

CAPITOLO IV

I PRINCIPII DI RECIPROCA' E LE LINEE D'INFLUENZA

1. Il principio di Betti generalizzato: dimostrazione relativa ai sistemi mono-dimensionali piani.

Si consideri una trave a vincoli lisci. Per semplicità di dimostrazione ci si limita a trattare il caso del sistema piano, ma i risultati sono validi in generale.

Il materiale di cui è costituita la trave sia elastico secondo *Hooke* ed isotropo, così che possano accettarsi le conclusioni del *De Saint-Venant*; valga inoltre l'ipotesi di piccolezza degli spostamenti, e gli eventuali cedimenti elastici dei vincoli siano proporzionali alle corrispondenti componenti delle reazioni.

La trave (fig. 4-1) sia sollecitata dalle forze F_1 , dai cedimenti vincolari anelastici Δ_1 , e dalle distorsioni di *Volterra* $\lambda_1 \mu_1 \vartheta_1$ (sistema 1), op-

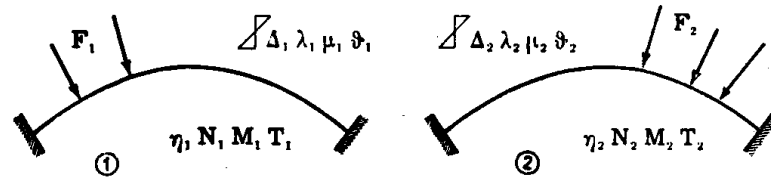


FIG. 4-1

pure dalle forze F_2 , dai cedimenti vincolari anelastici Δ_2 , e dalle distorsioni di *Volterra* $\lambda_2 \mu_2 \vartheta_2$ (sistema 2). Siano $\eta_1 N_1 M_1 T_1$ gli spostamenti e le caratteristiche della sollecitazione nel sistema 1 (provocati dalle F_1 , dai Δ_1 e dalle $\lambda_1 \mu_1 \vartheta_1$) ed $\eta_2 N_2 M_2 T_2$ gli spostamenti e le caratteristiche nel sistema 2.

Il principio dei lavori virtuali permette di scrivere, poichè gli spostamenti η_1 ed η_2 sono piccoli,

$$\begin{aligned} \Sigma_i F_{1i} \eta_{2i} + \Sigma_j R_{1j} \Delta_{2j} - \Sigma_j c_j R_{1j} R_{2j} = \\ = \int_s \frac{N_1 N_2}{EA} ds + \int_s \frac{M_1 M_2}{EI} ds + \int_s \chi \frac{T_1 T_2}{GA} ds - \end{aligned}$$

$$- \int_s N_1 \lambda_2 ds - \int_s M_1 \mu_2 ds - \int_s T_1 \vartheta_2 ds \quad (a)$$

e ancora

$$\begin{aligned} & \Sigma_h F_{2h} \eta_{1h} + \Sigma_j R_{2j} \Delta_{1j} - \Sigma_j c_j R_{2j} R_{1j} = \\ & = \int_s \frac{N_2 N_1}{EA} ds + \int_s \frac{M_2 M_1}{EI} ds + \int_s \chi \frac{T_2 T_1}{GA} ds - \\ & - \int_s N_2 \lambda_1 ds - \int_s M_2 \mu_1 ds - \int_s T_2 \vartheta_1 ds \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} & \Sigma_i F_{1i} \eta_{2i} + \Sigma_j R_{1j} \Delta_{2j} + \int_s N_1 \lambda_2 ds + \int_s M_1 \mu_2 ds + \int_s T_1 \vartheta_2 ds = \\ & = \Sigma_h F_{2h} \eta_{1h} + \Sigma_j R_{2j} \Delta_{1j} + \int_s N_2 \lambda_1 ds + \int_s M_2 \mu_1 ds + \int_s T_2 \vartheta_1 ds. \end{aligned} \quad (1)$$

Il primo membro della (4-1) si definisce *lavoro mutuo* L_{12e} del sistema 1 di forze, cedimenti e distorsioni per effetto del sistema 2 di forze, cedimenti e distorsioni; esso è la somma del lavoro che le forze del sistema 1 compiono per effetto degli spostamenti del sistema 2, del lavoro che le reazioni del sistema 1 compiono per effetto dei cedimenti vincolari anelastici del sistema 2, e del lavoro che le caratteristiche della sollecitazione del sistema 1 compiono per effetto delle distorsioni del sistema 2. Esso, per la (a), coincide con l'energia elastica mutua di deformazione. Analogamente il secondo membro della (4-1) si definisce come *lavoro mutuo* L_{21e} del sistema 2 di forze, cedimenti e distorsioni per effetto del sistema 1 di forze, cedimenti e distorsioni.

Il *principio di Betti generalizzato*, espresso dalla (4-1), si può enunciare: «I lavori mutui L_{12e} ed L_{21e} relativi a due sistemi di forze, cedimenti e distorsioni agenti sulla stessa struttura sono uguali». E' necessario chiarire che, definendo il lavoro mutuo L_{12e} , non si è detto che esso è il lavoro delle forze, dei cedimenti e delle distorsioni del sistema 1, ma il lavoro del sistema 1 di forze, cedimenti e distorsioni; infatti, nel lavoro L_{12} non compaiono esplicitamente nè i cedimenti Δ_1 nè le distorsioni $\lambda_1 \mu_1 \vartheta_1$ del sistema 1; di essi però si tiene conto implicitamente attraverso le R_{1j} e le caratteristiche $N_1 M_1 T_1$, che sono provocate dalle F_1 e dai $\Delta_1 \lambda_1 \mu_1 \vartheta_1$.

Si noti che in L_{12e} tutti i termini *forza* sono del sistema 1, tutti i termini *spostamento* del sistema 2.

Si noti pure che nella dimostrazione fatta i lavori L_{12e} ed L_{21e} sono fittizi; essi assumono il significato di lavori effettivamente svolti, e quindi di energia mutua di deformazione, se il sistema 2 agisce sulla struttura già sottoposta al sistema 1 (lavoro L_{12e} delle forze, reazioni e caratteristiche del sistema 1, già presenti in tutto il loro valore durante l'azione — statica — del sistema 2), o se il sistema 1 agisce sulla struttura già sottoposta al sistema 2 (lavoro L_{21e}).

2. Il principio di Betti generalizzato: dimostrazione generale.

La dimostrazione su riportata è relativa alle travi costituite di materiale isotropo, ed alle distorsioni di Volterra; il principio può essere però dimostrato in generale. Si prenda in esame un corpo ad elasticità lineare, a vincoli lisci e perfetti (i cedimenti elastici o anelastici dei vincoli si assimilano a deformazioni elastiche o a distorsioni della struttura) soggetto ad un sistema di forze applicate F , e ad un sistema di distorsioni caratterizzato dalle sei componenti della deformazione $\epsilon_x^* \dots \gamma_{yz}^* \dots$; si faccia inoltre l'ipotesi che gli spostamenti siano piccoli. Alle $\epsilon_{Fx} \dots \gamma_{Fyz} \dots$ dovute alle forze si aggiungono, come già noto, le $\bar{\epsilon}_x \dots \bar{\gamma}_{yz} \dots$ elastiche atte a riportare le $\epsilon_x^* \dots \gamma_{yz}^* \dots$ al rispetto della congruenza e dei vincoli. Si hanno perciò in complesso le $\epsilon = \epsilon_F + \bar{\epsilon}$, di carattere elastico, e le ϵ^* della distorsione, tali che le loro somme $\epsilon + \epsilon^*$ soddisfano le condizioni di congruenza e quelle ai limiti; il sistema delle $\epsilon + \epsilon^*$ e degli spostamenti che ne derivano è perciò congruente. Si hanno poi le tensioni σ , legate alle ϵ elastiche dalle relazioni di Hooke.

L'energia di deformazione è fornita da

$$L = \int_V \varphi dV = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \epsilon_x + \dots + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \dots) dV.$$

Poichè sono valide le premesse del principio di Kirchhoff, date le F e le ϵ^* la soluzione del problema è unica, e perciò la L è univocamente determinata in funzione delle F e delle ϵ^* . Si supponga agente sulla struttura il sistema 1 di forze F_1 e distorsioni ϵ_1^* , cui si associano le ϵ_1 elastiche, le tensioni σ_1 e gli spostamenti $u_1 v_1 w_1$; per essa è

$$L_1 = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{1x} \epsilon_{1x} + \dots + \tau_{1yz} \gamma_{1yz} + \dots) dV.$$

Se sulla struttura agisce invece il sistema 2 di forze F_2 e distorsioni

ε_2^* , cui si associano le ε_2 e le σ_2 , l'energia di deformazione L_2 è

$$L_2 = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{2x} \varepsilon_{2x} + \dots + \tau_{2yz} \gamma_{2yz} + \dots) dV .$$

Se il sistema 2 agisce sulla struttura già soggetta al sistema 1, alla fine l'energia di deformazione è

$$\begin{aligned} L_{1+2} &= L_1 + L_2 + L_{12} = \\ &= L_1 + L_2 + \int_V (\sigma_{1x} \varepsilon_{2x} + \dots + \tau_{1yz} \gamma_{2yz} + \dots) dV ; \end{aligned} \quad (b)$$

infatti, il lavoro L_2 compiuto dalle $\sigma_2 dA$ per effetto delle ε_2 ha un unico valore, comunque sia sollecitata la struttura prima dell'azione del sistema 2, e ciò in virtù del principio di sovrapposizione; inoltre in L_{12} è da considerare (b) il solo lavoro delle $\sigma_1 dA$ preesistenti per effetto delle deformazioni elastiche ε_2 , poichè il lavoro compiuto dalle $\sigma_1 dA$ per le distorsioni ε_2^* non è di carattere elastico.

Se agisce prima il sistema 2, e poi quello 1, è

$$\begin{aligned} L_{2+1} &= L_2 + L_1 + L_{21} = \\ &= L_2 + L_1 + \int_V (\sigma_{2x} \varepsilon_{1x} + \dots + \tau_{2yz} \gamma_{1yz} + \dots) dV . \end{aligned} \quad (c)$$

Il sistema è conservativo, e perciò è $L_{1+2} = L_{2+1}$; dalle (b) e (c) risulta quindi

$$\begin{aligned} &\int_V (\sigma_{1x} \varepsilon_{2x} + \dots + \tau_{1yz} \gamma_{2yz} + \dots) dV = \\ &= \int_V (\sigma_{2x} \varepsilon_{1x} + \dots + \tau_{2yz} \gamma_{1yz} + \dots) dV . \end{aligned} \quad (2)$$

La (4-2) esprime l'uguaglianza delle energie mutue di deformazione.

Il principio dei lavori virtuali, applicato al sistema di forze F_1 e tensioni σ_1 in equilibrio sulla struttura, ed al sistema di spostamenti $u_2 v_2 w_2$ e deformazioni $\varepsilon_2 + \varepsilon_2^*$ congruente sulla stessa struttura, fornisce

$$\Sigma_1 F_{1i} \eta_{2i} = \int_V [\sigma_{1x} (\varepsilon_{2x} + \varepsilon_{2x}^*) + \dots] dV . \quad (d)$$

Lo stesso principio, applicato al sistema di forze F_2 e tensioni σ_2 , e al sistema di spostamenti u_1, v_1, w_1 e deformazioni $\varepsilon_1 + \varepsilon_1^*$, fornisce

$$\Sigma_h F_{2h} \eta_{1h} = \int_V [\sigma_{2x} (\varepsilon_{1x} + \varepsilon_{1x}^*) + \dots] dV. \quad (e)$$

Dalle (4-2), (d) ed (e) si deduce

$$\begin{aligned} \Sigma_i F_{1i} \eta_{2i} - \int_V (\sigma_{1x} \varepsilon_{2x}^* + \dots) dV = \\ = \Sigma_h F_{2h} \eta_{1h} - \int_V (\sigma_{2x} \varepsilon_{1x}^* + \dots) dV. \end{aligned} \quad (3)$$

Si definisce *lavoro mutuo* L_{12e} del sistema 1 di forze F_{1i} e distorsioni $\varepsilon_{1i}^* \gamma_{1jk}^*$ per effetto del sistema 2 di forze F_{2h} e distorsioni $\varepsilon_{2i}^* \gamma_{2jk}^*$ l'espressione

$$L_{12e} = \Sigma_i F_{1i} \eta_{2i} - \int_V (\sigma_{1x} \varepsilon_{2x}^* + \dots) dV; \quad (4)$$

il lavoro mutuo così definito non è altro che l'energia elastica mutua L_{12} dei sistemi 1 e 2, come appare dalla (d):

$$\begin{aligned} L_{12e} = \Sigma_i F_{1i} \eta_{2i} - \int_V (\sigma_{1x} \varepsilon_{2x}^* + \dots) dV = \\ = \int_V (\sigma_{1x} \varepsilon_{2x} + \dots) dV = L_{12}. \end{aligned} \quad (5)$$

La (4-3) si scrive in sintesi

$$L_{12e} = L_{21e}. \quad (6)$$

La (4-6) è la traduzione analitica del *principio di Betti generalizzato*: « i lavori mutui L_{12e} ed L_{21e} relativi a due sistemi di forze e distorsioni agenti sulla stessa struttura sono uguali ».

Si osserva che l'espressione (4-4) del lavoro mutuo è in perfetto accordo con la definizione già di esso fornita nel caso delle travi.

Si avverte esplicitamente che le ipotesi sotto cui è valida la dimostrazione sono quelle stesse che condizionano il principio di sovrapposizione degli effetti, e cioè vincoli lisci, elasticità lineare e piccolezza degli spostamenti. Inoltre, è importante tener presente che, come si evince

dalle (4-2), (4-3) e (4-5), l'uguaglianza dei lavori mutui, definiti dalla (4-4), si riduce all'uguaglianza delle energie mutue di deformazione, e in tal senso il principio di Betti generalizzato ha un preciso ed elementare significato fisico.

3. Il principio di Betti classico, o primo principio di reciprocità. Il principio di Maxwell.

In assenza di distorsioni e di cedimenti anelastici, la (4-1) si scrive

$$\sum_i F_{1i} \eta_{2i} = \sum_h F_{2h} \eta_{1h} . \quad (7)$$

La (1-7) è l'espressione del *primo principio di reciprocità*, enunciato dal Betti (1872), e già riportato nel Vol. I. Esplicitamente si avverte che, se la struttura presenta dei vincoli elasticamente cedevoli, nella (4-7) non compaiono le reazioni vincolari; l'effetto dell'elasticità dei vincoli si risente attraverso i valori degli spostamenti η_{2i} ed η_{1h} .

Se le forze F_{1i} si riducono (fig. 4-2) ad una sola forza $F_1 = 1$, e le forze F_{2h} ad una sola forza $F_2 = 1$, la (4-7) si scrive

$$\eta_{21} = \eta_{12} . \quad (8)$$

La (4-8) è l'espressione del *teorema di Maxwell* (1864) che si enuncia: « La componente η_{12} secondo una retta b del vettore spostamento di

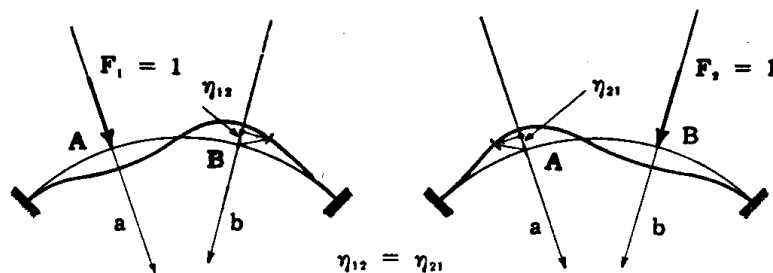


FIG. 4-2

un punto B di una generica struttura elastica, provocato da una forza F_1 unitaria agente in corrispondenza di un punto A nella direzione e nel verso di una retta a , è uguale alla componente η_{21} secondo la retta a del vettore spostamento del punto A, provocato da una forza F_2 unitaria agente in corrispondenza del punto B nella direzione e nel verso della retta b ».

Le η_{12} e η_{21} sono positive se dirette nel verso positivo delle rette a e b ; nella fig. 4-2 esse risultano negative.

Le quantità η_{12} ed η_{21} della (4-8) si chiamano, come già detto nel capitolo dei lavori virtuali, *coefficienti di influenza*, ed hanno le dimensioni $[l F^{-1}]$.

Con riferimento ad una trave, può analogamente dirsi (fig. 4-3): « La componente φ_{12} secondo una retta b del vettore rappresentante la rotazione di una sezione B, provocata da una coppia $\mathcal{M}_1$ unitaria agente

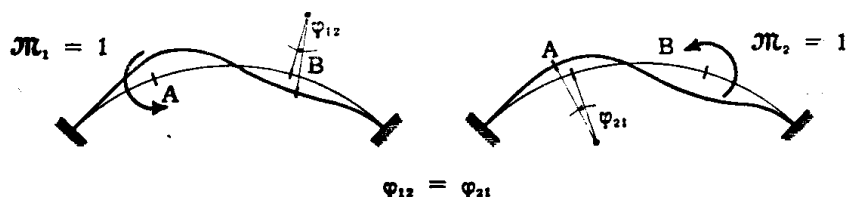


FIG. 4-3

in corrispondenza di una sezione A e il cui asse momento ha la direzione e il verso di una retta a , è uguale alla componente φ_{21} secondo la retta a del vettore rappresentante la rotazione della sezione A, provocata da una coppia $\mathcal{M}_2$ unitaria agente in corrispondenza della sezione B e il cui asse momento ha la direzione e il verso della retta b ».

E cioè si ha

$$\varphi_{21} = \varphi_{12} \quad (9)$$

Anche le φ della (4-9) sono dei coefficienti di influenza; esse hanno le dimensioni $[l^{-1} F^{-1}]$.

Se il sistema F_{1i} si riduce (fig. 4-4) ad una sola forza $F_1 = 1$, e il sistema F_{2h} ad una sola coppia $\mathcal{M}_2 = 1$, si ha: « La componente φ_{12} se-

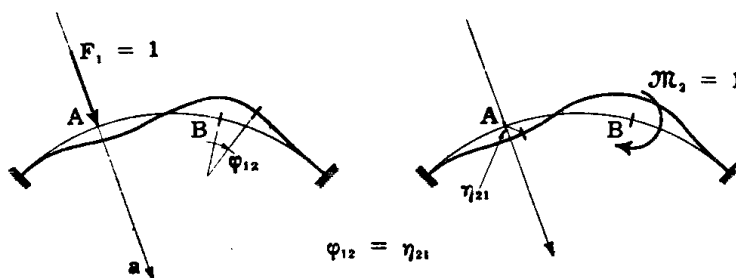


FIG. 4-4

condo una retta b del vettore rappresentante la rotazione di una sezione B, provocata da una forza F_1 unitaria agente in corrispondenza di un punto A nella direzione e nel verso di una retta a , è uguale alla componente η_{21} secondo la retta a dello spostamento del punto A, provocato da una cop-

pia $\mathfrak{M}_2$ unitaria agente in B e il cui vettore abbia la direzione e il verso della retta b ».

Analiticamente ciò si esprime con la relazione

$$\eta_{21} = \varphi_{12} . \quad (10)$$

La φ_{12} e la η_{21} della (4-10) hanno le dimensioni $[F^{-1}]$.

Chiamando con il termine generico *forza* una forza o una coppia, e con il termine *spostamento corrispondente* la componente dello spostamento del punto di applicazione della forza nella direzione e nel verso della forza, o la componente del vettore rappresentativo della rotazione della sezione ove è applicata la coppia nella direzione e nel verso del vettore rappresentativo della coppia, il teorema di Maxwell può enunciarsi: « Date due forze unitarie F_1 ed F_2 agenti sulla stessa struttura, lo spostamento s_{12} corrispondente alla forza F_2 e provocato dalla forza F_1 è uguale allo spostamento s_{21} corrispondente alla forza F_1 e provocato dalla forza F_2 ».

Si osservi che in s_{1h} il primo indice fornisce l'ubicazione della forza provocante, il secondo l'ubicazione di s .

4. La scrittura delle equazioni di congruenza attraverso il principio di Betti.

Attraverso il principio di Betti si può pervenire alle equazioni di congruenza, e quindi alla determinazione delle incognite iperstatiche.

Si prenda per esempio in esame la trave continua a sezione comunque variabile della fig. 4-5 a, soggetta ad un qualsiasi carico $q(z)$; i vincoli non presentino cedimenti. Si rende isostatica la trave sopprimendo i vincoli intermedi B C D (fig. 4-5 b) e facendo agire le corrispondenti reazioni $X_B X_C X_D$; le X siano positive se, agenti sulla trave, sono dirette verso il basso. La stessa struttura si sottopone alla forza $X_B=1$ (fig. 4-5 c), e se ne traccia la deformata $v_B(z)$. Il principio di Betti applicato alle due condizioni di carico delle figg. 4-5 b e 4-5 c, fornisce

$$\int q v_B dz + X_B v_{BB} + X_C v_{BC} + X_D v_{BD} = 0 . \quad (11)$$

La (4-11) traduce analiticamente la condizione di congruenza in B; infatti è facile riconoscere, applicando lo stesso teorema di Betti, che

$$\int q v_B dz = 1 \cdot v_{oB}$$

è lo spostamento della sezione B provocato sulla struttura isostatica dal carico q , mentre v_{BB} , $v_{BC} = v_{CB}$ e $v_{BD} = v_{DB}$ sono gli spostamenti della stessa sezione provocati rispettivamente dalle forze $X_B = 1$, $X_C = 1$, ed $X_D = 1$, agenti una per volta sulla struttura isostatica.

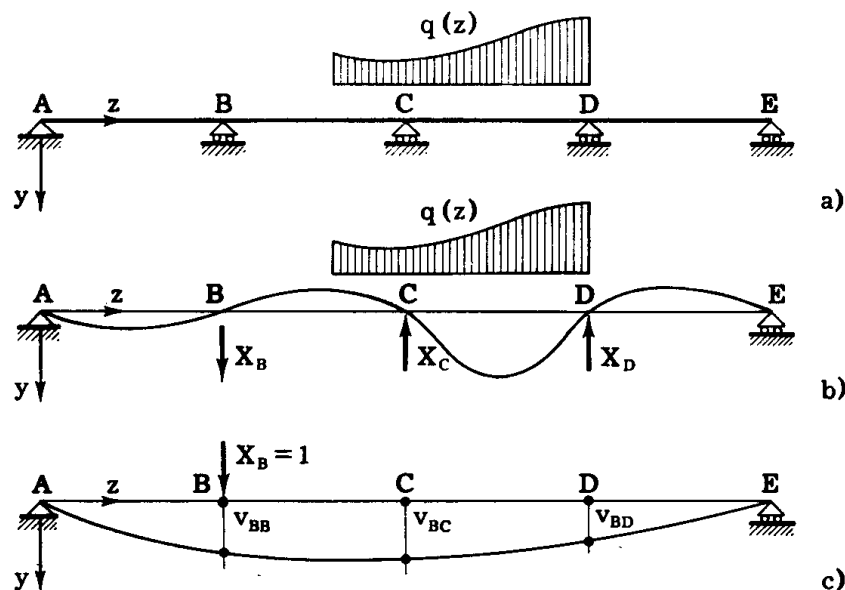


FIG. 4-5

Applicando il principio di Betti al sistema di forze della fig. 4-5 b ed a quello costituito dalla $X_C = 1$, si ottiene un'eguaglianza analoga alla (4-11), esprime la congruenza in C; analogamente, assumendo come sistemi di forze quello della fig. 4-5 b, e l'altro costituito dalla $X_D = 1$, si ottiene l'equazione di congruenza in D. Si hanno così delle equazioni lineari algebriche non omogenee nelle incognite reazioni degli appoggi intermedi, in numero pari a quello delle incognite stesse. Occorre tracciare perciò tante deformate quanti sono gli appoggi intermedi; un'osservazione dovuta al *Müller-Breslau* consente di ridurre il procedimento al disegno di due sole deformate. Si consideri infatti la trave della fig. 4-5 incastrata in un estremo A, e soggetta ad una forza verticale F' in corrispondenza dell'altro estremo E (fig. 4-6 a); sia v' la deformata.

Si consideri poi la stessa trave incastrata in E, e soggetta ad una forza verticale F'' in A (fig. 4-6 b); sia v'' la deformata.

Sia v_B la deformata della trave appoggiata in A ed E, e caricata da una forza verticale unitaria nel punto generico B; sia η_B la stessa deformata, riferita alla tangente alla deformata in B (fig. 4-6 c).

La η_B a destra di B non è altro che la deformata di una mensola BE, incastrata in B e caricata da una forza z'_B/l in E; d'altro canto le ordi-

nate v'_B della v' , riferite alla tangente alla v' in B, rappresentano la deformata di una mensola BE incastrata in B e caricata da una forza F' in E; si deduce che $\eta_B = \frac{v'_B}{F'} \frac{z'_B}{l}$. Analogamente a sinistra di B è $\eta_B = \frac{v''_B}{F''} \frac{z''_B}{l}$. Tracciata la η_B , basta riferirla alla retta congiungente i suoi estremi per ottenere la v_B .

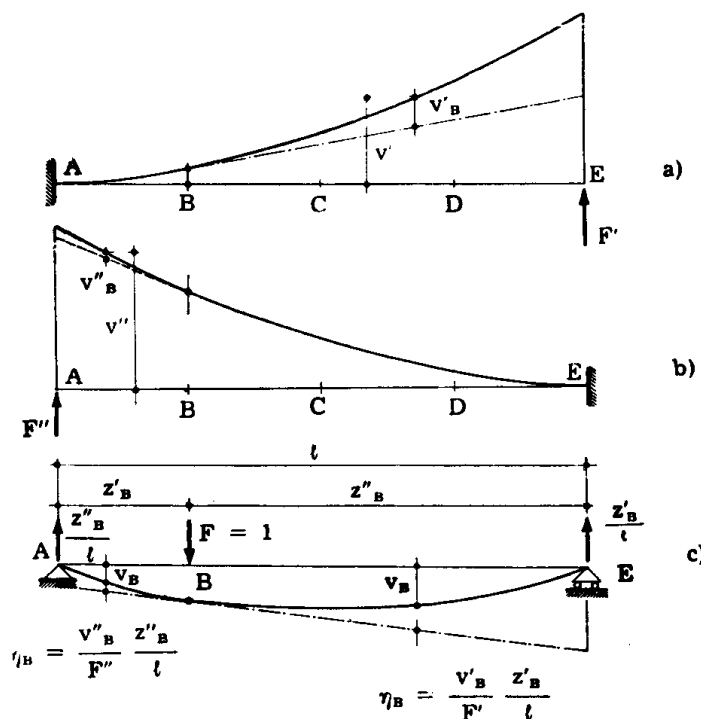


FIG. 4-6

Se i vincoli sono elasticamente cedevoli, la (4-11) si scrive

$$\int q v_B dz + X_B v_{BB} + X_C v_{BC} + X_D v_{BD} = -1 \cdot c_B X_B. \quad (12)$$

La v_B è calcolata in questo caso tenendo conto delle cedibilità c_A e c_E dei due vincoli estremi A ed E; il procedimento è quello sopra esposto, varia solo la retta di riferimento, poichè basta aggiungere alle ordinate v_B calcolate per la trave ad appoggi fissi (fig. 4-6 c) le ordinate della retta che ha la quota $c_A \frac{z''_B}{l}$ in A, e $c_E \frac{z'_B}{l}$ in E.

Se i vincoli presentano anche cedimenti anelastici, il procedimento è ancora applicabile, pur senza far ricorso al principio di Betti generaliz-

zato. Infatti, si può sempre supporre che i cedimenti impegnino soltanto gli appoggi intermedi: se i cinque appoggi A B C D E della trave in esame presentano tutti dei cedimenti $\Delta_A \Delta_B \Delta_C \Delta_D \Delta_E$, considerati positivi se diretti verso il basso, si possono sottrarre ad essi quelli forniti dalla relazione

$$\Delta_z = \Delta_A + \frac{\Delta_E - \Delta_A}{l} z$$

senza turbare l'assetto statico della trave, poichè i Δ_z non modificano la posizione relativa dei vincoli. Poichè quindi i due appoggi estremi A ed E possono considerarsi fissi, la struttura isostatica, con riferimento alla quale si scrivono le relazioni di Betti, non presenta cedimenti anelastici,

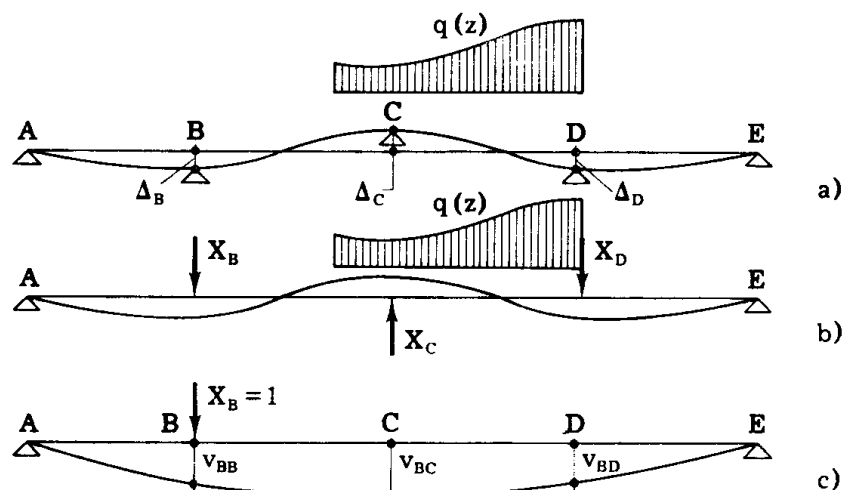


FIG. 4-7

e perciò per essa il principio è valido. Si ha pertanto (fig. 4-7) con riferimento alle forze della fig. 4-7 b e 4-7 c, l'equazione nella forma più generale

$$\int q v_B dz + X_B v_{BB} + X_C v_{BC} + X_D v_{BD} = 1 (\Delta_B - c_B X_B) . \quad (13)$$

5. Le linee d'influenza degli spostamenti per forze viaggianti.

Con riferimento alla sezione S di una trave si definisce « *linea d'influenza* e_v^S di un ente E provocato in S da un ente V viaggiante sulla trave » il diagramma la cui ordinata all'ascissa z generica fornisce il valore di E in S quando V unitaria agisce all'ascissa z.

L'ente di cui si vuole la linea d'influenza sia la componente η_S secondo una retta orientata a dello spostamento del baricentro della sezione S di una trave (fig. 4-8 a); l'ente viaggiante sia una forza unitaria di direzione b . Si conviene chiamare tale linea con il simbolo η_{Fb}^{Sa} , dove la lettera a indica la retta secondo cui si vuole la componente dello spostamento, l'indice S la sezione in studio, l'indice b la direzione della forza viaggiante. Per il teorema di Maxwell la componente η_{1S} secondo la retta orientata a dello spostamento del baricentro di S per effetto di una forza unitaria positiva diretta secondo la retta orientata b ed agente in corrispondenza del baricentro della generica sezione 1 è uguale alla componente η_{S1} secondo b dello spostamento del baricentro della sezione 1 per effetto di una forza unitaria positiva agente in corrispondenza del baricentro di S

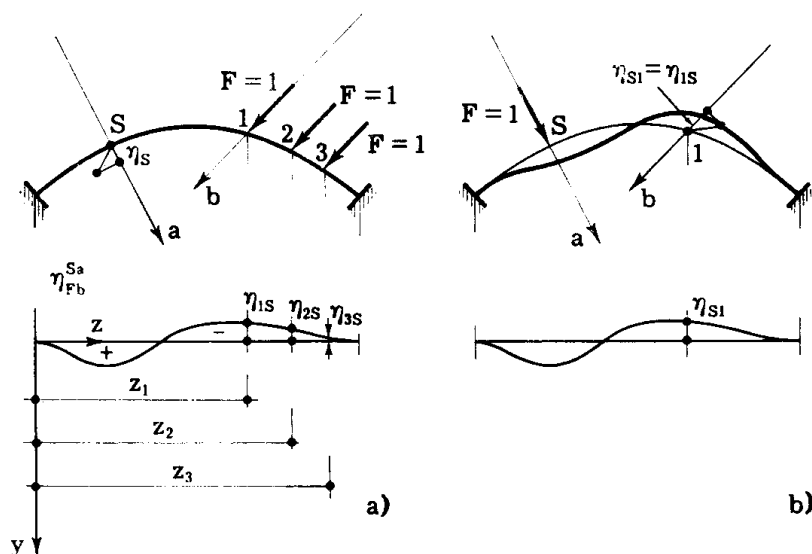


FIG. 4-8

e diretta secondo a ; si trae che la linea d'influenza η_{Fb}^{Sa} è il diagramma delle componenti secondo la retta orientata b degli spostamenti dei punti dell'asse della trave provocati da una forza unitaria positiva agente in corrispondenza del baricentro di S e diretta secondo la retta orientata a . Ricordando la definizione generalizzata dei termini *forza* e *spostamento* (§ 4-3) si può enunciare: « La linea di influenza di uno spostamento η in corrispondenza di una sezione S per effetto di una forza F unitaria positiva viaggiante lungo l'asse della trave è il diagramma degli spostamenti corrispondenti ad F provocati dalla forza unitaria positiva corrispondente ad η ed agente in S ».

Per esempio, la linea d'influenza φ_{Fb}^{Sa} della componente secondo la retta orientata a del vettore rotazione della sezione S , per effetto di una forza unitaria viaggiante lungo l'asse della trave e diretta secondo la retta

orientata b , è il diagramma delle componenti secondo b degli spostamenti dei punti dell'asse provocati da una coppia unitaria agente in S e il cui vettore rappresentativo sia diretto secondo la retta a . Così pure, la linea d'influenza η_{mb}^{Sa} della componente secondo a dello spostamento del baricen-

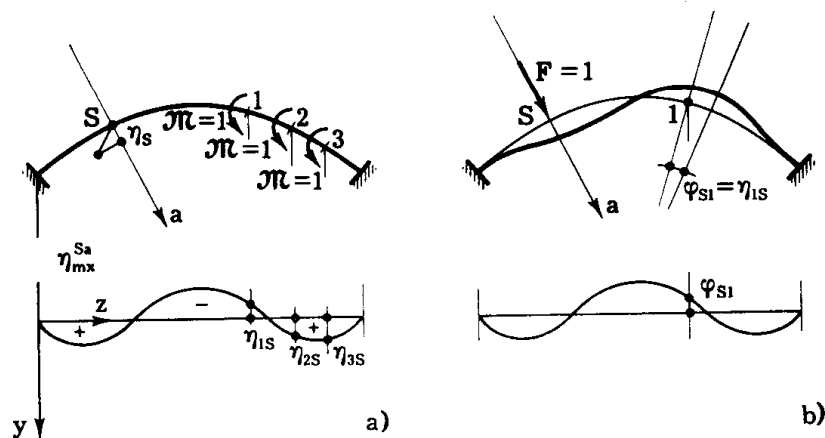


FIG. 4-9

tro di S provocato da una coppia viaggiante unitaria il cui vettore sia diretto secondo b , è il diagramma delle componenti secondo b dei vettori rappresentativi delle rotazioni provocate da una forza unitaria agente in corrispondenza del baricentro di S e diretta secondo a . Ed infine, la linea

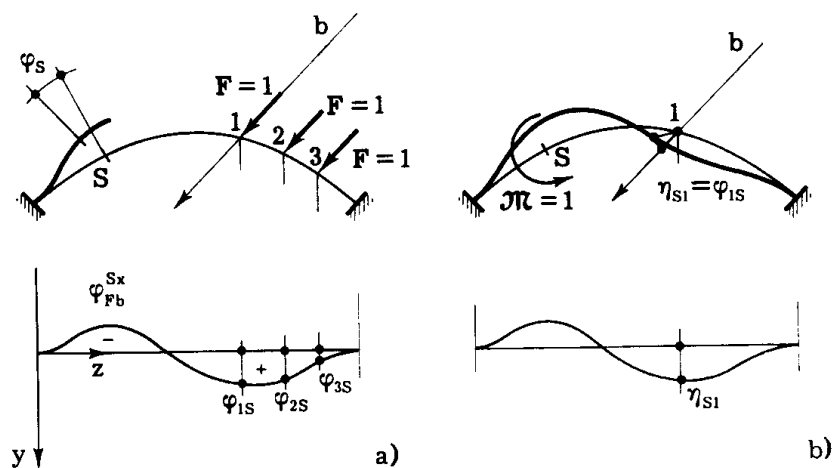


FIG. 4-10

d'influenza ϕ_{mb}^{Sa} della componente secondo a del vettore rappresentativo della rotazione di S provocata da una coppia viaggiante unitaria e il cui vettore sia diretto secondo b , coincide con il diagramma delle componenti secondo b dei vettori rappresentativi delle rotazioni provocate da una coppia unitaria agente in S e il cui vettore sia diretto secondo a .

Nel caso dei sistemi monodimensionali piani le coppie e le rotazioni sono rappresentate da vettori in ogni caso ortogonali al piano yz dell'asse; perciò la linea d'influenza della componente secondo a dello spostamento del baricentro di S per effetto di una coppia unitaria positiva (antioraria) viaggiante può indicarsi con $\eta_{mx}^{S_a}$, o con il simbolo semplificato $\eta_m^{S_a}$ (figura 4-9), mentre la linea d'influenza della rotazione φ_S di S per effetto di una forza viaggiante lungo l'asse della trave e diretta secondo b può indicarsi con il simbolo $\varphi_{Fb}^{S_x}$, o con quello φ_{Fb}^S (fig. 4-10), e la linea d'in-

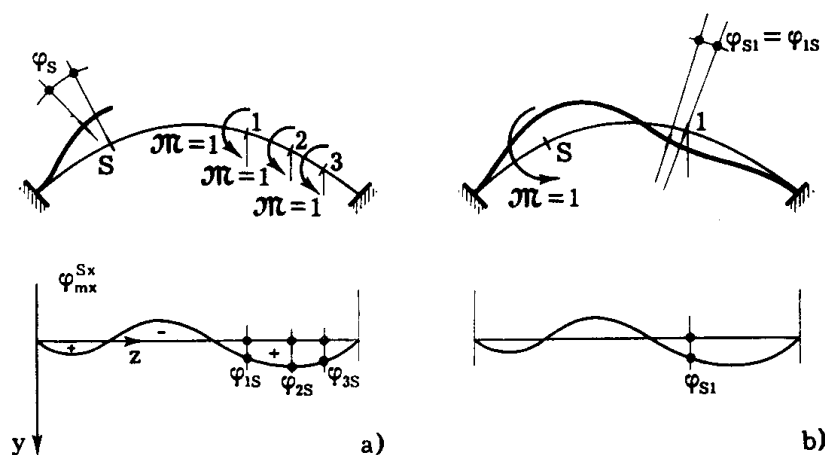


FIG. 4-11

fluenza della rotazione di S per effetto di una coppia viaggiante con il simbolo $\varphi_{mx}^{S_x}$, o con quello φ_m^S (fig. 4-11).

6. Il secondo principio di reciprocità, o principio di Colonnetti.

Dalla (4-1) si trae, per $\mu_1 = \lambda_1 = \vartheta_1 = \Delta_1 = 0$, ed $F_2 = 0$,

$$\begin{aligned} \Sigma_i F_{1i} \eta_{2i} + \Sigma_j R_{1j} \Delta_{2j} + \\ + \int_s N_1 \lambda_2 ds + \int_s M_1 \mu_2 ds + \int_s T_1 \vartheta_2 ds = 0 ; \end{aligned} \quad (14)$$

la (4-14) è l'espressione del *secondo principio di reciprocità*, o principio di *Colonnetti* (1912), che così si enuncia: « Il lavoro mutuo di un sistema di forze per effetto di un sistema di distorsioni agenti sulla stessa struttura è nullo ». Poichè il lavoro mutuo non è che l'energia mutua di deformazione (§§ 4-1 e 4-2), la (4-14) è la conferma di quanto già dimostrato nel Vol. I, circa la sovrapponibilità della energia di deformazione derivan-

te da forze applicate e dell'energia vincolata, senza il sorgere di termini di scambio.

Si consideri per esempio l'arco a due cerniere della fig. 4-12, sog-

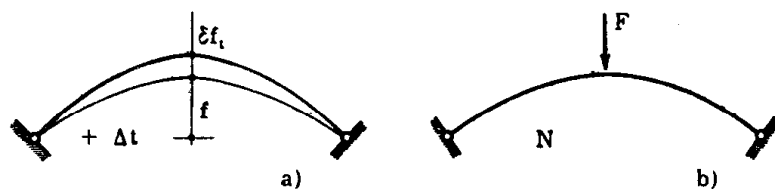


FIG. 4-12

getto alla variazione termica uniforme Δt (fig. 4-12 a) e ad una forza F verticale in chiave diretta verso il basso (fig. 4-12 b); il secondo principio di reciprocità permette di scrivere

$$L_{12} = 0$$

$$L_{21} = F \delta f_t + \int_s N \lambda ds = F \delta f_t - \int_s N \alpha \Delta t ds = L_{12} = 0$$

da cui

$$F \delta f_t = \int_s N \alpha \Delta t ds \quad (f)$$

ed essendo N negativo (compressione) il δf_t è diretto, per $\Delta t > 0$, in verso contrario ad F , cioè verso l'alto.

7. Le linee d'influenza delle caratteristiche della sollecitazione per forze viaggianti.

Si consideri una trave, soggetta in corrispondenza del baricentro della sezione 1 ad una forza $F_1 = 1$ diretta secondo la retta orientata b (fig. 4-13 a), e in corrispondenza della sezione S ad una distorsione concentrata di rotazione relativa $D_{\varphi S}$ intorno all'asse x normale alla figura, baricentrico della sezione S (fig. 4-13 b). La (4-14) fornisce, chiamando M_{S1} il momento M_x in S per effetto della forza 1 agente in 1, ed η_{S1} lo spostamento della sezione 1 secondo la retta b per effetto della $D_{\varphi S}$ agente in S ,

$$\eta_{S1} + M_{1S} \cdot D_{\varphi S} = 0$$

da cui

$$M_{1S} = - \frac{\eta_{S1}}{D_{\varphi S}} ;$$

perciò il diagramma delle componenti secondo la retta orientata b degli spostamenti dei punti dell'asse provocati da una distorsione $D_{\varphi S}$ negativa agente in S , divise per il valore assoluto di $D_{\varphi S}$, coincide con la linea d'influenza m_{Fb}^{Sx} del momento M_x in S per effetto di una forza positiva unitaria diretta secondo b e viaggiante sull'asse della trave.

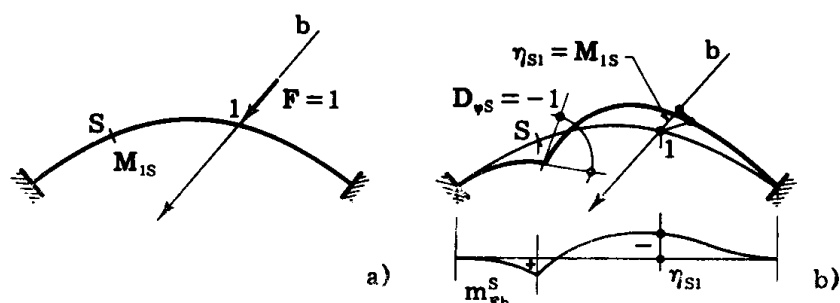


FIG. 4-13

Definendo *distorsione corrispondente ad una certa caratteristica della sollecitazione* la distorsione per cui solamente quella caratteristica compie lavoro, si può enunciare: « La linea d'influenza di una caratteristica C della sollecitazione in corrispondenza di una sezione S per effetto di una forza F unitaria positiva viaggiante lungo l'asse della trave coincide con il diagramma degli spostamenti corrispondenti ad F provocati da una distorsione negativa corrispondente a C ed agente in S , divisi per il valore assoluto della distorsione stessa ».

Si usa dire anche, più sinteticamente: « La linea d'influenza di una caratteristica C della sollecitazione in corrispondenza di una sezione S , per effetto di una forza F unitaria positiva viaggiante lungo l'asse della trave, coincide con il diagramma degli spostamenti corrispondenti ad F , provocati dalla distorsione unitaria negativa corrispondente a C ed agente in S ».

La dicitura è esatta se la distorsione è uno spostamento relativo; infatti l'unità di distorsione, che è in tal caso una lunghezza, può essere scelta così piccola, in relazione alle dimensioni della trave, che gli spostamenti da essa provocati rispettino la solita ipotesi di piccolezza. La dicitura è invece impropria, anche se da tutti adottata per i suoi pregi di sintesi, se la distorsione è una rotazione relativa, perchè l'unità di rotazione non può essere scelta a piacere, ma deve essere sempre pari ad un

radiante, mentre, perchè si sia nel campo di validità dell'ipotesi di piccoli spostamenti, il valore della distorsione deve essere trascurabile nei confronti dell'unità.

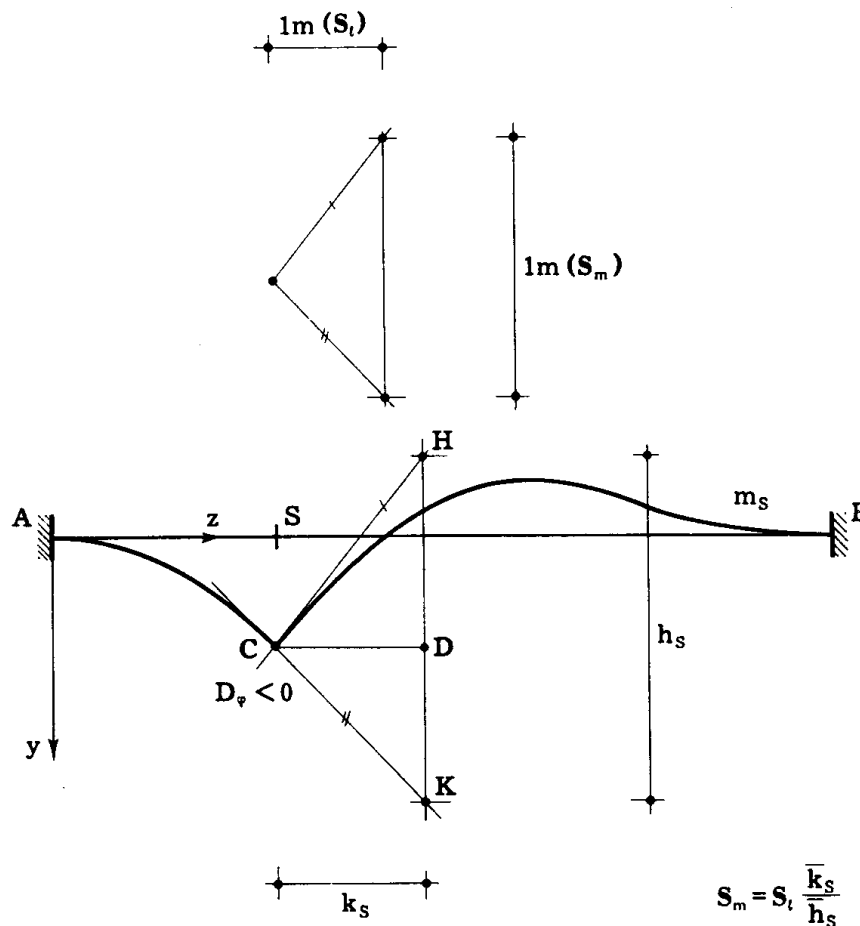


FIG. 4-14

Con riferimento (fig. 4-14) ad una trave AB ad asse rettilineo, la linea d'influenza m_s del momento in S per una forza verticale viaggiante (*) è la linea elastica $v(z)$ provocata da una $D_{\varphi S}$ negativa e piccola in S, divisa per il valore assoluto di $D_{\varphi S}$:

$$m_s = \frac{v(z)}{|D_{\varphi S}|} = \frac{\bar{v}(z)}{|D_{\varphi S}|} S_v.$$

(*) La dicitura esatta sarebbe m_{Fy} ; per forza verticale viaggiante si usa spesso il termine meno esatto m_s .

Poichè è

$$|D_{\varphi S}| = \frac{\bar{h}_S}{\bar{k}_S} \frac{S_v}{S_t}$$

(h_S è il segmento intercettato su una parallela ad y dalle due tangenti in S , k_S la distanza di S da questa parallela) (*) si ha pure

$$m_S = \bar{v}(z) \frac{\bar{k}_S}{\bar{h}_S} S_t .$$

Quindi la scala di m_S è

$$S_m = \frac{\bar{k}_S}{\bar{h}_S} S_t . \quad (15)$$

Se è

$$\frac{\bar{k}_S}{\bar{h}_S} = 1$$

è pure

$$S_m = S_t , \quad (16)$$

e viceversa.

Con riferimento ad una qualsiasi struttura monodimensionale piana, in genere la fondamentale z sulla quale si riportano le componenti v secondo la direzione b di una forza viaggiante è ortogonale a questa direzione (fig. 4-15). Poichè (§ 1-1) le rotazioni φ sono pari alle inclinazioni

(*) Poichè gli spostamenti sono piccoli, può scriversi

$$\begin{aligned} D_{\varphi S} &= - \Delta\varphi_S = \operatorname{tg} \varphi_s - \operatorname{tg} \varphi_d = \\ &= - \frac{\overline{DK}}{\overline{CD}} \frac{S_v}{S_t} + \frac{\overline{DH}}{\overline{CD}} \frac{S_v}{S_t} = \frac{\overline{KH}}{\overline{CD}} \frac{S_v}{S_t} \end{aligned}$$

dove $\overline{KH}$ e $\overline{CD}$ sono segmenti orientati. Quindi è

$$|D_{\varphi S}| = \frac{\bar{h}_S}{\bar{k}_S} \frac{S_v}{S_t} ;$$

$\bar{h}_S$ e $\bar{k}_S$ sono le lunghezze di h_S e k_S lette nel disegno, in valore assoluto.

(cambiate o meno di segno) valutate su tale diagramma, la scala S_m si calcola come già detto per la trave rettilinea.

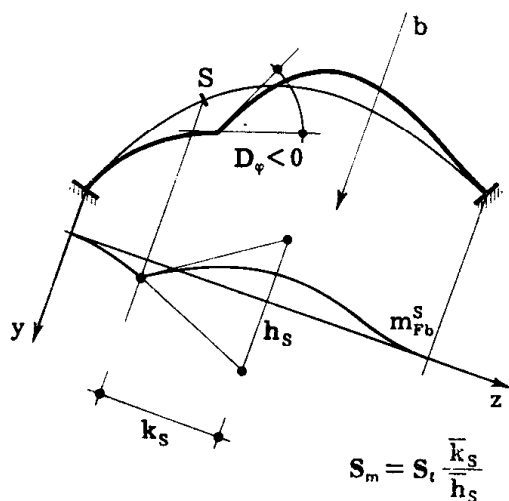


FIG. 4-15

La linea di influenza di una reazione si ottiene imprimendo il cedimento $\Delta_j = -1$ corrispondente a quella reazione; dalla (4-14) si ha in-

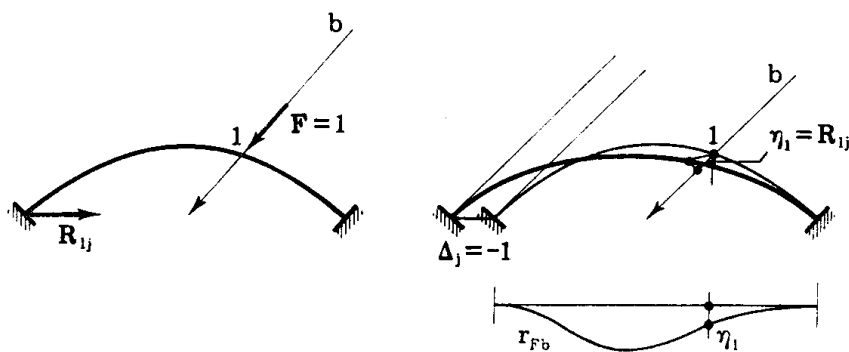


FIG. 4-16

fatti, per un cedimento Δ_j (fig. 4-16)

$$\eta_1 + R_j \Delta_j = 0$$

da cui

$$R_j = - \frac{\eta_1}{\Delta_j} .$$

Se il vincolo è elasticamente cedevole, Δ_j è la differenza (algebrica) tra il cedimento totale e quello elastico. Come era da attendersi, le reazioni rientrano nella classe più generale delle caratteristiche della sollecitazione interna.

8. Le linee d'influenza degli spostamenti per distorsioni viaggianti.

Si consideri una trave, soggetta in corrispondenza della sezione 1 ad una distorsione D_φ intorno all'asse x (fig. 4-17 a), e in corrispondenza

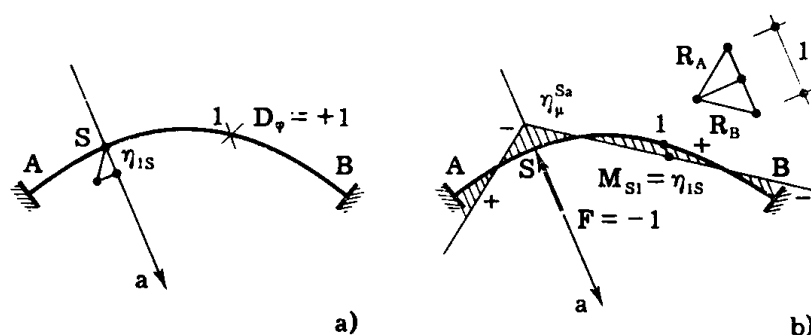


FIG. 4-17

della sezione S ad una forza 1 diretta secondo la retta orientata a (fig. 4-17 b); la (4-14) fornisce

$$0 = \eta_{1s} + M_{s1} \cdot D_\varphi$$

da cui

$$\eta_{1s} = - D_\varphi M_{s1} ;$$

perciò il diagramma del momento M_x provocato dalla $F = -1$ agente in corrispondenza del baricentro di S secondo la retta a coincide con la linea d'influenza $\eta_{\mu x}^{sa}$ della componente secondo a dello spostamento del baricentro di S per effetto di una distorsione viaggiante $D_\varphi = +1$. In generale può enunciarsi: « La linea d'influenza di uno spostamento η in corrispondenza di una sezione S per effetto di una distorsione D unitaria positiva viaggiante lungo l'asse della trave è il diagramma delle caratteristiche corrispondenti a D provocate dalla forza unitaria negativa corrispondente ad η ed agente in S ».

La dicitura « distorsione unitaria viaggiante » è convenzionale, se la distorsione è di rotazione relativa; essa significa soltanto che l'effetto in S connesso con una distorsione D_φ è D_φ volte il valore dell'ordinata della linea d'influenza che si legge sotto la sezione in cui D_φ è applicata.

9. Il terzo principio di reciprocità, o principio di Volterra; le linee d'influenza delle caratteristiche della sollecitazione per distorsioni viaggianti.

Dalla (4-1) si trae, per $F_1 = F_2 = 0$,

$$\begin{aligned} \sum_j R_{1j} \Delta_{2j} + \int_s N_1 \lambda_2 ds + \int_s M_1 \mu_2 ds + \int_s T_1 \vartheta_2 ds = \\ = \sum_j R_{2j} \Delta_{1j} + \int_s N_2 \lambda_1 ds + \int_s M_2 \mu_1 ds + \int_s T_2 \vartheta_1 ds. \end{aligned} \quad (17)$$

La (4-17) esprime il *terzo principio di reciprocità*, o principio di *Volterra*, che si enuncia: « I lavori mutui di due sistemi di distorsioni agenti sulla stessa struttura sono uguali ».

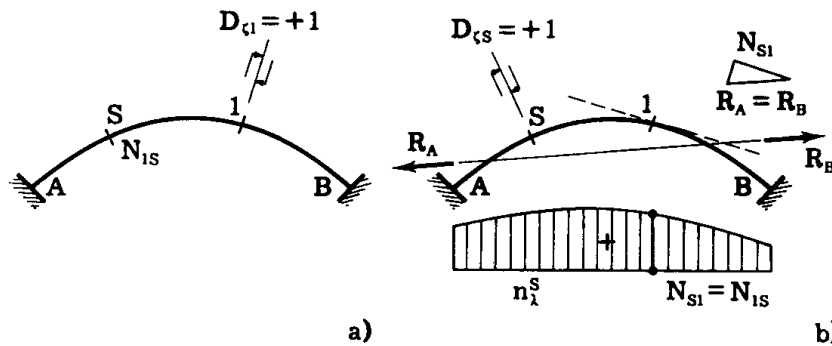


FIG. 4-18

Si consideri una trave soggetta in corrispondenza della sezione 1 ad una distorsione $D_{\zeta 1}$ (fig. 4-18 a) e in corrispondenza della sezione S ad una distorsione $D_{\zeta S}$ (fig. 4-17 b); la (4-15) fornisce:

$$N_{1S} \cdot D_{\zeta S} = N_{S1} \cdot D_{\zeta 1}$$

da cui

$$N_{1S} = D_{\zeta 1} \frac{N_{S1}}{D_{\zeta S}}.$$

Il diagramma degli sforzi normali provocati dalla $D_{\zeta S} = +1$ in S è

perciò la linea d'influenza n_{λ}^s dello sforzo normale in S per una distorsione $D_{\zeta} = +1$ viaggiante.

Se la trave è soggetta in 1 ad una distorsione $D_{\varphi 1}$ la (4-15) fornisce (fig. 4-19)

$$N_{1s} \cdot D_{\zeta s} = M_{s1} \cdot D_{\varphi 1}$$

da cui

$$N_{1s} = D_{\varphi 1} \frac{M_{s1}}{D_{\zeta s}} ;$$

quindi il diagramma dei momenti flettenti M_x provocati dalla $D_{\zeta s} = +1$ in S è la linea d'influenza $n_{\lambda x}^s$ dello sforzo normale in S per una distor-

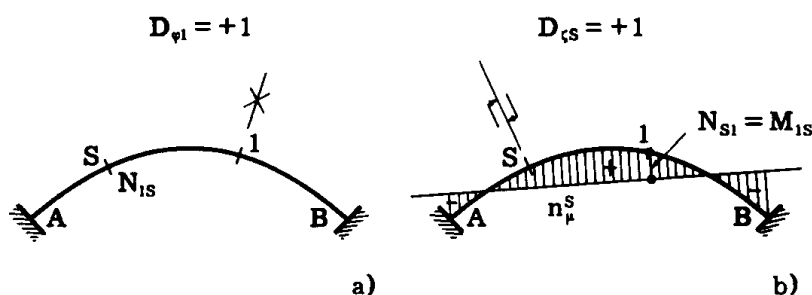


FIG. 4-19

sione $D_{\varphi} = +1$ viaggiante. In generale si enuncia: « La linea d'influenza di una caratteristica C della sollecitazione in corrispondenza di una sezione S per effetto di una distorsione D unitaria positiva viaggiante lungo l'asse della trave è il diagramma delle caratteristiche corrispondenti a D, provocate dalla distorsione unitaria positiva corrispondente a C ed agente in S ».

Valgono anche per questo caso le precisazioni fatte circa l'entità reale della distorsione unitaria di rotazione relativa.

E' interessante osservare che le linee d'influenza per distorsioni viaggianti si disegnano nel corso stesso del calcolo delle linee d'influenza per forze viaggianti; infatti per ottenere la linea d'influenza di uno spostamento η_s (o di una caratteristica C_s) in corrispondenza di una sezione S, per una forza unitaria viaggiante, occorre disegnare la deformata della trave per effetto di una forza unitaria (o di una distorsione unitaria) agente in S, e quindi è necessario tracciare i diagrammi delle caratteristiche indotte da questa forza (o da questa distorsione); ma esse non sono altro, a meno del segno, che le linee d'influenza dello spostamento η_s (o della caratteristica C_s) per effetto di una distorsione viaggiante.

Si osservi pure che nelle strutture isostatiche le linee d'influenza di

caratteristiche per distorsioni viaggianti sono identicamente nulle, come è da attendersi; e infatti in tali strutture alle distorsioni di Volterra non si accompagnano stati di tensione.

10. L'utilizzazione delle linee d'influenza.

Gli enunciati dei numeri precedenti possono riassumersi in uno: «La linea d'influenza dell'ente E in corrispondenza della sezione S , per effetto dell'ente V viaggiante lungo l'asse della trave, coincide con il diagramma dell'ente V' corrispondente a V provocato dall'ente $E' = \pm 1$ corrispondente ad E ed agente in S . L'ente E' è positivo se E e V sono omologhi (e cioè spostamento e forza, o caratteristica della sollecitazione e distorsione), negativo in caso contrario».

Le linee d'influenza possono servire per conoscere gli spostamenti o le caratteristiche della sollecitazione in una data sezione per un qualsiasi insieme di forze o distorsioni agenti sulla trave.

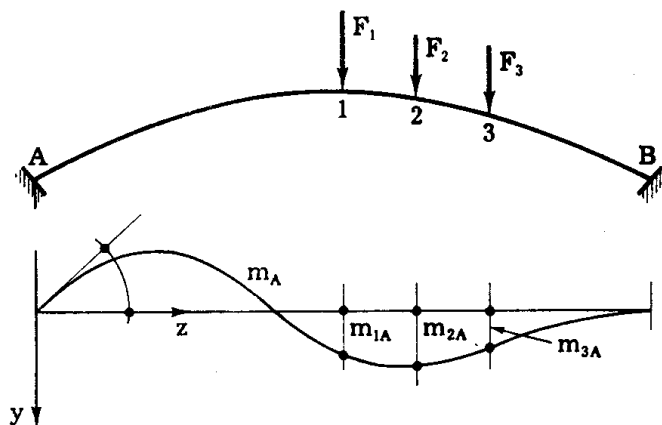


FIG. 4-20

Sia tracciata, per esempio, la linea d'influenza m_A del momento flettente nella sezione d'incastro di un arco ad asse piano (fig. 4-20) per effetto di una forza verticale unitaria viaggiante (*); se alle ascisse 1 2 3 agiscono le forze $F_1 F_2 F_3$, il momento in A è fornito, per il principio di sovrapposizione, da

$$M_A = F_1 m_{1A} + F_2 m_{2A} + F_3 m_{3A} = \sum F_i m_{iA} \quad (18)$$

(*) Il momento flettente in A ha segno opposto alla coppia di incastro in A ; mentre per il primo è necessario imprimere una distorsione $\Delta\varphi = -1$ in A , come si fa per ottenere la linea d'influenza del momento flettente in una sezione generica (fig. 4-20), per la seconda si deve imprimere alla sezione A svincolata la rotazione $\varphi_A = -1$ intorno al suo baricentro. Poichè la φ_A negativa è oraria, le due linee risultano uguali ed opposte.

essendo m_{A1} m_{A2} m_{A3} le ordinate della linea d'influenza in corrispondenza delle sezioni 1 2 3.

Come già fatto notare alla linea d'influenza in questione spetterebbe il simbolo $m_{F_v}^{Ax}$, atteso l'orientamento degli assi nella figura; per semplicità essa si chiama m_A .

Se la trave è un sistema piano nel senso già noto, si è in genere usi infatti indicare le linee d'influenza con simboli semplificati; e precisamente con v_s , $v_{s\mu}$, $v_{s\lambda}$, $v_{s\vartheta}$ le linee d'influenza dello spostamento verticale di S per una forza verticale e, rispettivamente, per una distorsione $\Delta\varphi$, Δu , Δv viaggiante, con w_s , $w_{s\mu}$, $w_{s\lambda}$, $w_{s\vartheta}$ le linee d'influenza dello spostamento orizzontale, con m_s , $m_{s\mu}$, $m_{s\lambda}$, $m_{s\vartheta}$ quelle del momento flettente, con n_s , $n_{s\mu}$, $n_{s\lambda}$, $n_{s\vartheta}$ quelle dello sforzo normale, con t_s , $t_{s\mu}$, $t_{s\lambda}$, $t_{s\vartheta}$ quelle dello sforzo di taglio.

In presenza di un carico distribuito $q(z)$, si ha, scomponendo il carico

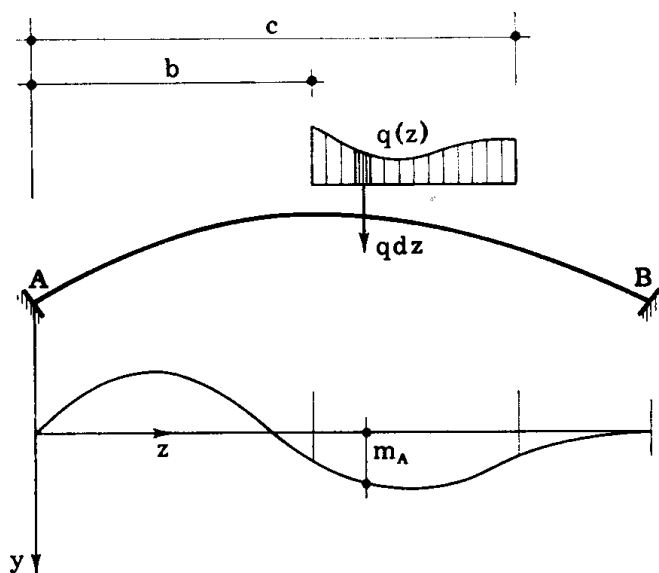


FIG. 4-21

stesso in forze elementari $q(z) \cdot dz$ e sommandone i contributi (fig. 4-21)

$$M_A = \int_b^c q m_A dz . \quad (19)$$

Se il carico $q(z)$ è uniforme (fig. 4-22), la (4-18) diviene, chiamando S l'area della linea d'influenza sottostante al carico,

$$M_A = q \int_b^c m_A dz = q S . \quad (20)$$

Si osserva perciò che, se si è in presenza di un carico q uniformemente distribuito, che può comunque impegnare la struttura, le linee

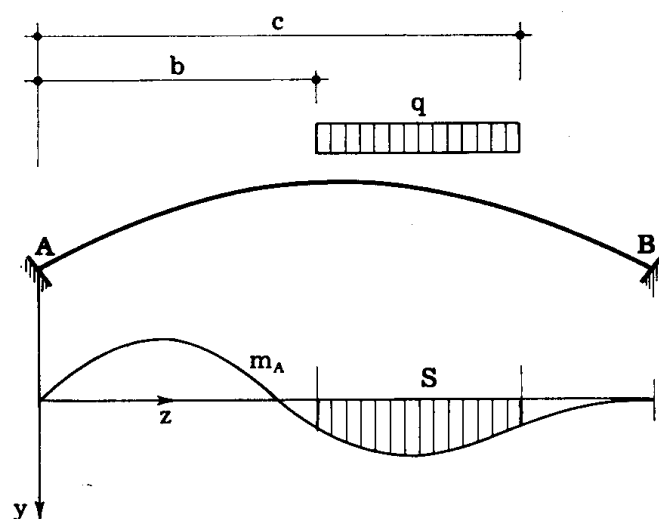


FIG. 4-22

d'influenza forniscono immediatamente le condizioni di carico che inducono in una certa sezione il massimo di una caratteristica, o di uno spostamento; con riferimento ad una trave continua (fig. 4-23), si sono ripor-

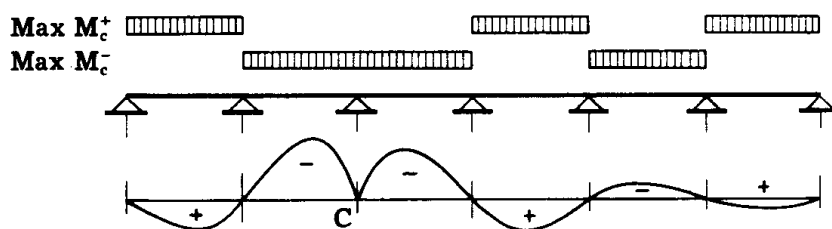


FIG. 4-23

tate le due condizioni di carico (complementari) che forniscono il massimo momento positivo e il massimo momento negativo in corrispondenza di un appoggio intermedio C.

La ricerca della posizione più sfavorevole del carico è altrettanto immediata quando si è in presenza di una sola forza, poichè è sufficiente considerare questa forza agente in corrispondenza delle sezioni in cui le ordinate della linea d'influenza raggiungono i valori massimo e minimo assoluti. Non altrettanto semplice si presenta il problema se il treno di carichi è costituito da forze qualsiasi a distanza reciproca invariabile; in tal caso la ricerca della posizione più sfavorevole del treno non può che essere eseguita per tentativi.

La conoscenza delle linee d'influenza per un numero sufficientemente elevato di sezioni permette di conoscere con buona approssimazione, fissato il treno viaggiante, i massimi ed i minimi delle caratteristiche in corrispondenza di qualsiasi sezione; basta, a ciò fare, riportare in corrispondenza delle sezioni prescelte i valori massimo e minimo delle caratteristiche, provocate dai carichi accidentali e dalle variazioni termiche, a partire dal diagramma delle caratteristiche indotte dal peso proprio e dalle altre sollecitazioni permanenti, e congiungere con segmenti di retta o con una curva continua i punti così ottenuti. Di tutto ciò si tratterà diffusamente nei capitoli relativi alle travi.

In modo del tutto analogo a quanto sopra detto si sfruttano le linee d'influenza per distorsioni viaggianti.

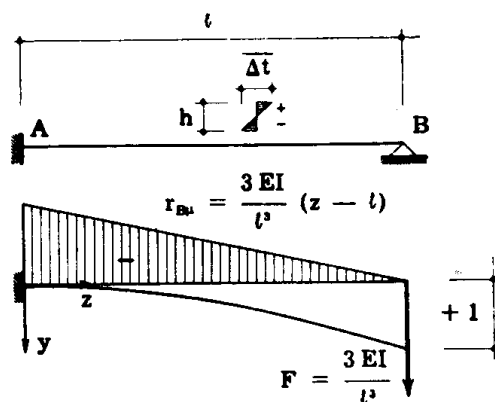


FIG. 4-24

Si consideri per esempio la trave con incastro ed appoggio della fig. 4-24, di luce l e di sezione costante, soggetta ad una variazione termica uniforme lungo z , e variabile linearmente lungo l'altezza h ; la somma dei valori assoluti delle variazioni termiche al bordo superiore e inferiore sia $\overline{\Delta t}$, e la variazione sia positiva al disopra, negativa al disotto del baricentro; il Δt è perciò negativo. La suddetta variazione termica equivale ad una distorsione μ (positiva) pari a $-\alpha \overline{\Delta t}/h$. La linea d'influenza $r_{B\mu}$ della reazione in B per effetto di una distorsione D_φ viaggiante è il diagramma del momento connesso con un abbassamento unitario dell'estremo B (la R_B si suppone, al solito, positiva se diretta verso il basso), e cioè si ha

$$r_{B\mu} = \frac{3EI}{l^3} (z - l) .$$

Il valore di R_B è perciò fornito da

$$R_B = \int_0^l \mu r_{B\mu} dz = -\frac{\alpha \overline{\Delta t}}{h} \int_0^l r_{B\mu} dz = \frac{3}{2} \frac{EI \overline{\Delta t}}{hl} .$$

11. Il procedimento delle linee d'influenza fondamentali.

Spesso si ha necessità di tracciare le linee di influenza relative ad un elevato numero di sezioni di una struttura iperstatica; in tal caso è sufficiente tracciare le linee per un numero di sezioni pari al grado di ipersta-

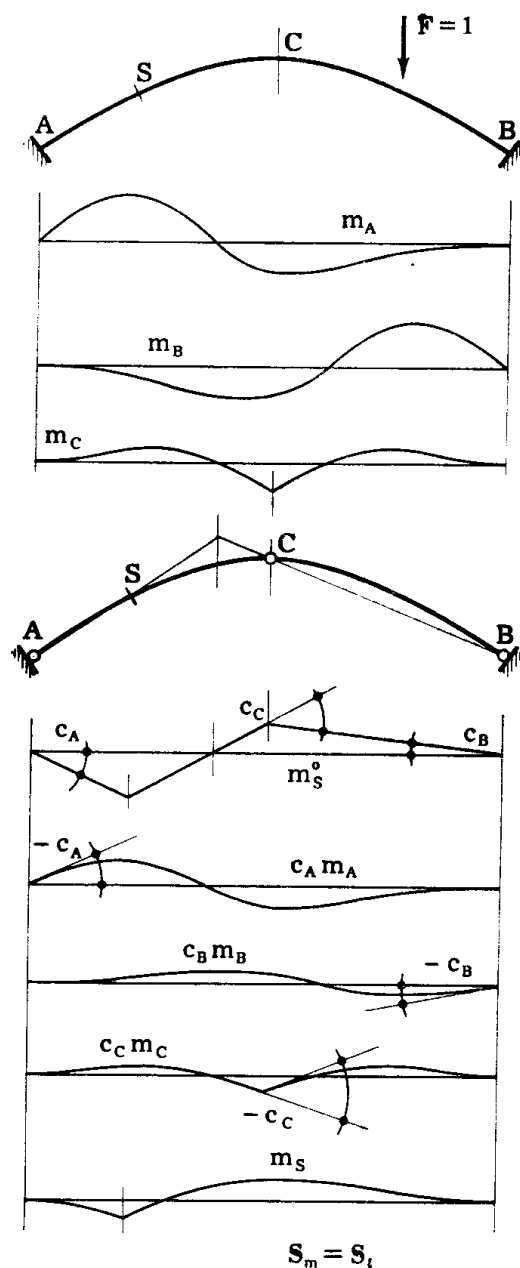


FIG. 4-25

ticità della struttura, poichè il tracciamento di tutte le altre si ottiene operando sulla struttura isostatica.

Si consideri l'arco della figura 4-25, tre volte iperstatico, e siano già tracciate le linee di influenza $m_A m_B m_C$ del momento flettente nelle sezioni A e B d'imposta e C di chiave per una forza verticale unitaria viaggiante. Esse sono ottenute imprimendo la distorsione $D_\varphi = -\alpha$ in A, B, C, ricavando le linee elastiche $v_A v_B v_C$, e dividendo per α ($\alpha > 0$); si desidera ottenere la linea d'influenza m_S del momento flettente nella generica sezione S per una forza verticale unitaria viaggiante.

La m_S si ottiene imprimendo la distorsione $D_\varphi = -\alpha$ in S ($\alpha > 0$), e dividendo per α gli spostamenti v_S che ne derivano. Per ottenere $v_S(z)$ si rende isostatica la struttura interponendo delle cerniere in corrispondenza delle sezioni A, B, C (e cioè annullando le caratteristiche per le quali si è in possesso delle linee d'influenza), e si imprime la distorsione $-\alpha$ in S, tracciando il diagramma degli spostamenti v_S^0 . Si valutano poi gli angoli di rotazione relativa in A, B, C nel diagramma v_S^0 , rispettivamente αc_A , αc_B , αc_C , nel modo già esposto al § 7 di questo capitolo; il loro segno si prende considerandoli come distorsioni. Infine si imprimono sulla struttura effettiva le distorsioni $-\alpha c_A$ in A, $-\alpha c_B$ in B, $-\alpha c_C$ in C, calcolando gli spostamenti $v_A^* v_B^* v_C^*$ a queste connessi; si ha così

$$v_S = v_S^0 + v_A^* + v_B^* + v_C^* .$$

Infatti, per ottenere la deformata di una struttura iperstatica soggetta a forze o distorsioni generiche si può tracciare prima la deformata della struttura resa isostatica, e poi applicare alla struttura iperstatica distorsioni concentrate pari alle incongruenze cambiate di segno. La deformata somma è congruente, ma è pure equilibrata, perchè le caratteristiche della sollecitazione interna che da essa derivano sono in equilibrio nella prima deformata con le forze applicate e le loro reazioni, e nelle altre deformate con forze applicate nulle e con un sistema di reazioni tra loro in equilibrio.

Se la distorsione $-\alpha$ agente in A induce nella struttura effettiva gli spostamenti v_A , è

$$v_A^* = c_A v_A ;$$

analogamente si ha

$$v_B^* = c_B v_B$$

$$v_C^* = c_C v_C .$$

E' perciò

$$v_S = v_S^0 + c_A v_A + c_B v_B + c_C v_C$$

e ancora

$$\frac{v_S}{\alpha} = \frac{v_S^0}{\alpha} + c_A \frac{v_A}{\alpha} + c_B \frac{v_B}{\alpha} + c_C \frac{v_C}{\alpha},$$

che si scrive pure

$$m_S = m_S^0 + c_A m_A + c_B m_B + c_C m_C. \quad (21)$$

Si può quindi dire che le ordinate della linea d'influenza m_S sono somma di quelle della linea m_S^0 , e di quelle delle linee m_A, m_B, m_C rispettivamente moltiplicate per $c_A c_B c_C$. Le $c_A c_B c_C$ sono le discontinuità angolari che si verificano in corrispondenza delle sezioni A, B, C nel diagramma m_S^0 , valutate come inclinazioni, o come differenze di inclinazioni, come già precisato al § 4-7 e prese con il segno che loro competerebbe considerandole come distorsioni.

La m_S^0 prende nome di *linea d'influenza principale*, le $m_A m_B m_C$ di *linee d'influenza fondamentali o correttive*.

Se le caratteristiche iperstatiche sono forze, e quindi le distorsioni correttive sono spostamenti, si può semplificare il ragionamento di cui sopra prendendo in considerazione le stesse linee d'influenza come diagrammi di spostamenti.

Il procedimento è di carattere del tutto generale; per esempio la linea $m_{S\mu}$ del momento in S per una distorsione $D_\varphi = +1$ viaggiante è fornita dalla somma

$$m_{S\mu} = c_A m_{A\mu} + c_B m_{B\mu} + c_C m_{C\mu} \quad (22)$$

essendo $c_A c_B c_C$ le discontinuità angolari che si verificano in corrispondenza di A B C nel diagramma m_S^0 , ed $m_{A\mu}, m_{B\mu}, m_{C\mu}$ le linee d'influenza del momento nelle sezioni A B C della struttura effettiva per una distorsione $D_\varphi = +1$ viaggiante, coincidenti con i diagrammi dei momenti indotti nella struttura effettiva dalle distorsioni $D_{\varphi A} = +1$, $D_{\varphi B} = +1$, $D_{\varphi C} = +1$. Infatti la distorsione $D_{\varphi S}$ in S nella struttura isostatica non provoca momenti.

Analogamente si ha

$$m_{S\lambda} = c_A m_{A\lambda} + c_B m_{B\lambda} + c_C m_{C\lambda} \quad (23)$$

$$m_{S\delta} = c_A m_{A\delta} + c_B m_{B\delta} + c_C m_{C\delta}.$$

Riassumendo può perciò dirsi che la linea d'influenza e_v^s di una qualsiasi caratteristica della sollecitazione E in corrispondenza della sezione S di una struttura iperstatica, per effetto di un qualsiasi ente V viaggiante, è somma della linea $e_v^{s_0}$ ottenuta con riferimento alla struttura resa isostatica, e dei prodotti $c_1 x_v^{s_1}$; la c_1 è la discontinuità che sorge nella struttura isostatica, in corrispondenza della sezione in cui agisce la generica caratteristica iperstatica X_1 , per effetto dell'ente $E' = -1$ corrispondente all'ente E ed applicato in S . La $x_v^{s_1}$ è la linea d'influenza della X_1 per effetto dell'ente V viaggiante, calcolata sulla struttura iperstatica. Il segno di c_1 si prende considerando c_1 come distorsione. Quanto sopra vale anche se l'ente E è uno spostamento; in tal caso le c_1 sono quelle prodotte da $E' = +1$ in S .

12. Il tracciamento delle linee d'influenza delle caratteristiche della sollecitazione.

Le linee d'influenza si riducono, per quanto sopra detto, a diagrammi di spostamenti (forze viaggianti) o caratteristiche (distorsioni viaggianti), prodotti da una forza (linea d'influenza di uno spostamento) o da una distorsione (linea d'influenza di una caratteristica); il tracciamento delle caratteristiche o degli spostamenti prodotti da una forza o da una distorsione

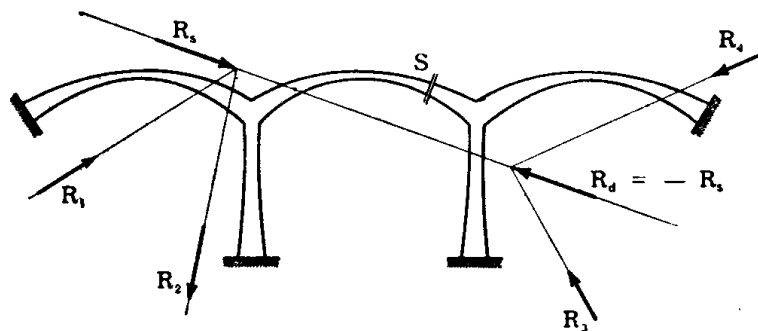


FIG. 4-26

si esegue attraverso procedimenti particolari, utilissimo tra i quali quello dell'ellisse di elasticità, o l'altro, da esso derivato, dei punti fissi.

Qualche chiarimento è forse necessario relativamente al disegno delle caratteristiche e degli spostamenti provocati da una distorsione concentrata.

Con riferimento alla fig. 4-26, una distorsione qualsiasi, per es. la D_ϕ in S , induce in corrispondenza delle quattro sezioni d'incastro dei ritti e degli archi quattro reazioni in equilibrio. La risultante R_s delle reazioni a sinistra della sezione S è uguale e contraria alla risultante R_d delle reazioni a destra. Le caratteristiche della sollecitazione in S hanno come risultante

le forze $-R_s$ sulla faccia di sinistra e $-R_d$ sulla faccia di destra; quindi, effettuando un taglio in S ed applicando sulla faccia di sinistra la forza $-R_s$, e sulla faccia di destra la $-R_d$, si ottengono nella struttura gli stessi stati di tensione e di deformazione indotti dalla distorsione concentrata. Il caso della distorsione è così ridotto a quello di due forze F e $-F$ uguali e contrarie applicate sulle due facce risultanti da un taglio secondo la sezione retta in cui è applicata la distorsione (fig. 4-27); la teoria dell'ellisse

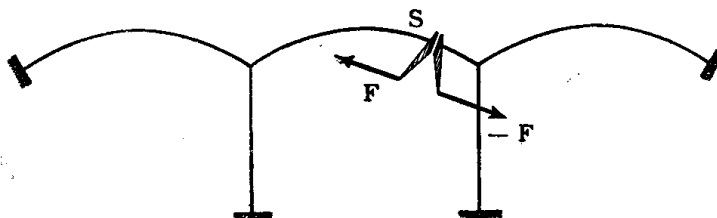


FIG. 4-27

di elasticità (§ 1-10) permette di determinare rapidamente la retta d'azione e l'intensità di tali forze, e le corrispondenti deformate. A volte però si preferisce risolvere il problema attraverso il cosiddetto *procedimento della sconnessione semplice*, molto utile se si vuole costruire la linea d'influenza di una caratteristica evitando di ricorrere al concetto di distorsione. Infatti si consideri la struttura della fig. 4-28 a, caricata da una forza F ; si può effettuare un taglio in S, unire le due facce risultanti con una cerniera in corrispondenza del baricentro, ed applicare sulle due facce due coppie $\mathcal{M}_s$ e $-\mathcal{M}_s$ pari al valore del momento flettente che la F provoca nella sezione S della struttura effettiva. La stessa struttura si carichi con due coppie $\mathcal{M}$ e $-\mathcal{M}$ sulle due facce in S, e tali da provocare una rotazione relativa di queste ultime pari ad α ($\alpha > 0$ secondo la convenzione delle rotazioni relative).

Il principio di Betti classico permette di scrivere

$$F \cdot v_{SF} - \mathcal{M}_s \cdot \alpha = 0$$

da cui

$$\mathcal{M}_s = F \frac{v_{SF}}{\alpha}.$$

Perciò la deformata v_s provocata dalle due coppie $\mathcal{M}$ e $-\mathcal{M}$ sulla struttura della fig. 4-28 b, divisa per α , è la linea d'influenza m_s della struttura effettiva.

Il problema della ricerca della linea d'influenza di una caratteristica è così ricondotto allo studio di una struttura, il cui grado di iperstaticità è

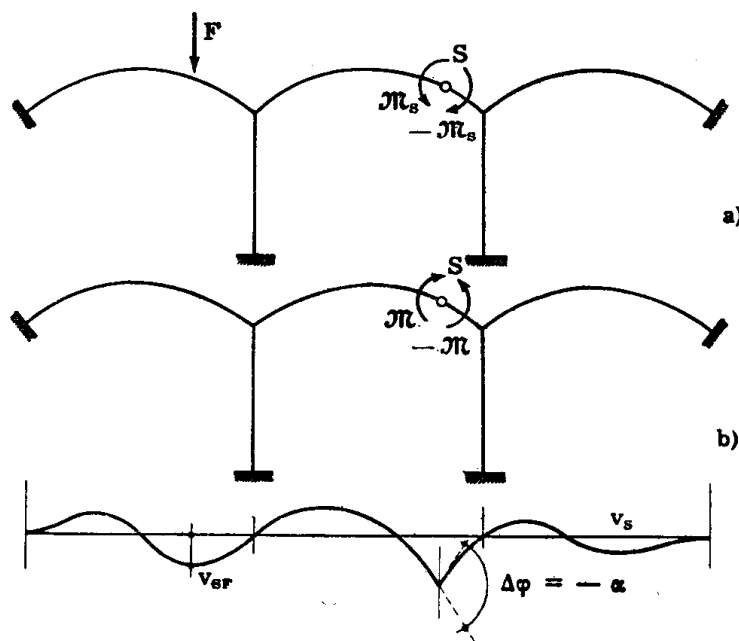


FIG. 4-28

abbassato di un'unità rispetto a quello della struttura effettiva. Il procedimento è particolarmente utile in quei casi in cui un taglio completo in S dà luogo a due strutture di cui una labile, come accade per esempio negli archi a due cerniere, o nelle travi con un'estremità incastrata ed una appoggiata.