

CAPITOLO III

IL PRINCIPIO DI STAZIONARIETA' DELL'ENERGIA POTENZIALE TOTALE

1. Definizioni ed espressioni dell'energia potenziale delle forze esterne e dell'energia potenziale totale.

Si considerano forze F_i di componenti F_{ix} F_{iy} F_{iz} indipendenti dal tempo. Le componenti in tal caso si distinguono in *costanti* e *posizionali* secondo che siano o meno indipendenti dalla posizione del proprio punto di applicazione. Se i punti d'applicazione della forza F_i si spostano, il lavoro compiuto è nel primo caso

$$L_e = \sum_i (F_{ix} u_i + F_{iy} v_i + F_{iz} w_i) , \quad (1)$$

indipendente dalle traiettorie seguite dai punti di applicazione; nel secondo caso invece è

$$L_e = \sum_i \left(\int_0^{u_i} F'_{ix} du'_i + \int_0^{v_i} F'_{iy} dv'_i + \int_0^{w_i} F'_{iz} dw'_i \right) , \quad (2)$$

variabile in genere con la traiettoria.

Un caso particolare della (3-2) è l'espressione del lavoro compiuto, nel loro reale processo di applicazione, dalle forze esterne agenti su una struttura; in questo caso infatti il legame tra le forze e gli spostamenti fissa, una volta dato il processo di applicazione del carico, la traiettoria per ogni forza, ed i valori della F_i in ogni punto della propria traiettoria. Il legame posizionale delle F_i è dovuto, in questo caso, alle caratteristiche geometriche e fisiche del sistema.

La portata della (3-2) è più vasta, perchè fornisce il lavoro compiuto dalle forze agenti sulla struttura nel loro stadio finale, per un cambiamento della configurazione di equilibrio della struttura stessa; cambiamento geometricamente possibile, ma non reale (quindi non ci si preoccupa di dire quali nuove forze o altri enti possono produrre questo cambiamento).

Le forze agenti su una struttura — si ripete, nel loro stadio finale — possono essere costanti o posizionali. Un esempio di forza costante è il peso; per questo le forze costanti si chiamano anche di tipo *gravitazionale*.

Un esempio di forza posizionale è quella esercitata dall'acqua su una parete, sempre dello stesso valore, e sempre normale alla parete, quindi ruotante con questa per effetto delle deformazioni.

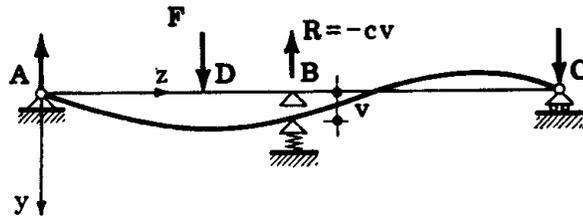


FIG. 3-1

Le forze F_i (nel loro stadio finale) sono *conservative*, o meno, se il lavoro δL_e da esse compiuto per effetto di una qualsiasi variazione dc_i delle coordinate lagrangiane si può porre nella forma

$$\delta L_e = - dP, \quad (3)$$

dove dP è il differenziale esatto di una funzione P delle coordinate lagrangiane, che prende nome di *energia potenziale delle forze esterne*. La P è definita a meno di un costante; se si conviene che sia $P=0$ in corrispondenza della configurazione naturale, dalla (3-3) si trae

$$P = - L_{e_{0 \rightarrow c}}. \quad (4)$$

Le forze costanti sono anche conservative, e per esse la (3-4) si scrive

$$P = - \sum_i (F_{ix} u_i + F_{iy} v_i + F_{iz} w_i). \quad (5)$$

Ci sono però casi di forze conservative anche tra le forze posizionali; sono tutti quei casi in cui le $F_{ix} F_{iy} F_{iz}$ sono funzioni dei corrispondenti spostamenti $u_i v_i w_i$ (*forze di tipo reattivo*). In tal caso la P è fornita da

$$P = - \sum_i \left(\int_0^{u_i} F'_{ix} du'_i + \int_0^{v_i} F'_{iy} dv'_i + \int_0^{w_i} F'_{iz} dw'_i \right) = P(c_i). \quad (6)$$

Un esempio è quello della fig. 3-1, ove la forza F è del tipo gravitazionale, la R invece è funzione del corrispondente abbassamento; risulta in

questo caso

$$P = - Fv_D - \int_0^{v_B} c v dv = - Fv_D + c \frac{v_B^2}{2}, \quad (a)$$

e P dipende solo dalle coordinate lagrangiane del sistema.

Un altro caso di forze conservative è quello delle forze *centrali*, passanti per un punto O e funzioni, in genere, della distanza ρ del loro punto P d'applicazione da O (fig. 3-2); in tal caso è

$$P = - \int_{\rho_0}^{\rho} F'(\rho') d\rho'. \quad (b)$$

Un caso di forze non conservative è quello della fig. 3-3, dove la F è applicata in modo che l'angolo formato da essa con la tangente in B sia

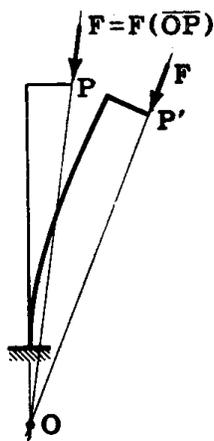


FIG. 3-2

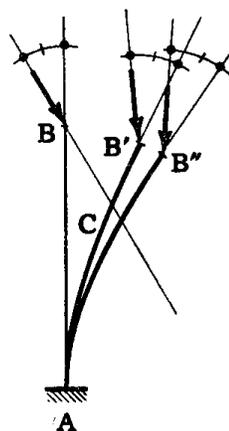


FIG. 3-3

costante. Se, a partire dalla configurazione C , si imprime alle coordinate lagrangiane una variazione dc_i , cui corrisponde una variazione $d\alpha$ dell'angolo α di inclinazione della forza, il lavoro è diverso secondo che si opera la variazione traslando prima B' in B'' e facendo poi ruotare la sezione in B'' di $d\alpha$, o viceversa.

Data una struttura elastica caricata da forze conservative assegnate, e in una certa configurazione, la somma E dell'energia potenziale delle forze esterne P e dell'energia di deformazione L si chiama *energia potenziale totale del sistema*:

$$E = P + L. \quad (7)$$

La E è funzione della configurazione, e cioè delle coordinate lagrangiane del sistema

$$E = E(c_i). \quad (8)$$

In genere le c_i si pongono nulle in corrispondenza della configurazione naturale; poichè si è posto anche $P=0$ in tale configurazione, ed in essa è pure $L=0$, si può dire che E è nulla per $c_1=c_2=\dots=0$.

Si osservi che un vincolo elastico, che colleghi due parti della struttura tra di loro, o una parte con il suolo, può dare il suo contributo alla (3-7) indifferentemente in P o in L . Se infatti la reazione corrispondente si considera come forza applicata, il suo contributo si ha in P , come quello di una forza di tipo reattivo. Se invece si comprende il vincolo nella struttura, la reazione non giuoca nessun ruolo in P , perchè occorre considerare sia quella esercitata dal vincolo sulla struttura che l'altra, uguale e contraria, esercitata dalla struttura sul vincolo; il contributo del vincolo si risente invece nella E , perchè il vincolo si deforma. Per esempio, nel caso della fig. 3-1, se la reazione si considera come forza applicata si ha il termine in P fornito da $c \frac{v_B^2}{2}$ (a); se invece il vincolo si comprende nella struttura, il suo contributo ad L è (alla *Clapeyron*)

$$L_B = \frac{1}{2} c v_B \cdot v_B = c \frac{v_B^2}{2} .$$

2. Il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale.

Il principio dei lavori virtuali nella prima forma può enunciarsi in un modo caratteristico. Nel calcolo del lavoro del primo ordine (2-21) compiuto dalle forze esterne per una variazione dc_i delle coordinate lagrangiane, le forze sono da considerarsi comunque costanti; infatti i termini delle forze funzioni delle configurazioni compiono un lavoro di ordine superiore al primo nelle dc_i . Si riconosce in tal modo che

$$\delta_1 L_e = - \delta_1 P . \quad (c)$$

Così pure il lavoro del primo ordine (2-22) delle forze interne è pari alla variazione prima cambiata di segno dell'energia di deformazione:

$$\delta_1 L_i = - \delta_1 L . \quad (d)$$

Il principio dei lavori virtuali si traduce pertanto nella relazione

$$\delta_1 P + \delta_1 L = 0 \quad (e)$$

e cioè

$$\delta_1 E = 0 . \quad (9)$$

Si può quindi enunciare: « condizione necessaria e sufficiente perchè una configurazione C di una struttura elastica, soggetta a forze e distorsioni note, sia di equilibrio, è che l'energia potenziale totale in corrispondenza di C sia stazionaria rispetto a qualsiasi variazione congruente della configurazione stessa ».

La configurazione C può essere caratterizzata anche da grandi spostamenti; l'elasticità può anche essere non lineare.

I vincoli devono essere lisci e bilaterali; peraltro possono essere elasticamente cedevoli.

La (3-9) si traduce nelle n equazioni (condizioni necessarie e sufficienti di equilibrio)

$$\frac{\partial E}{\partial c_i} = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n) . \quad (10)$$

Poichè nel trarre la (3-9) si sono considerate le forze, di qualsiasi tipo esse fossero, come costanti, le (3-10) sono valide in ogni caso, anche cioè se sono presenti forze non conservative; la E nella configurazione generica si calcola, in tal caso, come se le forze posizionali fossero costanti a partire dalla configurazione stessa, ma diverse ovviamente per le varie configurazioni.

Si faccia adesso l'ipotesi di forze conservative. In tal caso il δV fornito dalla (2-17) è, per la (3-3),

$$\delta V = - \delta P - \delta L ;$$

quindi

$$\delta_2 V = - \delta_2 E .$$

La (2-19) assicura perciò che se una configurazione è di equilibrio stabile, la $\delta_2 E$ a partire da essa è comunque positiva, e cioè la E in detta configurazione è *minima* rispetto a tutte le possibili variazioni di configurazione.

Viceversa, se la E è minima, e questo minimo è di ordine due, la configurazione è di equilibrio stabile. Quindi condizione necessaria e sufficiente di stabilità è che la E presenti un minimo di ordine due.

Così pure la (2-20) assicura che condizione necessaria e sufficiente di instabilità è che per almeno una variazione di configurazione sia $\delta_2 E < 0$.

3. Esempi elementari relativi a sistemi rigidi con vincoli elasticamente cedevoli.

a) Si prenda di nuovo in esame (fig. 3-4) la struttura della fig. 2-12,

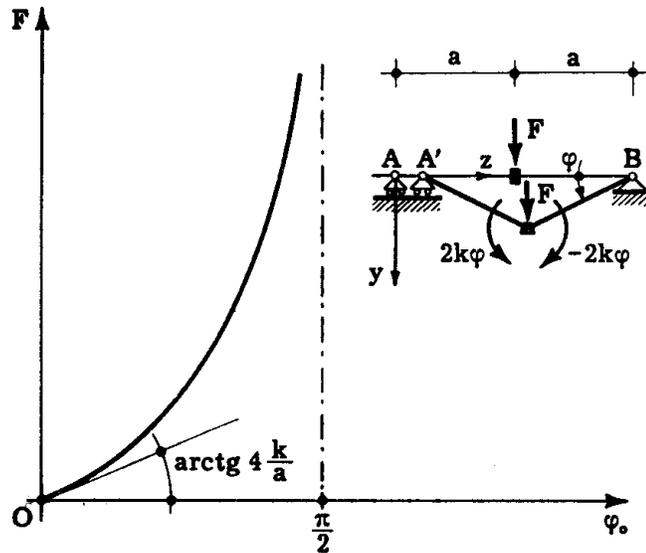


FIG. 3-4

ad un sol grado di libertà. Per la condizione di carico assegnato è

$$E = - F a \operatorname{sen} \varphi + 2 k \varphi^2 ,$$

dove F è costante.

La (3-10) porge

$$\frac{dE}{d\varphi} = - F a \cos \varphi + 4 k \varphi ;$$

la condizione

$$\frac{dE}{d\varphi} = 0$$

porge il valore φ_0 di equilibrio

$$F = 4 \frac{k}{a} \frac{\varphi_0}{\cos \varphi_0} \quad (f)$$

identica alla (2-n).

Si ha pure

$$\frac{d^2E}{d\varphi^2} = F a \operatorname{sen} \varphi + 4 k$$

e quindi, per la (f),

$$\left(\frac{d^2E}{d\varphi^2}\right)_o = 4 k \varphi_o \operatorname{tg} \varphi_o + 4 k > 0 ;$$

ciò garantisce che l'equilibrio è sempre stabile.

Nella fig. 3-4 è riportato il diagramma $F \varphi_o$. Dalla

$$\frac{dF}{d\varphi_o} = 4 \frac{k}{a} \left(\frac{1}{\cos \varphi_o} + \varphi_o \frac{\operatorname{sen} \varphi_o}{\cos^2 \varphi_o} \right) = 4 \frac{k}{a \cos \varphi_o} (1 + \varphi_o \operatorname{tg} \varphi_o)$$

si trae che il diagramma parte con pendenza $4 \frac{k}{a}$, e raggiunge pendenza infinita in $\varphi_o = \frac{\pi}{2}$. Sempre per $\varphi_o = \frac{\pi}{2}$ è $F = \infty$

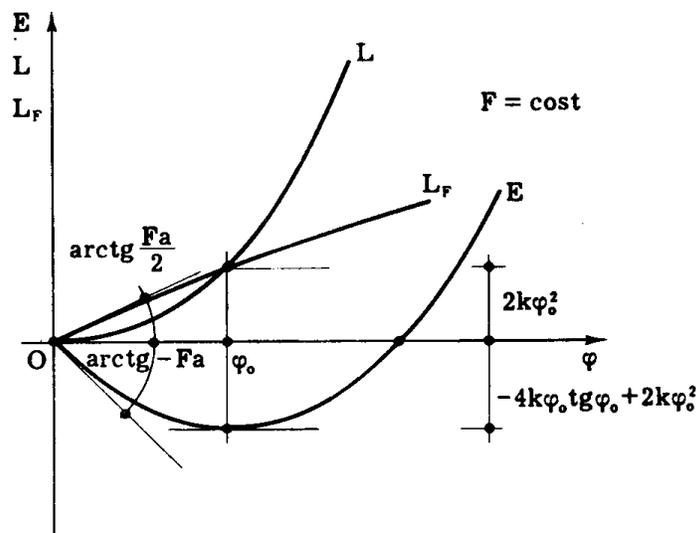


FIG. 3-5

Nella fig. 3-5 si sono tracciati i diagrammi, per F costante, delle funzioni

$$E = - F a \operatorname{sen} \varphi + 2 k \varphi^2$$

$$L = 2 k \varphi^2$$

$$\begin{aligned}
 L_F &= \int_0^\varphi F' \frac{d(a \operatorname{sen} \varphi')}{d\varphi'} d\varphi' = \int_0^\varphi 4 \frac{k}{a} \frac{\varphi'}{\cos \varphi'} \frac{d(a \operatorname{sen} \varphi')}{d\varphi'} d\varphi' = \\
 &= 4 k \int_0^\varphi \varphi' d\varphi' = 2 k \varphi^2 .
 \end{aligned}$$

e quindi, per la (f),

$$L_F = \frac{Fa}{2} \varphi \cos \varphi .$$

La L_F , lavoro svolto dalla forza F , è pari ad L per qualsiasi valore di φ se espresso in funzione della sola φ ; se invece, come nel diagramma, è espresso in funzione di φ ed F , ed F è costante (in tal caso L_F è solo una espressione analitica), L_F coincide con il lavoro realmente svolto da F solo per il valore di φ corrispondente al valore di F . Si osserva che E è nulla per $\varphi=0$, conformemente alla convenzione circa il valore iniziale di P , ed in $\varphi=\varphi_0$ attinge il suo valore minimo. In corrispondenza dello stesso valore φ_0 si ha $L_F=L$.

b) La stessa struttura della fig. 3-4 sia caricata da una forza N assiale in A (fig. 3-6). In questo caso si ha

$$E = - 2 N a (1 - \cos \varphi) + 2 k \varphi^2 ,$$

e quindi la condizione di equilibrio è

$$\frac{dE}{d\varphi} = - 2 N a \operatorname{sen} \varphi + 4 k \varphi = 0 ;$$

si ha perciò

$$N = \frac{2 k}{a} \frac{\varphi_0}{\operatorname{sen} \varphi_0} .$$

Nella fig. 3-6 è riportato il diagramma $N \varphi_0$. Si osserva che per

$$\frac{N a}{2 k} < 1 ,$$

e cioè per

$$N < \frac{2 k}{a} ,$$

l'unica soluzione è $\varphi_0 = 0$; invece per

$$N > \frac{2k}{a}$$

esistono, oltre alla soluzione $\varphi_0 = 0$, altre due soluzioni non nulle uguali e contrarie.

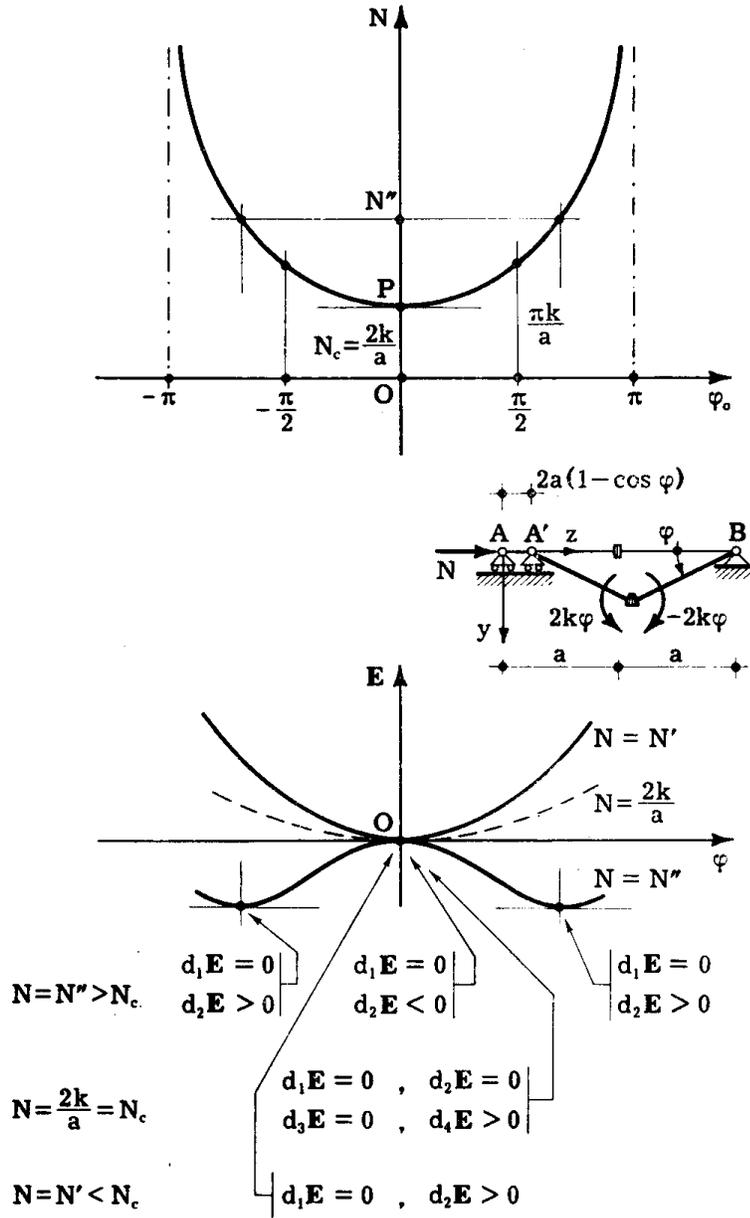


FIG. 3-6

Nella configurazione $\varphi_0 = 0$ è

$$\frac{d^2E}{d\varphi^2} = (-2Na \cos \varphi + 4k)_0 = -2Na + 4k$$

e quindi l'equilibrio è stabile per $N < 2k/a$, instabile per $N > 2k/a$.

Nelle due configurazioni diramate è

$$\frac{d^2\mathbf{E}}{d\varphi^2} = -4k \frac{\varphi_0}{\operatorname{tg} \varphi_0} + 4k > 0,$$

e quindi l'equilibrio è stabile.

Nella stessa fig. 3-6 sono riportati i diagrammi $\mathbf{E}(\varphi)$ per due valori costanti di N , $N' < 2k/a$ ed $N'' > 2k/a$. Per $N = 2k/a$ il diagramma $\mathbf{E}(\varphi)$ presenta in O un contatto quadruplo con l'asse delle φ , e cioè in O risulta $d_1\mathbf{E} = 0$, $d_2\mathbf{E} = 0$, $d_3\mathbf{E} = 0$, $d_4\mathbf{E} = 2Na (d\varphi)^4 > 0$.

Si osservi che per $\varphi = 0$ è

$$d_2\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\mathbf{E}}{d\varphi^2} \right)_0 (d\varphi)^2 = (-Na + 2k) (d\varphi)^2;$$

d'altro canto nei pressi di $\varphi = 0$ può porsi, sviluppando il $\cos \varphi$ in serie e fermandosi al termine del secondo ordine in φ ,

$$\mathbf{E} = (-Na + 2k) \varphi^2.$$

Può affermarsi quindi che, nei pressi di $\varphi = 0$, \mathbf{E} coincide con il $d_2\mathbf{E}$ preso a partire da $\varphi = 0$, e cioè, come si usa dire, con il $\delta_2\mathbf{E}$ in $\varphi = 0$ (*). La \mathbf{E} , nei pressi di $\varphi = 0$, si assimila così ad una parabola quadratica. In $\varphi = \varphi_d$ molto prossimo a $\varphi = 0$ si ha, nel passaggio da φ_d a $\varphi = 0$ (si ponga $d\varphi = \pm (\varphi_d - \varphi_0)$ costante, così che $d_1\mathbf{E}$ sia funzione della sola φ)

$$\begin{aligned} (d_1\mathbf{E})_{d \rightarrow 0} &= \mp (d_1\mathbf{E})_d = \mp (d_1\mathbf{E})_0 \mp \left(\frac{d d_1\mathbf{E}}{d\varphi} \right)_0 (\varphi_d - \varphi_0) = \\ &= \mp \left(\frac{d^2\mathbf{E}}{d\varphi^2} \right)_0 d\varphi (\varphi_d - \varphi_0) = - \left(\frac{d^2\mathbf{E}}{d\varphi^2} \right)_0 d\varphi^2 = -2 (d_2\mathbf{E})_0; \end{aligned}$$

il segno $-$ o $+$ vale per $\varphi_d - \varphi_0 \gtrless 0$.

Se $(d_2\mathbf{E})_0$ è positivo, $(d_1\mathbf{E})_{d \rightarrow 0}$ è negativo, e quindi la struttura spontaneamente si sposta da φ_d , e passa da φ_d a $\varphi = 0$.

(*) Si badi che mentre $\left(\frac{d^2\mathbf{E}}{d\varphi^2} \right)_0$ è una costante, il $d_2\mathbf{E}$ in $\varphi = 0$ è una funzione di $d\varphi$. In genere, il $\frac{d^2\mathbf{E}}{d\varphi^2}$ è una funzione di φ , il $d_2\mathbf{E}$ è una funzione di φ e di $d\varphi$. Ciò vale anche per un $d_1\mathbf{E}$ di ordine qualsiasi.

Se $(d_2E)_0$ è negativo, $(d_1E)_{d \rightarrow 0}$ è positivo, e risulta perciò negativo nell'allontanarsi da $\varphi = 0$; la struttura spontaneamente si sposta, allontanandosi da $\varphi = 0$ (*).

Se $(d_2E)_0$ è nullo, è nullo anche $(d_1E)_d$, e quindi la configurazione $\varphi = \varphi_d$ è di equilibrio. Nell'ambito dell'intorno del primo ordine di $\varphi = 0$, tutte le configurazioni sono perciò di equilibrio (equilibrio *neutro*).

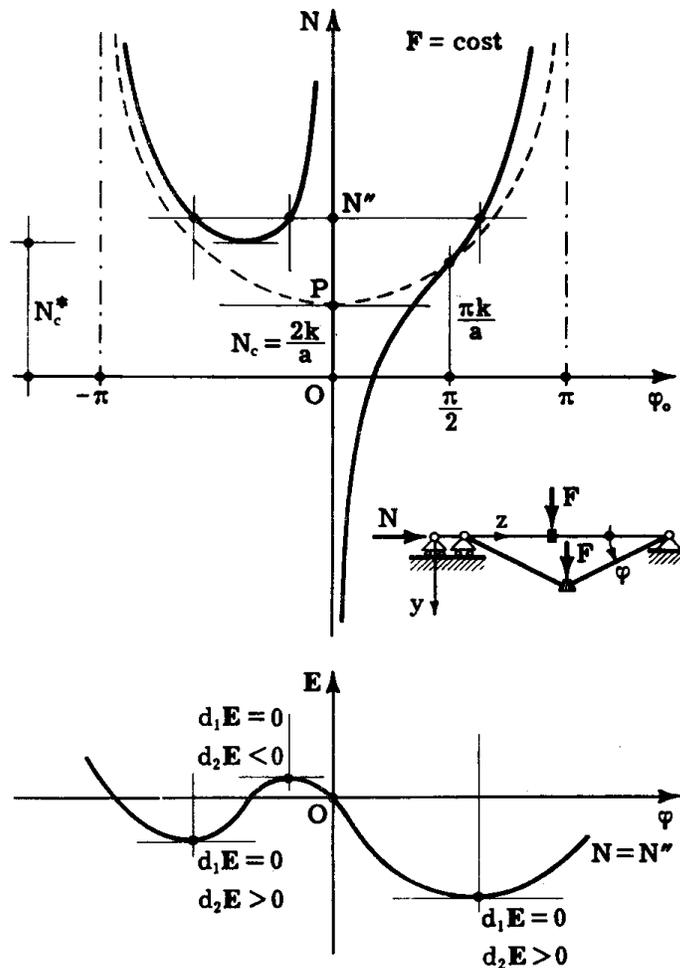


FIG. 3-7

c) Se sulla trave (fig. 3-7) agiscono contemporaneamente F ed N , si ha

$$E = - F a \text{sen } \varphi - 2 N a (1 - \text{cos } \varphi) + 2 k \varphi^2 .$$

(*) Dal postulato del moto incipiente si trae che se un sistema olonomo si sposta spontaneamente da una configurazione, il lavoro del primo ordine $\delta_1 V$ delle forze è positivo, e quindi $\delta_1 E$ è negativo.

La condizione di equilibrio è

$$\frac{dE}{d\varphi} = - F a \cos \varphi - 2 N a \sin \varphi + 4 k \varphi = 0 :$$

si ha perciò

$$N = \frac{2 k}{a} \frac{\varphi_0}{\sin \varphi_0} - \frac{F}{2} \operatorname{ctg} \varphi_0 .$$

Si supponga F costante. Per $N=0$ si ritrova la (f). Per $\varphi_0 = \pm \pi$ si trae ancora $N = \infty$. Per $\varphi_0 = \pi/2$ è ancora $N = k\pi/a$. Il grafico della $N \varphi_0$, tracciato calcolando i valori di N per diversi valori di φ_0 , è riportato nella stessa fig. 3-7; si osserva che per $N > N_c^*$ (dove $N_c^* > 2k/a$) compaiono tre soluzioni invece di una.

Nella fig. 3-7 è riportato anche il diagramma $E(\varphi)$ per $N = N'' > N_c$; si osserva che due rami sono stabili, ed il terzo è instabile.

d) Tutti i casi precedenti possono trattarsi nell'ipotesi di piccoli spostamenti; i risultati saranno in tal caso validi per φ molto piccolo.

Per il caso della fig. 3-4 si ha così

$$E = - F a \varphi + 2 k \varphi^2$$

e la condizione di equilibrio si scrive

$$\frac{dE}{d\varphi} = - F a + 4 k \varphi = 0$$

da cui

$$\varphi_0 = \frac{F a}{4 k} .$$

Il diagramma $F \varphi_0$ è una retta, che coincide con la tangente nell'origine al vero diagramma $F \varphi_0$ (fig. 3-4).

Si ha pure

$$\frac{d^2E}{d\varphi^2} = 4 k > 0 .$$

La funzione $E(\varphi)$ è una parabola quadratica.

Nel caso della fig. 3-6 si ha (si veda pure la nota a pag. 94)

$$E = - N a \varphi^2 + 2 k \varphi^2 ,$$

e la condizione di equilibrio è

$$\frac{dE}{d\varphi} = 2 (-N a + 2k) \varphi = 0 .$$

La soluzione è $\varphi = 0$ per qualsiasi valore di N ; però per

$$N = \frac{2k}{a}$$

la parentesi è nulla, e quindi qualsiasi valore di φ soddisfa l'equilibrio.

Il diagramma $N\varphi_0$ è quello della fig. 3-8; esso è valido però solo per

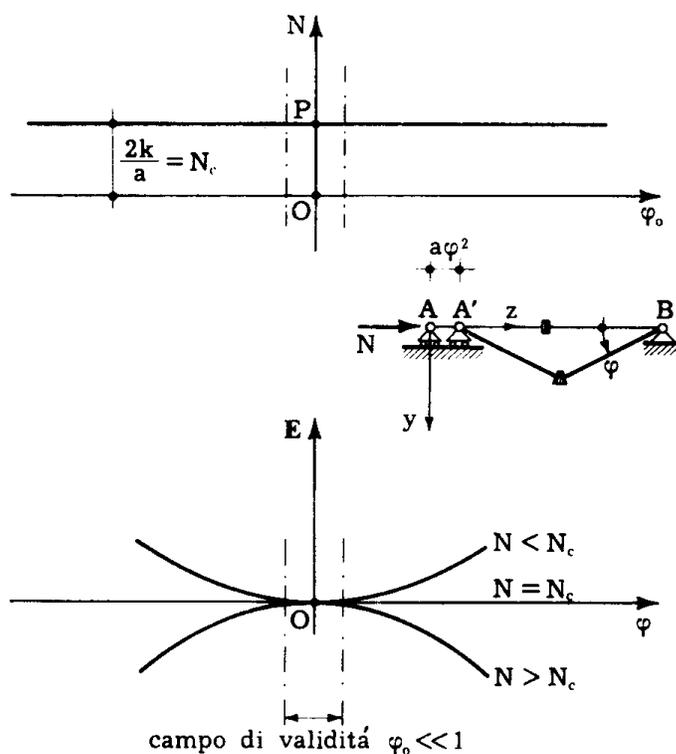


FIG. 3-8

φ_0 molto piccolo, e rappresenta quindi il campo della fig. 3-6 in cui la curva reale può confondersi con la tangente.

La $E(\varphi)$ è una parabola quadratica con il vertice in O , e rappresenta il campo della fig. 3-6 in cui la curva $E\varphi$ reale può confondersi con la parabola stessa. Per $N = N_c$ la parabola degenera nella retta $E = 0$; per ogni φ si ha così $d_1 E = 0$, e $d_2 E = 0$.

Nel caso della fig. 3-7 si ha

$$E = -F a \varphi - N a \varphi^2 + 2k \varphi^2$$

e quindi

$$\frac{dE}{d\varphi} = -F a + 2(2k - N a) \varphi$$

da cui

$$\varphi_0 = \frac{F a}{2(2k - N a)}$$

Per F costante, il diagramma $N \varphi_0$ è riportato nella fig. 3-9; per $N=0$ è $\varphi_0 = F a / 4k$, come già ottenuto, mentre per $N=2k/a$ risulta $\varphi_0 = \infty$.

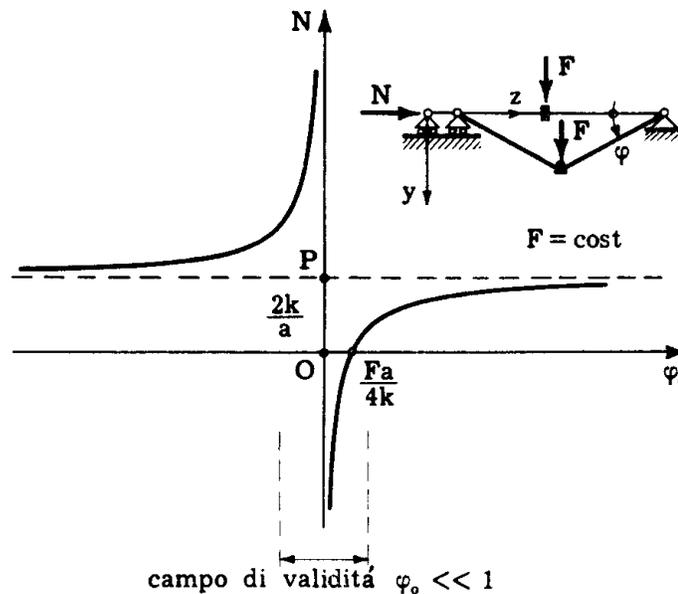


FIG. 3-9

Il diagramma $N \varphi_0$ ha quindi come asintoto la retta $N = 2k/a$. Per $N = -\infty$ è $\varphi_0 = 0$; la retta $\varphi_0 = 0$ è l'altro asintoto dell'iperbole. L'altro ramo dell'iperbole contempla il caso $\varphi < 0$, in cui lo spostamento del concio è di segno contrario alla forza.

Risulta

$$\frac{d^2E}{d\varphi^2} = 2(2k - N a)$$

e quindi

$$d_2E > 0 \quad \text{per} \quad N < \frac{2k}{a}$$

$$d_2 E = 0 \quad \text{per} \quad N = \frac{2k}{a}$$

$$d_2 E < 0 \quad \text{per} \quad N > \frac{2k}{a} ;$$

il ramo inferiore è stabile, quello superiore instabile.

Il diagramma è valido solo per φ molto piccolo, e in questo campo approssima il diagramma reale (fig. 3-7).

e) Il portale della fig. 3-10 è a due gradi di libertà. I conci elastici reagiscono con coppie di valore $\mathcal{M} = \pm k \Delta\varphi$, ove k è la stessa per tutti i conci. Come coordinate lagrangiane si assumono le rotazioni in A e B.

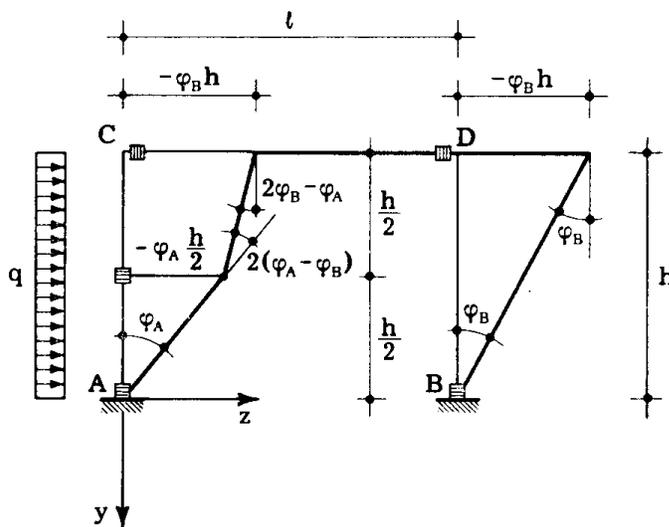


FIG. 3-10

Il lavoro svolto dalle forze uniformemente distribuite è pari al loro valore moltiplicato per l'area della corrispondente deformata; infatti

$$\int q \, dy \cdot w = q \int w \, dy = q A_q .$$

Nel caso in esame è, limitandosi all'ipotesi di piccoli spostamenti,

$$A_q = -\frac{h^2}{4} (\varphi_A + \varphi_B) .$$

Si ha perciò

$$E = q \frac{h^2}{4} (\varphi_A + \varphi_B) + \frac{k}{2} [\varphi_A^2 + 2\varphi_B^2 + 4(\varphi_A - \varphi_B)^2 + (2\varphi_B - \varphi_A)^2] =$$

$$= q \frac{h^2}{4} (\varphi_A + \varphi_B) + k (3\varphi_A^2 + 5\varphi_B^2 - 6\varphi_A \varphi_B) .$$

Le (3-10) porgono

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi_A} = q \frac{h^2}{4} + 6 k \varphi_A - 6 k \varphi_B = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi_B} = q \frac{h^2}{4} + 10 k \varphi_B - 6 k \varphi_A = 0$$

e cioè il sistema algebrico lineare non omogeneo nelle due incognite φ_A e φ_B

$$6 k \varphi_A - 6 k \varphi_B = - q \frac{h^2}{4}$$

$$- 6 k \varphi_A + 10 k \varphi_B = - q \frac{h^2}{4},$$

la cui soluzione è

$$\varphi_A = - q \frac{h^2}{6 k}$$

$$\varphi_B = - q \frac{h^2}{8 k}.$$

L'ipotesi di piccoli spostamenti importa, se l'energia potenziale è lineare nelle coordinate lagrangiane (forze trasversali), come conseguenza generale che la E è somma di termini lineari e quadratici nelle coordinate lagrangiane; ne deriva che le (3-10) sono un sistema di n equazioni algebriche lineari non omogenee nelle n coordinate lagrangiane, a soluzione unica.

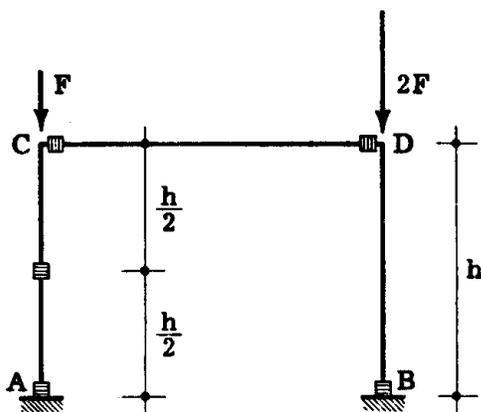


FIG. 3-11

f) Lo stesso portale della fig. 3-10 sia caricato da due forze verticali F e $2F$ sui ritti (fig. 3-11). Sia sempre valida l'ipotesi di piccoli sposta-

menti. Gli spostamenti verticali dei punti di applicazione di F e $2F$ sono rispettivamente (vedi nota a pag. 94)

$$v_C = \frac{h}{2} \frac{\varphi_A^2}{2} + \frac{h}{2} \frac{(2\varphi_B - \varphi_A)^2}{2} = \frac{h}{2} (\varphi_A^2 + 2\varphi_B^2 - 2\varphi_A\varphi_B)$$

$$v_D = \frac{h}{2} \varphi_B^2,$$

e quindi si può scrivere

$$\begin{aligned} E = & -F \frac{h}{2} (\varphi_A^2 + 2\varphi_B^2 - 2\varphi_A\varphi_B) - Fh\varphi_B^2 + \\ & + k (3\varphi_A^2 + 5\varphi_B^2 - 6\varphi_A\varphi_B). \end{aligned}$$

Le (3-10) si traducono nelle due equazioni lineari algebriche omogenee in φ_A e φ_B

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi_A} = \varphi_A (-Fh + 6k) + \varphi_B (Fh - 6k) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi_B} = \varphi_A (Fh - 6k) + \varphi_B (-4Fh + 10k) = 0.$$

Oltre alla soluzione banale $\varphi_A = \varphi_B = 0$, ne esistono altre se e solo se si verifica

$$\begin{vmatrix} -Fh + 6k & Fh - 6k \\ Fh - 6k & -4Fh + 10k \end{vmatrix} = 0,$$

e cioè

$$3F^2h^2 - 22Fhk + 24k^2 = 0.$$

Soluzioni diverse da zero, oltre la zero stessa, si hanno quindi se e solo se F attinge i due valori

$$F_1 = \frac{4}{3} \frac{k}{h}$$

$$F_2 = 6 \frac{k}{h}.$$

Per $F = F_1$ la soluzione non banale è

$$\varphi_{1A} = c$$

$$\varphi_{1B} = c ;$$

Per $F = F_2$ la soluzione non banale è

$$\varphi_{2A} = c$$

$$\varphi_{2B} = 0 .$$

Nella fig. 3-12 sono riportate le due deformate per $F = F_1$ ed $F = F_2$; c può assumere un valore qualunque (purchè molto piccolo).

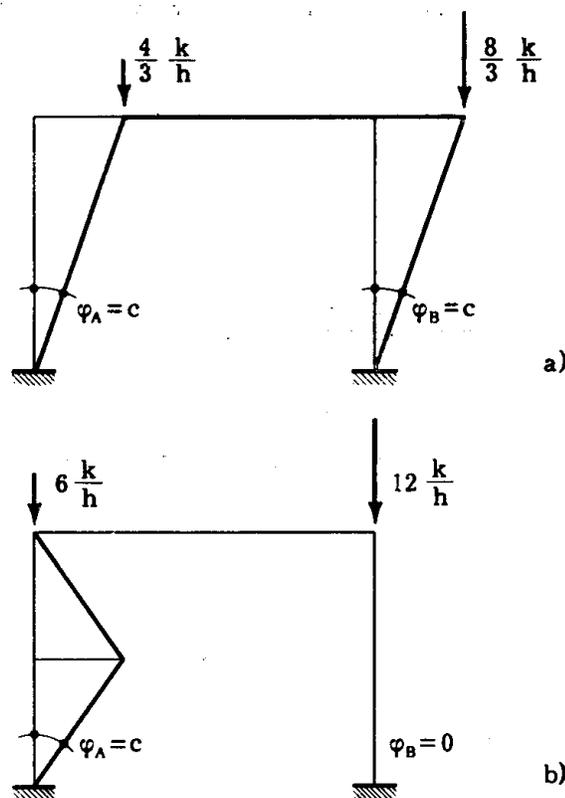


FIG. 3-12

Si osservi che è

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \varphi_A^2} = - F h + 6 k$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \varphi_B^2} = - 4 F h + 10 k$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \varphi_A \partial \varphi_B} = F h - 6 k$$

e quindi

$$\begin{aligned}\delta_2 \mathbf{E} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \varphi_A^2} (d\varphi_A)^2 + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \varphi_B^2} (d\varphi_B)^2 + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \varphi_A \partial \varphi_B} d\varphi_A d\varphi_B \right] = \\ &= \left(\frac{-Fh + 6k}{2} \right) (d\varphi_A)^2 + \left(\frac{-4Fh + 10k}{2} \right) (d\varphi_B)^2 + \\ &+ (Fh - 6k) d\varphi_A d\varphi_B .\end{aligned}$$

Si riconosce così che

$$\delta_2 \mathbf{E} = \mathbf{E} (d\varphi_A d\varphi_B) . \quad (g)$$

Ciò è vero in qualsiasi valore di φ_A e φ_B , perchè la \mathbf{E} è una forma quadratica omogenea, e quindi le derivate seconde sono costanti; e si evince anche dalla formula di Eulero. Se invece la \mathbf{E} è una funzione qualsiasi, come accade se si rigetta l'ipotesi di piccoli spostamenti, la (g) non è più valida ovunque; in prossimità però della configurazione $\varphi_A = \varphi_B = 0$, e cioè calcolando il $\delta_2 \mathbf{E}$ nella configurazione indeformata $((\delta_2 \mathbf{E})_0)$, la (g) è ancora valida, perchè in quell'intorno l'ipotesi di piccoli spostamenti è lecita. Quindi, una volta accertato che sotto certe forze la configurazione $\varphi_A = \varphi_B = 0$ è di equilibrio, la condizione necessaria e sufficiente perchè sotto quelle forze esistano altre configurazioni vicinissime pur esse di equilibrio (e cioè perchè da esse si diramino altre soluzioni) è che nell'intorno di $\varphi_A = \varphi_B = 0$ si verifichi

$$\delta_1 (\delta_2 \mathbf{E})_0 = 0 \quad (h)$$

e cioè ancora

$$\begin{aligned}\frac{\partial (\delta_2 \mathbf{E})_0}{\partial d\varphi_A} &= 0 \\ \frac{\partial (\delta_2 \mathbf{E})_0}{\partial d\varphi_B} &= 0 .\end{aligned} \quad (i)$$

Se, più in generale, sotto certe forze una configurazione C_0 definita da due qualsiasi valori φ_{A_0} e φ_{B_0} di φ_A e φ_B è di equilibrio, la condizione necessaria e sufficiente di esistenza di altre configurazioni $C_0 + \delta C$ vicinissime alla C_0 e pur esse di equilibrio è sempre la (i), dove però il $(\delta_2 \mathbf{E})_0$ deve essere calcolato in C_0 , e cioè a partire dai valori φ_{A_0} e φ_{B_0} che defi-

niscono C_0 . Posto infatti, come sempre può farsi, (fig. 3-13)

$$E(\varphi_{A_0} \varphi_{B_0}) = 0,$$

nell'intorno di C_0 risulta, fermandosi ai termini del secondo ordine,

$$E = E(d\varphi_A d\varphi_B) = \frac{1}{2} \Sigma \left(\frac{\partial^2 E}{\partial \varphi_i \partial \varphi_h} \right)_{C_0} d\varphi_i d\varphi_h = (\delta_2 E)_0.$$

Le condizioni di equilibrio

$$\frac{\partial E}{\partial d\varphi_A} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial d\varphi_B} = 0$$

equivalgono alle (i).

Quanto detto con riferimento alle strutture con due gradi di libertà

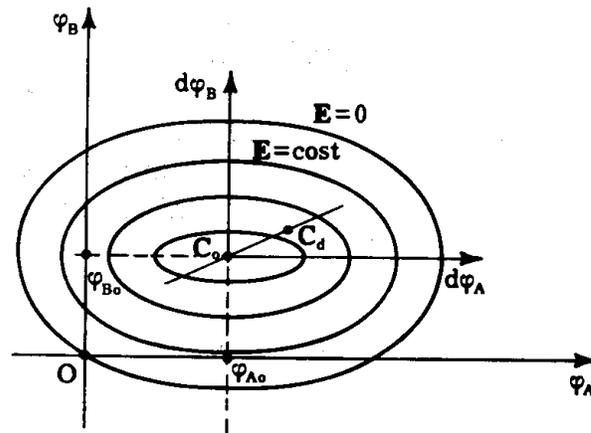


FIG. 3-13

vale per qualsiasi sistema olonomo. In tal caso le (i) si scrivono

$$\frac{\partial (\delta_2 E)_0}{\partial dc_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (11)$$

Le (3-11) sono equazioni algebriche lineari omogenee nelle dc_i , e ammettono altre soluzioni oltre quella banale se e solo se il determinante dei coefficienti è nullo:

$$\Delta_n = 0. \quad (12)$$

La (3-12) è un'equazione nel moltiplicatore delle forze applicate; ad ognuna delle soluzioni della (3-12) corrisponde una soluzione, definita a meno di una costante, delle (3-11), e quindi tutto un insieme di configurazioni variate di equilibrio $C_d = C_o + \delta C$ tra loro proporzionali.

E' opportuno osservare che, se la C_o è nota, il problema della ricerca delle configurazioni variate di equilibrio è di gran lunga semplificato, perchè bastano a risolverlo le sole (3-11) e (3-12), e la $(\delta_2 E)_o$ è di immediata costruzione; così è stato fatto per la struttura della fig. 3-11. Se invece la C_o non è nota, il problema è risolto dalle (3-10), (3-11) e (3-12) prese assieme.

Si osservi pure che se C_o è nota, la (3-12) è un'equazione algebrica di grado n nel moltiplicatore delle forze applicate, che fornisce n soluzioni.

4. La pratica applicazione del principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale nei continui elastici.

L'espressione (3-7) della E dipende dalle tre funzioni u, v, w del punto, ed è definita una volta assegnate queste tre funzioni; la E è quindi un *funzionale* delle tre funzioni u, v, w definite in ogni punto dell'interno e del contorno del corpo, e soddisfacenti determinate condizioni ai limiti. Ogni *variazione* $\delta u, \delta v, \delta w$ delle funzioni u, v, w (le $\delta u, \delta v, \delta w$ devono, come le u, v, w , essere definite in ogni punto del corpo con riferimento al corpo già deformato, e soddisfare alle stesse condizioni ai limiti) si accompagna ad una variazione δE del funzionale; la variazione δE si compone di una variazione del primo ordine $\delta_1 E$, una del secondo ordine $\delta_2 E$, e così via, rispettivamente contenenti i termini di primo, secondo ... ordine nelle $\delta u, \delta v, \delta w$. La variazione $\delta u, \delta v, \delta w$ avviene a partire dai valori u_o, v_o, w_o (cui corrisponde un valore E_o di E). Il principale problema del calcolo variazionale coincide con quello della ricerca delle soluzioni di equilibrio, e cioè consiste nel ricercare le funzioni u_o, v_o, w_o tali che, per qualunque terna di variazioni $\delta u, \delta v, \delta w$, risulti $\delta_1 E = 0$; le u_o, v_o, w_o sono le cosiddette *estremali*, e sono fornite da particolari equazioni differenziali dette *euleriane* (*).

Nel caso in esame, la soluzione u_o, v_o, w_o del problema dell'equilibrio elastico è ricondotta alla ricerca della terna di estremali dell'energia potenziale totale, e le euleriane corrispondenti sono le equazioni dell'equilibrio elastico.

(*) Si commette così l'errore di considerare i termini del primo ordine nelle $\delta u, \delta v, \delta w$ coincidenti con quelli del primo ordine nelle dc_1 . L'errore è trascurabile nell'ipotesi di piccoli spostamenti.

Si prenda in esame una trave AB comunque vincolata in A e B, ad asse rettilineo (fig. 3-14), soggetta al carico distribuito $q(z)$; se ci si li-

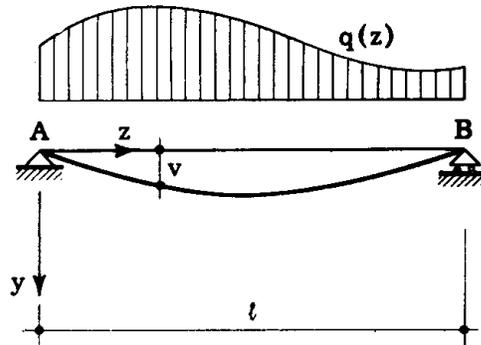


FIG. 3-14

mita a considerare l'effetto del momento flettente, l'energia di deformazione è, nell'ipotesi di piccoli spostamenti,

$$L = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dz = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{1}{EI} \left(EI \frac{d^2v}{dz^2} \right)^2 dz = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{d^2v}{dz^2} \right)^2 dz$$

e indicando con uno e due apici le derivate prima e seconda,

$$L = \frac{1}{2} \int_0^l EI v''^2 dz .$$

L'energia potenziale totale è perciò

$$E = \frac{1}{2} \int_0^l EI v''^2 dz - \int_0^l qv dz . \quad (13)$$

Si ha

$$\begin{aligned} E + \delta E &= \frac{1}{2} \int_0^l EI v''^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^l EI (\delta v)''^2 dz + \\ &+ \int_0^l EI v'' (\delta v)'' dz - \int_0^l qv dz - \int_0^l q \delta v dz \end{aligned}$$

da cui

$$\delta_1 E = \int_0^l EI v'' (\delta v)'' dz - \int_0^l q \delta v dz . \quad (l)$$

Risolvendo per parti il primo integrale si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^l EI v'' (\delta v)'' dz &= \left[EI v'' (\delta v)' \right]_0^l - \int_0^l (EI v'')' (\delta v)' dz = \\ &= \left[EI v'' (\delta v)' \right]_0^l - \left[(EI v'')' \delta v \right]_0^l + \int_0^l (EI v'')'' \delta v dz . \end{aligned} \quad (m)$$

Se l'estremo A o B della trave è appoggiato, ivi è $v = \delta v = 0$, $v'' = (\delta v)'' = 0$; se è libero, $v'' = (\delta v)'' = 0$, $(EI v'')' = [EI (\delta v)'''] = 0$ (*); se è incastrato, $v = \delta v = 0$, $v' = (\delta v)' = 0$; in ciascuno di questi casi le due parentesi della (m) sono nulle, e perciò

$$\delta_1 E = \int_0^l (EI v'')'' \delta v dz - \int_0^l q \delta v dz . \quad (n)$$

Poichè $\delta_1 E = 0$ deve essere verificata per qualsiasi variazione δv , si ricava l'euleriana che fornisce v

$$(EI v'')'' = q , \quad (14)$$

equazione della linea elastica della trave soggetta al carico distribuito $q(z)$.

Sul piano pratico la ricerca delle euleriane connesse con la stazionarietà dell'energia potenziale totale presenta però scarso interesse, poichè alle stesse euleriane si può pervenire, con maggiore rapidità ed evidenza fisica, attraverso condizioni di equilibrio, non essendo le euleriane che le particolarizzazioni delle equazioni generali dell'equilibrio elastico.

Il principio della minima energia totale diviene invece un potente strumento d'indagine attraverso l'algoritmo di *Ritz*, o delle *serie minimizzanti*. Si ponga

$$\begin{aligned} u &= \sum_1^n A_1 u_1 \\ v &= \sum_1^n B_1 v_1 \\ w &= \sum_1^n C_1 w_1 , \end{aligned} \quad (15)$$

(*) Si ha

$$T = M' = (-EI v''')' = 0 .$$

ove A_i, B_i, C_i sono delle costanti, ed u_i, v_i, w_i funzioni di x, y, z definite in ogni punto del corpo e soddisfacenti ciascuna alle condizioni ai limiti. Se è valida l'ipotesi di piccolezza delle u, v, w , e cioè delle A_i, B_i, C_i , sostituendo le (3-15) nelle (3-7) il funzionale E risulta, ad integrazioni eseguite, somma di un termine L indipendente dalle forze esterne quadratico nelle A_i, B_i, C_i e di un termine P in A_i, B_i, C_i lineare se esistono solo forze del tipo trasversale. La E si trasforma perciò da un funzionale delle u, v, w in una funzione quadratica dei $3n$ parametri A_i, B_i, C_i ; si è passati, in altre parole, dal continuo al discreto, assimilando il sistema continuo ad un sistema olonomo. La condizione di stazionarietà del funzionale E si traduce, perciò, nella condizione di stazionarietà della funzione $E(A_i, B_i, C_i)$ rispetto alle variabili A_i, B_i, C_i . Le $3n$ equazioni che se ne traggono

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial A_i} &= 0 \\ \frac{\partial E}{\partial B_i} &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ \frac{\partial E}{\partial C_i} &= 0\end{aligned}\tag{16}$$

sono equazioni algebriche lineari nelle $3n$ incognite A_i, B_i, C_i . In presenza di sole forze trasversali, le equazioni sono non omogenee, il determinante Δ dei coefficienti del sistema è diverso da zero, e la soluzione è unica e finita (*).

In presenza anche di forze assiali, forze cui si associa una energia potenziale quadratica nelle A_i, B_i, C_i , il determinante può, per particolari valori del moltiplicatore delle forze assiali, essere nullo, ed in tal caso la soluzione diviene ∞ . In presenza di sole forze assiali, se si trascura la loro energia potenziale la soluzione è sempre nulla. Tenendone conto, il sistema è omogeneo, ed ha soluzione nulla se $\Delta \neq 0$, indeterminata per quei valori del moltiplicatore dei carichi cui corrisponde $\Delta = 0$.

Ad ogni insieme di valori A_i, B_i, C_i corrisponde una configurazione congruente, ma non equilibrata del sistema; sotto questo aspetto il suddetto procedimento derivante dal principio della minima energia totale è, come già detto, il duale del già esposto procedimento derivante dal principio dei lavori virtuali e inteso a ricercare i valori delle reazioni iperstatiche, poichè le (3-16) fissano la soluzione congruente ed equilibrata fra le infinite soluzioni congruenti ma non equilibrate.

Immediata applicazione delle (3-16) si ha, nel caso delle travi, uti-

(*) In assenza di forze, le (3-16) diventano $\partial L / \partial A_i = 0$ etc., e costituiscono un sistema omogeneo, a soluzione certamente nulla; il determinante, che coincide con quello delle (3-16), deve perciò essere non nullo.

lizzando gli sviluppi in serie di Fourier. Si consideri per esempio una trave di sezione costante (fig. 3-15) appoggiata alle estremità, e soggetta ad una coppia \mathcal{M} alla generica ascissa a . Posto

$$v = \sum_1^{\infty} v_n \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l} \quad (o)$$

si osserva che ogni funzione $\operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l}$ rispetta la condizione $v = v'' = 0$ per $z=0$ e $z=l$.

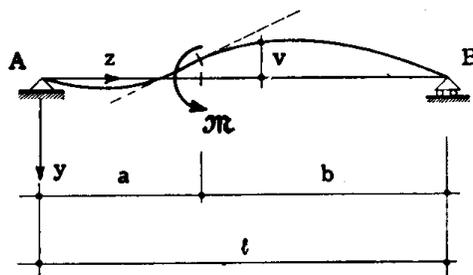


FIG. 3-15

L'energia di deformazione è (3-13)

$$L = \frac{1}{2} \int_0^l EI v''^2 dz = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(-\frac{\pi^2}{l^2} \sum v_n n^2 \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l} \right)^2 dz$$

e ricordando che

$$\int_0^l \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l} \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{l} dz = \begin{cases} \frac{l}{2} & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad (17)$$

si ha

$$L = \frac{\pi^4 EI}{4 l^3} \sum v_n^2 n^4. \quad (18)$$

L'energia potenziale P della coppia è (*)

$$P = -\mathcal{M}\varphi = \mathcal{M} \cdot (v')_{z=a}$$

(*) Confondendo gli angoli con le tangenti, per l'ipotesi di piccolezza degli spostamenti, le rotazioni φ delle sezioni possono essere fornite da $\varphi = -v'$; il segno deriva dall'essere φ positivo se antiorario (attesa l'orientazione di y e di z).

La coppia \mathcal{M} è anche essa positiva se antioraria.

da cui

$$P = \mathcal{N} \frac{\pi}{l} \sum v_n n \cos \frac{n \pi a}{l}$$

$$E = \frac{\pi^4 EI}{4 l^3} \sum v_n^2 n^4 + \mathcal{N} \frac{\pi}{l} \sum v_n n \cos \frac{n \pi a}{l} . \quad (p)$$

La condizione

$$\frac{\partial E}{\partial v_n} = \frac{\pi^4 EI n^4}{4 l^3} 2 v_n + \mathcal{N} \frac{\pi}{l} n \cos \frac{n \pi a}{l} = 0$$

fornisce il generico coefficiente dello sviluppo (o):

$$v_n = - \mathcal{N} \frac{2 l^2}{\pi^3 n^3 EI} \cos \frac{n \pi a}{l} . \quad (q)$$

Se la trave è soggetta al generico carico $q(z)$, sviluppando q in serie di Fourier

$$q = \sum_1^{\infty} q_n \text{sen} \frac{n \pi z}{l}$$

si ha

$$P = - \int_0^l q v dz = - \frac{l}{2} \sum q_n v_n$$

da cui

$$E = \frac{\pi^4 EI}{4 l^3} \sum v_n^2 n^4 - \frac{l}{2} \sum q_n v_n . \quad (19)$$

La condizione $\partial E / \partial v_n = 0$ fornisce

$$v_n = \frac{q_n l^4}{n^4 \pi^4 EI} . \quad (20)$$

La (3-20), può anche trarsi direttamente dall'equazione della linea elastica per travi di sezione costante

$$EI v'''' = q$$

come si vedrà nel capitolo delle travi inflesse.

La (3-20) è applicabile in qualsiasi caso, purchè la trave sia di sezione

costante; qualsiasi carico $q(z)$ infatti può svilupparsi in serie di Fourier. Il coefficiente q_n è fornito da

$$q_n = \frac{2}{l} \int_0^l q \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l} dz ; \quad (21)$$

per q costante è

$$q_n = \frac{4q}{n\pi} ; \quad (22)$$

per q costituito da una forza F concentrata all'ascissa a è

$$q_n = \frac{2F}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{l} ; \quad (23)$$

per q uniformemente distribuito tra le ascisse a e b è

$$q_n = \frac{2p}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi a}{l} - \cos \frac{n\pi b}{l} \right) ; \quad (24)$$

per q costituito da una coppia \mathcal{M} all'ascissa a è

$$q_n = - \frac{2\mathcal{M}}{l^2} n\pi \cos \frac{n\pi a}{l} . \quad (25)$$

Nel caso in esame ciascuna delle (3-16) contiene una sola incognita; è stato perciò possibile ottenere il coefficiente generico dello sviluppo completo. Se la sezione della trave non è costante, ogni equazione contiene più termini v_n , ed è necessario quindi limitarsi ad un ragionevole numero di coefficienti dello sviluppo (o).

Ancora nel caso di trave a sezione costante, se la coppia \mathcal{M} è applicata in A si ottiene (fig. 3-16)

$$\begin{aligned} v &= - \frac{2\mathcal{M} l^2}{\pi^3 EI} \sum \frac{1}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l} \\ \varphi &= - v' = \frac{2\mathcal{M} l}{\pi^2 EI} \sum \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi z}{l} \\ M &= - EI v'' = - \frac{2\mathcal{M}}{\pi} \sum \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l} . \end{aligned} \quad (r)$$

L'espressione di M è

$$M = \mathcal{N} \left(\frac{z}{l} - 1 \right);$$

il coefficiente ennesimo M_n del suo sviluppo in serie di Fourier è

$$M_n = \frac{2}{l} \int_0^l \mathcal{N} \left(\frac{z}{l} - 1 \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l} dz = - \frac{2 \mathcal{N}}{n\pi};$$

si ritrova perciò l'ultima delle (r).

L'espressione di T sarebbe fornita da

$$T = \frac{dM}{dz} = -EI v''' = - \frac{2 \mathcal{N}}{l} \sum \cos \frac{n\pi z}{l}$$

che non converge; e infatti T è costante, e pari ad \mathcal{N}/l , e una costante non può essere sviluppata in serie di Fourier di coseni.

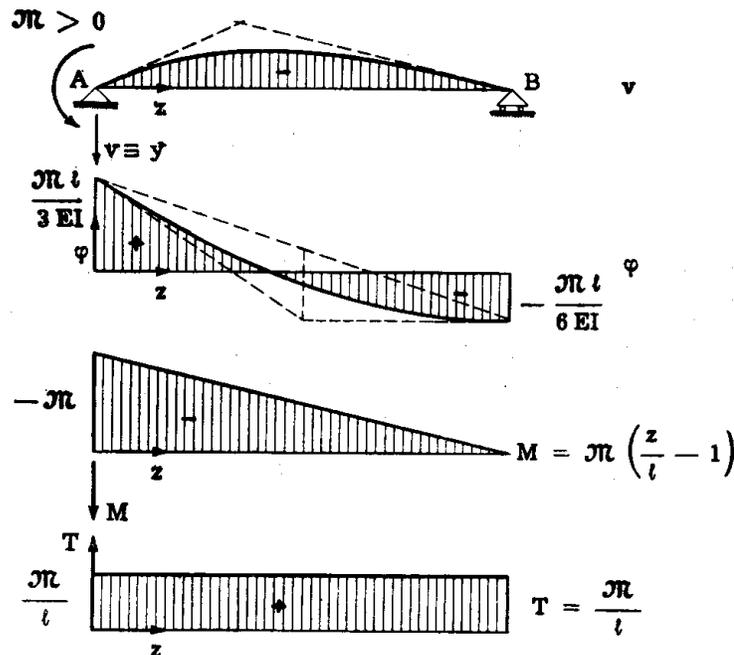


FIG. 3-16

Si noti che, se \mathcal{N} è applicata in A, per $z=0$ è $v'' \neq 0$, mentre ogni funzione $\operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l}$ ha la derivata seconda nulla per $z=0$. La stessa difficoltà si presenta nello sviluppo alla Fourier di una costante; in questi

casi si ammette che in $z=0$ la funzione sia zero, ma con derivata ∞ , in modo che nel punto immediatamente vicino a $z=0$ la funzione abbia assunto il suo valore effettivo.

Dalle (r) si osserva che sviluppando la linea elastica in serie di Fourier si ha una buona convergenza per gli abbassamenti, ove il termine n -esimo contiene n^3 al denominatore nel caso di una coppia applicata, n^4 nel caso di una forza, ed n^5 nel caso di un carico distribuito, e una convergenza meno buona man mano che si passa alle inclinazioni, ai momenti e ai tagli, nelle cui espressioni l'esponente di n al denominatore si abbassa. E' questo un inconveniente che si accompagna in generale a tutti i procedimenti approssimati che conducono alla determinazione degli abbassamenti e, da questi, alle sollecitazioni.

5. Il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale in presenza di carichi assiali.

Si supponga che la trave di sezione costante della fig. 3-15 sia soggetta, oltre che alla coppia \mathcal{M} , ad una forza assiale F diretta come nella fig. 3-17.

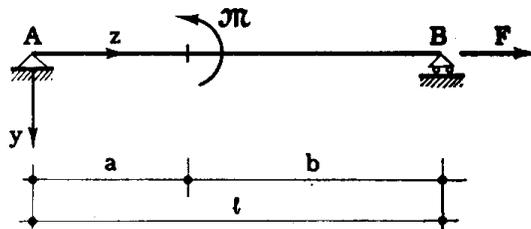


FIG. 3-17

Gli spostamenti $v(z)$ (essi bastano a definire la configurazione) si accompagnano ad un avvicinamento Δw tra le due facce A e B (fig. 3-18).

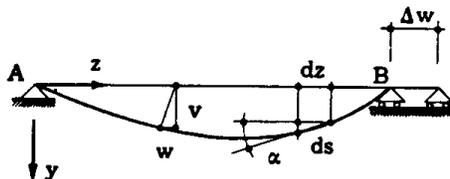


FIG. 3-18

Poichè ci si limita a considerare le deformazioni provocate dal momento flettente, l'asse AB della trave non subisce variazioni di lunghezza.

Si ha (vedi form. c del § 1-2)

$$w_B = - \Delta w = - \frac{1}{2} \int_0^l v'^2 dz . \quad (26)$$

Per le (o) si ha

$$w_B = - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\pi}{l} \sum n v_n \cos \frac{n \pi z}{l} \right)^2 dz = - \frac{\pi^2}{4l} \sum n^2 v_n^2 \quad (27)$$

e l'energia totale E diviene

$$E = \frac{\pi^4 EI}{4 l^3} \sum v_n^2 n^4 + \quad (s)$$

$$+ \mathcal{M} \frac{\pi}{l} \sum v_n n \cos \frac{n \pi a}{l} + \frac{F \pi^2}{4 l} \sum v_n^2 n^2 .$$

La condizione $\partial E / \partial v_n = 0$ fornisce in tal caso

$$v_n = - \frac{2 l^2 \mathcal{M} \cos \frac{n \pi a}{l}}{\pi^3 n^3 EI \left(1 + \frac{F l^2}{\pi^2 n^2 EI} \right)} \quad (t)$$

che si differenzia dalla (q) per la presenza della parentesi al denominatore. Per $F=0$ si ricade nella (q); invece per

$$F = - n^2 \pi^2 \frac{EI}{l^2} = F_{cn} \quad (28)$$

risulta $v_n = \infty$. L'espressione (3-28) si riconoscerà coincidente (Vol. V) con il valore dell' n -esimo carico critico dell'asta di Eulero. E' interessante notare che l'espressione della (3-27), e quindi la parentesi a denominatore della (t), sono le stesse quale che sia il carico agente sulla trave; perciò può scriversi, chiamando v_n il termine n -esimo dello sviluppo di Fourier della deformata dovuta ad un certo carico, e v_n^* lo stesso termine dovuto allo stesso carico ed alla forza assiale F (positiva se di trazione)

$$v_n^* = \frac{v_n}{1 - \frac{F}{F_{cn}}} \quad (29)$$

Nella fig. 3-19 è riportato il diagramma $F v_n^*$, con i due asintoti $F = F_{cn}$ e $v_n^* = 0$.

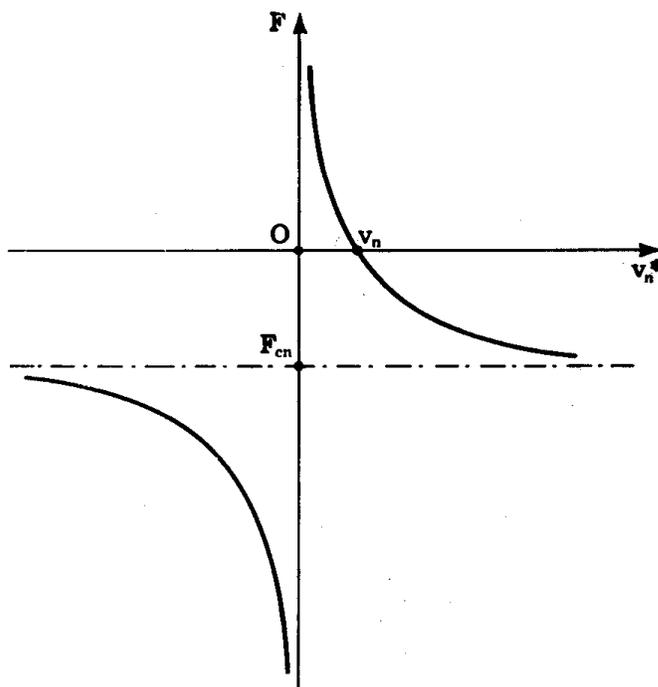


FIG. 3-19

Se sulla trave agisce la sola F , si ha

$$E = \frac{\pi^4 EI}{4 l^3} \sum v_n^2 n^4 + \frac{F \pi^2}{4 l} \sum v_n^2 n^2$$

e la condizione di equilibrio fornisce

$$\frac{\partial E}{\partial v_n} = \left(\frac{\pi^4 EI}{2 l^3} n^4 + \frac{F \pi^2}{2 l} n^2 \right) v_n = 0 .$$

Essa è soddisfatta comunque per $v_n = 0$; ma se è

$$F = - \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} = F_{cn} ,$$

essa è anche soddisfatta per qualsiasi valore di v_n .

Si ricordi però che v_n deve essere piccola nei confronti di l , per il rispetto delle ipotesi a base della trattazione.

I due esempi svolti in questo paragrafo sono condizionati dall'ipotesi

di piccoli spostamenti, nel senso che si basano sulle (3-13); nel secondo il principio di Kirchhoff cade però in difetto. Ciò accade pure negli esempi del § 3, quando sono agenti solo forze del tipo assiale. Il fatto si spiega perchè l'ipotesi di piccoli spostamenti non è stata sempre rispettata; infatti sono stati presi in considerazione gli spostamenti quadratici nelle coordinate lagrangiane.

Per lo stesso motivo cade in difetto il principio di sovrapposizione degli effetti, e cioè gli spostamenti provocati dai carichi assiali, a parità di carichi trasversali, non sono proporzionali ai carichi assiali (fig. 3-19).

Interessante anche il caso della trave con tre cerniere, caricata da una forza F al centro (fig. 3-20). In questa struttura uno spostamento η

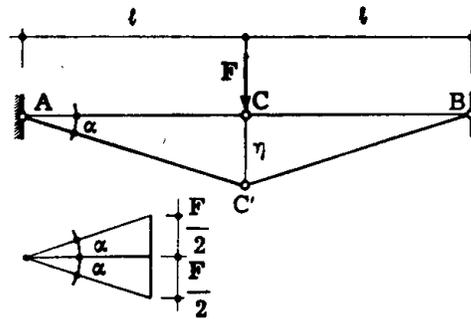


FIG. 3-20

modifica la posizione relativa della forza F rispetto al sistema, e il rapporto tra la forza e le tensioni interne. Infatti la forza assiale N in AC e CB , che sarebbe ∞ per $\alpha = 0$, è invece, per $\alpha \neq 0$, ma abbastanza piccolo, fornita da

$$N = \frac{F}{2\alpha}.$$

L'allungamento dell'asta AC è

$$\sqrt{l^2 + l^2\alpha^2} - l = l(\sqrt{1 + \alpha^2} - 1) \approx l\left(1 + \frac{\alpha^2}{2} - 1\right) = l\frac{\alpha^2}{2}$$

da cui

$$\varepsilon = \frac{\alpha^2}{2}$$

$$N = \varepsilon EA = \frac{\alpha^2 EA}{2}.$$

E' perciò

$$\begin{aligned}
 F &= 2 \alpha N = \alpha^3 EA \\
 \alpha &= \sqrt[3]{\frac{F}{EA}} \\
 \eta &= l \alpha = l \sqrt[3]{\frac{F}{EA}} \quad (u)
 \end{aligned}$$

L'energia L di deformazione è

$$L = \int_0^\eta F' d\eta' = \frac{EA}{l^3} \int_0^\eta \eta'^3 d\eta' = \frac{EA \eta^4}{4 l^3} = \frac{F\eta}{4} .$$

L'energia totale è

$$E = L + P = \frac{EA \eta^4}{4 l^3} - F\eta$$

e la condizione $\partial E / \partial \eta = 0$ fornisce

$$\frac{EA \eta^3}{l^3} - F = 0$$

da cui

$$\eta^3 = \frac{l^3 F}{EA}$$

che coincide con la (u). E' valido dunque il principio di stazionarietà dell'energia totale, mentre non è valido il principio di Clapeyron, e gli spostamenti non sono proporzionali alle forze.

Anche il principio dei lavori virtuali è valido, perchè per effetto di un $d\eta$, cui corrisponde un $d\alpha = d\eta/l$, si ha

$$d \left(\frac{l\alpha^2}{2} \right) = l\alpha d\alpha = \alpha d\eta$$

e perciò

$$L_1 = 2 N d \left(\frac{l\alpha^2}{2} \right) = \frac{F}{\alpha} \alpha d\eta = F d\eta = L_e .$$

Se si fa riferimento agli spostamenti invece che alle loro variazioni si ha

$$L_1 = 2 N dt = \frac{\alpha^4 l EA}{2}$$

$$L_e = F \eta = \alpha^4 l EA$$

e il principio non è più valido. E infatti, mentre la variazione di η non varia la posizione relativa tra le forze e i punti del corpo (nel caso in esame l'angolo tra le due aste, e l'angolo tra la forza F e ciascuna delle due aste), lo spostamento η induce tali variazioni: basti a ciò osservare che lo sforzo normale N è funzione di α , e perciò di η .

6. Il primo teorema di stazionarietà dell'energia di deformazione.

Se la struttura non è soggetta a forze esterne, il termine $\delta_1 P$ è nullo, e perciò il principio di stazionarietà dell'energia totale E si tramuta in quello di stazionarietà dell'energia di deformazione L .

Si verifica questo caso quando una struttura è soggetta solo a cedimenti vincolari o distorsioni; si può così enunciare il *primo teorema di stazionarietà dell'energia di deformazione*: «se una struttura elastica presenta cedimenti vincolari o, in generale, distorsioni, condizione necessaria e sufficiente perchè una configurazione C sia di equilibrio è che l'energia di deformazione in corrispondenza di C sia stazionaria rispetto a qualsiasi variazione congruente della configurazione stessa». Anche il teorema di stazionarietà dell'energia di deformazione, come quello di stazionarietà dell'energia totale, fissa la configurazione congruente ed equilibrata tra le infinite configurazioni congruenti ma non equilibrate.

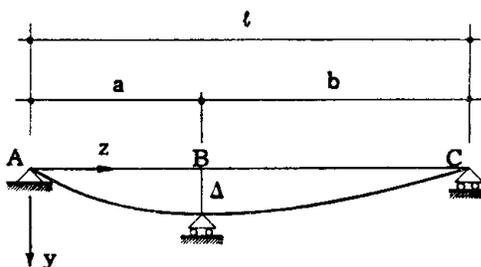


FIG. 3-21

Si consideri la trave di sezione costante su tre appoggi della fig. 3-21 in cui l'appoggio centrale presenta il cedimento Δ .

Sviluppando la deformata in serie di Fourier si ha

$$v = \sum_1^{\infty} v_n \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l}.$$

Per il rispetto del vincolo B deve aversi

$$\sum v_n \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{l} = \Delta.$$

Arrestando lo sviluppo al termine m -esimo, le incognite sono $m-1$, poichè uno dei termini, per esempio il primo, è funzione degli altri:

$$v_1 \operatorname{sen} \frac{\pi a}{l} = \Delta - \sum_2^m v_n \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{l}.$$

E' perciò

$$v = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi a}{l}} \left(\Delta - \sum_2^m v_n \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{l} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} + \sum_2^m v_n \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l}. \quad (v)$$

L'energia di deformazione è (3-18)

$$L = \frac{\pi^4 EI}{4 l^3} \left\{ \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi a}{l}} \left[\Delta^2 + \left(\sum_2^m v_n \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{l} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \Delta \sum_2^m v_n \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{l} \right] + \sum_2^m v_n^2 n^4 \right\}.$$

Le $m-1$ condizioni

$$\frac{\partial L}{\partial v_n} = 0$$

forniscono il sistema di $m-1$ equazioni algebriche lineari non omogenee del tipo

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi a}{l}} \left[2 \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{l} \sum_2^m v_h \operatorname{sen} \frac{h\pi a}{l} - 2 \Delta \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{l} \right] + 2 v_n n^4 = 0$$

che può scriversi

$$v_n n^4 + \frac{\text{sen } \frac{n \pi a}{l}}{\text{sen}^2 \frac{\pi a}{l}} \left(\sum_2^m v_h \text{sen } \frac{h \pi a}{l} - \Delta \right) = 0 . \quad (z)$$

Contrariamente a quanto accade nell'esempio del § 4, il sistema (z) è completo; è necessario perciò arrestarsi ad un certo numero di termini dello sviluppo in serie. Così pure si noti come il sistema non contiene il termine EI. In generale, in una trave le deformazioni dipendenti dai cedimenti vincolari o dalle distorsioni sono funzioni dei rapporti tra le quantità EI relative alle varie sezioni, e non dei valori di queste quantità, mentre dagli effettivi valori di EI dipendono le caratteristiche dello sforzo; è questo l'aspetto duale del fatto che in una trave le caratteristiche dello sforzo indotte da carichi esterni non dipendono dagli effettivi valori di EI (nelle travi isostatiche sono indipendenti del tutto da EI, nelle travi iperstatiche dipendono solo dalla legge di variazione di EI lungo l'ascissa) mentre sono funzioni di EI le deformazioni.

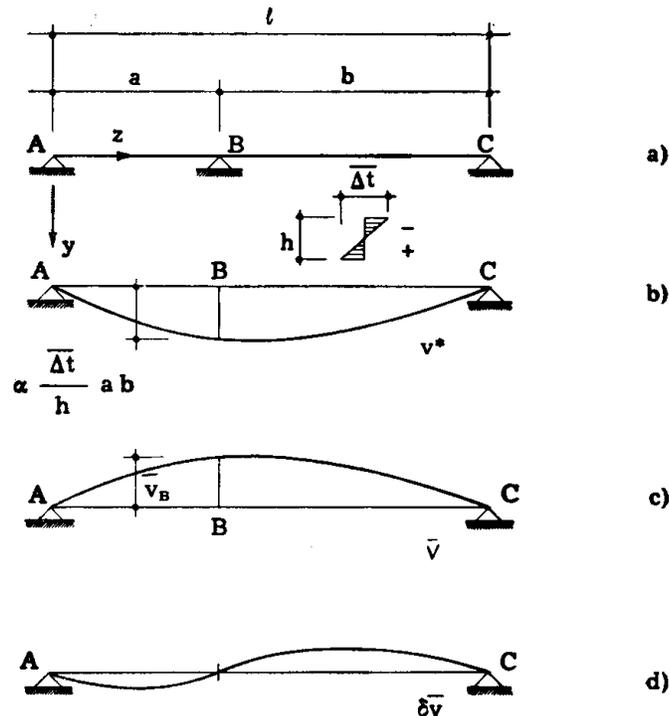


FIG. 3-22

Si consideri la stessa trave della fig. 3-21, a tre appoggi, soggetta alla variazione termica $\bar{\Delta t}$ variabile linearmente lungo l'altezza e annullantesi nel baricentro della sezione retta (fig. 3-22 a); è questo un caso par-

icolare di distorsione, rientrante nella classe delle distorsioni di Volterra. In tal caso le $\varepsilon_i^* \gamma_{jk}^*$ rispettano di per se le condizioni di congruenza, e perciò danno luogo ad una terna di spostamenti $u^* v^* w^*$ che rispettano le condizioni di continuità del corpo, ma in genere non rispettano le condizioni di vincolo; e cioè le $\varepsilon_i^* \gamma_{jk}^*$ danno luogo ad una terna $u^* v^* w^*$ compatibile con i vincoli sulla struttura resa isostatica.

Soppresso il vincolo B, la $\bar{\Delta t}$ si associa ad una deformata v^* fornita (fig. 3-22-b) da

$$v^* = \frac{\alpha \bar{\Delta t}}{2h} z (l - z) .$$

Per il rispetto del vincolo in B sorge in B una reazione, che fornisce gli spostamenti \bar{v} (fig. 3-22 c) tali da verificare la relazione

$$\bar{v}_B = - \frac{\alpha \bar{\Delta t}}{2h} a b .$$

L'energia di deformazione è

$$L = \frac{1}{2} \int_0^l EI \bar{v}''^2 dz .$$

Le variazioni $\delta \bar{v}$ rispetto alle quali L è stazionaria sono quelle del tipo riportato nella fig. 3-22 d, che rispettano le condizioni di vincolo della trave reale. Si può porre \bar{v} nella forma (v) , ove $\Delta = \bar{v}_B$; ogni insieme di incrementi dei dv_n corrisponde ad una variazione $\delta \bar{v}$ del tipo suddetto. La condizione di stazionarietà

$$\frac{\partial L}{\partial v_n} = 0 ,$$

porta alle (z), ove $\Delta = v_B$.

7. L'energia potenziale totale nella torsione non uniforme.

Dalla (2-37) si trae l'espressione dell'energia di deformazione relativa al tronco elementare lungo dz

$$dL = \frac{1}{2} \left[C_1 \left(\frac{d\vartheta}{dz} \right)^2 + C_2 \left(\frac{d^2\vartheta}{dz^2} \right)^2 \right] dz \quad (30)$$

o, indicando con apici le derivate rispetto a z ,

$$dL = \frac{1}{2} (C_1 \vartheta'^2 + C_2 \vartheta''^2) dz . \quad (31)$$

Per tutta la trave è perciò

$$L = \frac{1}{2} \int_0^l C_1 \vartheta'^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^l C_2 \vartheta''^2 dz . \quad (32)$$

Se la trave è di sezione costante si può porre

$$L = \frac{C_1}{2} \int_0^l \vartheta'^2 dz + \frac{C_2}{2} \int_0^l \vartheta''^2 dz . \quad (33)$$

Può scriversi

$$\int_0^l \vartheta'' \vartheta'' dz = \left[\vartheta'' \vartheta' \right]_0^l - \int_0^l \vartheta''' \vartheta' dz ;$$

ai limiti l'espressione in parentesi è sempre nulla, come è facile verificare, quindi si ha pure (trave a sezione costante)

$$L = \frac{C_1}{2} \int_0^l \vartheta'^2 dz - \frac{C_2}{2} \int_0^l \vartheta' \vartheta''' dz . \quad (34)$$

Considerare la non uniformità della torsione non implica termini energetici di scambio con le altre sollecitazioni, per quanto già detto nel § 2-12.

L'energia potenziale delle coppie m_t applicate è

$$P = - \int_0^l m_t \vartheta dz . \quad (35)$$

L'energia potenziale totale è perciò

$$E = \frac{1}{2} \int_0^l C_1 \vartheta'^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^l C_2 \vartheta''^2 dz - \int_0^l m_t \vartheta dz . \quad (36)$$

Si rifaccia l'ipotesi di trave a sezione costante.

Per una variazione $\delta\vartheta$ di ϑ la variazione prima di E è

$$\delta_1 E = C_1 \int_0^l \vartheta' (\delta\vartheta)' dz + C_2 \int_0^l \vartheta'' (\delta\vartheta)'' dz - \int_0^l m_t \delta\vartheta dz .$$

Si può scrivere

$$\int_0^t \vartheta' (\delta\vartheta)' dz = \left[\vartheta' \delta\vartheta \right]_0^t - \int_0^t \vartheta'' \delta\vartheta dz = - \int_0^t \vartheta'' \delta\vartheta dz$$

$$\int_0^t \vartheta'' (\delta\vartheta)'' dz = \left[\vartheta'' (\delta\vartheta)' \right]_0^t - \int_0^t \vartheta''' (\delta\vartheta)' dz = - \int_0^t \vartheta''' (\delta\vartheta)' dz$$

$$\int_0^t \vartheta''' (\delta\vartheta)' dz = \left[\vartheta''' \delta\vartheta \right]_0^t - \int_0^t \vartheta^{iv} \delta\vartheta dz = - \int_0^t \vartheta^{iv} \delta\vartheta dz .$$

E' perciò

$$\delta_1 \mathbf{E} = - C_1 \int_0^t \vartheta'' \delta\vartheta dz + C_2 \int_0^t \vartheta^{iv} \delta\vartheta dz - \int_0^t m_t \delta\vartheta dz .$$

Se ϑ è la configurazione di equilibrio, deve essere

$$\delta_1 \mathbf{E} = 0$$

per qualsiasi variazione $\delta\vartheta$; e viceversa. La condizione necessaria e sufficiente di equilibrio della ϑ è perciò

$$C_2 \vartheta^{iv} - C_1 \vartheta'' = m_t ; \quad (37)$$

si ritrova perciò la (10-56) del Vol. II.