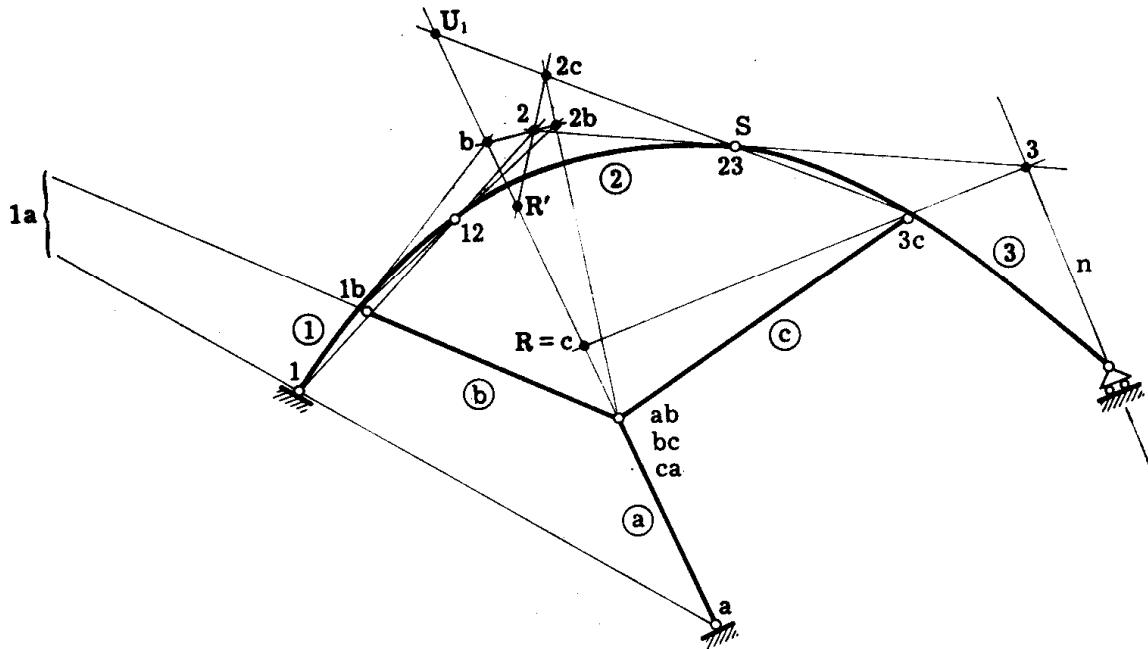


FIG. 6-101

	1	2	3	a	b	c
1	(1)					
2	(1.2)	2				
3	1.3	(2.3)	3			
a	1.a	2.a	3.a	(a)		
b	(1.b)	2.b	3.b	(a.b)	b	
c	1.c	2.c	(3.c)	(a.c)	(b.c)	c

1.3	1	3	1.a	1	a	1.c	2	1	1.2	3.2	
	1.2	3.2		1.2	a.2			1.2	c	3	3.2
	1.a	3.a		1.3	a.3			1.3	c.3	a	a.2
	1.b	3.b		1.b	a.b			1.a	c.a	b	b.2
	1.c	3.c		1.c	a.c			1.b	c.b	c	c.2
2.a	2	a	2.b	2	b	2.c	3	2	2.1	a.1	
	2.1	a.1		2.1	b.1			2.1	c.1	1	1.3
	2.3	a.3		2.3	b.3			2.3	c.3	2	2.3
	2.b	a.b		2.a	b.a			2.a	c.a	a	a.3
	2.c	a.c		2.c	b.c			2.b	c.b	b	b.3
3.a	3	a	3.b	3	b	b	c	1	1.b	1.c	
	3.1	a.1		2.1	b.1			2	2.b	2	2.c
	3.2	a.2		3.2	b.2			3	3.b	3	3.c
	3.b	a.b		3.a	b.a			a	a.b	a	a.c
	3.c	a.c		3.c	b.c			c	b.c	b	b.c

Si fissa allora una posizione arbitraria R del centro c sulla retta $a - a \cdot c$; successivamente si determinano i centri

$$3 \begin{cases} n \\ c - 3 \cdot c \end{cases} \quad 2 \begin{cases} 3 - 2 \cdot 3 \\ 1 - 1 \cdot 2 \end{cases} \quad 2 \cdot b \begin{cases} 1 \cdot b - 1 \cdot 2 \\ 2 - b \end{cases} \quad 2 \cdot c \begin{cases} 2 \cdot b - b \cdot c \\ 2 \cdot 3 - 3 \cdot c \end{cases} .$$

Il centro c deve pure trovarsi sulla retta $2 - 2 \cdot c$; perciò l'intersezione R' della $2 - 2 \cdot c$ con la $a - a \cdot c$ deve coincidere con R . I punti R ed R' si corrispondono in una proiettività, perchè si ottengono l'uno dal-

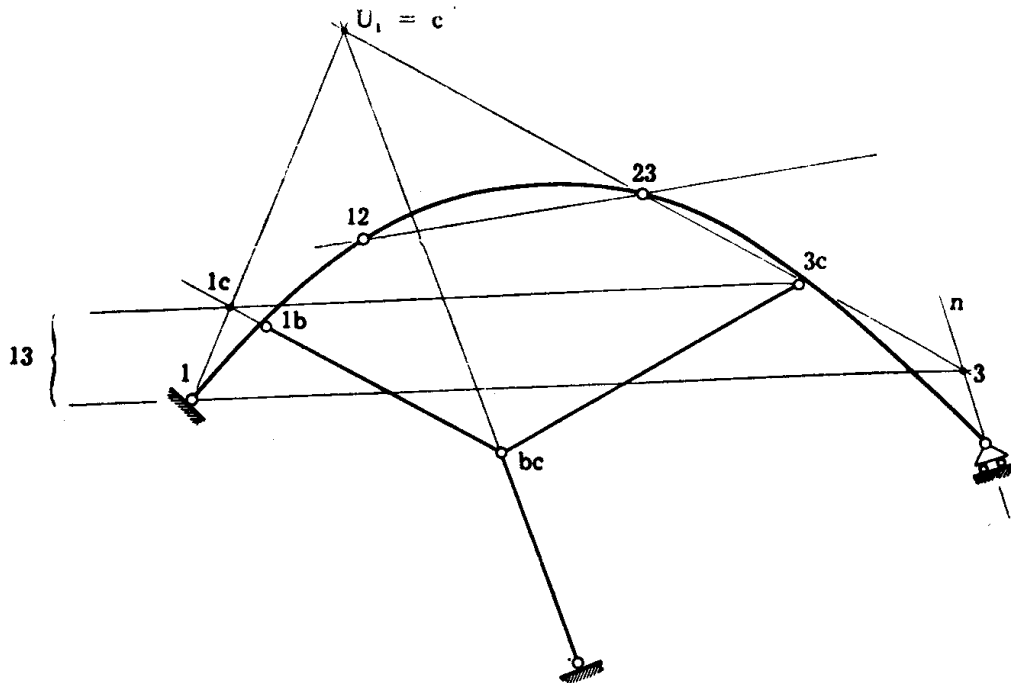


FIG. 6-102

l'altro con successive operazioni di proiezione e sezione. Dei due punti uniti uno risolve il problema, l'altro invece porta, nella successiva determinazione degli altri centri, a dei risultati in contrasto con i due teoremi delle catene cinematiche. Per esempio, nel caso in esame un punto unito U_1 è l'intersezione della $2 \cdot 3 - 3 \cdot c$ con la $a - a \cdot c$; scegliendo questo come centro c , si determinano gli altri centri (fig. 6-102)

$$1 \cdot c \begin{cases} 1 \cdot b - b \cdot c \\ 1 - c \end{cases} \quad 1 \cdot 3 \begin{cases} 1 - 3 \\ 1 \cdot c - 3 \cdot c \end{cases} ;$$

d'altro canto il centro $1 \cdot 3$ deve trovarsi anche sulla retta $1 \cdot 2 - 2 \cdot 3$, e poichè nella costruzione di $1 \cdot c$ e di $1 \cdot 3$ il centro $1 \cdot 2$ non è intervenuto, e quindi può essere qualunque, U_1 non può scegliersi come centro c .

12. Relazioni tra le caratteristiche della sollecitazione interna e le forze applicate.

Si prenda in esame il tronco elementare della fig. 6-103; le equazioni di equilibrio alla traslazione secondo gli assi n e t , e alla rotazione, sono,

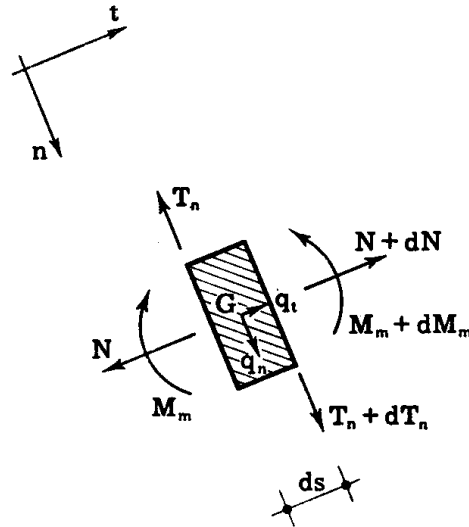


FIG. 6-103

adottando le convenzioni sui segni già precisate nei §§ 2 e 3, le seguenti:

$$- T_n + T_n + dT_n + q_n ds = 0$$

$$- N + N + dN + q_t ds = 0$$

$$- M_m + M_m + dM_m + m_m ds - T_n ds = 0$$

da cui si ricavà

$$\frac{dT_n}{ds} = - q_n$$

$$\frac{dN}{ds} = - q_t \quad (14)$$

$$\frac{dM_m}{ds} = T_n - m_m .$$

Si può perciò enunciare:

a) la derivata dello sforzo di taglio T_n rispetto all'ascissa s misu-

rata secondo l'asse della trave è uguale alla componente tagliante q_n del carico distribuito, cambiata di segno;

b) la derivata dello sforzo normale N rispetto all'ascissa s misurata secondo l'asse della trave è uguale alla componente assiale q_t del carico distribuito, cambiata di segno;

c) la derivata del momento flettente M_m è uguale alla somma dello sforzo di taglio T_n e della componente flettente m_m della coppia distribuita, cambiata di segno.

Dalla prima e terza delle (6-14) si ricava

$$\frac{d^2 M_m}{ds^2} = -q_n - \frac{dm_m}{ds} . \quad (15)$$

Nel trarre le (6-14) e (6-15) si è trascurata la curvatura dell'asse della trave, considerando le due sezioni distanti ds come parallele; le (6-14)

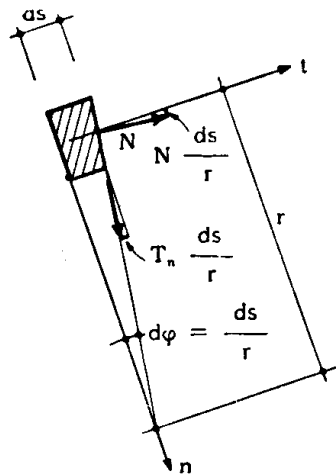


FIG. 6-104

e (6-15) valgono perciò nell'ipotesi di piccola curvatura. Se si vuole tener conto anche della curvatura, si deve considerare che le due sezioni (fig. 6-104) formano tra loro un angolo $d\varphi = ds/r$; quindi, assumendo l'asse n coincidente con la traccia della sezione di sinistra, la N agente sulla sezione di destra presenta una componente secondo n

$$N_n = N \frac{ds}{r}$$

e la T_n una componente secondo t

$$T_{nt} = -T_n \frac{ds}{r} .$$

Si è considerato il raggio di curvatura positivo se l'asse della trave rivolge la concavità nel verso positivo dell'asse n , in tal senso il segno della curvatura dipende dall'orientazione degli assi.

Le due prime equazioni di equilibrio si modificano perciò come segue:

$$\begin{aligned} -T_n + T_n + dT_n + q_n ds + N \frac{ds}{r} &= 0 \\ -N + N + dN + q_t ds - T_n \frac{ds}{r} &= 0 \end{aligned}$$

da cui si ottiene, in luogo delle (6-14),

$$\begin{aligned} \frac{dT_n}{ds} &= -q_n - \frac{N}{r} \\ \frac{dN}{ds} &= -q_t + \frac{T_n}{r}; \end{aligned} \tag{16}$$

la terza delle (6-14) rimane inalterata.

13. Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione interna.

Dalle (6-14) si traggono, in assenza di coppie distribuite, le seguenti proprietà:

a) se in una sezione il taglio è nullo, il momento flettente in quella sezione attinge un massimo o un minimo e viceversa;

b) se in un tratto finito della trave il taglio è nullo, il momento flettente è costante e viceversa;

c) se il taglio in un tratto è diverso da zero, il momento flettente non può essere nullo in tutto quel tratto, perchè non può essere costante; esso può annullarsi solo in qualche sezione; perciò la situazione di taglio senza momento flettente non può verificarsi che in qualche sezione isolata;

d) se in un tratto il carico tagliante è nullo, in quel tratto il taglio è costante, e il momento flettente varia linearmente con l'ascissa;

e) se in un tratto il carico tagliante è uniformemente ripartito, il taglio varia con l'ascissa secondo una legge lineare, il momento secondo una legge quadratica;

f) se in un tratto il carico tagliante varia con l'ascissa secondo una legge lineare, il taglio varia secondo una legge quadratica, il momento secondo una legge cubica;

g) nella sezione di applicazione di una forza tagliante concentrata la funzione $T_n(s)$ è discontinua, e la funzione $M_m(s)$ presenta una discontinuità nell'inclinazione;

h) nella sezione di applicazione di una coppia la funzione $T_n(s)$ non presenta anomalie, e la funzione $M_m(s)$ è discontinua.

Il *diagramma* di una caratteristica della sollecitazione si ottiene riportando in corrispondenza di ogni sezione, sulla sua traccia e a partire dall'asse, un segmento pari, in una certa scala, al valore della caratteristica in quella sezione; per il momento flettente è uso corrente riportare il segmento dalla parte delle fibre tese. Il tracciamento dei diagrammi è facilitato dalla conoscenza delle proprietà ora enunciate; spesso per eseguirlo basta calcolare soltanto i valori di alcune reazioni vincolari, o addirittura di nessuna.

Se la struttura è costituita da tratti rettilinei (figg. 6-105 e 6-106) il diagramma del momento, per un generico tratto scarico, è costituito da un segmento di retta; la retta cui esso appartiene incontra l'asse della trave nel punto, appartenente o meno alla struttura, ove il momento è nullo, e cioè nel punto ove la retta d'azione della risultante delle forze a sinistra (o a destra) della generica sezione del tratto incontra l'asse del tratto di trave; inoltre la tangente trigonometrica dell'angolo che in tale tratto il diagramma del momento forma con la fondamentale coincide con il valore del taglio, costante nel tratto.

Per un tratto soggetto ad un carico tagliante ripartito uniformemente il diagramma del momento è una parabola quadratica; quello del taglio una retta; per un tratto soggetto ad un carico tagliante variabile con legge lineare il diagramma del momento è una parabola cubica, quello del taglio una parabola quadratica.

In corrispondenza delle sezioni ove agisce una forza concentrata, applicata o di reazione, il diagramma del momento presenta un punto angoloso, quello del taglio un salto; in corrispondenza delle sezioni ove agisce una coppia, applicata o di reazione, il diagramma del momento presenta un salto, quello del taglio non presenta nè salti nè punti angolosi. In un nodo incastro la somma dei momenti flettenti agenti sulle facce delle travi che sono unite dal nodo, e presi con il segno che a loro va attribuito se si considerano come coppie agenti sul nodo (o sulle travi che in esso concorrono) deve essere nulla, per l'equilibrio alla rotazione del nodo; questa considerazione permette di ricavare in valore e segno il momento flettente all'estremità di una trave incastrata in un nodo una volta noti quelli relativi a tutte le altre travi che concorrono nello stesso nodo.

A titolo di esempio si traccia il diagramma del momento flettente per la struttura riportata nella fig. 6-105. Il diagramma relativo al tratto SM è un segmento di retta, il cui prolungamento interseca l'asse della trave SM nel punto P in cui l'asse stesso incontra la retta d'azione della reazione

in N. Il diagramma relativo al tratto HS è un segmento di retta parallelo a quello costituente il diagramma di SM, poichè nei due tratti il taglio è lo stesso; esso inoltre incontra l'asse della trave HS nel punto Q ove l'asse stesso è intersecato dalla retta d'azione della reazione in G. Una volta fissato il diagramma del tratto SM, è definito anche quello del tratto HS; il diagramma del tratto SM può essere fissato ad arbitrio — purchè passante per P — nel qual caso il salto in corrispondenza di S, che è pari al valore della coppia \mathcal{M} , definisce la scala del diagramma; se invece tale

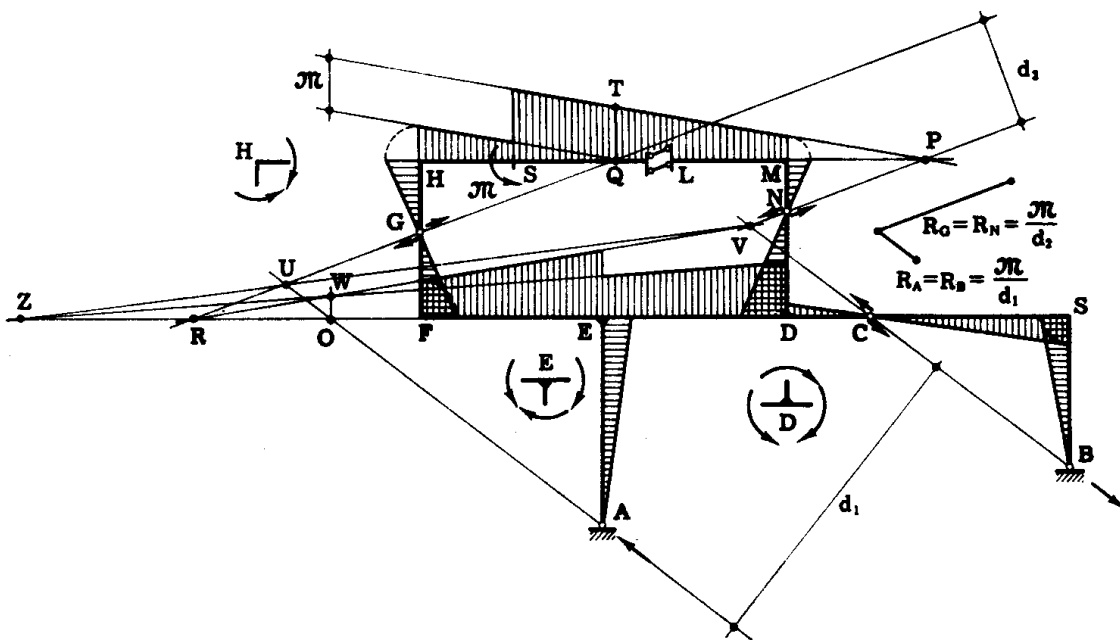


FIG. 6-105

scala è fissata a priori, è sufficiente riportare da Q un segmento QT che rappresenti, nella scala assegnata, la coppia \mathcal{M} , e congiungere P con T. Il verso del segmento QT dipende dalla posizione delle fibre tese nella sezione Q, e cioè dal verso della coppia \mathcal{M} ; nel caso in esame \mathcal{M} è antioraria, la reazione in N considerata come azione sulla trave NM è diretta verso sinistra, e quindi in Q le fibre tese sono quelle superiori.

Il momento nella sezione H della trave HF coincide in valore con il momento nella sezione H della trave HM; il verso dei due momenti, considerati agenti sul nodo H, è contrario, e quindi nella sezione H della trave HF le fibre tese sono quelle a sinistra. Il diagramma relativo al tratto HF è così determinato, poichè se ne conoscono i valori in H e in G. In modo analogo si determina il diagramma nel tratto MD.

Il momento nella sezione F del tratto FE è noto in valore e segno;

inoltre il diagramma del tratto FE taglia l'asse di FE in R; quindi il diagramma di FE è determinato.

Occorre adesso tracciare il diagramma nel tratto ED. Un punto Z di esso è noto; Z è l'intersezione dell'asse di ED e della retta d'azione della risultante delle reazioni in A e G. Tale retta coincide con quella della risultante delle reazioni in C ed N, ed è fornita quindi dalla UV.

Un altro punto W è anche noto; poichè nel passaggio dal tratto FE al tratto ED interviene la reazione R_A , i due diagrammi relativi ai due tratti devono presentare un punto angoloso in corrispondenza del punto O dove R_A incontra l'asse, e cioè avere su O un punto W comune. La ZW fornisce quindi il diagramma nel tratto ED.

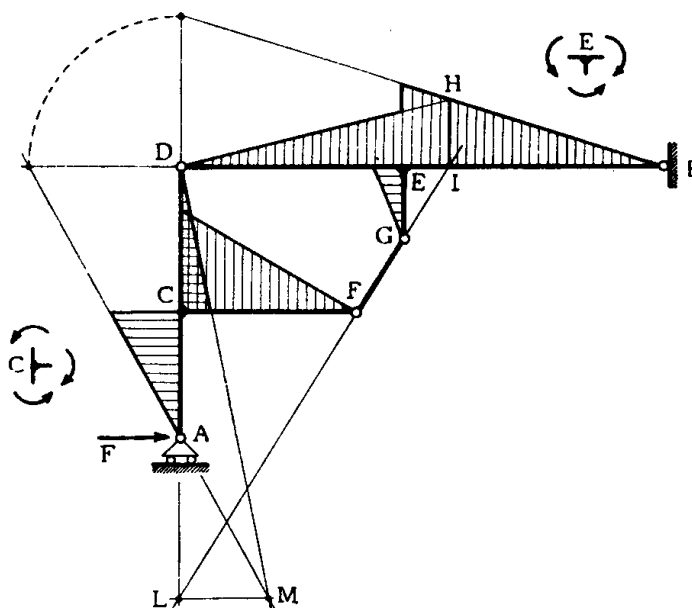


FIG. 6-106

Si ha poi, per l'equilibrio dei nodi E e C, e considerando i momenti come coppie applicate ai nodi,

$$\sum \mathcal{M}_{Ei} = 0$$

$$\sum \mathcal{M}_{Ci} = 0$$

da cui si ottengono M_{EA} ed M_{DC} . Il resto è pedissequo.

Si passi adesso alla struttura della fig. 1-106.

Si costruisce prima il diagramma del tratto AC, e quello del tratto BE; essi presentano la stessa ordinata in D, perchè i valori delle reazioni in

A e B non variano se la struttura risulta composta dei due soli tratti AD e DB saldati in D.

Il diagramma nel tratto ED è lo stesso sia che la forza esercitata dal pendolo FG risulti applicata in G attraverso il braccio rigido GE, che direttamente in I; perciò esso è fornito dalla retta DH.

Così pure il diagramma relativo al tratto DC è fornito dalla retta DM. Ciò si riconosce considerando il momento in CD come dovuto alle forze in A ed F, e ripetendo il ragionamento già fatto nel caso precedente per ottenere il momento nel tratto ED della fig. 6-105. I momenti nella sezione C della trave CF e in quella E della trave GE sono al solito tali da soddisfare le equazioni di equilibrio alla rotazione dei nodi C e E.

E' interessante osservare che se una trave è soggetta a forze applicate parallele il poligono delle successive risultanti riferito all'asse della trave

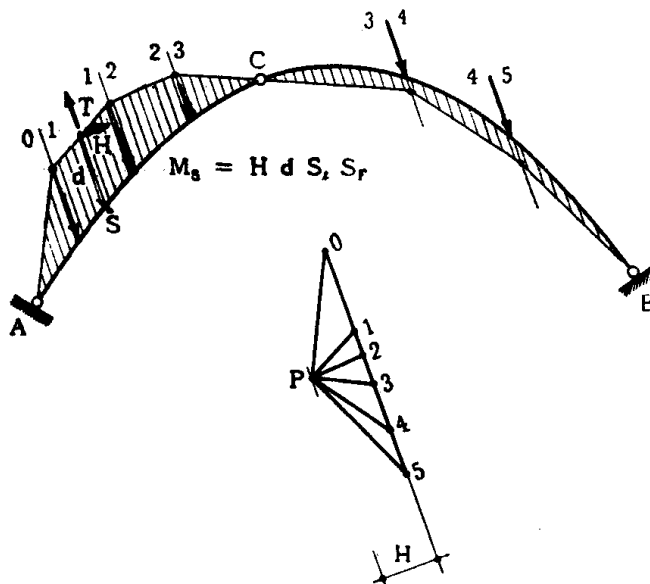


FIG. 6-107

(§ 3) è il diagramma del momento; le ordinate non risultano in tal caso normali all'asse, ma tutte tra loro parallele. Infatti, con riferimento alla generica sezione S (fig. 6-107) la risultante R delle forze a sinistra può intendersi applicata in T (essendo T il punto d'incontro del poligono con la parallela per S alla comune direzione delle forze) e scomposta in una forza H normale a TS, ed un'altra secondo TS. Il momento della R rispetto ad S è pari alla somma dei momenti delle sue componenti, e cioè al solo momento di H, poichè l'altra incontra il baricentro di S; e perciò

$$M_s = H \cdot d .$$

Il segmento H , base del poligono delle forze, va letto nella scala delle forze, e d nella scala delle lunghezze; o viceversa. Nella fig. 6-108 è trac-

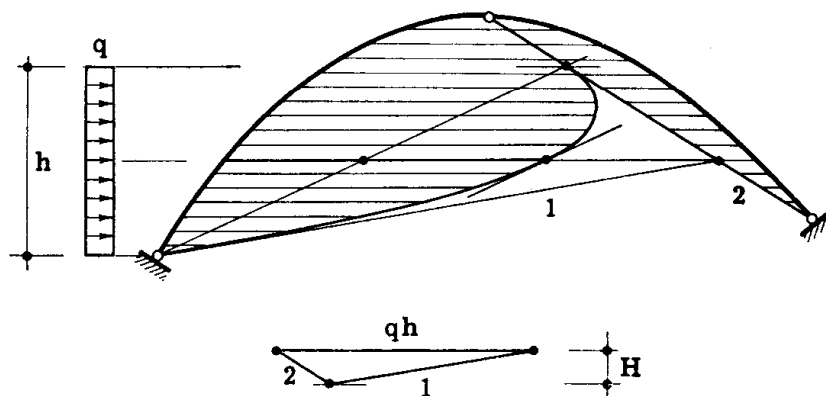


FIG. 6-108

ciato secondo questo procedimento il diagramma del momento in un arco a tre cerniere soggetto a un carico orizzontale uniformemente distribuito.