

CAPITOLO V

I TEOREMI DELLE DERIVATE DEL LAVORO

1. Il primo teorema di Castigliano.

Una struttura sia sollecitata (fig. 5-1 a) da un insieme di forze F , di cui almeno una F_i concentrata; l'energia di deformazione L sia espres-

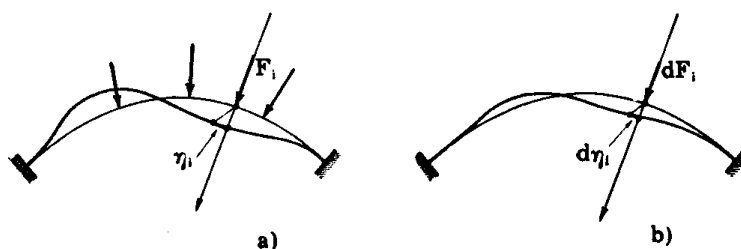


FIG. 5-1

sa in funzione delle forze. Incrementando la forza F_i della quantità dF_i , l'energia di deformazione si incrementa (arrestandosi al primo termine dello sviluppo) di

$$d_1 L = \frac{\partial L}{\partial F_i} dF_i . \quad (a)$$

L'incremento di L è composto di due parti. Una parte, $d''L$, è il lavoro che la dF_i compie per lo spostamento da essa stessa prodotto, e cioè per la variazione $d\eta_i$ della componente η_i secondo la retta d'azione di F_i dello spostamento del punto di applicazione di F_i ; essa è del secondo ordine in dF_i . L'altra parte, $d'L$, è il lavoro che le F compiono per gli spostamenti provocati dalla dF_i ; esso è eguale, per il principio di Betti, al lavoro che la forza dF_i compie per effetto dello spostamento connesso con le forze F (fig. 5-1 a, b), e cioè è uguale al prodotto $dF_i \cdot \eta_i$. La parte $d'L$ è perciò del primo ordine in dF_i , e coincide quindi con la (a):

$$d'L = \eta_i dF_i = d_1 L . \quad (b)$$

Dal confronto tra le (a) e (b) risulta

$$\eta_1 = \frac{\partial L}{\partial F_1} . \quad (1)$$

La (5-1) si enuncia: « La componente dello spostamento del punto d'applicazione di una forza secondo la retta d'azione di quest'ultima coincide con la derivata dell'energia di deformazione rispetto alla forza stessa ».

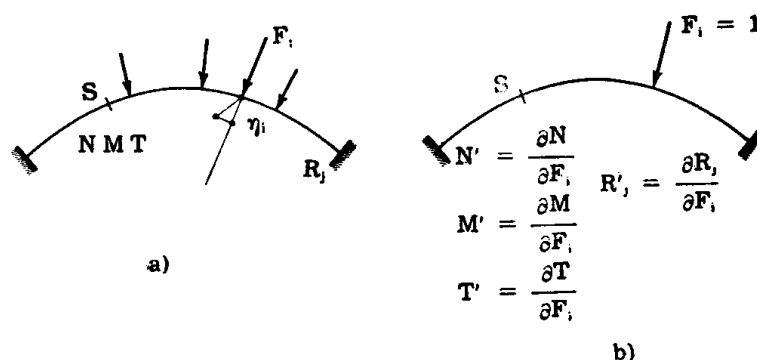


FIG. 5-2

E' questo (*) il *primo teorema di Castigliano*; la sua validità è condizionata a quella del principio di Betti classico, quindi è limitata dalle ipotesi di elasticità lineare (della struttura e dei vincoli), di piccolezza degli spostamenti, e di vincoli lisci; si escludono con ciò le distorsioni ed i cedimenti vincolari anelastici.

La stessa dimostrazione vale, nel caso delle travi, con riferimento ad una coppia $\mathcal{M}_1$; in tal caso la derivata $\partial L / \partial \mathcal{M}_1$ fornisce la componente, secondo la retta d'azione del vettore rappresentativo della coppia $\mathcal{M}_1$, del vettore rappresentativo della rotazione della sezione cui $\mathcal{M}_1$ è applicata.

Nelle travi l'energia di deformazione si esprime attraverso le caratteristiche della sollecitazione, che sono funzioni lineari e omogenee delle forze; limitandosi per semplicità al caso piano si ha

$$L = \int_s \frac{N^2}{2EA} ds + \int_s \frac{M^2}{2EI} ds + \int_s \chi \frac{T^2}{2GA} ds + \frac{1}{2} \sum_j c_j R_j^2 . \quad (c)$$

(*) A. CASTIGLIANO, *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*. Torino, 1879. Si veda pure il Vol. I, § 8-15.

La (5-1) si scrive, attraverso la (c),

$$\eta_i = \int_s \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial F_i} ds + \int_s \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial F_i} ds + \int_s \chi \frac{T}{GA} \frac{\partial T}{\partial F_i} ds + \\ + \sum_j c_j R_j \frac{\partial R_j}{\partial F_i} . \quad (d)$$

Poichè N è funzione lineare omogenea delle forze, la $\partial N / \partial F_i$ nella generica sezione S rappresenta lo sforzo normale N' in S per effetto di una forza $F_i = 1$ (fig. 5-2 b); altrettanto vale per le derivate $\partial M / \partial F_i$, $\partial T / \partial F_i$, $\partial R_j / \partial F_i$.

Si riconosce perciò che il teorema di Castigliano conduce, nella ricerca degli spostamenti, alle stesse equazioni cui si perviene attraverso il principio dei lavori virtuali.

Se si vuole conoscere lo spostamento in corrispondenza di un punto S dove non è applicata una forza, si può considerare agente, oltre alle forze effettive, anche una forza F_i in corrispondenza di S e nella direzione secondo la quale si vuole determinare la componente dello spostamento di S ; una volta ottenuta questa componente, nella sua espressione si pone $F_i = 0$. Si osserva però che N , M e T sono, nel caso ora esposto, somma della parte N_e , M_e , T_e dovuta alle forze effettive, e della parte N_f , M_f , T_f dovuta alla F_i fittizia; corrispondentemente la η_i fornita dalla (b) risulta somma di due parti distinte, η_{ie} dovuta alle forze effettive ed η_{if} dovuta alla F_i ; si può fin dall'inizio trascurare quest'ultima, ponendo per N , M , T le sole aliquote dovute alle forze effettive.

Il teorema di Castigliano si presta anche al calcolo delle reazioni iperstatiche. Si rende isostatica la struttura, facendo agire in corrispondenza dei vincoli soppressi le relative reazioni se si sopprimono dei vincoli esterni, o forze uguali alle corrispondenti caratteristiche della sollecitazione se si tratta di sconnessioni interne (fig. 5-3 b). Per il principio di sovrapposizione una qualsiasi caratteristica della sollecitazione, per esempio il momento, è fornito dalla somma:

$$M = M_0 + M' X_1 + M'' X_2 + M''' X_3 + \dots \quad (e)$$

essendo M_0 , M' , M'' , il momento provocato sulla struttura isostatica rispettivamente dalle forze applicate e dalle iperstatiche X_1 , X_2 , agenti una alla volta con valore unitario. In corrispondenza delle iperstatiche X_h gli spostamenti nella struttura effettiva, o, ciò che è lo stesso, nella struttura isostatica sollecitata dalle forze F_i e dalle X_h , sono forniti

da $\Delta_{ah} - c_h X_h$; per il teorema di Castigliano si può scrivere perciò:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial X_1} &= \Delta_{a1} - c_1 X_1 \\ \frac{\partial L}{\partial X_2} &= \Delta_{a2} - c_2 X_2 \\ \frac{\partial L}{\partial X_3} &= \Delta_{a3} - c_3 X_3 \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}\tag{f}$$

Nelle (f) si sono inclusi anche i cedimenti anelastici relativi ai vincoli soppressi; ciò è possibile perchè la struttura effettiva si è ricondotta a quella isostatica, sollecitata, oltre che dalle forze applicate, dalle X_h , e i ce-

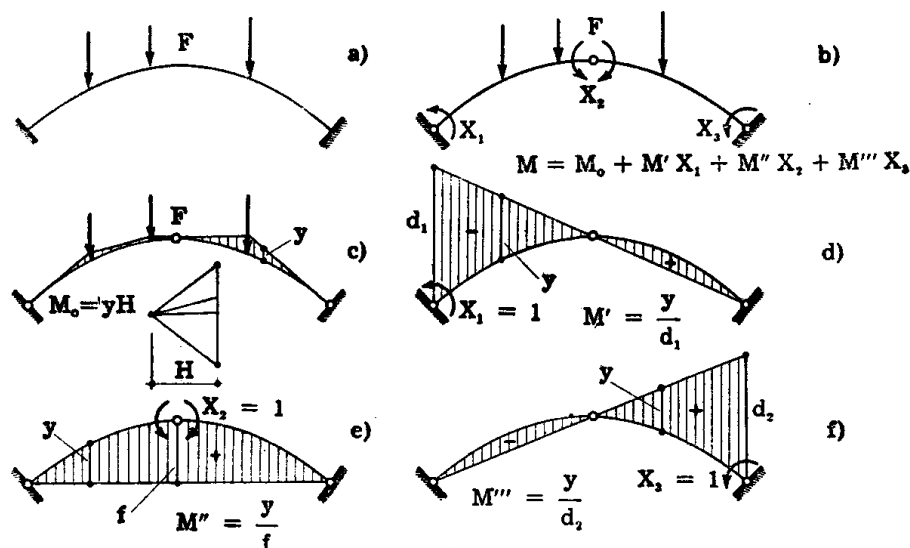


FIG. 5-3

dimenti Δ_{ah} si considerano perciò come spostamenti provocati sulla struttura isostatica dalle forze applicate ivi comprese le X_h . Non è possibile però tener conto nella (f) dei cedimenti anelastici in corrispondenza dei vincoli non soppressi, come non è possibile tener conto delle distorsioni, essendo il primo teorema di Castigliano condizionato alle ipotesi sotto cui è valido il principio di Betti.

L'energia di deformazione è data dalla (c) essendo la sommatoria estesa alle reazioni vincolari della struttura isostatica; dalle (f) risulta

perciò, con riferimento alla X_h ,

$$\int_s \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial X_h} ds + \int_s \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial X_h} ds + \int_s \chi \frac{T}{GA} \frac{\partial T}{\partial X_h} ds + \\ + \sum_j c_j R_j \frac{\partial R_j}{\partial X_h} = \Delta_{ah} - c_h X_h ,$$

e, per la (e),

$$\int_s \frac{NN'}{EA} ds + \int_s \frac{MM'}{EI} ds + \int_s \chi \frac{TT'}{GA} ds + \sum_j c_j R_j R'_j = \Delta_{ah} - c_h X_h . \quad (g)$$

La (g) non è altro che la nota espressione del principio dei lavori virtuali, applicato alle deformazioni effettive (fig. 5-3 a) ed alle forze fittizie derivanti dalla sollecitazione $X_h = 1$ (fig. 5-3 d, e, f).

2. Definizioni ed espressioni dell'energia vincolata, del lavoro perduto e dell'energia fittizia di deformazione.

Si prenda in esame un corpo costituito di materiale ad elasticità lineare, soggetto ad un insieme di forze F e distorsioni ε^* . Se le ε^* soddisfano le condizioni di congruenza e quelle di vincolo, nessuna sollecitazione è da esse indotta nel corpo; in caso contrario sorgono delle tensioni $\bar{\sigma}$, tali che le relative $\bar{\varepsilon}$ elastiche, sommate alle ε^* della distorsione, rispettino le condizioni di congruenza e di vincolo. Siano σ_F ed ε_F le tensioni e le deformazioni provocate dalle forze F ; se gli spostamenti sono piccoli nel senso noto, ed i vincoli lisci, è valido il principio di unicità, essendosi già fatta l'ipotesi di elasticità lineare, e quindi le σ provocate dalle F ed ε^* coesistenti, e le ε elastiche connesse con le σ , sono fornite da

$$\sigma = \sigma_F + \bar{\sigma} \\ \varepsilon = \varepsilon_F + \bar{\varepsilon} . \quad (h)$$

L'energia di deformazione connessa con le ε (o con le σ , il che è lo stesso) è fornita da

$$L = \int_V \varphi dV = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \dots) dV . \quad (2)$$

Per le (h) può porsi

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{F_x} \varepsilon_{F_x} + \dots) dV + \frac{1}{2} \int_V (\bar{\sigma}_x \bar{\varepsilon}_x + \dots) dV + \\ & + \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{F_x} \bar{\varepsilon}_x + \dots) dV + \frac{1}{2} \int_V (\bar{\sigma}_x \varepsilon_{F_x} + \dots) dV . \end{aligned} \quad (i)$$

I due ultimi integrali della (i) rappresentano ciascuno la metà dell'energia mutua di deformazione L_{12} ed L_{21} relativa al sistema di forze F ed al sistema di distorsione ε^* ; per la (4-2) esse sono uguali. D'altro canto, per il principio di Betti generalizzato (4-5) si ha, chiamando η_F gli spostamenti provocati dalle forze F ed η_d quelli connessi con le $\varepsilon^* + \bar{\varepsilon}$

$$\Sigma_1 F_i \eta_{di} - \int_V (\sigma_{F_x} \varepsilon_x^* + \dots) dV = 0 ; \quad (l)$$

la (l), esprime l'uguaglianza dei lavori mutui L_{12e} ed L_{21e} relativi al sistema 1 di forze F e al sistema 2 di distorsioni ε^* , assicura anche che questi lavori mutui sono nulli. La (l) non è altro che l'espressione (4-14) del secondo principio di reciprocità.

Poichè (4-5) il lavoro mutuo non è altro che l'energia mutua di deformazione, dalla (l) si trae

$$\int_V (\sigma_{F_x} \bar{\varepsilon}_x + \dots) dV = \int_V (\bar{\sigma}_x \varepsilon_{F_x} + \dots) dV = 0 . \quad (3)$$

L'energia L di deformazione è perciò somma di quella L_F dovuta alle forze e di quella $\bar{L}$ dovuta alle distorsioni:

$$\begin{aligned} L &= L_F + \bar{L} \\ L_F &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{F_x} \varepsilon_{F_x} + \dots) dV \\ \bar{L} &= \frac{1}{2} \int_V (\bar{\sigma}_x \bar{\varepsilon}_x + \dots) dV . \end{aligned} \quad (4)$$

Si ritrova quindi, e sotto le stesse ipotesi, quanto già noto circa la sovrapponibilità delle energie di deformazione relative alle forze da una parte, alle distorsioni dall'altra. L'energia L_F è l'energia di deformazione connessa con le forze, e l'energia $\bar{L}$ è l'energia di deformazione connessa

con le distorsioni, o *energia vincolata*. Si definisce inoltre *lavoro complementare* l'espressione (*)

$$L^* = \int_V (\sigma_x \varepsilon_x^* + \dots) dV . \quad (5)$$

Esso è somma di quello L_F^* relativo alle σ_F (*lavoro complementare relativo alle forze*) e di quello $\bar{L}^*$ relativo alle $\bar{\sigma}$ (*lavoro complementare relativo alle distorsioni*):

$$\begin{aligned} L^* &= L_F^* + \bar{L}^* \\ L_F^* &= \int_V (\sigma_{Fx} \varepsilon_x^* + \dots) dV \\ \bar{L}^* &= \int_V (\bar{\sigma}_x \varepsilon_x^* + \dots) dV . \end{aligned} \quad (6)$$

Si definisce infine *energia fittizia di deformazione* L_f la somma dell'energia di deformazione e del lavoro complementare:

$$L_f = L + L^* . \quad (7)$$

E' interessante osservare che il lavoro complementare relativo alle distorsioni è pari al doppio dell'energia vincolata, cambiata di segno; infatti si ha, applicando il principio dei lavori virtuali alle forze $\bar{\sigma}$ in gioco nella struttura soggetta a distorsioni, ed alle deformazioni totali $\bar{\varepsilon} + \varepsilon^*$ relative alla stessa struttura, e tenendo conto della (5-3),

$$\int_V (\bar{\sigma}_x \bar{\varepsilon}_x + \dots) dV + \int_V (\bar{\sigma}_x \varepsilon_x^* + \dots) dV = 0$$

da cui

$$\begin{aligned} 2 \bar{L} &= - \bar{L}^* \\ L_f &= L_F - \bar{L} + L_F^* . \end{aligned} \quad (8)$$

Se il corpo è elastico, ma ad elasticità non lineare, è sempre (5-2)

$$L = \int_V \varphi dV ,$$

(*) Si veda pure Vol. I, § 8-11.

ma L non è più fornito semplicemente dalla somma $L_F + \bar{L}$, non essendo più nulle le energie mutue.

Le definizioni e le espressioni (5-6) possono rimanere invariate; non vale più però la (5-8).

Le energie L_F ed $\bar{L}$ corrispondono a lavori realmente compiuti dalle forze interne; non altrettanto può dirsi per i lavori L_F^* ed $\bar{L}^*$.

Per quel che riguarda L_F^* , esso è reale se le distorsioni ϵ^* agiscono quando già sono presenti le forze F , non è reale invece se le ϵ^* sono applicate prima delle forze. Il lavoro $\bar{L}^*$ invece non è eseguito in realtà dalle forze interne $\bar{\sigma} dA$; questo accadrebbe solo se il corpo si suddividesse in un numero di parti tale che le ϵ^* possano agire senza che si destino tensioni (*), e sulle parti del corpo risultanti dalla sconnessione si facessero agire in un primo momento le $\bar{\sigma}$, che inducono le corrispondenti $\bar{\epsilon}$, e in un secondo momento le ϵ^* , ricostituendo quindi, senza indurre ulteriori tensioni, la primitiva continuità del corpo. Questo procedimento però, che in ultima analisi coincide con quello già trattato, riconducendo il lavoro $\bar{L}^*$ ad un lavoro L_F , è puramente ideale.

Si prenda in esame una trave con incastro ed appoggio (fig. 5-4), soggetta ad una variazione termica alla Navier $\bar{\Delta t}$; le ϵ^* sono le quantità $\epsilon_z = \alpha \frac{\bar{\Delta t}}{h} y$, le tensioni $\bar{\sigma}$ e le deformazioni $\bar{\epsilon}$ sono quelle provocate sul-

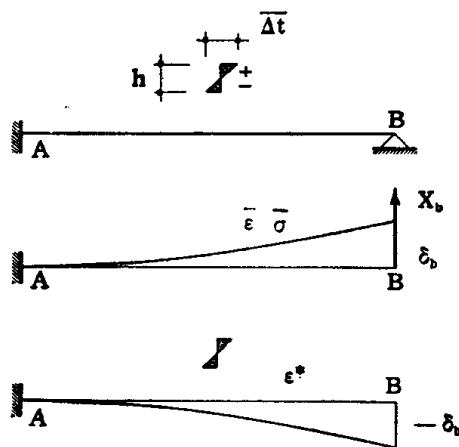


FIG. 5-4

la trave a mensola dalla reazione iperstatica X_b , generata dalla variazione termica.

(*) Queste parti, nel caso più generale, sono infinite, e corrispondono ai cubetti elementari $dx dy dz$ in cui il corpo è suddiviso da una triplice famiglia ortogonale di piani paralleli.

Se si pensa di svincolare la trave in B, di applicare in B la X_b , facendo poi agire la Δt , il lavoro $\bar{L}^*$ è realmente compiuto; esso è fornito, come risulta dal principio dei lavori virtuali con riferimento alle deformazioni ε^* ed alle tensioni $\bar{\sigma}$ sulla struttura a mensola, da

$$\bar{L}^* = \int_v (\bar{\sigma}_x \varepsilon_x^* + \dots) dV = - X_b \delta_b$$

ove δ_b è lo spostamento in B provocato dalla X_b , uguale e contrario a quello provocato dalla Δt .

L'energia di deformazione $\bar{L}$ è

$$\bar{L} = \frac{1}{2} \int_v (\bar{\sigma}_x \bar{\varepsilon}_x + \dots) dV = \frac{1}{2} X_b \delta_b .$$

Si ha conferma così della (5-8).

Se invece si pensa che sulla struttura a mensola agiscono prima la variazione termica Δt , e poi la X_b , il lavoro $\bar{L}^*$ è ideale.

Il lavoro L_F e quello $\bar{L}$ sono recuperabili, il primo annullando le forze, il secondo dividendo come già detto il corpo in più parti in modo da annullare le $\bar{\sigma}$; è per questo motivo che la $\bar{L}$ si chiama vincolata. I lavori L_F^* ed $\bar{L}^*$ non sono invece recuperabili, a meno di annullare le distorsioni, e se sono realmente svolti si dissipano in calore. Perciò L_F ed $\bar{L}$ sono energie elastiche, L_F^* ed $\bar{L}^*$ non lo sono.

3. Il primo teorema di Castigliano generalizzato.

Sulla struttura considerata nel primo paragrafo agiscano, assieme alle forze, anche delle distorsioni. L'energia di deformazione ed il lavoro complementare siano espressi in funzione delle forze e delle distorsioni. Incrementando la forza generica F_1 della quantità dF_1 , l'energia di deformazione si incrementa (arrestandosi al primo termine dello sviluppo) di

$$d_1 L = \frac{\partial L}{\partial F_1} dF_1 . \quad (m)$$

L'incremento dL di energia di deformazione si può scomporre in due parti, la $d''L$ dovuta al lavoro delle $d\sigma$ connesse con la dF_1 per effetto del-

le $d\varepsilon$ connesse con la stessa dF_1

$$d''L = \frac{1}{2} \int_v (d\sigma_x d\varepsilon_x + \dots) dV ,$$

e la parte $d'L$ dovuta al fatto che la dF_1 agisce in presenza delle F e delle ε^* . La $d''L$ è del secondo ordine in dF_1 . La $d'L$ coincide con il lavoro mutuo generalizzato L_{12e} che il sistema delle F e delle ε^* compie per effetto del sistema dF_1 , uguale, per il principio di Betti generalizzato, al lavoro mutuo generalizzato L_{21e} che il sistema dF_1 compie per effetto del sistema F ed ε^* ; e cioè

$$d'L = \eta_i dF_1 - \int_v (\varepsilon_x^* d\sigma_x + \dots) dV , \quad (n)$$

dove η_i è la componente dello spostamento del punto d'applicazione della forza F_1 nella direzione di quest'ultima, dovuto alle F ed ε^* . L'integrale della (n), essendo

$$d\sigma_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial F_1} dF_1 ,$$

non è altro che il differenziale del lavoro complementare L^* :

$$\int_v (\varepsilon_x^* d\sigma_x + \dots) dV = \frac{\partial L^*}{\partial F_1} dF_1 . \quad (o)$$

Dalle (n) e (o) si trae che $d'L$ è del primo ordine in dF_1 , e coincide quindi con la (m):

$$d'L = \eta_i dF_1 - \frac{\partial L^*}{\partial F_1} dF_1 = d_1 L = \frac{\partial L}{\partial F_1} dF_1 .$$

Si ha perciò

$$\frac{\partial L}{\partial F_1} = \eta_i - \frac{\partial L^*}{\partial F_1}$$

da cui si trae

$$\eta_i = \frac{\partial (L + L^*)}{\partial F_1} = \frac{\partial L_f}{\partial F_1} . \quad (9)$$

Si può quindi enunciare: « In una struttura elastica soggetta a forze e distorsioni, sotto le stesse ipotesi che condizionano il principio di Betti

generalizzato, la componente dello spostamento del punto d'applicazione di una forza secondo la retta d'azione di quest'ultima coincide con la derivata rispetto alla forza stessa dell'energia fittizia di deformazione ».

Nel caso dei sistemi monodimensionali piani, e delle distorsioni di Volterra, l'energia fittizia è

$$L + L^* = \int_s \frac{N^2}{2 EA} ds + \int_s \frac{M^2}{2 EI} ds + \int_s \chi \frac{T^2}{2 GA} ds + \sum_j c_j \frac{R_j^2}{2} - \int_s N \lambda ds - \int_s M \mu ds - \int_s T \vartheta ds - \sum_j R_j \Delta_{aj} . \quad (10)$$

La (5-9) si scrive perciò

$$\eta_1 = \int_s \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial F_1} ds + \int_s \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial F_1} ds + \int_s \chi \frac{T}{GA} \frac{\partial T}{\partial F_1} ds + \sum_j c_j R_j \frac{\partial R_j}{\partial F_1} - \int_s \lambda \frac{\partial N}{\partial F_1} ds - \int_s \mu \frac{\partial M}{\partial F_1} ds - \int_s \vartheta \frac{\partial T}{\partial F_1} ds - \sum_j \Delta_{aj} \frac{\partial R_j}{\partial F_1} ,$$

che si riconosce coincidere con l'espressione ottenuta applicando il principio dei lavori virtuali.

Seguendo lo stesso procedimento già mostrato al § 1, si perviene, attraverso il teorema di Castigliano generalizzato, alle equazioni di congruenza valide per le travi soggette a forze e distorsioni.

4. Il secondo teorema di Castigliano relativo alle distorsioni.

Si consideri una trave soggetta ad un sistema di sole distorsioni ϵ^* ; una almeno di queste ultime, D_1 , sia concentrata (fig. 5-5).



FIG. 5-5

Si faccia variare D_1 di dD_1 , corrispondentemente l'energia di deformazione varia di

$$d_1 \bar{L} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial D_1} dD_1 . \quad (p)$$

La $\bar{L}$ sia espressa in funzione delle ε^* , e in particolare della D_1 .

La variazione $d\bar{L}$ si scompone nella parte $d''\bar{L}$ dovuta al lavoro delle $d\sigma$ connesse con la dD_1 per effetto delle $d\varepsilon$ connesse con la stessa dD_1 , e nella parte $d'\bar{L}$, dovuta al fatto che dD_1 agisce in presenza delle ε^* . Quest'ultima è (4-5) il lavoro mutuo generalizzato L_{12e} che il sistema ε^* compie per effetto del sistema dD_1 , e cioè è fornita da

$$d'\bar{L} = C_1 dD_1. \quad (q)$$

La $d''\bar{L}$ è del secondo ordine in dD_1 , la $d'\bar{L}$ del primo; la (p) e la (q) quindi coincidono, e si può scrivere

$$C_1 = \frac{\partial \bar{L}}{\partial D_1}, \quad (11)$$

essendo C_1 la caratteristica corrispondente a D_1 ; si può perciò enunciare un teorema analogo a quello di Castigliano: « In una struttura soggetta a sole distorsioni, la derivata dell'energia di deformazione rispetto ad una distorsione concentrata coincide con il valore della caratteristica corrispondente alla distorsione che si verifica nella sezione ove quest'ultima è applicata » (*).

Dalla espressione di $\bar{L}$ per le travi si ricava

$$C_1 = \int_s \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial D_1} ds + \int_s \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial D_1} ds + \int_s \chi \frac{T}{GA} \frac{\partial T}{\partial D_1} ds + \sum_j c_j R_j \frac{\partial R_j}{\partial D_1}$$

e cioè ancora, se vale il principio di sovrapposizione,

$$C_1 = \int_s \frac{NN'}{EA} ds + \int_s \frac{MM'}{EI} ds + \int_s \chi \frac{TT'}{GA} ds + \sum_j c_j R_j R_j' \quad (r)$$

essendo NMT le caratteristiche ed R le reazioni provocate dalle distorsioni, $N' M' T'$ ed R' le caratteristiche e le reazioni provocate dalla $D_1 = +1$ agente in corrispondenza della sezione S ove si desidera conoscere C_1 .

Si noti che nella dimostrazione del teorema ora enunciato non si è ricorso al principio di Betti, ma alla (4-5), e perciò esso è condizionato dalle sole ipotesi che il materiale sia elastico, anche se non linearmente, e che i vincoli siano lisci. Gli spostamenti connessi con la dD_1 sono infatti piccoli, e sotto le due suddette ipotesi soltanto è valida la (4-5).

(*) Si veda pure Vol. I, § 8-15.

Nella forma (r) il teorema è però condizionato dalle stesse ipotesi del principio di sovrapposizione, e può trarsi anche dalla (2-24).

5. Il secondo teorema di Castigliano.

L'energia di deformazione L in una struttura soggetta a forze e distorsioni può essere espressa come funzionale degli spostamenti u, v, w , o come funzione dei coefficienti A_i, B_i, C_i di un qualsiasi sviluppo in serie delle u, v, w . Le A_i, B_i, C_i sono da intendersi come le coordinate lagrangiane del sistema elastico assimilato a sistema olonomo, e corrispondentemente siano $F_{a_i}, F_{b_i}, F_{c_i}$ le componenti lagrangiane delle forze agenti; come è noto dalla meccanica razionale, il lavoro dL_e compiuto dalle forze per effetto di una variazione dA_i, dB_i, dC_i delle coordinate lagrangiane è fornito da

$$dL_e = \sum F_{a_i} dA_i + \sum F_{b_i} dB_i + \sum F_{c_i} dC_i.$$

Se la generica componente A_h varia di dA_h , l'energia di deformazione varia di dL , ed è

$$d_i L = \frac{\partial L}{\partial A_h} dA_h. \quad (s)$$

Poichè il sistema è conservativo, la variazione dL è uguale al lavoro compiuto dalle forze esterne per effetto di dA_h . Il dA_h sia provocato dalle forze, piccolissime, $dF_{a_i}, dF_{b_i}, dF_{c_i}$; il lavoro compiuto dalle forze esterne per effetto delle $dF_{a_i}, dF_{b_i}, dF_{c_i}$, è somma di quello compiuto dalle dF_i per effetto di dA_h , e di quello compiuto dalle F_i ; il primo è trascurabile rispetto al secondo. Si ha perciò

$$d_i L = F_{a_h} dA_h. \quad (t)$$

Dalle (s) e (t) si ha

$$F_{a_h} = \frac{\partial L}{\partial A_h}. \quad (12)$$

Si può così enunciare il *secondo teorema di Castigliano*: « La derivata dell'energia di deformazione rispetto ad una coordinata lagrangiana del sistema fornisce la corrispondente componente lagrangiana delle forze applicate ». Il teorema è valido, per la dimostrazione fatta, anche per corpi ad elasticità non lineare, e per spostamenti non piccoli (*).

(*) Si veda pure Vol. I, § 8-15.

E' facile riconoscere che la (s) rappresenta la variazione prima dell'energia di deformazione, la (t) la variazione prima cambiata di segno dell'energia potenziale delle forze applicate; la (5-12) rappresenta perciò l'azzerarsi della variazione prima dell'energia potenziale totale, e il secondo teorema di Castigliano coincide con il principio di stazionarietà dell'energia totale.

Con riferimento ad una trave, si esprima l'abbassamento v sotto forma di sviluppo in serie di Fourier

$$v = \sum v_n \sin \frac{n\pi z}{l} ;$$

risulta

$$L = \frac{EI}{4} \frac{\pi^4}{l^3} \sum v_n^2 n^4$$

da cui

$$\frac{\partial L}{\partial v_n} = \frac{EI \pi^4 n^4}{2 l^3} v_n = F_{vn} = \frac{l}{2} p_n$$

essendo p_n l'ennesimo coefficiente dello sviluppo in serie di Fourier delle forze applicate.

6. Il teorema di Menabrea (secondo teorema di stazionarietà dell'energia di deformazione).

Si consideri una struttura soggetta a sole forze, e siano $X_1, X_2, \dots, X_n$ i valori delle incognite iperstatiche. La L sia espressa come funzione delle F e delle X ; agli incrementi dX_i dei valori effettivi delle X_i corrisponde un incremento $d_1 L$ del primo ordine della funzione L fornito da

$$d_1 L = \sum_n \frac{\partial L}{\partial X_n} dX_n .$$

Se sono valide le premesse del primo teorema di Castigliano, le derivate $\partial L / \partial X_n$ sono nulle; infatti la $\partial L / \partial X_i$ rappresenta lo spostamento del punto di applicazione della X_i nella struttura resa isostatica e caricata dalle F e dalle X ; d'altro canto non si è in presenza di distorsioni, e quindi di cedimenti anelastici dei vincoli (dell'eventuale cedibilità elastica si tiene conto considerando il vincolo come facente parte della struttura, e introducendo perciò in L anche la sua energia di deformazione). Per quanto sopra

è $d_1 L = 0$. Si enuncia così il *teorema di Menabrea* (1857): «L'energia di deformazione, espressa in funzione delle reazioni iperstatiche, è stazionaria in corrispondenza dei valori delle reazioni che rispettano la congruenza». In tale situazione essa è minima; e infatti la variazione dL dovuta alle variazioni dX_i è somma del lavoro che le F ed X compiono per effetto degli spostamenti provocati sulla struttura resa isostatica dalle dX_i (parte $d_1 L$ del primo ordine) e del lavoro che le dX_i compiono per effetto degli spostamenti da esse stesse prodotti (parte $d_2 L$ del secondo ordine). La $d_1 L$ è nulla, come si è visto, e se ne ha conferma perchè per il principio di Betti è uguale al lavoro che le dX_i compiono per effetto degli spostamenti provocati dalle F ed X_i ; la $d_2 L$ è essenzialmente positiva.

Il teorema di Menabrea assicura che tra gli infiniti stati tensionali in equilibrio sulla struttura con le forze esterne l'unico (è valido il principio di unicità) equilibrato e congruente è quello per cui l'energia di deformazione risulta minima. In tal senso il teorema di Menabrea si presenta come duale del principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale.

La validità del teorema di Menabrea è limitata dalle stesse ipotesi che condizionano il primo teorema di Castigliano.

7. Il teorema di Menabrea generalizzato (teorema di Colonnetti).

Si consideri una struttura soggetta a forze F e distorsioni ε^* ; l'energia fittizia di deformazione $L + L^*$ sia espressa come funzione delle F , delle X e delle ε^* .

Incrementando le X delle quantità dX_i , la $L + L^*$ si incrementa della quantità del primo ordine

$$d_1 (L + L^*) = \sum_n \frac{\partial (L + L^*)}{\partial X_n} dX_n .$$

La generica $\frac{\partial (L + L^*)}{\partial X_i}$ rappresenta, per il teorema di Castigliano

generalizzato, lo spostamento del punto di applicazione della X_i nella struttura resa isostatica e caricata dalle F , dalle X e dalle ε^* ; questo spostamento è zero, perchè i cedimenti vincolari anelastici, di cui si tiene conto nell'espressione del lavoro perduto L^* , si assimilano a distorsioni, e dei cedimenti elastici, che compaiono nell'espressione di L , si tiene conto considerando il vincolo compreso nel complesso della struttura. Se ne trae

$$d_1 (L + L^*) = 0 .$$

Si enuncia così il *teorema di Menabrea generalizzato*, valido sotto le stesse ipotesi del teorema di Castigliano generalizzato: « L'energia fittizia di deformazione, espressa in funzione delle reazioni iperstatiche, è stazionaria in corrispondenza dei valori delle reazioni che rispettano la congruenza ». In tale situazione essa è minima; infatti la variazione $d(L + L^*)$ dell'energia fittizia di deformazione dovuta alle dX_i è fornita da

$$d(L + L^*) = \frac{1}{2} \int_V (d\sigma_x d\varepsilon_x + \dots) dV + \int_V (\sigma_x d\varepsilon_x + \dots) dV + \\ + \int_V (\varepsilon_x^* d\sigma_x + \dots) dV = d_2 L + d_1 L + d_1 L^* = d_2 L.$$

In definitiva perciò si ha

$$d_2(L + L^*) = d_2 L > 0.$$

Si può dire che tra gli infiniti stati tensionali in equilibrio sulla struttura con le forze esterne l'unico equilibrato e congruente è quello per cui l'energia di deformazione fittizia risulta minima. Sotto tale forma il teorema fu enunciato dal *Colonnetti* (1918), e in genere da lui prende nome.

Con riferimento ad una trave ad asse rettilineo e di sezione costante, vincolata con incastro e appoggio alle estremità (fig. 5-6), si consideri agente su tutta la lunghezza una variazione termica $\bar{\Delta}t$ alla Navier.

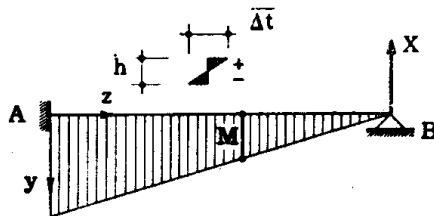


FIG. 5-6

Assumendo come incognita iperstatica la reazione in B, positiva verso il basso, si ha, tenendo conto del solo momento flettente.

$$L + L^* = \int_0^l \frac{M^2 dz}{2 EI} - \int_0^l M \mu dz,$$

essendo

$$M = -X(l - z).$$

Il teorema di Menabrea generalizzato permette di scrivere:

$$\frac{\partial (L + L^*)}{\partial X} = \int_0^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial X} dz - \int_0^l \mu \frac{\partial M}{\partial X} dz = 0$$

$$\frac{X}{EI} \int_0^l (l - z)^2 dz - \frac{\alpha \bar{\Delta t}}{h} \int_0^l (l - z) dz = 0$$

$$X = \frac{3}{2} \frac{\alpha \bar{\Delta t} EI}{hl}.$$

Se invece la stessa trave della fig. 5-6 è sollecitata dal cedimento di

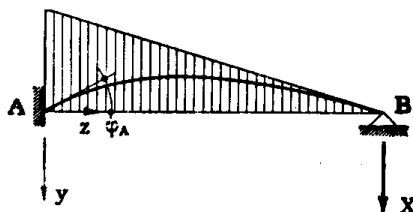


FIG. 5-7

rotazione relativa φ_A in A (fig. 5-7) è

$$D_{\varphi_A} = -\varphi_A$$

$$L + L^* = \int_0^l \frac{M^2 dz}{2 EI} + M_A \varphi_A$$

essendo

$$M = -X(l - z)$$

$$M_A = -Xl.$$

Risulta perciò

$$\frac{\partial (L + L^*)}{\partial X} = \int_0^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial X} dz + \varphi_A \frac{\partial M_A}{\partial X} = 0$$

da cui

$$\frac{X}{EI} \int_0^l (l - z)^2 dz - \varphi_A l = 0$$

$$X = 3 \varphi_A \frac{EI}{l^2}.$$

Se invece l'appoggio B cede di η_B , è

$$L + L^* = \int_0^l \frac{M^2 dz}{2 EI} - X \eta_B$$

$$\int_0^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial X} dz - \eta_B = 0$$

$$\frac{X}{EI} \int_0^l (\ell - z)^2 dz = \eta_B$$

$$X = 3 \eta_B \frac{EI}{\ell^3} .$$

Dal teorema di Menabrea si trae che, sotto determinate forze, una struttura più vincolata possiede un'energia di deformazione minore (al più uguale) della stessa struttura meno vincolata.

Infatti la funzione $L(F_i, X_j)$ ha un minimo per i valori reali delle X_j ; ponendo una delle X_j uguale a zero, e cioè eliminando il vincolo, e le altre X_j pari ai valori reali sulla struttura meno vincolata, il valore di L aumenta (al più resta inalterato).