

CAPITOLO II

**ESTENSIONE DEL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI
AI SISTEMI DEFORMABILI**

1) Sistemi olonomi e coordinate lagrangiane.

Si consideri un sistema costituito da più corpi rigidi, collegati da vincoli tra di loro ed al suolo; la configurazione C di questo sistema sia definita se sono fissati i valori (col segno) di l parametri indipendenti c_i . I parametri c_i si chiamano *coordinate lagrangiane* del sistema.

Le relazioni che forniscono le coordinate $x y z$ di un punto generico del sistema sono perciò, nel caso più generale,

$$\begin{aligned}x &= x(c_1 c_2 \dots c_l T) \\y &= y(c_1 c_2 \dots c_l T) \\z &= z(c_1 c_2 \dots c_l T)\end{aligned}\tag{1}$$

dove T è la variabile tempo.

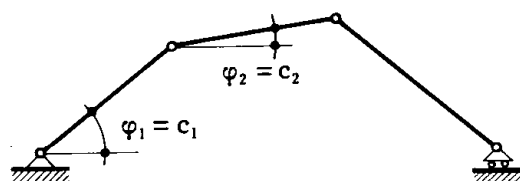
Anche i coseni direttori di una generica retta del sistema sono forniti da

$$\begin{aligned}\alpha_x &= \alpha_x(c_1 c_2 \dots c_l T) \\ \alpha_y &= \alpha_y(c_1 c_2 \dots c_l T) \\ \alpha_z &= \alpha_z(c_1 c_2 \dots c_l T) .\end{aligned}\tag{2}$$

Nella fig. 2-1 è riportato l'esempio di un sistema piano; la configurazione è definita dai valori dei due angoli φ_1 e φ_2 .

Sistemi del tipo suddetto si chiamano *olonomi*; il termine è dovuto ad *H. Hertz*, e la sua etimologia è giustificata dal fatto che, come si farà presto osservare, tutti i vincoli si traducono in relazioni in termini *finiti* tra le coordinate di un certo numero di punti ed i coseni direttori di un certo numero di rette. La posizione di ogni corpo rigido è definita da sei quantità; per esempio sei delle nove coordinate di tre punti $P_1 P_2 P_3$ non

allineati, (di cui sei soltanto sono indipendenti, dovendosi soddisfare le equazioni di invarianza delle tre lunghezze $P_1 P_2$, $P_2 P_3$, $P_1 P_3$).



sistema piano

$$t = 3$$

$$s = 7$$

$$l = 2$$

$$i = 0$$

$$v = 3t - l = 7$$

FIG. 2-1

Se t è il numero dei corpi rigidi, $6t$ sono le quantità q_h che ne definiscono le posizioni ($3t$ nei sistemi piani); esse sarebbero le coordinate lagrangiane del sistema ove fossero soppressi tutti i vincoli. Si ha, in presenza dei vincoli,

$$q_h = q_h(c_1 c_2 \dots c_l T) \quad (h = 1, 2 \dots 6t) \quad (3)$$

Si fa l'ipotesi che le $6t$ funzioni (2-3) siano, oltre che uniformi, continue e derivabili fino al secondo ordine almeno, in un certo dominio di variabilità delle c_i .

Ad ogni insieme di c_i corrisponde una sola configurazione del sistema; perchè a due insiemi di c_i distinti corrispondano due configurazioni distinte del sistema occorre e basta che la matrice jacobiana delle (2-3) sia di ordine l .

In questo caso ad ogni variazione dc_i delle c_i corrisponde una variazione δC della configurazione, le coordinate lagrangiane sono *essenziali* (in seguito si farà riferimento sempre a tale tipo di coordinate), ed l è il *grado di libertà* del sistema. Si dice pure che il sistema è l volte *labile*. Si fa notare che la scelta delle l coordinate c_i è molto ampia; si preferisce scegliere degli angoli, in modo che esse siano espresse da numeri.

Fra le $6t$ equazioni (2-3) si possono eliminare le c_i ; si ottengono così, ancora nella precedente ipotesi circa la matrice jacobiana, $6t - l = v$ equazioni *indipendenti* fra le q_h

$$f_k(q_1 q_2 \dots q_{6t} T) = 0 \quad (k = 1, 2 \dots v) \quad (4)$$

Se l'ordine della matrice fosse $d < l$, il numero delle equazioni indipendenti sarebbe $n = 6t - d > v$.

Le (2-4) comprendono come caso particolare le (5-2) del I Volume; esse si chiamano *equazioni di vincolo*, o *legami*. Un vincolo introduce una o più equazioni del tipo (2-4); l'ordine del vincolo è uguale al numero di equazioni (o di legami, come si usa dire) da esso introdotte. Un appoggio o una biella sono vincoli di ordine uno, o vincoli semplici; una cerniera sferica è un vincolo di ordine tre, o triplo; un incastro è un vincolo di ordine sei nello spazio, tre nel piano; una cerniera cilindrica è un vincolo di ordine cinque. In genere un vincolo elimina alcune delle sei componenti del moto relativo di due elementi di area appartenenti a due corpi diversi (in particolare, del moto assoluto di un elemento di area, se è un vincolo al suolo); l'ordine del vincolo, o il numero di equazioni del tipo (2-4) da esso introdotte, è pari al numero di componenti soppresse.

Dalle precedenti relazioni risulta

$$6t - v = l; \quad (5)$$

eliminando uno dei v legami del tipo (2-4), l aumenta di una unità, e viceversa.

Possono però esserci, oltre ai vincoli cui corrispondono equazioni indipendenti del tipo (2-4), altri vincoli che introducono i legami, espressi da equazioni analoghe alle (2-4), ma conseguenze delle f_k indipendenti; l'eliminazione di questi legami non altera il valore di l . Esempio semplicissimo è quello della fig. 2-2 a, dove i legami sono quattro (tre dell'in-

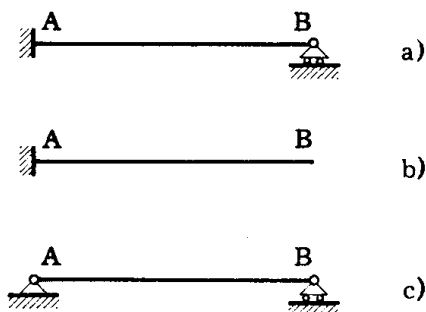


FIG. 2-2

castro, uno dell'appoggio), le libertà del corpo libero tre, i gradi di libertà zero; risulta $v=3$, perchè l'equazione dell'appoggio è conseguenza di quelle dell'incastro.

Se si chiama s il numero totale di legami introdotti dai vincoli, è

$$v = s - i$$

e quindi

$$6t - s = l - i, \quad (6)$$

e nel piano

$$3t - s = l - i. \quad (7)$$

Il numero i è il *grado di iperstaticità* della struttura, ed i vincoli cui corrispondono equazioni non indipendenti si chiamano iperstatici. La struttura della fig. 2-2 a è caratterizzata da

$$t = 1$$

$$s = 4$$

e quindi

$$3t - s = l - i = -1.$$

Se si riconosce che $l=0$, è $i=1$; viceversa, se si riconosce che $i=1$ (per esempio osservando che l'eliminazione dell'appoggio (fig. 2-2 b) non aggiunge libertà al sistema, e quindi il vincolo offre legami già forniti dall'incastro), deriva $l=0$. Risulta pure

$$v = s - i = 3.$$

Si osservi che il vincolo o i vincoli iperstatici sono definiti in numero, ma possono essere scelti in vario modo; per esempio, se l'incastro diviene cerniera, ancora il sistema non acquista libertà (fig. 2-2 c), e perciò come vincolo iperstatico può essere anche considerato, invece dell'appoggio, l'ordine dell'incastro corrispondente alla rotazione.

Perchè si possano avere le (2-4), è necessario che i corpi rigidi (e cioè t) e le coordinate c_n (e cioè l) siano in numero finito; quindi non sono sistemi olonomi quelli in cui il grado di libertà è infinitamente grande, come accade nelle strutture deformabili. In questo caso però si assimila la struttura ad olonoma ponendo nulle le coordinate lagrangiane nella configurazione di partenza, e facendo dipendere — con approssimazione — le componenti u, v, w dello spostamento da un numero finito di parametri c_1 ; l'approssimazione è tanto più spinta quanto più elevato è il numero delle c_1 . Classico esempio è quello dello sviluppo della deformata di una trave in serie di *Fourier* (fig. 2-3), ove si pone

$$v = \sum_1^m v_n \sin \frac{n \pi z}{l}. \quad (8)$$

Le v_n sono le m coordinate lagrangiane; esse sono spostamenti, ma pos-

sono ridursi a numeri ponendo

$$v_n^* = \frac{v_n}{l}$$

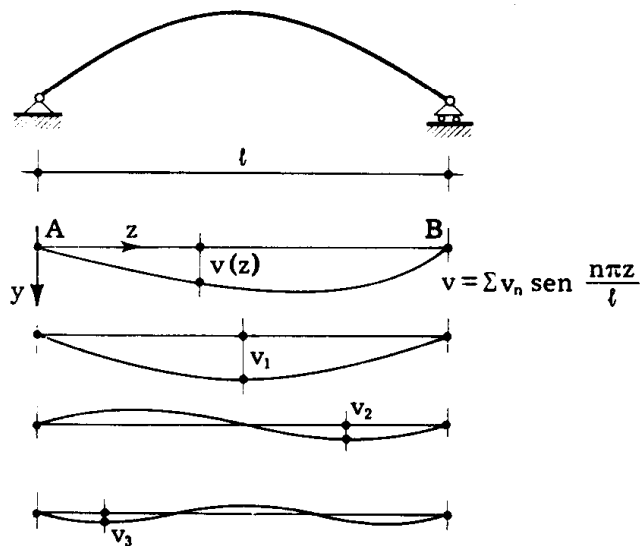
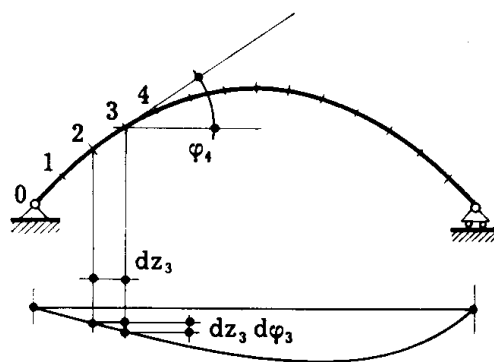


FIG 2-3

e scrivendo

$$v = l \sum_1^m v_n^* \sin \frac{n\pi z}{l}.$$

Naturalmente, possono anche assumersi come coordinate lagrangiane le rotazioni di m tronchi successivi (fig. 2-4).



$$v_h = \sum_1^h dz_i d\varphi_i$$

(piccoli spostamenti)

FIG. 2-4

Nel seguito si considerano sempre sistemi in cui la variabile tempo

non compare nelle (2-3), e cioè i cosiddetti sistemi olonomi *a vincoli indipendenti dal tempo*.

Una configurazione C del sistema olonomo, e con essa le componenti degli spostamenti $u\ v\ w$ valutate a partire da una configurazione iniziale, sono funzioni delle coordinate c_i ; un insieme di piccole variazioni dc_i importa una variazione δC della configurazione, cui si associano le variazioni $\delta u\ \delta v\ \delta w$, delle componenti dello spostamento. Quest'ultime si distinguono in parti del primo, del secondo, del terzo ordine etc., rispettivamente contenenti le dc_i o i loro prodotti del secondo, terzo ordine etc. (*):

$$\begin{aligned}\delta u &= \Sigma \frac{\partial u}{\partial c_i} dc_i + \frac{1}{2} \Sigma \frac{\partial^2 u}{\partial c_i \partial c_j} dc_i dc_j + \dots = \\ &= \delta^{(1)}u + \delta^{(2)}u + \delta^{(3)}u + \dots\end{aligned}\quad (9)$$

Se un mezzo continuo si assimila ad olonomo, non solo gli spostamenti, ma anche le deformazioni $\epsilon_i\ \gamma_{jk}$ sono funzioni delle c_i ; le dc_i comportano le variazioni $\delta\epsilon_i\ \delta\gamma_{jk}$ anch'esse distinguibili in parti del primo, secondo, terzo ordine etc.:

$$\delta\epsilon_x = \delta^{(1)}\epsilon_x + \delta^{(2)}\epsilon_x + \delta^{(3)}\epsilon_x + \dots\quad (10)$$

A tale proposito si deve osservare che le componenti del primo ordine della deformazione già definite nel Cap. I del I Volume, del primo ordine nelle derivate prime delle $\delta u\ \delta v\ \delta w$, prese con riferimento alla configurazione C, non coincidono sempre con quelle del primo ordine nelle dc_i , ma contengono a volte dei termini del secondo ordine nelle dc_i ; ciò accade se qualcuna delle $\delta u\ \delta v\ \delta w$ è del secondo ordine nelle dc_i .

Ne deriva che le componenti del secondo ordine nelle derivate prime non coincidono con quelle del secondo ordine nelle dc_i , se dei termini del secondo ordine nelle dc_i sono contenuti nelle componenti del primo ordine nelle derivate prime. L'esempio della fig. 2-5 vale a chiarire questa importante precisazione. La deformata della trave AB si assimili ad una sinusoide:

$$v = v_1 \sin \frac{\pi z}{l};\quad (a)$$

v_1 è la coordinata lagrangiana, ed il sistema è ad un sol grado di libertà.

(*) Nella (2-9) la derivata seconda mista generica deve intendersi compaia due volte, come $\frac{\partial^2 u}{\partial c_i \partial c_j}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial c_j \partial c_i}$.

Una variazione dv_1 a partire dalla configurazione rettilinea importa

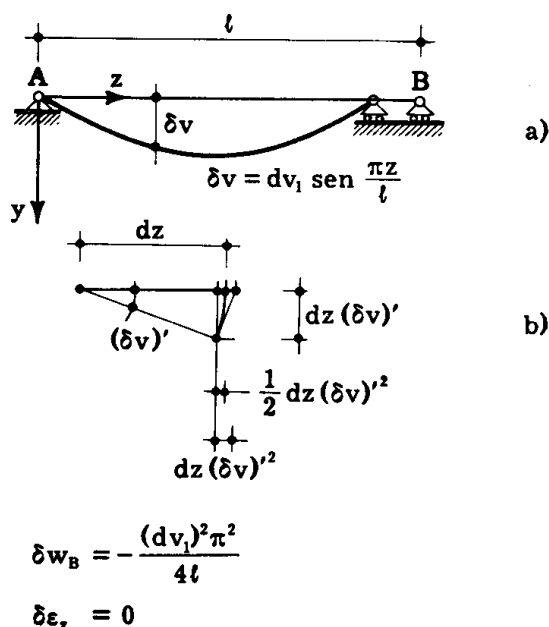


FIG. 2-5

la variazione di configurazione definita da (fig. 2-5 a)

$$\delta v = dv_1 \sin \frac{\pi z}{l} . \quad (b)$$

Se l'asse della trave è inestensibile, i punti dell'asse presentano le variazioni di spostamenti secondo z fornite da (si indicano con apice le derivate rispetto a z)

$$\delta w = -\frac{1}{2} \int_0^z (\delta v)'^2 dz = -\frac{1}{2} (dv_1)^2 \frac{\pi^2}{l^2} \int_0^z \cos^2 \frac{\pi z}{l} ; \quad (c)$$

infatti se l'elemento dz ruota di $(\delta v)'$, la sua proiezione orizzontale varia di (fig. 2-5 b) (*)

$$-\frac{1}{2} dz (\delta v)'^2 . \quad (d)$$

E' perciò sull'asse, considerando le componenti di ε_z del primo e secondo ordine nelle derivate prime degli spostamenti,

$$\begin{aligned} \delta_s^{(1)} \varepsilon_z &= (\delta w)' = - (dv_1)^2 \frac{\pi^2}{2 l^2} \cos^2 \frac{\pi z}{l} \\ \delta_s^{(2)} \varepsilon_z &= \frac{1}{2} [(\delta u)'^2 + (\delta v)'^2] = \frac{1}{2} (dv_1)^2 \frac{\pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{\pi z}{l} . \end{aligned} \quad (e)$$

(*) Tale variazione è

$$dz [\cos (\delta v)' - 1] ;$$

per piccoli spostamenti, arrestando lo sviluppo in serie del coseno al termine quadratico, si ha la (d).

Risulta, in armonia con la condizione di inestensibilità, $\delta \varepsilon_z = 0$.

Dalle (e) risulta

$$\begin{aligned}\delta_s^{(1)} \varepsilon_z &\neq 0 \\ \delta_s^{(2)} \varepsilon_z &\neq 0 \\ \delta_c^{(1)} \varepsilon_z &= 0 \\ \delta_c^{(2)} \varepsilon_z &= 0.\end{aligned}\tag{f}$$

Se invece l'asse della trave è estensibile, e si impone $\delta w = 0$ (fig. 2-6), è

$$\begin{aligned}\delta_s^{(1)} \varepsilon_z &= (\delta w)' = 0 \\ \delta_s^{(2)} \varepsilon_z &= \frac{1}{2} (dv_1)^2 \frac{\pi^2}{\ell^2} \cos^2 \frac{\pi z}{\ell} \\ \delta_c \varepsilon_z &= 0 \\ \delta_c^{(2)} \varepsilon_z &= \frac{1}{2} (dv_1)^2 \frac{\pi^2}{\ell^2} \cos^2 \frac{\pi z}{\ell},\end{aligned}\tag{g}$$

e si ha coincidenza tra le $\delta_s \varepsilon$ e $\delta_c \varepsilon$ del primo e del secondo ordine.

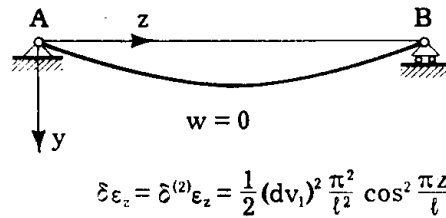


FIG. 2-6

Si osservi che nel caso della fig. 2-5 lo spostamento di B è

$$\delta w_B = - \frac{1}{2} (dv_1)^2 \frac{\pi^2}{\ell^2} \int_0^{\ell} \cos^2 \frac{\pi z}{\ell}$$

e cioè

$$\delta w_B = - \frac{(dv_1)^2 \pi^2}{4 \ell},\tag{h}$$

del secondo ordine nella coordinata dv_1 , come tutti i dw , mentre i δv sono del primo ordine.

Si precisa che nella (8-60) del Vol. I, $\delta_1 L$ e $\delta_2 L$ sono del primo e del secondo ordine nelle dc_i o nelle derivate prime degli spostamenti $\delta u \delta v \delta w$ secondo che le $\delta^{(1)}\varepsilon$ e le $\delta^{(2)}\varepsilon$ sono del primo e del secondo ordine nelle dc_i o nelle suddette derivate prime.

Si ricorda infine che un qualsiasi ente — spostamento, deformazione, lavoro etc. — contenente prodotti delle dc_i di ordine diverso si dice di ordine n nelle dc_i se n è l'ordine più basso dei prodotti dc_i che in esso compaiono.

Per esempio il δu (2-9) è di ordine tre se $\delta^{(1)}u = 0$ e $\delta^{(2)}u = 0$.

2) Il principio dei lavori virtuali.

Dato un sistema olonomo sotto certe forze e in una generica configurazione C , (nessuna ipotesi limita la grandezza degli spostamenti che si associano a C , e cioè il valore delle coordinate lagrangiane in C), si definisce *spostamento virtuale* connesso con le variazioni elementari (arbitrarie e indipendenti) dc_i delle coordinate lagrangiane, e cioè con la variazione δC di configurazione (*), l'insieme degli spostamenti $\delta^{(1)}u$, $\delta^{(1)}v$, $\delta^{(1)}w$ limitati alla parte del primo ordine nelle dc_i . Esso è definito perciò dalle relazioni lineari ed omogenee nelle dc_i

$$\begin{aligned}\delta^{(1)}u &= \sum \frac{\partial u}{\partial c_i} dc_i \\ \delta^{(1)}v &= \sum \frac{\partial v}{\partial c_i} dc_i \\ \delta^{(1)}w &= \sum \frac{\partial w}{\partial c_i} dc_i.\end{aligned}\tag{11}$$

Per i sistemi a vincoli indipendenti dal tempo, come tutti quelli che si considerano nel seguito, la variazione δC è anche possibile; lo spostamento virtuale è perciò *la parte del primo ordine di una qualsiasi delle possibili variazioni di configurazione*.

Il *principio dei lavori virtuali* si accetta come postulato, e si enuncia: «se i vincoli sono bilaterali e senza attrito, il lavoro complessivo delle

(*) La δC rispetta sia i vincoli che la compagine del sistema; essa è cioè congruente.

reazioni vincolari per effetto dello spostamento virtuale connesso con una qualsiasi variazione congruente di configurazione è nullo ».

Un secondo postulato è quello cosiddetto del *moto incipiente*: « un punto materiale che dalla quiete si mette in moto subisce nel primo tempuscolo uno spostamento che ha la direzione e il verso della forza ad esso applicata ».

Accettati i due suddetti postulati, si perviene ad una fondamentale condizione di equilibrio involvente le sole forze applicate, escluse cioè le reazioni di vincolo. Il sistema può immaginarsi come un insieme di punti materiali P_i , ciascuno soggetto alla forza applicata $\bar{F}_i$ ed alla reazione $\bar{R}_i$; se la configurazione è di equilibrio è pure

$$\bar{F}_i = - \bar{R}_i .$$

Una configurazione C di un sistema olonomo soggetto alle forze $\bar{F}_i$ applicate è « di equilibrio », o « equilibrata », se da essa il sistema non si sposta spontaneamente. Si dice anche, in tal caso, che le forze $\bar{F}_i$ sono « in equilibrio sul sistema nella configurazione C ».

Un corpo rigido e privo di vincoli è un particolare sistema olonomo, a sei gradi di libertà. Un insieme di forze $\bar{F}_i$ applicate a tale corpo in una certa posizione è « in equilibrio sul corpo rigido » se il corpo non si sposta spontaneamente dalla suddetta posizione. In questo caso particolare l'insieme delle $\bar{F}_i$ si dice anche, in una sola parola, « equilibrato » o « in equilibrio ».

Si imprima una qualsiasi variazione di configurazione δC ; il lavoro svolto dalle $\bar{F}_i$ per effetto degli spostamenti del primo ordine è uguale e contrario a quello svolto dalle $\bar{R}_i$, e cioè nullo. Si può quindi dire che condizione *necessaria* di equilibrio è che il lavoro del primo ordine delle forze applicate per effetto di una qualsiasi variazione di configurazione sia nullo.

Si osservi che se le forze sono funzioni della configurazione, le loro variazioni non entrano in gioco nel suddetto lavoro del primo ordine; quindi la condizione è valida anche per forze del tipo suddetto.

La condizione è anche *sufficiente*, e cioè se il corpo soddisfa ad essa, non può spontaneamente assumere nessuna variazione δC di configurazione. Se infatti ciò accade, per una qualsiasi δC , il punto generico P_i (ce ne sarà almeno uno che si sposta) soggetto alla forza totale $\bar{F}_i + \bar{R}_i$ si sposterebbe, nel tempo dT , nella direzione e nel verso di quest'ultima, di una quantità

$$\delta s_i = \frac{1}{2} a_i dT^2 + k_3 dT^3 + k_4 dT^4 + \dots .$$

La quantità δs_1 è in genere fornita, nelle dc_1 , da

$$\delta s_1 = \delta^{(1)}s_1 + \delta^{(2)}s_1 + \dots ;$$

dato dT , sono assegnati i valori delle dc_1 , i cui rapporti sono già vincolati dalla δC .

Poichè

$$\Sigma (\bar{F}_i + \bar{R}_i) \times \delta s_1 > 0 \quad (i)$$

è pure

$$\Sigma (\bar{F}_i + \bar{R}_i) \times \delta^{(1)}s_1 > 0 \quad (l)$$

e, poichè

$$\Sigma \bar{R}_i \times \delta^{(1)}s_1 = 0 ,$$

sarebbe

$$\Sigma \bar{F}_i \times \delta^{(1)}s_1 > 0 ,$$

contro l'ipotesi.

La dimostrazione appare fallace se per una δC i $\delta^{(1)}s_1$ sono tutti nulli; in tal caso infatti il passaggio dalla (i) alla (l) non è più valido. L'esempio della fig. 2-7 è il più semplice che se ne possa offrire, e nello

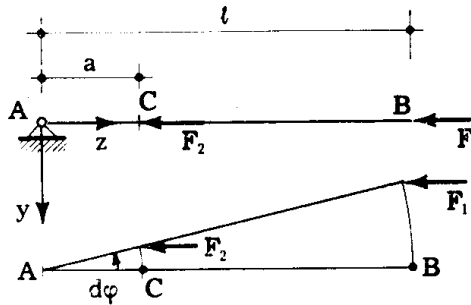


FIG. 2-7

stesso tempo di grande importanza per il tecnico, come si riconoscerà in tema di stabilità dell'equilibrio. Le forze F_1 ed F_2 sono orizzontali; si adotti come coordinata lagrangiana l'angolo φ che l'asse della trave forma con l'orizzontale. Per una variazione $d\varphi$ da $\varphi=0$ gli spostamenti ds_1 secondo le forze sono forniti da (si veda la nota a pag. 94)

$$\delta s_1 = \frac{l (d\varphi)^2}{2}$$

$$\delta s_2 = \frac{a (d\varphi)^2}{2} ;$$

il lavoro del primo ordine compiuto dalle F è nullo, ma ciò non permette di asserire che la configurazione $\varphi = 0$ è di equilibrio, perchè il teorema di sufficienza, così come dimostrato, cade in difetto. Si consideri però un altro sistema di forze F_h agente assieme alle F_1 ed F_2 e tali che la δC presenti per esse $\delta^{(1)}s_h \neq 0$.

Per il sistema nella configurazione C , e caricato dalle forze F_1 ed F_h , vale la dimostrazione di sufficienza, e cioè se

$$\Sigma F_h \delta^{(1)}s_h = 0 \quad (m)$$

per qualsiasi δC , il sistema è in equilibrio. Facendo ora tendere le F_h a zero in modo che conservino inalterati i mutui rapporti, e cioè in modo da rispettare la (m), il sistema è sempre in equilibrio; al limite, lo è anche sotto le sole F_1 .

In definitiva, può asserirsi: « condizione necessaria e sufficiente di equilibrio di una configurazione di un sistema olonomo a vincoli lisci e bilaterali (*), sotto forze applicate assegnate, è che per qualsiasi variazione congruente della configurazione stessa il lavoro del primo ordine delle forze applicate sia nullo »:

$$\Sigma F_i \delta^{(1)}s_i = 0 . \quad (12)$$

La (2-12) è la cosiddetta *equazione simbolica della statica*, ed è la forma più utile sotto cui può porsi il *principio dei lavori virtuali*; esso da ora in poi si intenderà espresso appunto come nella (2-12) (**). Si avverte ancora esplicitamente che, poichè son chiamati in gioco gli spostamenti del primo ordine, la (2-12) vale anche se le forze non sono conservative, se cioè le loro componenti variano con la configurazione.

Come caso particolare della (2-12) si trae che, perchè un insieme di forze sia *equilibrato* (in equilibrio sul corpo rigido), è necessario e sufficiente che siano nulle sia la somma delle componenti delle forze che la somma dei momenti di tali forze rispetto a ciascuno dei tre essi coordinati (condizioni di equilibrio alla traslazione ed alla rotazione). Ciò equivale a dire che siano nulli sia la forza che il vettore momento risultanti dell'insieme di forze, le cui componenti sono appunto date dalle suddette somme.

(*) Da adesso, salvo avviso esplicito, si considereranno sempre vincoli lisci e bilaterali.

(**) Sotto il profilo storico, in questo modo il principio fu per la prima volta enunciato e dimostrato intuitivamente (LAGRANGE: *Mécanique analytique*, 1788).

Una delle più interessanti applicazioni della (2-12) è nella ricerca delle reazioni di vincolo. Se infatti, assegnate le forze applicate e la configurazione C , interessa conoscere il valore di una reazione R_1 , basta sopprimere il vincolo corrispondente sostituendolo con la R_1 (di cui sia fissato il verso positivo), che assume così il carattere di forza applicata. Il sistema nella configurazione C continua ad essere in equilibrio. Assegnata una qualsiasi variazione alla C (ovviamente con piccoli e del resto arbitrari incrementi delle c_i) che faccia compiere lavoro alla R_1 , si scrive la (2-12), che contiene la sola incognita R_1 ; questa è così immediatamente otte-

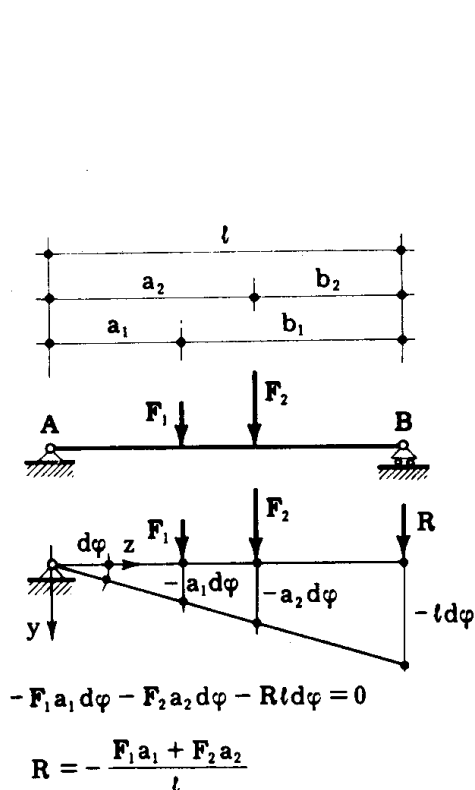


FIG. 2-8

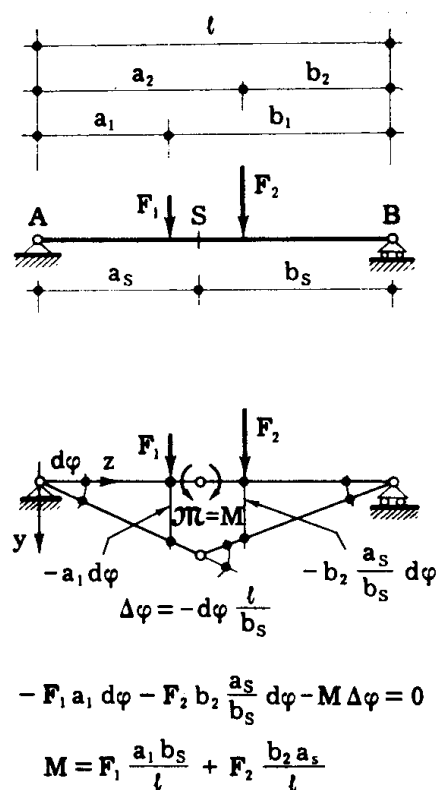


FIG. 2-9

nibile in intensità e segno. Se la struttura non ha libertà, la soppressione del vincolo le conferisce o meno un grado di libertà; nel primo caso la R_1 è determinata (finita, in particolare nulla) e la struttura si chiama *isostatica* rispetto a quel vincolo, nel secondo caso invece è indeterminata o infinitamente grande, e la struttura è *iperstatica*. Su tutto ciò si tornerà, più in dettaglio, nel seguito. Nelle figg. 2-8, 2-9, 2-10, 2-11, sono riportati alcuni esempi elementari di calcolo di reazioni vincolari in sistemi rigidi (travi) isostatiche attraverso il principio dei lavori virtuali; nelle reazioni vincolari possono comprendersi anche le caratteristiche della solle-

citazione interna in una generica sezione S, intese come reazioni sulle

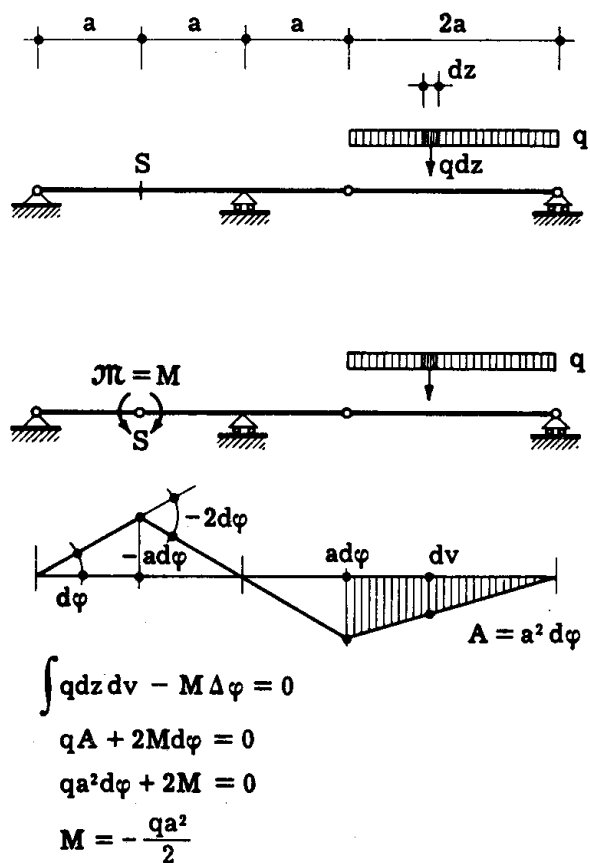


FIG. 2-10

due parti della struttura (a sinistra e a destra) esplicate da un vincolo

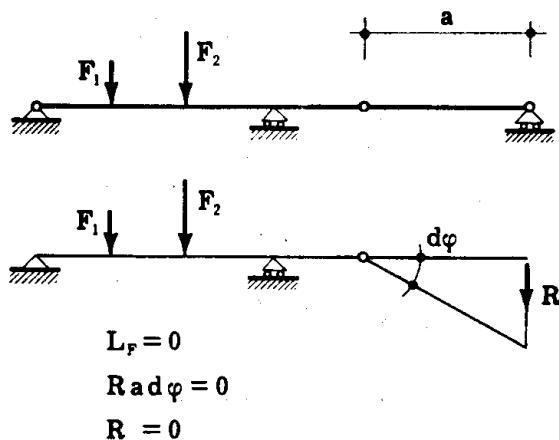


FIG. 2-11

che impedisce alle due sezioni in S ogni spostamento relativo.

3. Il principio dei lavori virtuali per i sistemi rigidi con vincoli (interni o esterni) elasticamente cedevoli.

Particolarmente importanti sono i sistemi rigidi con vincoli elasticamente cedevoli, sia perchè parecchie strutture possono in realtà ridursi a tale schema, sia perchè molte proprietà dei sistemi elastici continui diventano fisicamente evidenti se studiate su di essi. Tali sistemi non hanno libertà se i vincoli si irrigidiscono; le libertà sono conferite appunto dall'elasticità dei vincoli. Ciò accade se, soppressi in ciascun vincolo i legami corrispondenti alle cedibilità (per esempio, nella fig. 2-12, sostituito il concio con una cerniera), il sistema diventa labile.

Esse sono però libertà particolari, perchè si esplicano solo se sul sistema sono applicate delle forze (o delle distorsioni); ed i valori delle coordinate lagrangiane non sono indipendenti, ma legati alle forze applicate (o alle distorsioni). In questo caso il principio dei lavori virtuali permette lo stesso di stabilire una condizione necessaria e sufficiente di equilibrio, che lega però non solo le forze applicate, ma anche le reazioni esplicate dai vincoli elastici e corrispondenti ai cedimenti elastici dei vincoli stessi.

Un vincolo elastico esterno di ordine uno reagisce sulla struttura con una reazione R , di cui si fissa il verso positivo; lo stesso verso vale per il cedimento η , che si esplica nella stessa direzione di R . Con questa convenzione, η è sempre di segno contrario ad R , poichè la reazione esercitata dalla struttura sul vincolo è contraria ad R , ed il cedimento è concorde con la reazione esercitata dalla struttura sul vincolo; ciò per ragioni energetiche di carattere evidente.

In genere l'elasticità del vincolo si assimila a lineare, così che può porsi

$$R = - k\eta .$$

La quantità k , reazione indotta da un cedimento unitario, è la *rigidità* del vincolo (*).

Le coordinate lagrangiane si pongono di solito uguali a zero in corrispondenza della configurazione sotto forze applicate nulle; in tale situazione è pure $\eta = 0$ ed $R = 0$ per tutti i vincoli cedevoli.

Per i vincoli interni valgono gli stessi ragionamenti; le reazioni esercitate sulla struttura sono due, uguali e contrarie. Con riferimento, per esempio, al vincolo della fig. 2-12, rigido nei riguardi degli spostamenti di

(*) Se la reazione R è diretta secondo uno degli assi coordinati, essa si assume positiva se concorde all'asse.

Se il vincolo è di ordine n , ad ogni componente di moto soppressa corrisponde una reazione, per la quale può ripetersi lo stesso ragionamento relativo ai segni. Si suppone, infatti, che in tal caso ad ognuna delle n reazioni sviluppate dal vincolo corrisponda un cedimento proporzionale alla reazione stessa.

traslazione relativa, e che concede rotazioni relative, si assume che le coppie e le rotazioni siano positive se antiorarie. La rotazione relativa si definisce come differenza (§ 1-14)

$$\Delta\varphi = \varphi_d - \varphi_s \quad (13)$$

delle due rotazioni a destra e a sinistra, quindi $\Delta\varphi$ è positiva se $\varphi_d > \varphi_s$, e cioè se la faccia destra ruota in senso antiorario rispetto a quella di sinistra. Per $\Delta\varphi > 0$ è $\mathcal{M}_s > 0$, $\mathcal{M}_d < 0$, e perciò si ha (elasticità lineare)

$$\mathcal{M}_s = k \Delta\varphi \quad (14)$$

$$\mathcal{M}_d = -k \Delta\varphi .$$

La costante k , rigidità del vincolo, ha dimensioni $[Fl]$.

La struttura della fig. 2-12 è costituita da due tratti uguali collegati da un vincolo del tipo anzi detto.

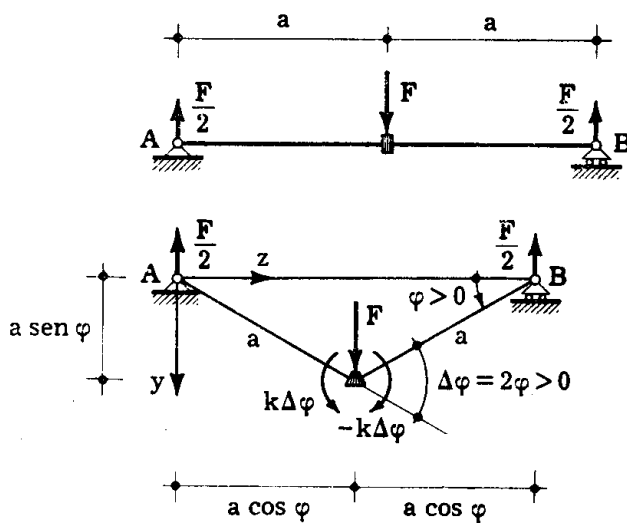


FIG. 2-12

La configurazione rettilinea del sistema sia di equilibrio per forza nulla, e cioè da essa il sistema non si sposti spontaneamente; ad essa corrisponde $\mathcal{M}_s = \mathcal{M}_d = 0$, da essa quindi si valuta $\Delta\varphi$. Anche la coordinata lagrangiana φ si pone nulla nella configurazione rettilinea. L'angolo φ_0 corrispondente alla configurazione di equilibrio sotto F è fornito dalla condizione di equilibrio alla rotazione del tronco di destra (o di sinistra):

$$\frac{F}{2} a \cos \varphi_0 - 2 k \varphi_0 = 0$$

da cui

$$F = 4 \frac{k}{a} \frac{\varphi_0}{\cos \varphi_0} . \quad (n)$$

Alla stessa equazione (n) si arriva esprimendo la condizione che il lavoro del primo ordine compiuto dalle forze per una variazione $d\varphi$ è nullo. Il lavoro è fornito da

$$F [a \sin (\varphi_0 + d\varphi) - a \sin \varphi_0] - 2 \cdot 2 k \varphi_0 \cdot d\varphi \quad (o)$$

e cioè ancora da

$$Fa [\sin \varphi_0 \cos d\varphi + \sin d\varphi \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0] - 4 k \varphi_0 d\varphi .$$

Limitandosi ai termini del primo ordine in $d\varphi$ (*) si ha

$$Fa d\varphi \cos \varphi_0 - 4 k \varphi_0 d\varphi = 0$$

da cui

$$F = 4 \frac{k}{a} \frac{\varphi_0}{\cos \varphi_0} . \quad (p)$$

La coincidenza della (p) con la (n) era da attendersi perchè, considerando la configurazione di equilibrio sotto un certo valore di F , il concio sostituito da una cerniera, e le coppie $\mathcal{M}$ agenti sulla due facce da questa collegate, il sistema diviene un ordinario sistema olonomo, e resta in equilibrio, e quindi è valido il principio dei lavori virtuali; naturalmente, nella variazione di configurazione le coppie $\mathcal{M}$ restano inalterate, mentre se il concio è elastico esse variano di $-k d\Delta\varphi$. Questo termine, comunque, compie per effetto di $d\Delta\varphi$ un lavoro del secondo ordine.

Il risultato è valido in generale, e può esprimersi dicendo che «con riferimento ad un sistema rigido con vincoli elasticamente cedevoli, condizione necessaria e sufficiente perchè una certa configurazione del sistema sotto certe forze applicate sia di equilibrio, è che per qualsiasi variazione congruente (**) della configurazione stessa sia nulla la parte del

(*)

$$\begin{aligned} \sin d\varphi &= d\varphi - \frac{d\varphi^3}{3!} + \frac{d\varphi^5}{5!} - \dots \\ \cos d\varphi &= 1 - \frac{d\varphi^2}{2} + \frac{d\varphi^4}{4!} - \dots \end{aligned} \quad (15)$$

(**) Si intende congruente in relazione ai vincoli non cedevoli, e cioè alla struttura con legami elastici soppressi.

primo ordine del lavoro delle forze applicate e delle reazioni che i vincoli elasticamente cedevoli (reazioni elastiche) trasmettono alla struttura. I cedimenti, e quindi le reazioni elastiche, sono definiti una volta assegnata la configurazione ».

Ciò si scrive nel modo seguente

$$\sum F_i \delta^{(1)} s_i + \sum R_j \delta^{(1)} s_j = 0 . \quad (16)$$

Il ragionamento è valido anche per sistemi a più gradi di libertà, e anche se, invece di forze, la struttura è soggetta a cedimenti vincolari

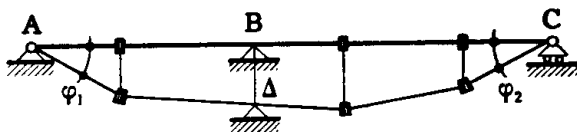


FIG. 2-13

anelastici o distorsioni (fig. 2-13); in questo secondo caso il lavoro è quello delle sole reazioni trasmesse dai vincoli elastici, e la variazione di configurazione deve lasciare inalterati cedimenti e distorsioni.

Si consideri il sistema reso labile dalla soppressione dei legami elastici; su tale sistema, in una configurazione, esistono uno o più insiemi di reazioni corrispondenti ai vincoli soppressi e tali da essere, con le forze applicate, in equilibrio sul sistema in tale configurazione. Si dice che questo insieme di reazioni è « *in equilibrio con le forze applicate, sul sistema in quella configurazione* ».

Se il sistema a vincoli irrigiditi è isostatico, l'insieme di reazioni in equilibrio con le forze applicate è, assegnata una configurazione, univocamente determinato; tra tutte le possibili configurazioni, sono reali solo quelle che rispettano, in corrispondenza dei vincoli soppressi, le relazioni di elasticità, e quindi la congruenza sulla struttura effettiva.

Se il sistema a vincoli irrigiditi è iperstatico, gl'insiemi di reazioni elastiche in equilibrio con le forze applicate sono ∞ , e precisamente tutti quelli che, su quella configurazione, soddisfano la (2-12). Di questi insiemi però sono rispettosi della congruenza, e quindi reali, solo quelli che eventualmente soddisfano la (2-16), e cioè la (2-12) ove le reazioni sono espresse in funzione dei cedimenti.

4. Le due forme del principio dei lavori virtuali per i continui deformabili, in particolare elastici.

Un continuo elastico (definizione al Cap. IV del Vol. I) può schematizzarsi in un insieme di elementi laminari rigidi, di area $dx dy$, $dy dz$, $dz dx$, collegati tra loro da vincoli costituiti dagli elementi parallelepipedi elastici $dx dy dz$ (fig. 2-14). I vincoli esterni siano lisci e bilaterali.

Il lavoro delle forze agenti sulla struttura così schematizzata, a partire da una qualsiasi configurazione (nessuna ipotesi restrittiva si fa

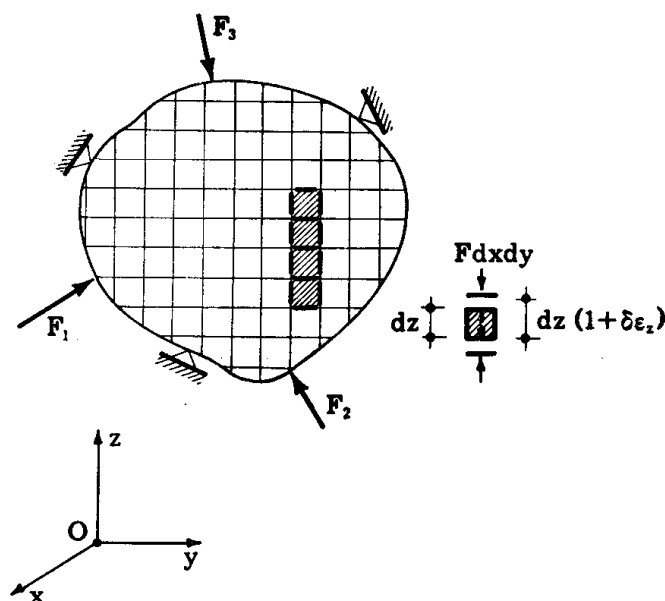


FIG. 2-14

circa la grandezza degli spostamenti ad essa inerenti) è, per forze costanti e vincoli esterni eventualmente elastici (Vol. I, § 8-8),

$$\delta V = \delta L_F + \delta L_R - \int_V (\sigma_x \delta \epsilon_x + \dots + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \dots) dV - \\ - \frac{1}{2} \int_V (\delta \sigma_x \delta \epsilon_x + \dots + \delta \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \dots) dV (*) . \quad (17)$$

Il principio dei lavori virtuali si esprime dicendo che «condizione necessaria e sufficiente perchè una configurazione sia equilibrata (**) sotto

(*) Poichè il materiale è elastico, durante la variazione di configurazione caratterizzata da $d\epsilon_i$ piccole, il legame tra le $\delta\sigma$ e le $\delta\epsilon$ è lineare omogeneo, e perciò vale il teorema di *Clapeyron*.

(**) Se e solo se una configurazione C è *equilibrata* sotto certe forze F applicate, ed eventuali distorsioni, se cioè da essa la struttura non si sposta spontaneamente, le $\sigma_i \tau_{jk}$ che possono da essa trarsi attraverso le relazioni tra le componenti di deformazione e di tensione, e le reazioni elastiche, ottenibili anch'esse attraverso le relazioni elastiche di vincolo, sono *in equilibrio* con le F ; e cioè nella configurazione C la struttura, schematizzata come detto ad inizio di paragrafo, liberata dai legami elastici e soggetta sugli elementi rigidi alle forze applicate ed alle forze elementari interne $-\sigma_i dS$ e $-\tau_{jk} dS$, non presenta spostamenti spontanei.

le forze F applicate, ed eventuali distorsioni, è

$$\delta_1 V = \sum F_i \delta^{(1)} s_i + \sum R_j \delta^{(1)} s_j - \\ - \int_V (\sigma_x \delta^{(1)} \varepsilon_x + \dots + \tau_{yz} \delta^{(1)} \gamma_{yz} + \dots) dV = 0, \quad (18)$$

per effetto di qualsiasi variazione congruente (*) della configurazione ».

Sia C_o una configurazione di equilibrio sotto date forze F ed eventuali distorsioni. La struttura, portata sotto le stesse forze F in una configurazione C_d prossima a C_o , non può in genere rimanervi, perchè C_d in genere non è anch'essa di equilibrio sotto le forze F . Si mostrerà (Vol. V, § 1-1) che se e solo se, nel passaggio da C_d a C_o è, per qualunque C_d ,

$$\delta_1 V_{C_d \rightarrow C_o} > 0 \quad (q)$$

il sistema, spostato da C_o , torna in C_o ; se, e solo se, anche per una sola C_d , si ha

$$\delta_1 V_{C_d \rightarrow C_o} < 0, \quad (r)$$

il sistema spostato da C_o , si allontana da C_o . Se si verifica il primo caso la configurazione C_o si dice di *equilibrio stabile*; se si verifica il secondo, si dice che C_o è di *equilibrio instabile*.

Poichè è

$$\delta V_{C_d \rightarrow C_o} = - \delta V_{C_o \rightarrow C_d}$$

si ha pure assieme (Vol. V, § 1-1)

$$\delta_1 V_{C_d \rightarrow C_o} > 0$$

$$\delta_2 V_{C_o \rightarrow C_d} < 0$$

oppure

$$\delta_1 V_{C_d \rightarrow C_o} < 0$$

$$\delta_2 V_{C_o \rightarrow C_d} > 0.$$

Perciò la condizione

$$\delta_2 V_{C_o \rightarrow C_d} < 0 \quad (19)$$

(*) In tanto il principio dei lavori virtuali può estendersi ai continui deformabili, in quanto le coordinate dei singoli punti si suppongono funzioni (uniformi, continue etc.) di un numero finito di parametri c_i (vedi § 2-1). Una variazione dc_i delle c_i porta perciò a delle $\delta u \delta v \delta w$ rispettose della compagine, e quindi a delle $\delta \varepsilon_i \delta \gamma_{jk}$ rispettose delle equazioni di congruenza. Così pure le $\delta u \delta v \delta w$ rispettano i vincoli.

per tutte le possibili C_d , è necessaria e sufficiente di *stabilità*; la condizione

$$\delta_2 V_{C_0 \rightarrow C_d} > 0 \quad (20)$$

per almeno una C_d , è necessaria e sufficiente di *instabilità*.

Nella (2-18) le $\sigma_i \tau_{jk}$ e le reazioni elastiche sono, come già detto, quelle connesse con la configurazione C ; se e solo se è rispettata la (2-18) le $\sigma_i \tau_{jk}$ sono pure in equilibrio con le forze applicate, (si veda la definizione contenuta nella nota 2 di questo paragrafo), e cioè la C è soluzione del problema dell'equilibrio elastico. Sotto tale aspetto il principio dei lavori virtuali fissa le configurazioni congruenti ed equilibrate fra le ∞ configurazioni congruenti.

Il principio può assumere una seconda forma più generale, valida per un corpo comunque deformabile, costituito cioè da materiale che segua una legge anche non biunivoca fra tensioni e deformazioni. Sotto questa seconda forma alle $\sigma_i \tau_{jk}$ ed alle reazioni elastiche non si domanda neppure il rispetto di tale legge, esse non sono cioè in genere una soluzione del problema dell'equilibrio. Ci si domanda sole se, con riferimento ad una certa configurazione C , esse sono *in equilibrio* (secondo la già più volte ripetuta definizione) con le forze applicate. Questo equivale a domandarsi se le $\sigma_i \tau_{jk}$ sono in equilibrio, secondo la definizione classica (Vol. I, Cap. II), con le forze esterne (applicate e reazioni) e cioè se con esse rispettano le equazioni indefinite ed ai limiti.

Orbene, il principio dei lavori virtuali assicura che condizione necessaria e sufficiente perchè le $\sigma_i \tau_{jk}$ e le reazioni elastiche siano in equilibrio con le forze applicate (con forze applicate nulle, in particolare, se sulla struttura agiscono solo distorsioni) è che la parte del primo ordine del lavoro totale compiuto per effetto di una qualsiasi variazione congruente di configurazione sia nulla; e cioè ancora la (2-18), dove però nessun legame esiste tra le σ_i , τ_{jk} , R_j e la configurazione C , salvo quello derivante dall'essere le tensioni definite sulla configurazione stessa.

Nulla limita la grandezza degli spostamenti connessi con la configurazione C ; se però si è nell'ambito di validità dell'ipotesi di piccoli spostamenti, la C si confonde con la configurazione indeformata, e quindi le $\sigma_i \tau_{jk}$ sono definibili su quest'ultima.

Nell'ambito dell'ipotesi ora detta, gli ∞ insiemi di tensioni $\sigma_i \tau_{jk}$ in equilibrio su una struttura con determinate forze applicate F_i sono tutti definiti sulla struttura indeformata, e quindi definibili a priori. In particolare, per una struttura n volte iperstatica essi si ottengono sopprimendo n vincoli e dando tutti i possibili insiemi di valori alle reazioni iperstatiche $X_1 X_2 \dots X_n$. Tra questi insiemi equilibrati con le forze applicate sono soluzioni del problema dell'equilibrio (soluzione unica se il materiale è linearmente elastico) solo quelli che rispettano anche la congruenza. Per ottenerli basta sfruttare n volte, come condizione necessaria, e con riferimento alla struttura isostatica la stessa (2-18), dove le $\delta \varepsilon_i$, $\delta \gamma_{jk}$ ed i δs

sono quelli connessi con le forze F_i e le reazioni $X_1 X_2 \dots X_n$ (poichè si è nell'ipotesi di piccoli spostamenti, essi possono essere considerati una variazione della configurazione indeformata), e le tensioni $\sigma_i \tau_{jk}$ devono solo essere in equilibrio (con riferimento sempre alla struttura indeformata) con un qualsiasi sistema di forze applicate, in particolare con $X_i = 1$.

Così le (2-18) consentono di fissare gli insiemi di tensioni equilibrati e congruenti fra gli ∞ insiemi equilibrati. Su tutto ciò si tornerà diffusamente nei paragrafi seguenti.

Riassumendo, il principio dei lavori virtuali può per i corpi deformabili esprimersi nelle seguenti forme:

1) data la struttura elastica con i suoi vincoli (lisci e bilaterali) e le forze e distorsioni applicate, condizione necessaria e sufficiente perchè una configurazione C congruente sia anche equilibrata è che la somma del lavoro del primo ordine svolto dalle forze esterne (ivi comprese le reazioni dei vincoli cedevoli)

$$\delta_1 L_e = \sum F_i \delta^{(1)} s_i + \sum R_j \delta^{(1)} s_j \quad (21)$$

e del lavoro del primo ordine delle forze interne connesse con C

$$\delta_1 L_i = - \int_v (\sigma_x \delta^{(1)} \epsilon_x + \dots + \tau_{yz} \delta^{(1)} \gamma_{yz} + \dots) dV \quad (22)$$

sia nulla per qualsiasi variazione congruente della configurazione;

2) condizione necessaria e sufficiente perchè un qualsiasi insieme di tensioni e di reazioni elastiche sia in equilibrio con le forze applicate e con riferimento ad una certa configurazione C è che si verifichi

$$\delta_1 L_e + \delta_1 L_i = 0 \quad (23)$$

per qualsiasi variazione congruente della configurazione.

Come si vede, in ambedue le forme il principio dei lavori virtuali è una condizione globale necessaria e sufficiente di *equilibrio*, e si serve come fattore operativo di piccoli spostamenti congruenti, peraltro di natura imprecisata.

5. La più generale formulazione del principio dei lavori virtuali valida per un qualsiasi continuo deformabile privo di vincoli.

Alla (2-23) può pure pervenirsi, in assenza di vincoli, con un ragionamento di buona evidenza fisica.

Si consideri un corpo deformabile in una qualsiasi configurazione C (che non è detto debba essere una di quelle corrispondenti alle forze effettive), libero da vincoli, soggetto a un sistema di forze esterne superfi-

ciali $p_x p_y p_z$ e di massa XYZ , nel complesso in equilibrio. Si consideri una qualsiasi sestupla di funzioni $\sigma_i \tau_{jk}$ in equilibrio con le forze esterne (Vol. I, §2-1) definite nel dominio occupato dal corpo (assieme alle forze di massa e superficiali soddisfano le equazioni di equilibrio indefinite ed ai limiti). Le $\sigma_i \tau_{jk}$ sono peraltro qualsiasi, quindi in genere non soddisfano la congruenza, e cioè non sono una soluzione del problema. La configurazione del corpo può essere anche molto discosta da quella indeformata, e cioè le componenti dello spostamento $u v w$ che caratterizzano C possono anche non soddisfare la nota condizione di piccolezza; le $\sigma_i \tau_{jk}$ sono definite in tal caso nel dominio occupato dal corpo deformato, e le equazioni di equilibrio sono verificate in relazione alla configurazione deformata.

Siano poi $u' v' w'$ tre funzioni qualsiasi definite nel dominio occupato dal corpo (in particolare, dal corpo deformato, se le $u v w$ non sono piccole nel senso noto), soddisfacenti alle note condizioni perchè possano essere assunte come componenti dello spostamento (congruenti), e tali che le loro derivate prime possano essere trascurate nei confronti dell'unità; alle $u' v' w'$ si associano le componenti della deformazione $\varepsilon'_i \gamma'_{jk}$.

Le $u' v' w'$ soddisfacenti alle condizioni suddette caratterizzano una variazione di configurazione δC ; esse sono definite a meno di uno spostamento rigido di tutto il corpo.

Si praticano sul corpo in C tagli (fig. 2-15) secondo piani paralleli ai tre piani coordinati. Si suddivide così l'interno del corpo in parallele-

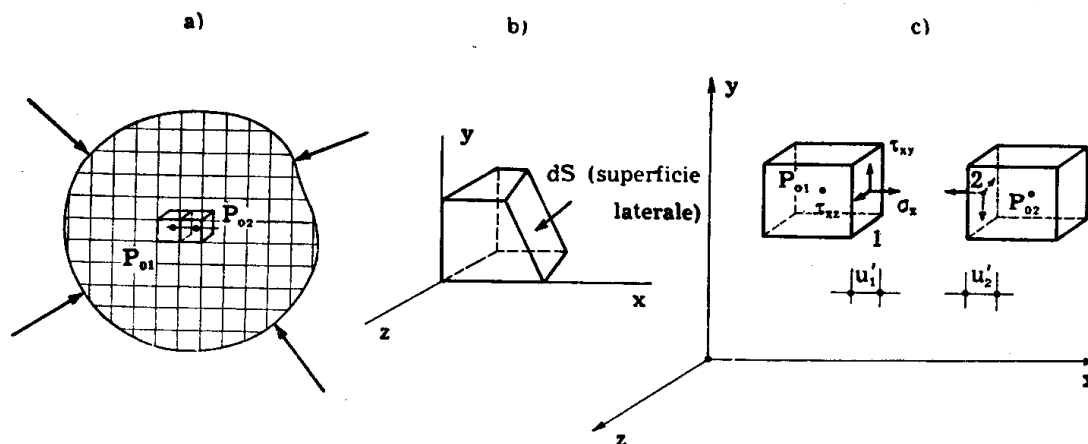


FIG. 2-15

pipedi elementari di lati $dx dy dz$ (fig. 2-15 a); sulla superficie laterale la suddivisione dà luogo a volumi elementari la cui forma è quella di un parallelepipedo al quale sia stata sottratta una parte mediante il taglio con un piano (fig. 2-15 b). L'assetto della struttura non è turbato se si esercitano sulle facce dei parallelepipedi le forze elementari (forze interne) $\sigma_i dj dk$ e $\tau_{jk} di dk$, sulle facce dei volumi elementari superficiali parallele ai piani coordinati le forze elementari (forze interne) $\sigma_i dS_i$ e

$\tau_{jk} dS_j$, sulle facce dS dei volumi elementari appartenenti alla superficie S del corpo le forze elementari (forze esterne) $p_x dS$, $p_y dS$, $p_z dS$, e su tutti i volumi elementari le forze elementari (forze esterne) $X dV$, $Y dV$, $Z dV$.

Si è così in presenza di tanti corpi elementari, ognuno soggetto a forze in equilibrio, e libero da vincoli.

Poichè le $p_x p_y p_z$, le $X Y Z$ e le $\sigma_i \tau_{jk}$ sono in equilibrio, deve, per ognuno dei corpi elementari suddetti, essere nullo il lavoro compiuto dalle forze su esso agenti per effetto di una qualsiasi traslazione del corpo stesso. La traslazione del generico corpo elementare sia definita dai valori che le funzioni $u' v' w'$ assumono in corrispondenza del baricentro del corpo stesso. Si esprima quindi la condizione, valida a fortiori, che la somma dei lavori compiuti per effetto di tali traslazioni dalle forze agenti su tutti i corpi elementari sia nullo.

Il lavoro complessivo svolto dalle forze esterne è fornito da

$$\int_s (p_x u' + p_y v' + p_z w') dS + \int_v (X u' + Y v' + Z w') dV. \quad (s)$$

Le $u' v' w'$ devono essere piccole, come già detto, perchè le forze superficiali e di massa devono rimanere inalterate durante la variazione di configurazione, e quindi la variazione deve essere tale da non alterare la posizione relativa delle forze stesse (si ricordi che tra le forze superficiali sono comprese le reazioni).

Il lavoro complessivo svolto dalle forze interne si ottiene costruendo l'espressione del lavoro che queste forze compiono per effetto degli spostamenti relativi tra un parallelepipedo generico ed i tre parallelepipedi che immediatamente lo seguono procedendo nel verso positivo degli assi x, y, z , e poi integrando questa espressione al volume occupato dal corpo. In tal modo infatti si tiene conto del lavoro compiuto dalle forze agenti su tutte le facce dei tagli, ognuna valutata una volta sola. Il lavoro compiuto dalle forze interne agenti sulle facce di separazione non rettangolari tra i volumi elementari superficiali può trascurarsi in confronto al lavoro compiuto dalle forze interne agenti sulle facce dei parallelepipedi.

Per effetto dello spostamento relativo tra il parallelepipedo generico di centro P_{01} (fig. 2-15 c) e quello che immediatamente lo segue nel verso delle x crescenti, compiono lavoro la $\sigma_x dy dz$, la $\tau_{xy} dy dz$ e la $\tau_{xz} dy dz$.

Il lavoro della $\sigma_x dy dz$ è fornito da

$$\sigma_x dy dz (u'_2 - u'_1)$$

essendo u'_1 ed u'_2 i valori di u' relativi ai centri P_{01} e P_{02} dei due parallelepipedi, esso può quindi, per le ipotesi fatte circa le derivabilità delle

funzioni $u' v' w'$, esprimersi nella forma

$$- \sigma_x dy dz \frac{\partial u'}{\partial x} dx = - \sigma_x \frac{\partial u'}{\partial x} dV .$$

Il segno tiene conto del fatto che se la derivata $\partial u'/\partial x$ è positiva, u' , è minore di u'_2 , quindi le due facce $dy dz$ si allontanano tra loro, e se $\sigma_x > 0$ la forza $\sigma_x dy dz$ compie lavoro negativo.

Analogamente si ottengono i lavori svolti dalle forze tangenziali

$$- \tau_{xy} dy dz \frac{\partial v'}{\partial x} dx = - \tau_{xy} \frac{\partial v'}{\partial x} dV$$

$$- \tau_{xz} dy dz \frac{\partial w'}{\partial x} dx = - \tau_{xz} \frac{\partial w'}{\partial x} dV .$$

Permutando circolarmente gli indici si ottengono le altre due terne, esprimenti i lavori compiuti dalle forze interne per effetto degli spostamenti relativi tra il parallelepipedo di centro P_{01} e i due che immediatamente lo seguono nel verso delle y e delle z crescenti. In complesso perciò al generico parallelepipedo è connesso il lavoro elementare

$$\begin{aligned} & - \sigma_x \frac{\partial u'}{\partial x} dV - \tau_{xy} \frac{\partial v'}{\partial x} dV - \tau_{xz} \frac{\partial w'}{\partial x} dV - \\ & - \tau_{yx} \frac{\partial u'}{\partial y} dV - \sigma_y \frac{\partial v'}{\partial y} dV - \tau_{yz} \frac{\partial w'}{\partial y} dV - \\ & - \tau_{zx} \frac{\partial u'}{\partial z} dV - \tau_{zy} \frac{\partial v'}{\partial z} dV - \sigma_z \frac{\partial w'}{\partial z} dV . \end{aligned} \quad (t)$$

Ricordando le espressioni delle componenti di deformazione, valide nell'ipotesi di piccolezza degli spostamenti, l'espressione (t) si scrive

$$- (\sigma_x \varepsilon'_x + \sigma_y \varepsilon'_y + \sigma_z \varepsilon'_z + \tau_{yz} \gamma'_{yz} + \tau_{zx} \gamma'_{zx} + \tau_{xy} \gamma'_{xy}) dV .$$

Integrando, si ha il lavoro compiuto dalle forze interne

$$- \int_V (\sigma_x \varepsilon'_x + \sigma_y \varepsilon'_y + \sigma_z \varepsilon'_z + \tau_{yz} \gamma'_{yz} + \tau_{zx} \gamma'_{zx} + \tau_{xy} \gamma'_{xy}) dV . \quad (u)$$

Uguagliando a zero la somma dei lavori (s) e (u) si ha (per qualsiasi terna congruente $u' v' w'$)

$$\int_S (p_x u' + p_y v' + p_z w') dS + \int_V (Xu' + Yv' + Zw') dV - \\ - \int_V (\sigma_x \varepsilon'_x + \sigma_y \varepsilon'_y + \sigma_z \varepsilon'_z + \tau_{yz} \gamma'_{yz} + \tau_{zx} \gamma'_{zx} + \tau_{xy} \gamma'_{xy}) dV = 0 . \quad (24)$$

Formalmente, espressione esatta è l'altra

$$\int_S (p_x u' + p_y v' + p_z w') dS + \int_V (Xu' + Yv' + Zw') dV - \\ - \int_V (\sigma_x \varepsilon'^{(1)}_x + \dots + \tau_{yz} \gamma'^{(1)}_{yz} + \dots) dV = 0 , \quad (v)$$

dove le $\varepsilon'^{(1)}_x \dots$ sono le componenti del primo ordine nelle derivate di $u' v' w'$. Solo per semplicità di simboli si adotta la (2-24).

La (v) non è in contrasto con la (2-23), come potrebbe desumersi dal fatto che le $u' v' w'$ sono totali; infatti le $\varepsilon'^{(1)}_x \dots$ non coincidono, in questo caso, con le componenti del primo ordine nelle dc_1 .

Si osservi che le (2-23) e la (2-24) non sono le stesse, pur essendo valide ambedue. La prima si adotterà quando il sistema è assimilato ad olonomo e le $u v w$ sono definite dalle coordinate lagrangiane c_1 , la seconda invece quando le $u v w$ sono assegnate come funzioni indipendenti.

Nell'ipotesi di piccoli spostamenti le (2-23) e (2-24) coincidono.

La condizione (2-24) è stata dimostrata come necessaria. Essa è anche sufficiente. Se infatti essa è verificata, è nullo il lavoro complessivo svolto dalle forze agenti sui corpi elementari per effetto di qualsiasi insieme di traslazioni $u' v' w'$; si ha cioè, calcolando il lavoro relativo ad ogni corpo, e sommando,

$$\int_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X \right) u' + \right. \\ + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y \right) v' + \\ + \left. \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) w' \right] dV + \\ + \int_S [(\sigma_x \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y + \tau_{zx} \alpha_z - p_x) u' + \\ + (\tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y + \tau_{zy} \alpha_z - p_y) v' + \\ + (\tau_{xz} \alpha_x + \tau_{yz} \alpha_y + \sigma_z \alpha_z - p_z) w'] dS = 0 .$$

Poichè la suddetta relazione deve essere valida per qualsiasi terna $u' v' w'$, devono essere nulli, perchè ciò possa accadere, tutti i termini a fattore di $u' v' w'$ nel primo e nel secondo integrale. Si ritrovano così le equazioni di equilibrio.

Dalla dimostrazione fatta si trae che il principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili è valido sotto la sola ipotesi di piccolezza degli spostamenti $u' v' w'$, e quindi nei limiti entro i quali le derivate prime delle $u' v' w'$, e cioè le ε'_{ij} , γ'_{jk} , sono trascurabili nei confronti dell'unità.

Nessuna ipotesi deve farsi perciò sulla natura della deformazione virtuale $u' v' w'$, che può essere di qualsiasi tipo, in particolare anelastica.

Alla (2-24) si può pervenire anche attraverso la formula di Gauss (A. Signorini, 1943; J. H. Argyris, 1955). Si moltiplichino le equazioni indefinite dell'equilibrio per $u' v' w'$, essendo $u' v' w'$ tre funzioni arbitrarie, continue e derivabili, definite nel dominio V di contorno S occupato dal corpo; si integri poi in V e si sommi. Si ha

$$\begin{aligned} \int_V \left[\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} u' + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} u' + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} u' + X u' + \right. \\ \left. + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} v' + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} v' + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} v' + Y v' + \right. \\ \left. + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} w' + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} w' + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} w' + Z w' \right] dV = 0. \end{aligned} \quad (z)$$

Risulta

$$\int_V \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} u' dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x u') dV - \int_V \sigma_x \frac{\partial u'}{\partial x} dV$$

.

e dalla formula di Gauss

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x u') dV = \int_S \sigma_x u' \alpha_x dS .$$

.

La (z) diventa così

$$\begin{aligned} \int_S (\sigma_x u' \alpha_x + \tau_{yx} u' \alpha_y + \tau_{zx} u' \alpha_z + \\ + \tau_{xy} v' \alpha_x + \sigma_y v' \alpha_y + \tau_{zy} v' \alpha_z + \\ + \tau_{xz} w' \alpha_x + \tau_{yz} w' \alpha_y + \sigma_z w' \alpha_z) dS + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_V (Xu' + Yv' + Zw') dV = \tag{a'} \\
& = \int_V \left[\sigma_x \frac{\partial u'}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u'}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u'}{\partial z} + \right. \\
& \quad + \tau_{xy} \frac{\partial v'}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v'}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v'}{\partial z} + \\
& \quad \left. + \tau_{xz} \frac{\partial w'}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w'}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial w'}{\partial z} \right] dV .
\end{aligned}$$

Per le condizioni ai limiti, e nell'ipotesi che le $u' v' w'$ siano piccole nel senso noto, si ha

$$\begin{aligned}
& \int_S (p_x u' + p_y v' + p_z w') dS + \int_V (Xu' + Yv' + Zw') dV = \\
& = \int_V (\sigma_x \varepsilon'_x + \sigma_y \varepsilon'_y + \sigma_z \varepsilon'_z + \tau_{yz} \gamma'_{yz} + \tau_{zx} \gamma'_{zx} + \tau_{xy} \gamma'_{xy}) dV
\end{aligned}$$

e cioè la (2-24), che è quindi condizione necessaria di equilibrio.

Se invece vale la (2-24), si può scrivere, sempre in virtù della formula di Gauss,

$$\int_V \sigma_x \frac{\partial u'}{\partial x} dV = \int_S \sigma_x \alpha_x u' dS - \int_V \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} u' dV ,$$

e quindi si ha

$$\begin{aligned}
& \int_S (p_x u' + p_y v' + p_z w') dS + \int_V (Xu' + Yv' + Zw') dV = \\
& = \int_S (\sigma_x \alpha_x u' + \tau_{yx} \alpha_y u' + \tau_{zx} \alpha_z u' + \\
& \quad + \tau_{xy} \alpha_x v' + \sigma_y \alpha_y v' + \tau_{zy} \alpha_z v' + \\
& \quad + \tau_{xz} \alpha_x w' + \tau_{yz} \alpha_y w' + \sigma_z \alpha_z w') dS - \\
& \quad - \int_V \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} u' + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} u' + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} u' + \right. \\
& \quad + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} v' + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} v' + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} v' + \\
& \quad \left. + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} w' + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} w' + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} w' \right) dV
\end{aligned}$$

e ancora

$$\begin{aligned} \int_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X \right) u' + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y \right) v' + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) w' \right] dV - \\ - \int_S [(\sigma_x \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y + \tau_{zx} \alpha_z - p_x) u' + \\ + (\tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y + \tau_{zy} \alpha_z - p_y) v' + \\ + (\tau_{xz} \alpha_x + \tau_{yz} \alpha_y + \sigma_z \alpha_z - p_z) w'] dS = 0. \end{aligned}$$

Poichè tale relazione deve verificarsi per qualsiasi terna $u' v' w'$, devono essere nulli i fattori di $u' v' w'$ in ciascuno dei due integrali; si ottengono così le equazioni di equilibrio indefinite e ai limiti, e cioè le (2-24) sono condizioni sufficienti di equilibrio.

6. L'espressione del principio dei lavori virtuali utilizzata nel calcolo degli spostamenti e delle iperstatiche nelle travi.

Il principio dei lavori virtuali nella seconda forma evidenziata dalla (2-24) si traduce, per i sistemi monodimensionali, in una espressione di particolare interesse applicativo; questa si ottiene facendo derivare gli spostamenti $u' v' w'$ da un sistema di forze F' .

Si consideri (fig. 2-16 a, b) una trave rientrante nella definizione di sistema monodimensionale piano, già data nel primo paragrafo del precedente capitolo. La trave sia soggetta a due distinti sistemi di forze, agenti nel piano π dell'asse, F_i ed F'_h ; siano R_i ed R'_j le reazioni connesse con i due sistemi di forze. Le R_i possono anche non essere quelle reali; ad esse si richiede soltanto che siano in equilibrio con le F_i sulla struttura priva di vincoli. Le R_j possono quindi essere anche quelle relative alla struttura resa comunque isostatica. In genere, nelle applicazioni il sistema di forze (sistema a) è appunto preso con riferimento alla struttura isostatica.

Anche le R'_j potrebbero, come le R_j , essere solo in equilibrio con le F_j ; in genere però nelle applicazioni il sistema di spostamenti (sistema b) è quello reale, e quindi le R'_j sono quelle reali.

E' necessario che i vincoli siano lisci, perchè tutte le reazioni siano univocamente determinabili.

Gli spostamenti in b) devono essere piccoli; quelli in a) potrebbero

anche non esserlo, ma nelle applicazioni correnti il caso di gran lunga più frequente è quello di piccoli spostamenti anche in a). Si adotterà perciò l'ipotesi di piccoli spostamenti sia in a) che in b).

Il materiale e la geometria devono essere tali da rendere lecita l'utilizzazione dei risultati del De Saint-Venant.

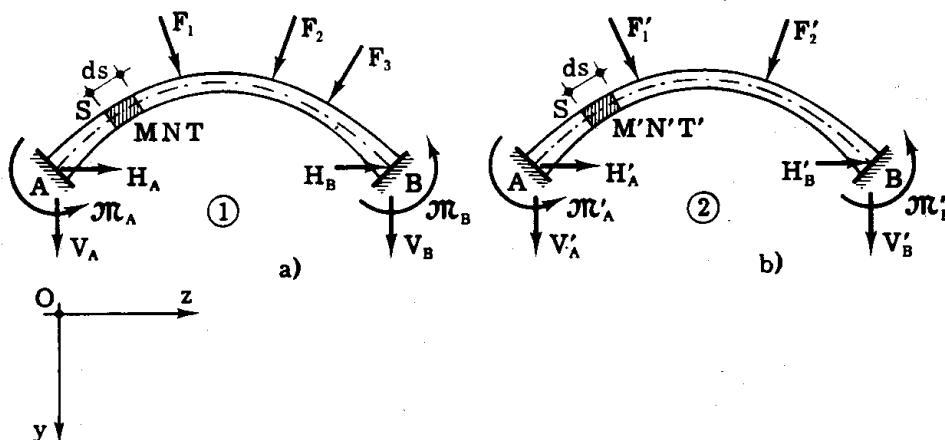


FIG. 2-16

La retta di simmetria della generica sezione retta deve rimanere su π , al quale inoltre la sezione deve conservarsi ortogonale.

Quindi ogni possibile spostamento della generica sezione è definito da tre parametri, per esempio le due componenti dello spostamento del baricentro secondo due assi ortogonali giacenti in π , e la rotazione della traccia intorno al baricentro. Con riferimento alla sezione A (fig. 2-16) come componenti dello spostamento possono essere scelte quelle w_A e v_A secondo l'orizzontale e la verticale, e la rotazione φ_A intorno al baricentro di A. Corrispondentemente, la reazione esplicata dal vincolo in A può essere definita dalle sue componenti H_A e V_A secondo l'orizzontale e la verticale, e dal suo momento $\mathcal{M}_A$ rispetto al baricentro di A. Se il vincolo in A è un incastro, sono diversi da zero H_A , V_A ed $\mathcal{M}_A$; se è una cerniera, sono diversi da zero H_A e V_A ; se è un appoggio con piano di scorrimento orizzontale, è diversa da zero la sola V_A ; ciò dipende dall'assenza dell'attrito. Corrispondentemente il vincolo impedisce gli spostamenti w_A , v_A , φ_A , oppure solo w_A e v_A , oppure solo v_A .

Se il vincolo è perfetto gli spostamenti impediti sono nulli, se il vincolo è cedevole gli spostamenti esistono, ma non sono uguali a quelli che si verificherebbero se il vincolo non esistesse affatto.

Si indichi con R_j la generica componente della reazione. Il suo segno si stabilisce con riferimento alla R_j trasmessa dal vincolo alla struttura. In genere, assunto un riferimento Oyz nel piano π la convenzione dei segni delle reazioni coincide con quella delle forze: una qualsiasi forza agente sulla struttura secondo la direzione y (e quindi anche una reazione, intesa come azione del vincolo sulla struttura) è positiva se ha il verso di y ; una qualsiasi coppia agente sulla struttura (e quindi anche una coppia di reazione, trasmessa dal vincolo alla struttura) è positiva se ha il verso yz .

Se il vincolo non è perfetto, la sezione ad esso relativa presenta delle componenti di spostamento corrispondenti alle R_j ; tali componenti si chiamano Δ_j .

Il segno delle Δ_j è tale che la corrispondente R_j positiva compia, se Δ_j è positivo, lavoro positivo. Nel caso in esame, in A la Δ_u positiva è diretta verso l'in-

terno, la Δv verso il basso, la $\Delta \varphi$ in verso antiorario. Il generico cedimento Δ_j è somma, nel caso più generale, di una parte Δ_{aj} anelastica, indipendente dalle forze applicate, e di una parte Δ_{ej} elastica, che scompare all'annullarsi delle forze applicate. In genere si fa l'ipotesi che la Δ_{ej} dipenda solo dalla corrispondente componente di reazione R_j , e sia ad essa legata da una relazione lineare; poichè un cedimento provocato da una reazione si sviluppa nel verso di questa reazione, intesa però come agente dalla struttura sul vincolo, può scriversi

$$\Delta_{ej} = - c_j R_j \quad (*) \quad (25)$$

La struttura della fig. 2-16 a si può considerare libera da vincoli, e soggetta alle forze F_i ed R_j ; alle F_i ed R_j fanno equilibrio, secondo la già data definizione, le tensioni interne σ e τ . Degli insiemi $\sigma \tau$ in equilibrio con le F_i ed R_j si prende in esame l'unico ottenibile alla De Saint-Venant dalle caratteristiche della sollecitazione. Gli spostamenti η'_i e Δ'_j e le corrispondenti deformazioni ε' e γ' della struttura della fig. 2-16 b sono piccoli e congruenti con riferimento sia alla struttura reale che, a maggior ragione, a quella libera da vincoli. D'altro canto le due configurazioni in a) e b) possono suppersi coincidenti nei riguardi della scrittura delle condizioni di equilibrio tra le F_i e le $\sigma_i \tau_{jk}$, perchè anche gli spostamenti in a) sono piccoli. Gli spostamenti η' possono quindi considerarsi una variazione della configurazione di equilibrio sotto le forze F_i . Vale perciò la (2-24). Il lavoro $\delta_1 L_e$ (più propriamente dovrebbe scriversi δL_e) è fornito da

$$\delta_1 L_e = \sum_i F_i \eta'_i + \sum_j R_j (\Delta'_{ja} - c_j R'_j) \quad (26)$$

dove η'_i sono le componenti, secondo le rette d'azione delle forze F_i , degli spostamenti dei punti d'applicazione di queste forze nel sistema b).

Con riferimento al generico tronco elementare di lunghezza ds il lavoro $\delta_1 L_i$ delle forze interne è fornito da (asse z coincidente, in questo caso, con la tangente in ds)

$$\begin{aligned} d\delta_1 L_i &= - ds \left(\int_A \sigma_z \varepsilon'_z dA + \int_A \tau_{zx} \gamma'_{zx} dA + \int_A \tau_{zy} \gamma'_{zy} dA \right) = \\ &= - ds \left(\frac{1}{E} \int_A \sigma \sigma'_z dA + \frac{1}{G} \int_A \tau_{zx} \tau'_{zx} dA + \frac{1}{G} \int_A \tau_{zy} \tau'_{zy} dA \right) = \\ &= - ds \left[\frac{NN'}{EA^2} \int_A dA + \frac{MM'}{EI^2} \int_A y^2 dA + \frac{TT'}{G} \int_A \left(\frac{S}{I_b} \right)^2 (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) dA \right] = \\ &= - \left[\frac{NN'}{EA} ds + \frac{MM'}{EI} ds + \chi \frac{TT'}{GA} ds \right]. \end{aligned} \quad (b')$$

(*) Nel caso di vincoli doppi o tripli; può darsi che Δ_{ej} dipenda da tutte le componenti R_{jh} della relazione del vincolo; nell'ipotesi di linearità, la (2-25) è allora sostituita dall'altra

$$\Delta_{ej} = \sum_h c_{jh} R_{jh}.$$

Integrando si ha

$$\delta_1 L_1 = - \left[\int_s \frac{NN'}{EA} ds + \int_s \frac{MM'}{EI} ds + \int_s \chi \frac{TT'}{GA} ds \right] . \quad (c')$$

Dalle (2-26) e (c'), e dalle (2-23), risulta

$$\Sigma_i F_i \eta'_i + \Sigma_j R_j (\Delta'_{aj} - c_j R'_j) = \int_s \frac{NN'}{EA} ds + \int_s \frac{MM'}{EI} ds + \int_s \chi \frac{TT'}{GA} ds . \quad (d')$$

Come già precisato, la (2-24) è valida se le $\varepsilon'_i \gamma'_{jk}$ non sono di carattere elastico, purchè siano piccole nel senso noto, e rispettino le condizioni di congruenza.

Il principio dei lavori virtuali è perciò applicabile anche in presenza di componenti di deformazione $\varepsilon_i^{*'} \gamma_{jk}^{*'}$ derivanti da distorsioni, in particolare da distorsioni di Volterra (Cap. I, n. 14).

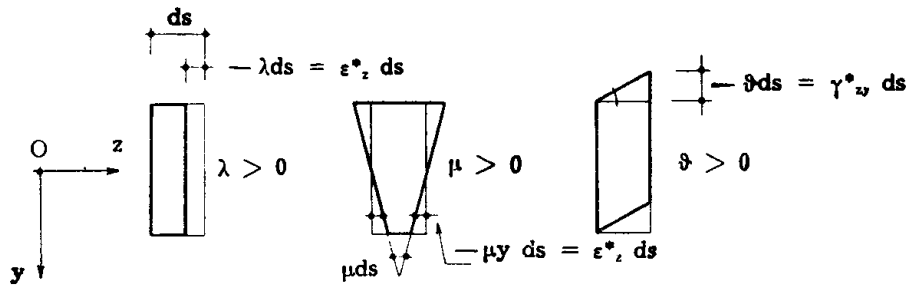


FIG. 2-17

Per le già fatte osservazioni sui segni delle distorsioni di Volterra, può dirsi, per un sistema monodimensionale piano (fig. 2-17)

$$\begin{aligned} \varepsilon_z^* &= -\lambda - \mu y \\ \gamma_{zx}^* &= 0 \\ \gamma_{zy}^* &= -\phi . \end{aligned} \quad (e')$$

Il lavoro $d\delta_1 L_1$ delle forze interne per effetto delle distorsioni $\lambda' \mu' \phi'$, relative al tronco elementare lungo ds , è perciò fornito da

$$\begin{aligned} d\delta_1 L_1 &= - ds \left(\int_A \sigma_z \varepsilon_z^{*'} dA + \int_A \tau_{zy} \gamma_{zy}^{*'} dA \right) = \\ &= ds \left(\frac{N\lambda'}{A} \int_A dA + \frac{N\mu'}{A} \int_A y dA + \frac{M\lambda'}{I} \int_A y dA + \frac{M\mu'}{I} \int_A y^2 dA - \right. \\ &\quad \left. - \frac{T\phi'}{I} \int_A \frac{S}{b} dA \right) = N\lambda' ds + M\mu' ds + T\phi' ds . \end{aligned} \quad (f')$$

Si tenga infatti presente che l'asse x è baricentrico; inoltre si ha (fig. 2-18) $dA = b dy$, e quindi

$$\int_A \frac{S}{b} dA = \int_{y_2}^{y_1} S dy = [Sy]_{y_2}^{y_1} - \int_{y_2}^{y_1} y dS ;$$

d'altro canto S è nullo per $y = y_1$ e $y = y_2$, e $y dS$ è il momento d'inerzia

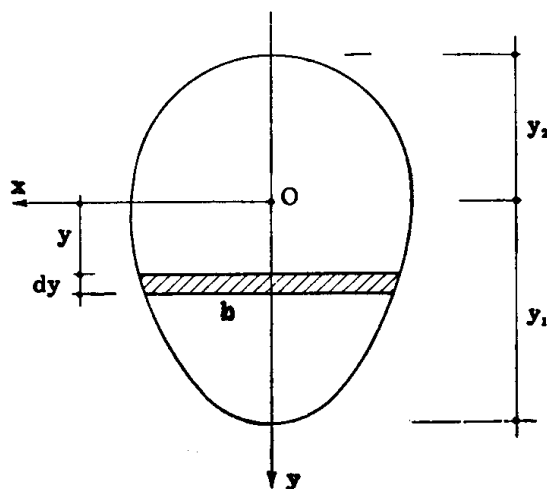


FIG. 2-18

rispetto all'asse x dell'area tratteggiata. Perciò si ha

$$\int_A \frac{S}{b} dA = - I_x .$$

Integrando si ottiene

$$\delta_1 L_1 = \int_s N \lambda' ds + \int_s M \mu' ds + \int_s T \vartheta' ds . \quad (g')$$

Alle espressioni (b') e (f') si può giungere anche considerando che lo spostamento relativo tra le sezioni terminali del tronco ds è uno spostamento rigido, caratterizzato da uno spostamento assiale relativo

$$dw = \frac{N' ds}{EA} - \lambda' ds \quad (h')$$

da una rotazione relativa

$$d\varphi = \frac{M' ds}{EI} - \mu' ds \quad (i')$$

e da una traslazione relativa normale all'asse

$$dv = \chi \frac{T' ds}{GA} - \vartheta' ds ; \quad (l')$$

le dw , $d\varphi$ e dv espresse dalle (h'), (i') ed (l') sono positive se di verso concorde a quello delle caratteristiche positive N , M e T supposte agenti sul tronco. Il lavoro $d\delta_1 L_1$ coincide, cambiato di segno, con il lavoro $d\delta_1 L_e$ compiuto dalle forze elementari $\sigma_z dA$, $\tau_{zx} dA$ e $\tau_{zy} dA$, considerate come forze applicate al tronco, per effetto delle dw , $d\varphi$ e dv ; tale lavoro può essere calcolato come lavoro delle risultanti, poichè lo spostamento è rigido. Si ha perciò

$$\begin{aligned} d\delta_1 L_1 &= - N dw - M d\varphi - T dv = \\ &= - \frac{NN'}{EA} ds - \frac{MM'}{EI} ds - \chi \frac{TT'}{GA} ds + \\ &+ N \lambda' ds + M \mu' ds + T \vartheta' ds . \end{aligned}$$

L'espressione più generale del principio dei lavori virtuali per i sistemi monodimensionali piani è perciò la seguente, valida se nel sistema di deformazioni sono presenti anche distorsioni $\lambda' \mu' \vartheta'$:

$$\begin{aligned} \Sigma_i F_i \eta'_i + \Sigma_j R_j (\Delta'_{aj} - c_j R'_j) &= \\ &= \int_s \frac{NN'}{EA} ds + \int_s \frac{MM'}{EI} ds + \int_s \chi \frac{TT'}{GA} ds - \\ &- \int_s N \lambda' ds - \int_s M \mu' ds - \int_s T \vartheta' ds . \end{aligned} \quad (27)$$

Se in particolare le distorsioni sono di origine termica, dalle (1-18) e (1-19) si trae

$$\begin{aligned} \Sigma_i F_i \eta'_i + \Sigma_j R_j (\Delta'_{aj} - c_j R'_j) &= \\ &= \int_s \frac{NN'}{EA} ds + \int_s \frac{MM'}{EI} ds + \int_s \chi \frac{TT'}{GA} ds + \\ &+ \int_s N \alpha \Delta t' ds + \int_s M \alpha \frac{\overline{\Delta t'}}{h} ds . \end{aligned} \quad (28)$$

Nelle (1-27) ed (1-28) si è indicato con apice il sistema di spostamenti, e quindi le forze che li inducono. Nelle applicazioni concrete i due sistemi a) e b) sono in genere uno reale e l'altro fittizio; il sistema reale è quello di spostamenti, poichè si intende ricercare i valori degli spostamenti reali, o scrivere delle equazioni di congruenza. In tali applicazioni, si usa indicare con apice il sistema fittizio, e cioè il sistema di forze.

La presenza di distorsioni $\mu \lambda \vartheta$ nel sistema di forze non appare esplicitamente nella (2-27); le $\mu \lambda \vartheta$ però sono contenute implicitamente nelle reazioni R_j , che nelle strutture iperstatiche dipendono anche dalle distorsioni, e quindi nelle caratteristiche N M T. Si osservi pure che le reazioni R'_j e le caratteristiche $N' M' T'$ nel sistema di deformazioni dipendono solo dalle forze F' se la struttura è isostatica, dalle forze F' e dalle distorsioni $\lambda' \mu' \vartheta'$ se la struttura è iperstatica.

Si rileva una stretta analogia tra la seconda sommatoria del primo membro della (2-27), e gli integrali al secondo membro della stessa; considerando in corrispondenza di ogni vincolo un tronco ideale di costanti elastiche c_j , e le reazioni R_j come le caratteristiche della sollecitazione interna relativa a questo tronco, i termini elastici $-R_j R'_j c_j$ del primo membro corrispondono ai termini

$$NN' \frac{ds}{EA}, \quad MM' \frac{ds}{EI}, \quad TT' \frac{\chi ds}{GA}$$

del secondo membro, e i termini anelastici $R_j \Delta'_{aj}$ del primo membro corrispondono ai termini $-N\lambda' ds$, $-M\mu' ds$, $-T\vartheta' ds$ del secondo membro. E' possibile cioè considerare la struttura a vincoli rigidi, trasferendo la cedibilità elastica di questi ad elementi ideali appartenenti alla struttura, e assimilando i cedimenti anelastici a distorsioni concentrate.

Si osservi infine che in corrispondenza di un vincolo che collega due parti della struttura (vincolo interno) le reazioni R_j sono le componenti dell'interazione del vincolo, ed i cedimenti Δ_j sono le corrispondenti componenti dello spostamento relativo tra le due sezioni collegate dal vincolo; come per il vincolo esterno, si conviene che Δ_j sia positivo se la corrispondente R_j positiva compie per esso lavoro positivo.

Nel caso più generale, le caratteristiche della sollecitazione interna presenti in una trave sono sei; con riferimento agli assi xy principali d'inerzia della sezione retta, si hanno la caratteristica di sforzo normale N , sforzo tagliante T_x secondo x e T_y secondo y , momento flettente M_x relativo ad x ed M_y ad y , e momento torcente M_t . Quest'ultimo va calcolato rispetto al centro di taglio (*).

Corrispondentemente si hanno le sei distorsioni di Volterra $\lambda \vartheta_x \vartheta_y$

(*) Se le T passano per il centro di taglio C (e quindi la torsione dipende dal momento rispetto a C) il lavoro di M_t per gli spostamenti provocati da T'_x (o T'_y) è nullo, e così pure il lavoro di T_x (o T_y) per gli spostamenti provocati da M'_t (vedi Vol. II, § 9-5 i).

$\mu_x \mu_y \omega$. La (2-27) si generalizza perciò nell'altra

$$\begin{aligned}
 & \Sigma_i F_i \eta'_i + \Sigma_j R_j (\Delta'_{aj} - c_j R'_j) = \\
 & = \int_s \frac{NN'}{EA} ds + \int_s \frac{M_x M'_x}{EI_x} ds + \int_s \frac{M_y M'_y}{EI_y} ds + \\
 & + \int_s \chi_y \frac{T_x T'_x}{GA} ds + \int_s \chi_x \frac{T_y T'_y}{GA} ds + \int_s q \frac{M_t M'_t}{GI_p} ds - \\
 & - \int_s N \lambda' ds - \int_s M_x \mu'_x ds - \int_s M_y \mu'_y ds - \\
 & - \int_s T_x \vartheta'_x ds - \int_s T_y \vartheta'_y ds - \int_s M_t \omega' ds .
 \end{aligned} \tag{29}$$

7. La derivazione diretta del principio dei lavori virtuali nel caso delle travi.

E' stato già detto come, con riferimento alle strutture isostatiche a vincoli privi di attrito, il principio dei lavori virtuali enunciato al § 2 di questo capitolo permetta di ottenere il valore di una reazione vincolare,

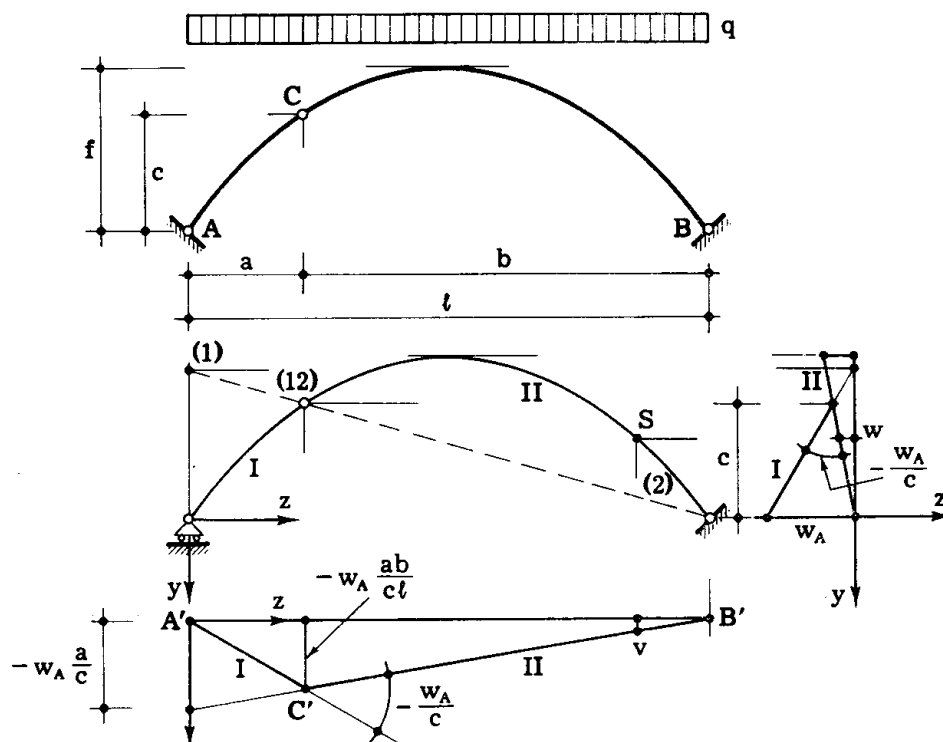


FIG. 2-19

o di una caratteristica della sollecitazione interna in una generica sezione, attraverso una relazione che non contiene le altre reazioni o caratteristiche, e quindi in funzione delle sole forze applicate. Come ulteriore

esempio, si consideri un arco a tre cerniere (fig. 2-19) soggetto ad un carico verticale q distribuito uniformemente su tutta la luce, e si debba ricercare il valore della componente orizzontale H_A della reazione (*spinta*) in corrispondenza della cerniera A. La H_A è positiva se, agente sulla struttura, è diretta verso destra. Si sostituisce la cerniera in A con un carrello scorrevole su un piano orizzontale, e per non turbare l'equilibrio si fa agire in A la forza H_A uguale alla componente della reazione soppressa con l'eliminazione del vincolo; si è perciò in presenza di una struttura labile, fornita di un grado di libertà, in configurazione di equilibrio sotto le forze q ed H_A .

I diagrammi della fig. 2-19 sono stati tracciati con il procedimento delle catene cinematiche, ben noto dalla Meccanica Razionale; di esso si darà comunque qualche cenno nel Cap. VI.

Il lavoro compiuto da queste forze per uno spostamento virtuale della struttura deve essere nullo; si può scrivere perciò, tenuto conto che gli spostamenti sono piccoli,

$$H_A w_A + \int_0^l q v dx = 0$$

$$H_A w_A + q A_{A'B'C'} = 0$$

$$H_A w_A - q w_A \frac{ab}{2c} = 0$$

$$H_A = q \frac{ab}{2c}.$$

Per $a=b=\frac{l}{2}$, $c=f$, risulta

$$H_A = \frac{q l^2}{8f}. \quad (m')$$

Per la dimostrazione che seguirà, occorre calcolare il valore di una caratteristica della sollecitazione, per esempio del momento flettente M_s in corrispondenza della generica sezione S. Si crea in S la possibilità di movimenti relativi corrispondente alla caratteristica in esame, che nel caso particolare sono rotazioni relative intorno al baricentro di S; si effettua perciò un taglio in S, e si uniscono le due facce che ne risultano con una cerniera in corrispondenza del baricentro (fig. 2-20).

Perchè la struttura rimanga in equilibrio è necessario applicare alle due facce in S due coppie M_s uguali e contrarie, e pari al momento flettente che prima del taglio si trasmetteva attraverso S. Impresso lo spo-

stamento virtuale consentito dal grado di libertà, il principio dei lavori

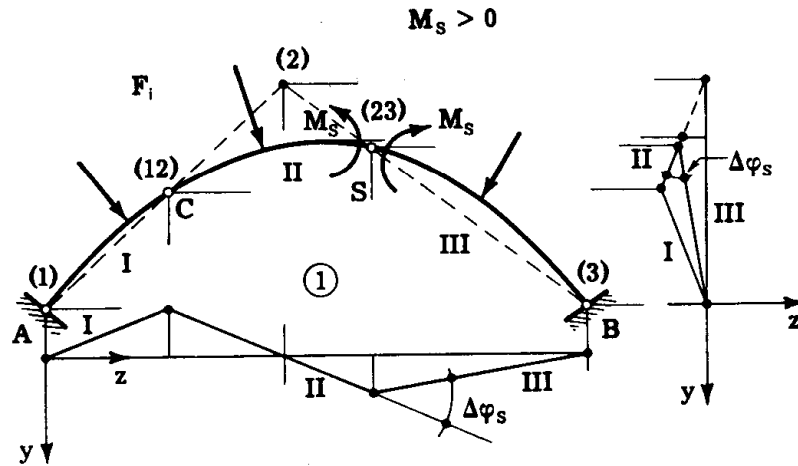


FIG. 2-20

virtuali fornisce (si ricordino le convenzioni sui segni delle rotazioni relative, di cui al § 2-3)

$$- M_s \Delta\varphi_s + \sum_1 (F_{1z} w_1 + F_{1y} v_1) = 0 \quad (n')$$

da cui (*)

$$M_s = \frac{\sum_1 (F_{1z} w_1 + F_{1y} v_1)}{\Delta\varphi_s} \quad (o')$$

Essendo unico il grado di libertà e piccoli gli spostamenti, v_1 e w_1 sono proporzionali a $\Delta\varphi_s$ secondo coefficienti che dipendono dalla geometria dell'insieme, perciò la (o') fornisce M_s in funzione delle forze applicate e delle dimensioni della struttura.

La (n') rimane valida se gli spostamenti sono quelli provocati da un generico insieme di forze F_1 sulla struttura della fig. 2-21, dove il solo concio ds in S è deformabile. Si ha così

$$- M_s \left(\frac{M'_s ds}{EI} - \mu'_s ds \right) + \sum_1 (F_{1z} dw'_1 + F_{1y} dv'_1) = 0 \quad (p')$$

(*) Si osservi che, in rigore, si sarebbero dovuti esprimere $\Delta\varphi$, w e v in funzione della coordinata lagrangiana, e prendere le sole parti del primo ordine.

Sommando gli effetti, dalla (p') si trae

$$\begin{aligned} \Sigma_1 (F_{1z} w' + F_{1y} v') = \\ = \int_s \frac{NN'}{EA} ds + \int_s \frac{MM'}{EI} ds + \int_s \chi \frac{TT'}{GA} ds - \\ - \int_s N \lambda' ds - \int_s M \mu' ds - \int_s T \vartheta' ds . \end{aligned} \quad (q')$$

La (q') non tiene conto dell'eventuale cedibilità dei vincoli; chiamando

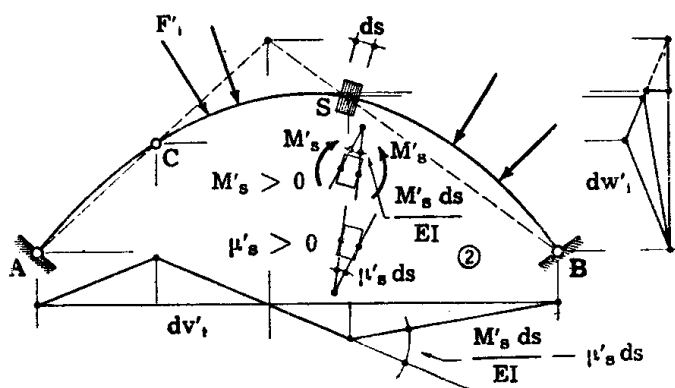


FIG. 2-21

u'_R v'_R gli spostamenti dovuti ai cedimenti Δ'_j , il principio dei lavori virtuali permette di scrivere

$$\Sigma_1 (F_{1z} w'_R + F_{1y} v'_R) + \Sigma_j R_j \Delta'_j = 0$$

che sommata alla (q'), e chiamando u'_t e v'_t gli spostamenti totali, somma di quelli u' e v' dovuti alla deformazione dei tronchi elementari e di quelli u'_R e v'_R inerenti ai cedimenti vincolari, fornisce

$$\begin{aligned} \Sigma_1 (F_{1z} w'_t + F_{1y} v'_t) + \Sigma_j R_j \Delta'_j = \\ = \int_s \frac{NN'}{EA} ds + \int_s \frac{MM'}{EI} ds + \int_s \chi \frac{TT'}{GA} ds - \\ - \int_s N \lambda' ds - \int_s M \mu' ds - \int_s T \vartheta' ds . \end{aligned} \quad (r')$$

La (r') coincide con la (2-27); essa è stata ricavata per una struttura isostatica, ma questa limitazione è superata se si pensa che ogni struttura iperstatica si riduce ad una isostatica, purchè si considerino le reazioni sovrabbondanti come forze applicate.

Poichè si sono sommati gli spostamenti dw' e dv' dovuti alle deformazioni dei singoli tronchi, ottenendo così gli spostamenti finali $w'v'$ dovuti alle deformazioni di tutta la struttura, è necessario che le funzioni $w'v'$ soddisfino l'ipotesi di piccolezza degli spostamenti.

8. Il calcolo degli spostamenti attraverso il principio dei lavori virtuali.

Se si vuole ottenere la componente secondo una retta r qualsiasi dello spostamento del generico punto P , associato a determinate forze applicate, si utilizza un sistema fittizio di forze applicate costituito da una forza agente in P secondo r . Si debba per esempio calcolare la componente η_s secondo una retta r dello spostamento del baricentro della generica sezione retta S di una trave (fig. 2-22 a); si scrive l'espressione

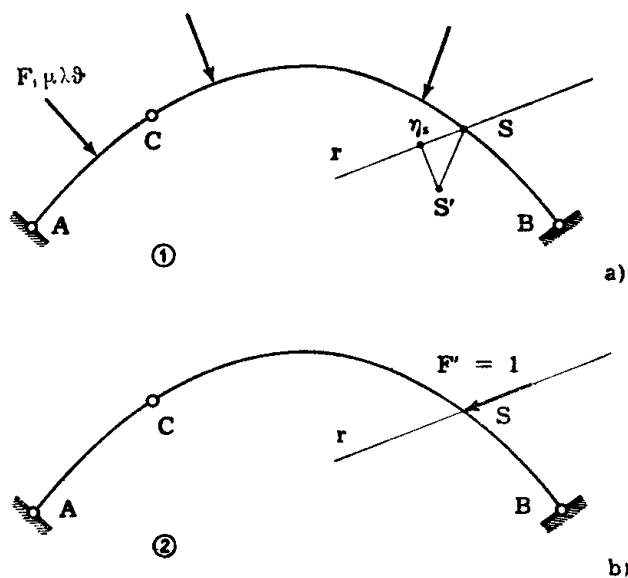


FIG. 2-22

del principio dei lavori virtuali con riferimento al sistema 1 di spostamenti e deformazioni effettivi, e al sistema 2 di forze (sistema fittizio) generato da una forza $F' = 1$ applicata secondo la retta r in corrispondenza della sezione S .

Si ha così dalla (2-27)

$$\begin{aligned}
 1 \cdot \eta_S + \sum_j R'_j (\Delta_{aj} - c_j R_j) = \\
 = \int_s \frac{N'N}{EA} ds + \int_s \frac{M'M}{EI} ds + \int_s \chi \frac{T'T}{GA} ds - \\
 - \int_s N' \lambda ds - \int_s M' \mu ds - \int_s T' \vartheta ds
 \end{aligned} \quad (30)$$

ove soltanto η_S è incognita.

Anche il segno è definito, poichè se η_S è positivo, è diretto nel verso della $F' = 1$; le dimensioni fisiche sono rispettate, poichè la quantità 1 che moltiplica η_S è una forza. Se si vuole conoscere lo spostamento complessivo SS' del baricentro di S , basta calcolare con procedimento analogo a quello già indicato la componente di SS' secondo un'altra retta passante per il baricentro di S . Se si vuole conoscere la rotazione di S , il sistema 2

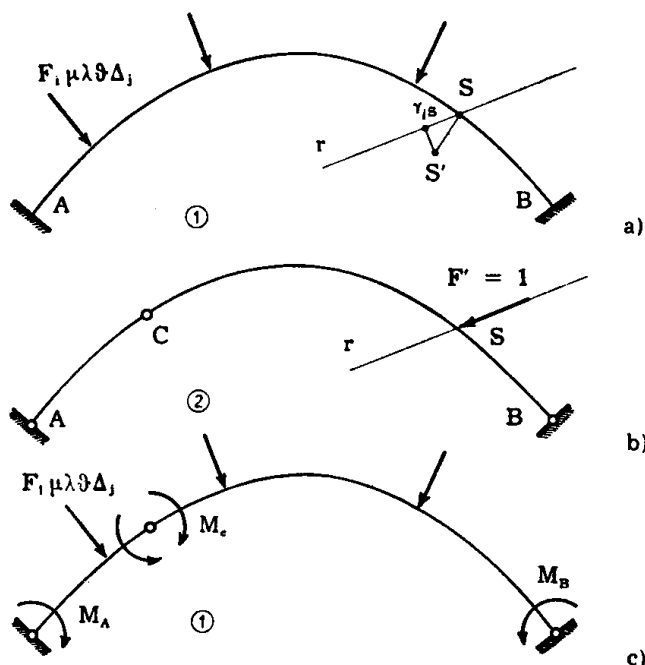


FIG. 2-23

deve essere costituito da una coppia $\mathcal{M}' = 1$ applicata in S . Il procedimento si rivela particolarmente vantaggioso quando occorrono solo gli spostamenti di alcuni punti; in ciò si palesa una stretta analogia con la ricerca delle reazioni delle strutture isostatiche attraverso il principio dei lavori virtuali nella forma del § 2-2.

Se la struttura è iperstatica (fig. 2-23 a) il sistema 2 costituito dalla

$F' = 1$ e dalle $N' M' T' R'$ può essere calcolato sulla struttura resa isostatica, per quanto detto al paragrafo 6.

9. Il calcolo delle reazioni iperstatiche attraverso il principio dei lavori virtuali.

Si consideri una trave 3 volte iperstatica (fig. 2-24 a) soggetta ad un insieme di forze F_i , cedimenti vincolari Δ_{aj} , e distorsioni $\lambda \mu \vartheta$; il quadro delle tensioni e delle deformazioni non varia se la struttura si rende isostatica (fig. 2-24 b) purchè su essa si suppongano agenti, tra le forze applicate, le reazioni iperstatiche $X_1 X_2 X_3$. La struttura resa isostatica prende nome di *struttura principale* o *sistema principale*.

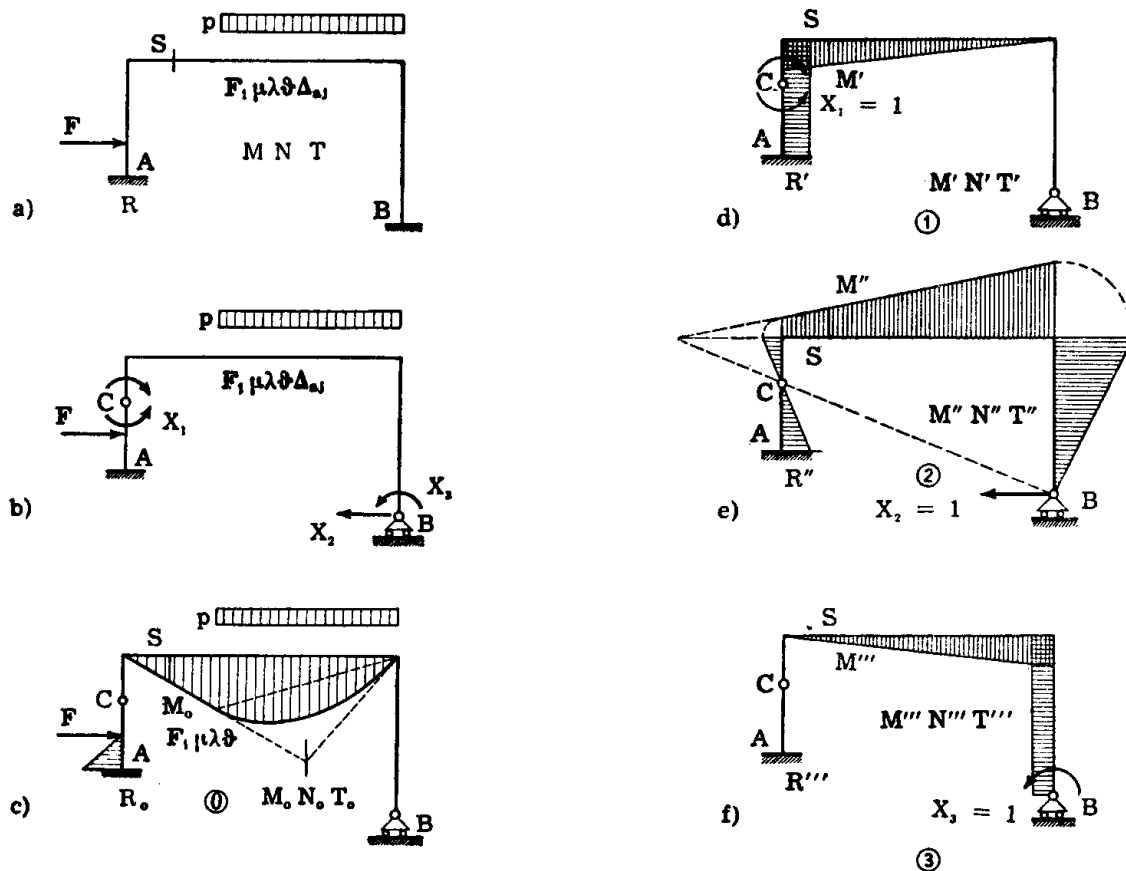


FIG. 2-24

Siano valide le premesse del principio di sovrapposizione degli effetti; in conseguenza una caratteristica della sollecitazione, per esempio il momento, in corrispondenza della generica sezione S della struttura effettiva, può porsi uguale alla somma del momento M_0 , provocato nella stessa sezione della struttura principale dalle forze F_i (fig. 2-24 c), e dei momenti indotti dalle reazioni incognite X_i (figg. 2-24 d, e, f):

$$M = M_0 + M'X_1 + M''X_2 + M'''X_3. \quad (31)$$

Le distorsioni $\lambda \mu \vartheta$ e i cedimenti Δ_{aj} anelastici non inducono sollecitazioni nella struttura principale, come già precisato.

Relazioni analoghe alla (2-31) valgono per le altre caratteristiche, e per le reazioni vincolari.

Il principio dei lavori virtuali, con riferimento al sistema 1 di forze (sistema fittizio $X_1=1$, vedi fig. 2-24 d, con le reazioni e tensioni da esso generate sulla struttura principale, sistema in equilibrio sulla struttura priva di vincoli) e al sistema effettivo di deformazioni fornisce

$$\begin{aligned}
 1 \cdot 0 + \sum_j R'_j (\Delta_{aj} - c_j R_j) = \\
 = \int_s \frac{N'N}{EA} ds + \int_s \frac{M'M}{EI} ds + \int_s \chi \frac{T'T}{GA} ds - \\
 - \int_s N' \lambda ds - \int_s M' \mu ds - \int_s T' \vartheta ds .
 \end{aligned} \quad (32')$$

La X_1 è una reazione iperstatica interna, perciò il lavoro da essa compiuto per effetto delle deformazioni effettive è nullo, essendo nulla nel sistema reale la rotazione relativa delle due facce in corrispondenza della X_1 . Non altrettanto accade per la X_2 e la X_3 , poichè i vincoli esterni, nel caso più generale, possono essere cedevoli. Le equazioni che si ottengono applicando il principio dei lavori virtuali al sistema fittizio 2 di forze ($X_2=1$) e al sistema di deformazione effettivo, o al sistema 3 di forze ($X_3=1$) e al sistema di deformazione effettivo, sono le seguenti

$$\begin{aligned}
 1 \cdot (\Delta_{a2} - c_2 X_2) + \sum_j R''_j (\Delta_{aj} - c_j R_j) = \\
 = \int_s \frac{N''N}{EA} ds + \int_s \frac{M''M}{EI} ds + \int_s \chi \frac{T''T}{GA} ds - \\
 - \int_s N'' \lambda ds - \int_s M'' \mu ds - \int_s T'' \vartheta ds ;
 \end{aligned} \quad (32'')$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot (\Delta_{a3} - c_3 X_3) + \sum_j R'''_j (\Delta_{aj} - c_j R_j) = \\
 = \int_s \frac{N'''N}{EA} ds + \int_s \frac{M'''M}{EI} ds + \int_s \chi \frac{T'''T}{GA} ds - \\
 - \int_s N''' \lambda ds - \int_s M''' \mu ds - \int_s T''' \vartheta ds .
 \end{aligned} \quad (32''')$$

Per le relazioni 2-31 ed analoghe

$$M = M_0 + M' X_1 + M'' X_2 + M''' X_3$$

$$N = N_0 + N' X_1 + N'' X_2 + N''' X_3$$

$$T = T_0 + T' X_1 + T'' X_2 + T''' X_3$$

$$R = R_0 + R' X_1 + R'' X_2 + R''' X_3$$

le tre equazioni (2-32) si traducono in un sistema di tre equazioni algebriche lineari non omogenee nelle tre incognite $X_1 X_2 X_3$. Infatti le (2-32) si scrivono, esplicitando $M N T$ ed R ,

$$\begin{aligned} \Sigma_j R_j' \Delta_{aj} - \Sigma_j R_j' c_j R_{0j} - X_1 \Sigma_j R_j'^2 c_j - X_2 \Sigma_j R_j' R_j'' c_j - X_3 \Sigma_j R_j' R_j''' c_j = \\ = \int_s \frac{N' N_0}{EA} ds + X_1 \int_s \frac{N'^2}{EA} ds + X_2 \int_s \frac{N' N''}{EA} ds + X_3 \int_s \frac{N' N'''}{EA} ds + \\ + \int_s \frac{M' M_0}{EI} ds + X_1 \int_s \frac{M'^2}{EI} ds + X_2 \int_s \frac{M' M''}{EI} ds + X_3 \int_s \frac{M' M'''}{EI} ds + \\ + \int_s \chi \frac{T' T_0}{GA} ds + X_1 \int_s \chi \frac{T'^2}{GA} ds + X_2 \int_s \chi \frac{T' T''}{GA} ds + X_3 \int_s \chi \frac{T' T'''}{GA} ds - \\ - \int_s N' \lambda ds - \int_s M' \mu ds - \int_s T' \vartheta ds ; \end{aligned} \quad (33')$$

$$\begin{aligned} \Delta_{a2} - c_2 X_2 + \Sigma_j R_j'' \Delta_{aj} - \Sigma_j R_j'' c_j R_{0j} - \\ - X_1 \Sigma_j R_j'' R_j' c_j - X_2 \Sigma_j R_j''^2 c_j - X_3 \Sigma_j R_j'' R_j''' c_j = \\ = \int_s \frac{N'' N_0}{EA} ds + X_1 \int_s \frac{N'' N'}{EA} ds + X_2 \int_s \frac{N''^2}{EA} ds + X_3 \int_s \frac{N'' N'''}{EA} ds + \\ + \int_s \frac{M'' M_0}{EI} ds + X_1 \int_s \frac{M'' M'}{EI} ds + X_2 \int_s \frac{M''^2}{EI} ds + X_3 \int_s \frac{M'' M'''}{EI} ds + \\ + \int_s \chi \frac{T'' T_0}{GA} ds + X_1 \int_s \chi \frac{T'' T'}{GA} ds + X_2 \int_s \chi \frac{T''^2}{GA} ds + X_3 \int_s \chi \frac{T'' T'''}{GA} ds - \\ - \int_s N'' \lambda ds - \int_s M'' \mu ds - \int_s T'' \vartheta ds ; \end{aligned} \quad (33'')$$

$$\begin{aligned}
& \Delta_{a3} - c_3 X_3 + \sum_j R_j''' \Delta_{aj} - \sum_j R_j''' c_j R_{oj} - \\
& - X_1 \sum_j R_j''' R_j' c_j - X_2 \sum_j R_j''' R_j'' c_j - X_3 \sum_j R_j''' c_j = \\
& = \int_s \frac{N''' N_o}{EA} ds + X_1 \int_s \frac{N''' N'}{EA} ds + X_2 \int_s \frac{N''' N''}{EA} ds + X_3 \int_s \frac{N'''^2}{EA} ds + \\
& + \int_s \frac{M''' M_o}{EI} ds + X_1 \int_s \frac{M''' M'}{EI} ds + X_2 \int_s \frac{M''' M''}{EI} ds + X_3 \int_s \frac{M'''^2}{EI} ds + \\
& + \int_s \chi \frac{T''' T_o}{GA} ds + X_1 \int_s \chi \frac{T''' T'}{GA} ds + X_2 \int_s \chi \frac{T''' T''}{GA} ds + X_3 \int_s \chi \frac{T'''^2}{GA} ds - \\
& - \int_s N''' \lambda ds - \int_s M''' \mu ds - \int_s T''' \vartheta ds. \quad (33''')
\end{aligned}$$

Le (2-33) possono ancora scriversi

$$\begin{aligned}
a_{10} + a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 &= 0 \\
a_{20} + a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 &= \Delta_{a2} - c_2 X_2 \\
a_{30} + a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 &= \Delta_{a3} - c_3 X_3
\end{aligned} \quad (34)$$

avendo posto

$$\begin{aligned}
a_{10} &= \int_s \frac{N' N_o}{EA} ds + \int_s \frac{M' M_o}{EI} ds + \int_s \chi \frac{T' T_o}{GA} ds - \\
& - \int_s N' \lambda ds - \int_s M' \mu ds - \int_s T' \vartheta ds - \sum_j R_j' \Delta_{aj} + \sum_j R_j' c_j R_{oj} \\
a_{20} &= \int_s \frac{N'' N_o}{EA} ds + \int_s \frac{M'' M_o}{EI} ds + \int_s \chi \frac{T'' T_o}{GA} ds - \\
& - \int_s N'' \lambda ds - \int_s M'' \mu ds - \int_s T'' \vartheta ds - \sum_j R_j'' \Delta_{aj} + \sum_j R_j'' c_j R_{oj} \\
a_{30} &= \int_s \frac{N''' N_o}{EA} ds + \int_s \frac{M''' M_o}{EI} ds + \int_s \chi \frac{T''' T_o}{GA} ds - \\
& - \int_s N''' \lambda ds - \int_s M''' \mu ds - \int_s T''' \vartheta ds - \sum_j R_j''' \Delta_{aj} + \sum_j R_j''' c_j R_{oj}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \int_s \frac{N'^2}{EA} ds + \int_s \frac{M'^2}{EI} ds + \int_s \chi \frac{T'^2}{GA} ds + \sum_j R_j'^2 c_j \\
a_{22} &= \int_s \frac{N''^2}{EA} ds + \int_s \frac{M''^2}{EI} ds + \int_s \chi \frac{T''^2}{GA} ds + \sum_j R_j''^2 c_j \\
a_{33} &= \int_s \frac{N'''^2}{EA} ds + \int_s \frac{M'''^2}{EI} ds + \int_s \chi \frac{T'''^2}{GA} ds + \sum_j R_j'''^2 c_j \quad (35) \\
a_{12} &= \int_s \frac{N'N''}{EA} ds + \int_s \frac{M'M''}{EI} ds + \int_s \chi \frac{T'T''}{GA} ds + \sum_j R_j' R_j'' c_j = a_{21} \\
a_{13} &= \int_s \frac{N'N'''}{EA} ds + \int_s \frac{M'M'''}{EI} ds + \int_s \chi \frac{T'T'''}{GA} ds + \sum_j R_j' R_j''' c_j = a_{31} \\
a_{23} &= \int_s \frac{N''N'''}{EA} ds + \int_s \frac{M''M'''}{EI} ds + \int_s \chi \frac{T''T'''}{GA} ds + \sum_j R_j'' R_j''' c_j = a_{32} .
\end{aligned}$$

Le (2-34) forniscono un sistema di tre equazioni algebriche lineari non omogenee nelle tre incognite iperstatiche X_1, X_2, X_3 . Se la struttura è n volte iperstatica, di equazioni indipendenti come le (2-34) se ne possono scrivere una per ogni sistema fittizio $X_i = 1$; esse sono perciò in numero n pari a quello delle X_i . Il problema della ricerca delle n incognite iperstatiche è così ridotto a quello della soluzione di $n+1$ strutture isostatiche, soggette rispettivamente alle forze applicate, ed alle sollecitazioni $X_i = 1$ prese una per volta.

10. Le equazioni dei lavori virtuali come equazioni di congruenza.

Dall'esame delle (2-35) e (2-30) risulta che a_{10}, a_{20}, a_{30} , sono rispettivamente la rotazione relativa delle due facce dalla cerniera C (positiva se nel verso assunto per le X_1 positive, fig. 2-24 d), lo spostamento orizzontale del carrello B (positivo se nel verso assunto per la X_2 positiva, fig. 2-24 e), e la rotazione della sezione in B (positiva se nel verso assunto per la X_3 positiva, fig. 2-24 f) provocati nella struttura principale dalle forze F_i , dalle distorsioni λ, μ, ϑ , e dai cedimenti vincolari Δ_{aj} .

La quantità $a_{hk} = a_{kh}$ è invece, sempre con riferimento alla struttura principale, lo spostamento corrispondente alla forza X_h (*) provocato dalla

(*) Si intende per *ente spostamento corrispondente ad un ente forza* (genericamente inteso) la componente dello spostamento per cui la forza compie lavoro; se

forza $X_k = 1$, uguale, per il teorema di Betti, allo spostamento corrispondente alla forza X_k provocato dalla forza $X_h = 1$; per esempio a_{23} è lo spostamento del carrello B provocato da una coppia X_3 unitaria, o la rotazione della sezione in B provocata da una forza X_2 unitaria (*). La prima delle equazioni (2-34) è quindi la traduzione analitica del fatto che nella struttura principale soggetta alle forze F_1 , alle distorsioni $\lambda \mu \vartheta$, ai cedimenti Δ_{aj} ed alle reazioni iperstatiche $X_1 X_2 X_3$, la rotazione relativa tra le due facce unite dalla cerniera C deve essere nulla; la seconda e la terza delle (2-34) esprimono che nella stessa struttura, soggetta alle stesse sollecitazioni, il carrello B deve spostarsi di una quantità pari al cedimento $\Delta_2 = \Delta_{a2} - c_2 X_2$, e la sezione in B deve ruotare di una quantità pari al cedimento $\Delta_3 = \Delta_{a3} - c_3 X_3$. Le (2-34) perciò non sono altro che le condizioni di congruenza, pari al numero delle incognite iperstatiche, che devono aggiungersi a quelle della statica per poter conoscere lo stato tensionale della struttura.

Poichè le incognite del problema sono le n forze X_i (reazioni di vincolo o caratteristiche della sollecitazione), si perviene attraverso le (2-34) all'unica soluzione equilibrata e congruente tra le ∞^n equilibrate ma non congruenti. Infatti una qualsiasi ennupla di incognite X_i può essere applicata sulla struttura isostatica assieme alle F_1 , alle $\lambda \mu \vartheta$, e ai Δ_{aj} , senza contravvenire alle condizioni di equilibrio, poichè lo stato tensionale che così nasce sulla struttura principale è sicuramente in equilibrio con le forze e le reazioni sulla struttura libera da vincoli; la ennupla qualsiasi, però, non soddisfa le (2-34), e quindi per essa la struttura isostatica presenta in corrispondenza delle X_i spostamenti diversi da quelli che si hanno nella struttura effettiva. Una sola ennupla di X_i , conformemente al prin-

l'ente forza è una forza, applicata in P secondo la retta r , lo spostamento corrispondente è la componente η_r secondo r dello spostamento PP' di P; se l'ente forza è una coppia, il cui vettore momento ha la direzione r , ed è applicata in corrispondenza di una sezione S, lo spostamento corrispondente è la componente φ_r secondo r del vettore rappresentante la rotazione φ della sezione S. Per il teorema di Betti, se si considerano due forze unitarie $F_h = 1$ ed $F_k = 1$ agenti su una struttura, e si indicano con a_{hk} lo spostamento corrispondente ad F_h provocato da F_k , e con a_{kh} lo spostamento corrispondente ad F_k provocato da F_h , i lavori mutui $L_{hk} = F_h a_{hk} = a_{hk}$ ed $L_{kh} = F_k a_{kh} = a_{kh}$ sono uguali, e perciò

$$a_{hk} = a_{kh}.$$

Il termine a_{hk} è il *coefficiente d'influenza* relativo alle due forze F_h ed F_k .

(*) Le dimensioni fisiche sono rispettate, perchè sia uno spostamento dovuto ad una coppia che una rotazione dovuta ad una forza hanno le dimensioni $[F^{-1}]$; e dalle (2-35) si osserva che $[N''] = [1]$, $[N'''] = [l^{-1}]$, $[M''] = [l]$, $[M'''] = [1]$, $[T''] = [1]$, $[T'''] = [l^{-1}]$, $[R''] = [1]$, $[R'''] = [l^{-1}]$, $[c] = [l F^{-1}]$, per cui $[a_{23}] = [F^{-1}]$.

cipio di unicità della soluzione del problema dell'equilibrio elastico, soddisfa le (2-34), e ad essa corrisponde l'unica soluzione *equilibrata e congruente* tra le ∞^n equilibrate ma non congruenti.

11. Alcuni esempi elementari.

Nei casi più semplici i coefficienti (2-35) si calcolano con quadrature, negli altri casi sostituendo l'integrale con sommatoria, dopo aver provveduto ad una opportuna suddivisione della struttura in parti.

Si tenga pure presente che il più delle volte non tutti gli integrali sono dello stesso ordine di grandezza, e ci si può limitare quindi al calcolo di quelli che hanno un valore prevalente. Ciò si può riconoscere valutando in modo sommario l'energia di deformazione della struttura e paragonando tra loro i sei termini relativi alle sei caratteristiche della sollecitazione; si osserva così, per esempio, che in una trave lunga, in un telaio, in un arco sotto carichi non affini al peso proprio, l'effetto flettente è prevalente su tutti gli altri; in una travatura reticolare o in un arco soggetto al peso proprio occorre invece tener conto innanzitutto dello sforzo normale.

Si trattano di seguito alcuni esempi elementari risolubili immediatamente per quadrature; si trascura l'effetto del taglio.

a) *La trave rettilinea di sezione costante, appoggiata, e caricata uniformemente.*

Si voglia conoscere l'abbassamento $v_{l/2}$ del punto di mezzeria nella trave della fig. 2-25.

Si fa agire una forza unitaria secondo la verticale nel punto $z = \frac{l}{2}$ e diretta verso il basso (fig. 2-25 b). Risulta così

$$M = \frac{qz}{2} (l - z) \quad (0 \leq z \leq l)$$

$$M' = \frac{z}{2} \quad \left(0 \leq z \leq \frac{l}{2}\right)$$

e quindi

$$1 \cdot v_{l/2} = \frac{2}{EI} \int_0^{l/2} MM' dz = \frac{q}{2EI} \int_0^{l/2} (l - z) z^2 dz = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \quad (s')$$

Se si vuole conoscere invece la rotazione φ_B della sezione B

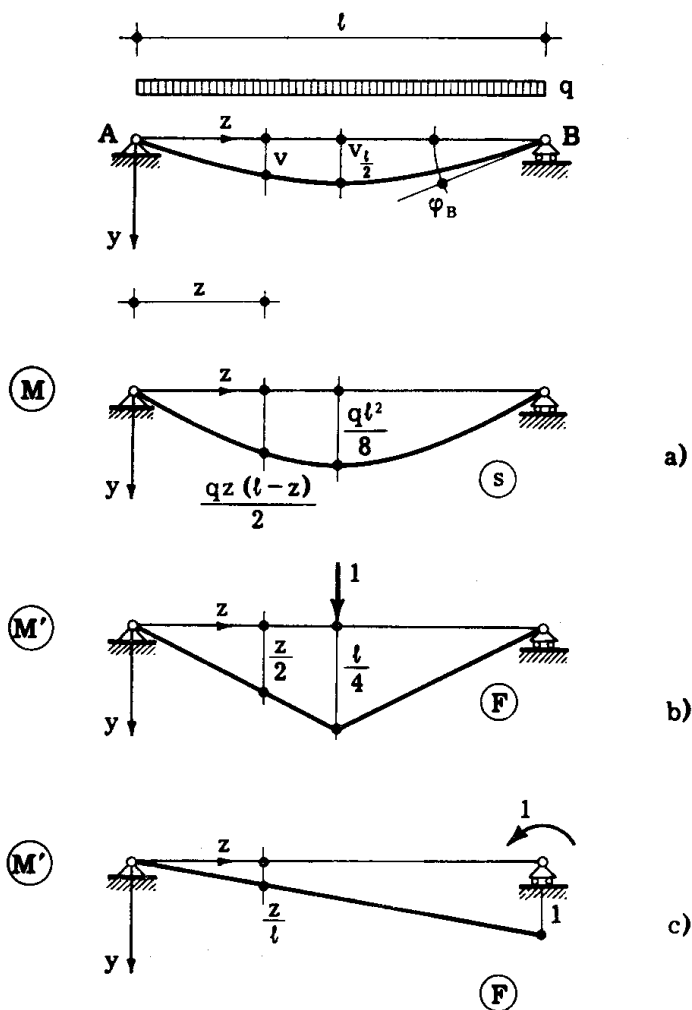


FIG. 2-25

si fa agire in B una coppia unitaria (fig. 2-25 c), ottenendosi

$$M' = \frac{z}{l} \quad (0 \leq z \leq l) .$$

Si ha perciò

$$1 \cdot \varphi_B = \frac{q}{2 l EI} \int_0^l (l - z) z^2 dz = \frac{q l^3}{24 EI} . \quad (t')$$

b) *Trave rettilinea di sezione costante, incastrata e appoggiata, caricata da una coppia all'estremo.*

La trave (fig. 2-26 a) è iperstatica; si scelga come incognita iperstatica la coppia in A, così che la struttura principale è la trave appoggiata.

Risulta (fig. 2-26 b e c)

$$M_o = \frac{\pi}{l} z$$

$$M' = - \frac{l - z}{l}$$

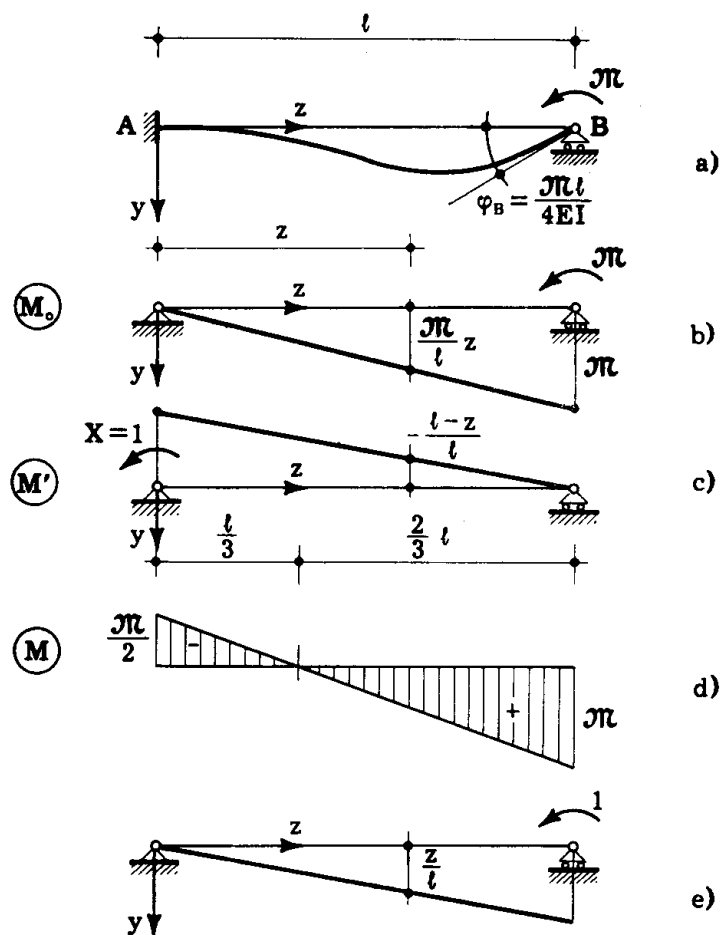


FIG. 2-26

e quindi

$$0 = \int_0^l \frac{M_o M'}{EI} dz + X \int_0^l \frac{M'^2}{EI} dz$$

$$X = - \frac{\int_0^l \frac{M_o M'}{EI} dz}{\int_0^l \frac{M'^2}{EI} dz} = - \frac{- \frac{\pi l}{6 EI}}{\frac{l}{3 EI}} = \frac{\pi}{2} \quad (u')$$

Le quantità $-\frac{\mathcal{M} l}{6 EI}$ ed $\frac{l}{3 EI}$ sono le rotazioni provocate in A rispettivamente dalla $\mathcal{M}$ applicata in B, e dalla $X=1$ applicata in A.

Se si vuole conoscere il valore di φ_B , si considera come sistema di forze la struttura isostatica caricata da una coppia unitaria in B (fig. 2-26 e), e come sistema di spostamenti la struttura reale (fig. 2-26 a, oppure 2-26 d).

Si ha così

$$\begin{aligned} 1 \cdot \varphi_B &= \frac{1}{EI} \int_0^l MM' dz = \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\frac{\mathcal{M}}{l} z - \frac{\mathcal{M}}{2} \frac{l-z}{l} \right) \frac{z}{l} dz = \frac{\mathcal{M} l}{4 EI}. \end{aligned} \quad (v')$$

c) *Spostamento secondo l'asse dell'estremo appoggiato di una trave.*

Si consideri la trave AB (fig. 2-27) soggetta ad un qualsiasi carico q come sistema di spostamenti, la trave AB soggetta alla forza unitaria assiale in B come sistema di forze.

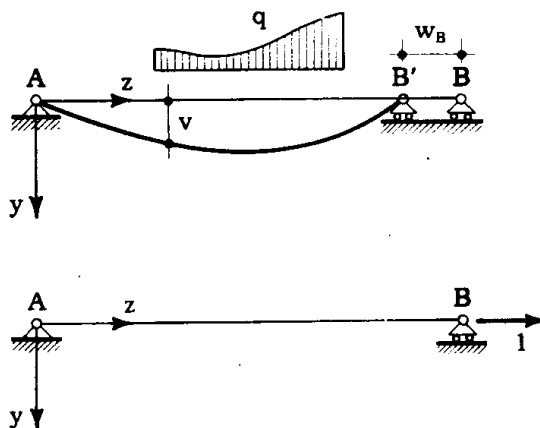


FIG. 2-27

Se si fa riferimento alla configurazione indeformata, si ha

$$N = 0$$

$$M' = 0$$

e quindi

$$w_B = 0. \quad (z')$$

Se si fa riferimento alla configurazione già deformata dal carico q , è (Vol. II, § 5-1)

$$M' = -v$$

$$M = -EI v''$$

e quindi, limitandosi all'effetto flettente,

$$\begin{aligned} 1 \cdot w_B &= \frac{1}{EI} \int_0^l MM' dz = \int_0^l (v v'') dz \\ &= (v v')_0^l - \int_0^l v'^2 dz = - \int_0^l v'^2 dz . \end{aligned} \quad (a'')$$

La (z') è esatta, perchè le forze sono calcolate su una configurazione che si confonde con quella indeformata, e quindi tutto il calcolo è fatto nell'ipotesi di piccoli spostamenti. L'espressione (a'') è sbagliata, pur essendo del secondo ordine; e infatti si è visto (d) che risulta

$$w_B = - \frac{1}{2} \int_0^l v'^2 dz . \quad (b'')$$

Ciò dipende dal fatto che il sistema di spostamenti deve comunque soddisfare l'ipotesi di piccolezza, mentre i v , in questo caso, non si con-

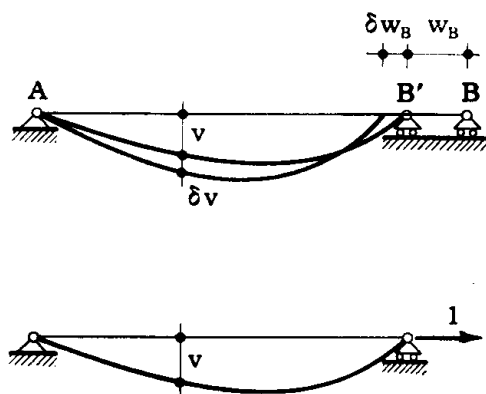


FIG. 2-28

siderano trascurabili. Assumendo così gli spostamenti δv a partire da v (fig. 2-28) si ha (v grandi, δv piccoli)

$$M' = -v$$

$$M = -EI (\delta v)''$$

e quindi

$$\begin{aligned} 1 \cdot \delta w_B &= \int_0^l v (\delta v)'' dz = \left[v (\delta v)' \right]_0^l - \int_0^l v' (\delta v)' dz = \\ &= - \int_0^l v' (\delta v)' dz, \end{aligned}$$

da cui

$$w_B = - \int_0^l \left[\int_0^z v' (\delta v)' dz \right] dz = - \frac{1}{2} \int_0^l v'^2 dz, \quad (c'')$$

espressione coincidente con la (b'').

d) *Rotazione torsionale della sezione di mezzzeria di una trave appoggiata.*

Si prenda in esame la trave AB ad asse z rettilineo, e di sezione costante, della fig. 2-29; il sistema non è monodimensionale piano. I vincoli

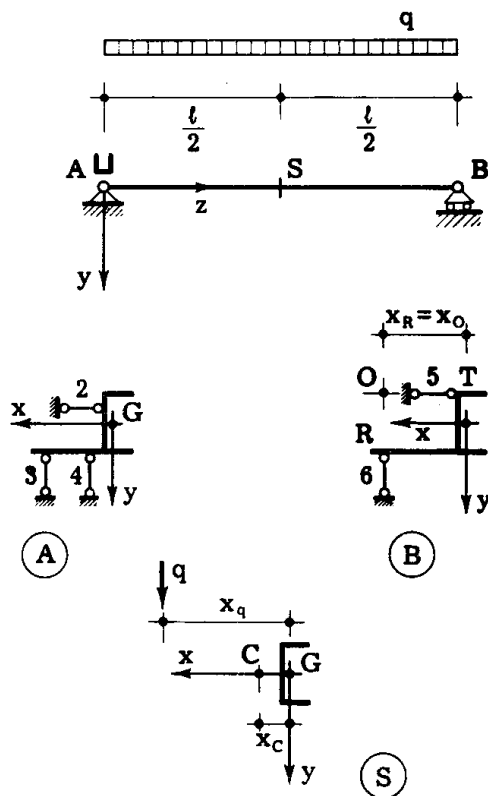


FIG. 2-29

in corrispondenza delle sezioni estreme sono caratterizzati da pendoli (§ 4-6); essi sono numerati (il primo, disposto in A sull'asse z , non è disegnato).

Il numero e la disposizione dei vincoli è tale da far riconoscere la struttura come isostatica. La sezione A è vincolata in modo che

$$u_G = v_G = w_G = 0 ,$$

$$\vartheta = 0 .$$

In A si ha perciò un appoggio torsionale (Vol. II, § 10-11), indicato come in figura.

Nella sezione B invece si verifica

$$u_T = 0$$

$$v_R = 0 ;$$

la sezione B è libera a torsione.

La trave è soggetta su tutta la luce ad un carico q uniformemente ripartito, in un piano parallelo al piano yz all'ascissa x_q rispetto al baricentro.

$$\text{Si ha } R_s = 0, R_g = -\frac{ql}{2} .$$

I diagrammi dei momenti flettenti e torcenti sono riportati nella fig. 2-30; il momento torcente è calcolato rispetto al centro di taglio C.

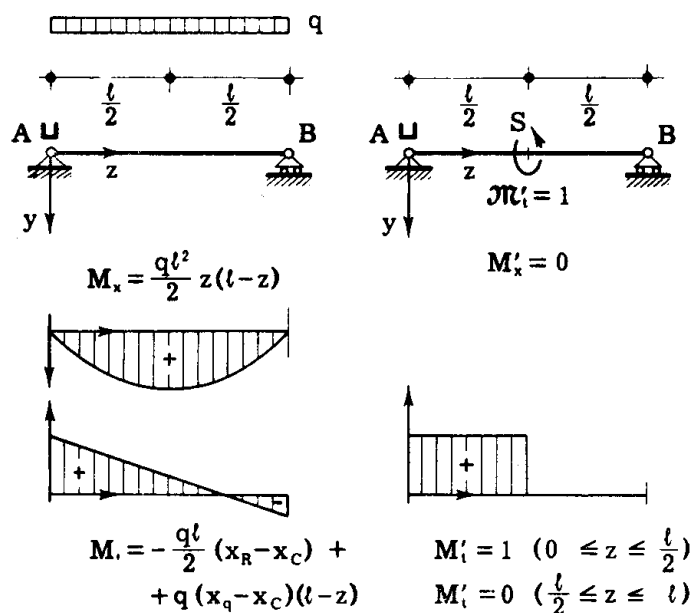


FIG. 2-30

Il sistema fittizio di forze da assegnare per il calcolo della ϑ_s (rotazione torsionale φ_z della sezione di mezzeria) è riportato nella stessa fig. 2-30.

Si ha così

$$1 \cdot \vartheta_s = \frac{1}{C_1} \int_0^l M'_t M_t dz, \quad (d'')$$

dove C_1 è la rigidità torsionale della trave (Vol. II, § 8-14). La (d'') si traduce nell'altra

$$\vartheta_s = \frac{1}{C_1} \left[-\frac{q l}{2} (x_R - x_C) \int_0^{l/2} dz + q (x_q - x_C) \int_0^{l/2} (l - z) dz \right]$$

da cui

$$\vartheta_s = \frac{1}{C_1} \left[-\frac{q l^2}{4} (x_R - x_C) + \frac{3}{8} q l^2 (x_q - x_C) \right]. \quad (e'')$$

Dalla (e'') si trae che, per $x_q = x_R = x_C$, è $\vartheta_s = 0$ (ciò vale anche per una qualsiasi sezione S diversa da quella di mezzeria). In tal caso si osserva (fig. 2-30) che il diagramma di M_t è nullo.

Se è $x_R = x_q$, è pure

$$\vartheta_s = \frac{q l^2}{8 C_1} (x_q - x_C);$$

il momento torcente M_t è fornito da

$$M_t = \left[-\frac{q l}{2} + q (l - z) \right] (x_q - x_C) = T (x_q - x_C),$$

e cioè è affine a quello del taglio, a meno di $x_q - x_C$. La rotazione ϑ_s si verifica essere la stessa che si avrebbe, sotto le coppie torcenti $m_t = q (x_q - x_C)$, in una trave con due appoggi torsionali alle estremità.

Se è $x_R = x_C$, è

$$\vartheta_s = \frac{3}{8} \frac{q l^2}{C_1} (x_q - x_C);$$

il momento torcente M_t è fornito da

$$M_t = q (l - z) (x_q - x_C),$$

e si annulla quindi in B; la rotazione ϑ_s si verifica essere la stessa che si avrebbe sotto le coppie torcenti $m_t = q (x_q - x_C)$ (vedi form. m'').

Si consideri adesso la stessa trave soggetta a coppie torcenti m_t uniformemente distribuite su tutta la luce; per essa è (fig. 2-31) $R_B = 0$, e quindi

$$M_x = 0$$

$$M_t = m_t (\ell - z) .$$

La sollecitazione è puramente torsionale; la rotazione relativa $d\vartheta$ tra le due facce del tronco elementare generico all'ascissa z e lungo dz è pari a

$$d\vartheta = \frac{M_t}{C_1} dz .$$

Questa rotazione avviene intorno ad una retta o parallela a z ed imposta dai vincoli; infatti, considerando elastico solo il tronco dz , la parte

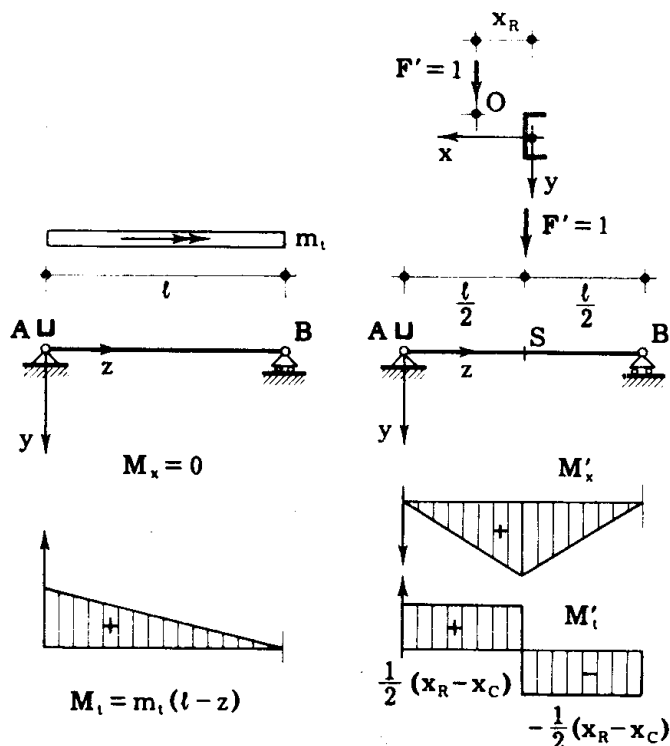


FIG. 2-31

a sinistra non ruota, mentre quella a destra ruota intorno alla stessa retta o. La traccia della o non può essere quindi che il punto O di incontro tra gli assi dei due pendoli in B.

Può perciò dirsi che la rotazione ϑ della generica sezione avviene intorno alla retta o, che si chiama *retta invariata* della torsione. Ciò vale anche per travi di sezione variabile. Si estende così il concetto di *fibra d'ori-*

gine già incontrato nella trattazione del solido del De Saint-Venant (Vol. II, § 8-2); nelle travi isostatiche ad asse rettilineo a sezione anche variabile, e soggette soltanto a momento torcente, anche variabile, esiste una fibra che non varia di posizione, cui corrisponde quindi una retta invariata; essa è definita dai vincoli.

Per dare un altro esempio, nella trave della fig. 2-33 il tronco adiacente ad A deve avere come fibra d'origine quella di traccia O, punto d'incontro degli assi dei due pendoli 5 e 6; per continuità, anche il tronco successivo deve avere fibra d'origine di traccia O, e così via. Dunque la retta o di traccia O è la retta invariata. Ciò vale anche per travi di sezione variabile.

Condizione necessaria perchè esista una retta invariata è che la trave sia soggetta soltanto a momento torcente; se c'è flessione nessuna retta infatti può risultare invariata. Perciò può esistere una retta invariata anche nelle travi rettilinee iperstatiche che, sollecitate da coppie torcenti, presentino solo momenti torcenti; si mostrerà che ciò accade in una trave continua di sezione comunque variabile, con un solo appoggio torsionale e tutti gli altri appoggi liberi a torsione costituiti da pendoli con gli assi su un unico piano parallelo a z ; come pure in una trave continua di sezione comunque variabile in cui tutti gli appoggi siano torsionali, e i centri di taglio siano tutti su una retta c parallela a z .

Ciò premesso, si calcoli (fig. 2-31) l'abbassamento v_0 del punto O di una sezione, per esempio quella S di mezzeria. Dovrà risultare $v_0 = 0$.

Il sistema di forze è costituito da una $F' = 1$ in O. Nell'equazione dei lavori virtuali occorre tener conto del fatto che M_t è variabile, e quindi ad esso si associano delle w variabili, e cioè delle ε , delle quali non può non tenersi conto perchè il sistema di spostamenti deve essere congruente. Delle σ' derivanti dalla variazione di w' non è necessario invece tener conto, perchè basta che il sistema di forze sia equilibrato (*). Si ha perciò

$$1 \cdot v_0 = \frac{1}{C_1} \int_0^l M'_t M_t dz + \int_v \sigma'_z \varepsilon_z dV. \quad (f'')$$

(*) Se gli M_t sono variabili lungo l'asse della trave, la soluzione alla De Saint-Venant risulta equilibrata ma non congruente, perchè ogni tronco elementare presenta w diversi. Se si tien conto delle $\varepsilon_z = \partial w / \partial z$ e delle $\sigma_z = E \varepsilon_z$ corrispondenti, dove le w sono quelle calcolate alla De Saint-Venant, la soluzione è congruente ma non equilibrata; infatti per $0 \neq C$, le σ_z forniscono un M_x ed un M_y . Se $0 = C$, è pure $M_x = M_y = 0$ (Vol. II, § 9-5 i); la soluzione è equilibrata, se si trascurano le τ derivanti dalla variazione delle σ . La soluzione alla Vlasov (Vol II, § 10-9), che tiene conto di tali τ , è equilibrata, ma non congruente, perchè trascura le γ connesse con le τ .

Il primo integrale è fornito da

$$\int_0^l M'_t M_t dz = \frac{m_t}{2} \left[(x_R - x_C) \int_0^{l/2} (l - z) dz - \right. \\ \left. - (x_R - x_C) \int_{l/2}^l (l - z) dz \right] = m_t (x_R - x_C) \frac{l^2}{8} . \quad (g'')$$

Il secondo integrale è dato da

$$\int_V \sigma'_z \varepsilon_z dV = \frac{2}{I_x} \int_A \int_0^{l/2} \frac{zy}{2} \frac{dw}{dz} dz dA . \quad (h'')$$

Se si chiamano w_1 i w connessi con un momento torcente unitario, è

$$w = w_1 M_t \\ \frac{dw}{dz} = w_1 \frac{dM_t}{dz} = - w_1 m_t ; \quad (i'')$$

la (h'') si scrive perciò

$$\int_V \sigma'_z \varepsilon_z dV = - \frac{1}{I_x} \int_A \int_0^{l/2} zy w_1 m_t dz dA = - \frac{m_t l^2}{8 I_x} \int_A w_1 y dA . \quad (l'')$$

L'integrale della (l'') è esprimibile in forma molto semplice. Si con-

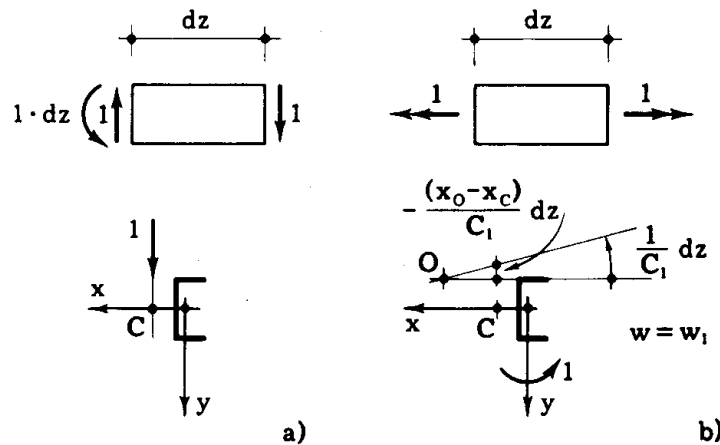


FIG. 2-32

sideri il tronco dz , soggetto a taglio (fig. 2-32 a) e torsione (fig. 2-32 b) unitari. Dalla

$$L_{12} = 0$$

si trae, se O è la traccia della retta invariata nella torsione (da tale traccia dipendono le w_1),

$$-1 \frac{x_O - x_C}{C_1} dz + \frac{dz}{I_x} \int_A w_1 y dA = 0$$

da cui

$$\frac{C_1}{I_x} \int_A w_1 y dA = x_O - x_C . \quad (36)$$

Nel caso in esame è $x_O = x_R$, e perciò si ha

$$\int_V \sigma'_z \varepsilon_z dV = - \frac{m_t \ell^2}{8 C_1} (x_R - x_C) ,$$

e quindi

$$v_o = 0 .$$

La rotazione ϑ_s per effetto degli m_t è fornita (figg. 2-30 e 2-31) da

$$1 \cdot \vartheta_s = \frac{1}{C_1} \int_0^{\ell} M'_t M_t dz = \frac{m_t}{C_1} \int_0^{\ell/2} (\ell - z) dz = \frac{3}{8} \frac{m_t \ell^2}{C_1} . \quad (m'')$$

Dalle (e'') ed (m'') si trae, come già fatto notare, che se $x_R = x_C$, se cioè l'asse del pendolo 6 contiene il centro di taglio C , l'effetto torsionale del carico q è identico a quello provocato dalle coppie torcenti che vengono fuori trasportando le q sulla retta dei centri di taglio. Questo risultato, valido anche per carichi $q(z)$ variabili con qualsiasi legge, e applicati ad una distanza dalla retta c dei centri di taglio comunque variabile con z , è conseguenza del fatto che i suddetti carichi riportati sulla retta c , e la reazione in B , non generano momenti torcenti (mentre le coppie torcenti di trasporto non danno reazione in B , e quindi non generano momenti flettenti). Lo stesso può dirsi se la trave non è di sezione costante, purchè i centri di taglio siano allineati su una stessa retta c parallela a z .

Identico risultato vale per una trave continua di sezione comunque variabile, con un solo appoggio torsionale e tutti gli altri liberi a torsione, in cui i centri di taglio siano allineati su una retta c parallela a z , ed i pendoli incontrino tale retta; infatti i carichi $q(z)$ agenti sulla retta c e le reazioni non generano momenti torcenti. Le coppie torcenti di trasporto inducono rotazioni intorno alla retta c , e quindi non generano reazioni nè momenti flettenti; la retta c è la retta invariata a torsione.

Si è già detto che se $x_R = x_q$, se cioè i carichi q e la reazione del-

l'appoggio in B appartengono allo stesso piano parallelo a z , il diagramma degli M_t derivanti da q è affine a quello del taglio, nel rapporto

$$\frac{M_t}{T} = x_q - x_c .$$

Anche questo risultato è di carattere più generale. Si consideri una trave continua ad asse z rettilineo, di sezione comunque variabile, con gli appoggi costituiti da pendoli i cui assi sono tutti contenuti in un piano parallelo a z , eccettuato uno che impedisce ϑ (appoggio torsionale). Se la trave è soggetta a coppie torcenti m_t , queste inducono solo momenti torcenti, come immediatamente si riconosce operando sulla struttura resa isostatica eliminando tutti i pendoli meno uno; infatti su tale struttura la retta invariata è contenuta nel piano dei pendoli, e resta tale anche nella struttura effettiva.

Se la trave è soggetta a carichi q , le reazioni si calcolano quindi prescindendo dall'effetto torcente; infatti qualsiasi rotazione torsionale si verifica intorno alla retta invariata. I momenti torcenti sono quelli generati sulla trave con un appoggio torsionale dalle reazioni e dai carichi q , e si calcolano con le sole leggi della statica. Se i carichi q giacciono nel piano dei pendoli, e se i centri di taglio sono allineati su una retta c parallela a z , M_t è affine a T a meno di $x_q - x_c$.

E' utile osservare che il teorema di Betti porterebbe a scrivere, per i due sistemi di forze della fig. 2-31,

$$1 \cdot v_0 = \int_0^l m_t \varphi'_z dz$$

e quindi

$$\int_0^l m_t \varphi'_z dz = 0 ,$$

il che non è vero. Ciò trova la sua spiegazione nel fatto che, se si applica il teorema di Betti, ambedue i sistemi devono essere equilibrati e congruenti. La trave AB deve quindi essere suddivisa in due parti AS e SB, per la discontinuità delle w' in S, e deve poi tenersi conto del lavoro delle $p_z = \pm \sigma_z$ sulle facce A, S e B. Si ha così

$$1 \cdot v_0 = \int_0^l m_t \varphi'_z dz + \int_A p_{zA} w'_A dA + \int_B p_{zB} w'_B dA ,$$

dove le w' sono soltanto quelle dovute alla flessione; il termine dovuto alle w' torsionali è infatti nullo.

D'altro canto il principio dei lavori virtuali permette di scrivere (vedi (g'') ed (l''))

$$\int_0^l m_t \varphi'_z dz + \int_A p_{zA} w'_A dA + \int_B p_{zB} w'_B dA =$$

$$= \frac{1}{C_1} \int_0^l M_t M'_t dz + \int_V \sigma_z \varepsilon'_z dV = -\frac{1}{C_1} \int_0^l M_t M'_t dz + \int_V \varepsilon_z \sigma'_z dV = 0 .$$

Il paradosso è così chiarito.

e) *Rotazione torsionale della sezione terminale di una trave a mensola.*

La mensola, di sezione costante ed asse z rettilineo, è riportata in

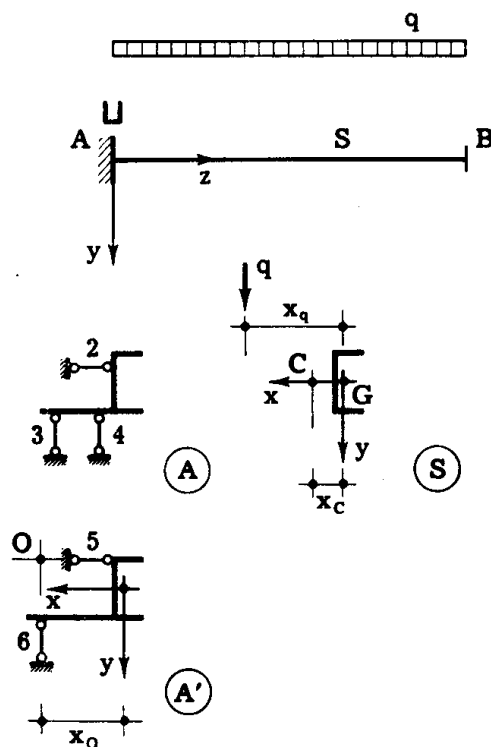


FIG. 2-33

fig. 2-33; le sezioni vincolate sono la A ($z=0$) e la A' ($z=dz$) ad essa vi-

cinissima. In A risulta così

$$u_G = v_G = w_G = 0$$

$$\varphi_x = \varphi_y = 0$$

$$\vartheta = 0 .$$

In A' la ϑ è diversa da zero; perciò in A è $d\vartheta/dz$ diversa da zero. Ciò si esprime dicendo che in A si è in presenza di un incastro flessionale e di un appoggio torsionale; la retta invariata a torsione è, come già detto, quella di traccia O, punto d'incontro degli assi dei due pendoli 5 e 6.

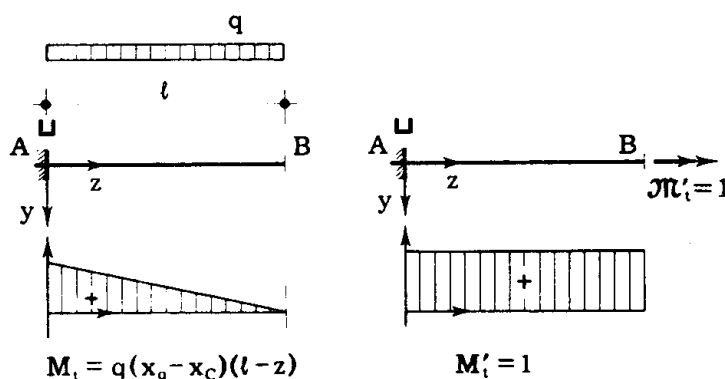


FIG. 2-34

La trave è soggetta ad un carico q uniformemente distribuito in un piano parallelo al piano $y z$, a distanza x_q dal baricentro G . La rotazione in B è fornita da

$$1 \cdot \vartheta_B = \frac{1}{C_1} \int_0^l M'_t M_t dz .$$

I momenti torcenti M'_t ed M_t sono riportati nella fig. 2-34; si ha

$$\vartheta_B = \frac{1}{C_1} q (x_q - x_c) \int_0^l (l - z) dz = \frac{q l^2}{2 C_1} (x_q - x_c) .$$

Si supponga adesso che in A esista (fig. 2-35) un incastro torsionale, ove $d\vartheta/dz = 0$, e quindi $w = 0$. La retta invariata non è più definita dai vincoli; qualsiasi retta parallela a z può essere presa per tale. Infatti, eliminando il pendolo 7 la retta invariata ha per traccia il punto d'incontro O degli assi dei due pendoli 5 e 6; l'introduzione del pendolo 7 non altera le rotazioni della trave nè i centri di tali rotazioni, ma ha l'unico ufficio di annullare i w in A.

Poichè però le coppie flettenti associate ai dw/dz devono essere nulle in A e in B, occorre che $O = C$. Il teorema di Betti (fig. 2-35) fornisce perciò

$$F_2 v_{1C} = \int_0^l m_{1t} \varphi_{2z} dz = 0 .$$

Lo stesso risultato vale per una trave di sezione variabile, con i centri di taglio allineati su una retta c parallela a z . Si vedrà fra poco che esso è generale per le travi iperstatiche a torsione, di sezione comunque variabile, ma con i centri di taglio allineati su una retta c parallela a z .

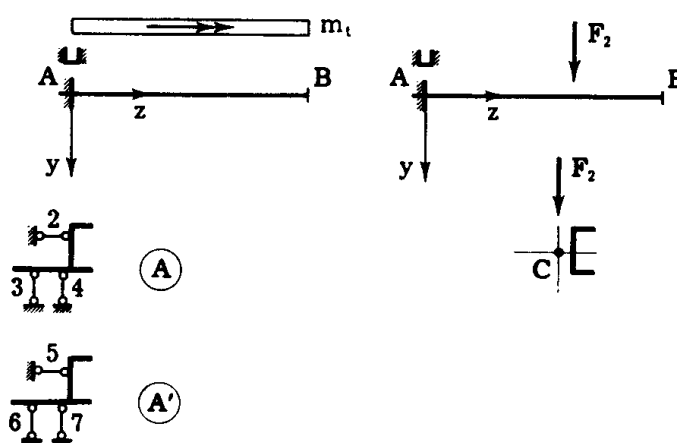


FIG. 2-35

Si precisa che, sempre inteso che si tratta di travi dove le m_t non danno che M_t , si definiscono travi iperstatiche a torsione quelle travi dove $\vartheta = 0$ è imposto in più di una sezione (nella trave della fig. 2-35 è $\vartheta = 0$ in A ed in quella prossima ad A); in esse il momento torcente M_t derivante da coppie torcenti m_t non può essere ottenuto con semplici considerazioni di statica. Si intende invece trave isostatica a torsione una trave dove in una sola sezione $\vartheta = 0$, ed il momento M_t derivante da coppie m_t può essere calcolato senza ricorrere alla congruenza. Per esempio, è isostatica a torsione una trave continua dove in un solo appoggio $\vartheta = 0$, e tutti gli altri appoggi sono pendoli contenuti in un piano parallelo a z .

f) *Diagramma del momento torcente in una trave con due appoggi torsionali.*

La trave AB, di asse rettilineo e sezione costante (fig. 2-36), presenta in A e B due appoggi torsionali; il carico q sia qualunque, ma distribuito in un piano parallelo al piano y, z , di ascissa x_q . Si rende la struttura iso-

statica sopprimendo il pendolo 7. Si ha

$$0 = \frac{1}{C_1} \int_0^l M'_t M_t dz = \frac{1}{C_1} \int_0^l M'_t M_{t_0} dz + \frac{X}{C_1} \int_0^l M'^2_t dz .$$

D'altro canto è (fig. 2-37)

$$M_{t_0} = R_B (x_R - x_C) + (x_q - x_C) \int_z^l q dz ,$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_T - x_C} \int_0^l M'_t M_{t_0} dz &= R_B l (x_R - x_C) + (x_q - x_C) \int_0^l dz \int_z^l q dz = \\ &= R_B l (x_R - x_C) + (x_q - x_C) \int_0^l (T(z) - R_B) dz = \\ &= R_B l (x_R - x_q) + (x_q - x_C) \int_0^l T(z) dz . \end{aligned}$$

Poichè è

$$\int_0^l T(z) dz = \int_0^l \frac{dM_x}{dz} dz = (M_x)'_0 = 0$$

si ha pure

$$\frac{1}{x_T - x_C} \int_0^l M'_t M_{t_0} dz = R_B l (x_R - x_q)$$

e quindi

$$X = - R_B \frac{x_R - x_q}{x_T - x_C} .$$

In definitiva perciò si ha

$$\begin{aligned} M_{tB} &= R_B (x_R - x_C) + X (x_T - x_C) = \\ &= R_B (x_R - x_C) - R_B (x_R - x_q) = R_B (x_q - x_C) , \end{aligned}$$

e quindi

$$M_t = T (x_q - x_C) .$$

Il diagramma del momento torcente è perciò affine a quello del taglio a meno del fattore $x_q - x_C$.

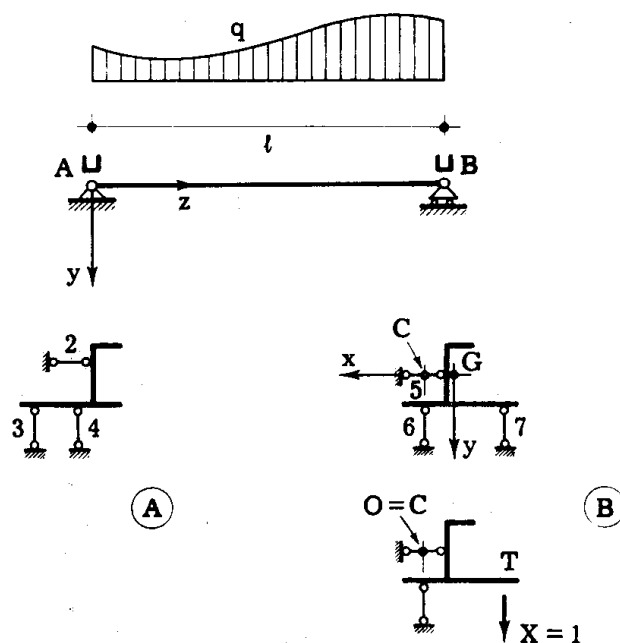


FIG. 2-36

In generale, si consideri una trave continua di sezione comunque variabile, ma con i centri di taglio allineati su una retta parallela a z ; gli

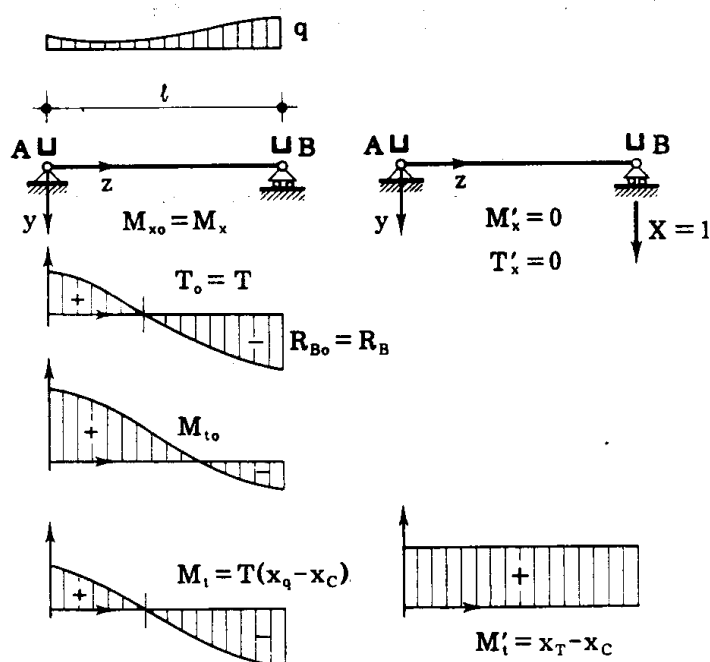


FIG. 2-37

appoggi siano tutti torsionali; la trave sia caricata da forze q comunque

variabili con z , e comunque distanti dalla retta dei centri di taglio. Le forze si riportino su quest'ultima, aggiungendo le corrispondenti coppie torcenti $m_t = q(x_q - x_c)$.

I carichi agenti sulla retta dei centri di taglio non inducono momento torcente. Ci si riferisca infatti come struttura isostatica alla trave appoggiata ai due estremi; un appoggio sia torsionale; l'altro, libero a torsione, sia costituito da due pendoli i cui assi si intersecano su C , come nella fig. 2-36. Si ipotizzi che le reazioni iperstatiche passino per i centri di taglio delle sezioni prima vincolate; in tal caso sono ovunque nulli sia il momento torcente che le rotazioni torsionali. Perciò i valori di tali reazioni che ripristinano la congruenza negli abbassamenti forniscono una soluzione equilibrata e congruente, e cioè la soluzione, che è priva di momenti torcenti.

I momenti torcenti sono quindi dovuti solo alle coppie torcenti m_t di trasporto. Queste, d'altro canto, non generano momenti flettenti. Infatti si ipotizzi che le reazioni iperstatiche si limitino a coppie torcenti; sia queste che le m_t non possono dare che rotazioni intorno a C . Quindi i valori delle coppie reattive che ripristinano la congruenza nelle rotazioni sugli appoggi prima soppressi, e su quello reso libero a torsione, forniscono una soluzione equilibrata e congruente, e cioè la soluzione, che è priva di momenti flettenti. E' questo perciò un caso in cui può parlarsi di retta invariata a torsione. I vincoli non possono definire tale retta. Con riferimento alla struttura della fig. 2-36, caricata da coppie m_t , adottando il principio di sovrapposizione degli effetti sembrerebbe che, con riferimento alla trave resa isostatica sopprimendo il pendolo 7, la generica sezione S dovesse ruotare intorno all'intersezione O degli assi dei due pendoli 5 e 6, quale che sia la loro posizione, sia per effetto delle m_t che della X , e quindi in definitiva che l'asse di traccia O fosse la retta invariata. Così ogni retta parallela a z risulterebbe invariata; e ciò è assurdo. Se si tiene conto però che in A e B deve essere $M_x = M_y = 0$, l'unica possibile retta invariata resta quella dei centri di taglio. Ciò è valido anche con riferimento alla trave continua con tutti appoggi torsionali, con i centri di taglio allineati su una parallela a z .

Se la trave presenta campate di sezione costante, data la generica campata HK la congruenza in K fornisce

$$M_{tK} \frac{\ell}{C_1} + \frac{1}{C_1} \int_0^\ell m_t z \, dz = 0 ,$$

da cui si trae

$$M_{tK} = - \frac{1}{\ell} \int_0^\ell m_t z \, dz$$

Si può dire che M_{tK} è la reazione fittizia R_{Ka}^* provocata in K dai carichi fittizi $q^* = m_t$ sulla trave HK appoggiata agli estremi; e dalla relazione

$$M_t = M_{tK} + \int_z m_t dz$$

si trae che il momento torcente M_t in HK coincide con il taglio fittizio T_a^* provocato dalle $q^* = m_t$ sulla trave HK appoggiata agli estremi.

Sempre per campate di sezione costante, se i carichi q sono applicati tutti alla stessa distanza da C, si può scrivere

$$M_t = T_a^* = (x_q - x_C) T_a ,$$

e cioè il diagramma del momento torcente in HK è affine a quello del taglio effettivo sulla trave HK appoggiata agli estremi.

g) *Ricerca della reazione d'appoggio in una trave incastrata e appoggiata.*

La trave ad asse rettilineo e di sezione costante della fig. 2-38 presenta in A un vincolo incastro flessionale e appoggio torsionale; in B è ap-

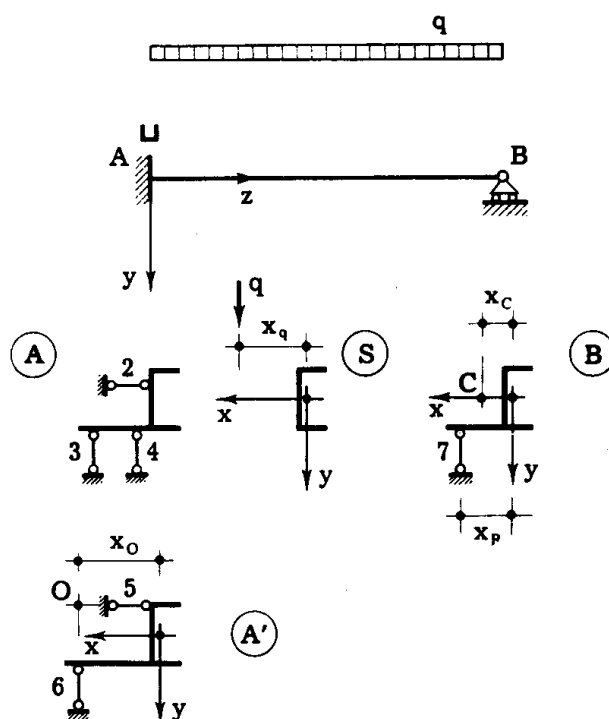


FIG. 2-38

poggiata, e libera a torsione. La trave resa isostatica sopprimendo l'appoggio in B presenta come retta invariata o la parallela a z per l'intersezione

degli assi dei pendoli 5 e 6; la trave effettiva invece non ha retta invariata, perchè le coppie torcenti m_t applicate generano una reazione in B, e quindi, oltre M_t , anche M_x .

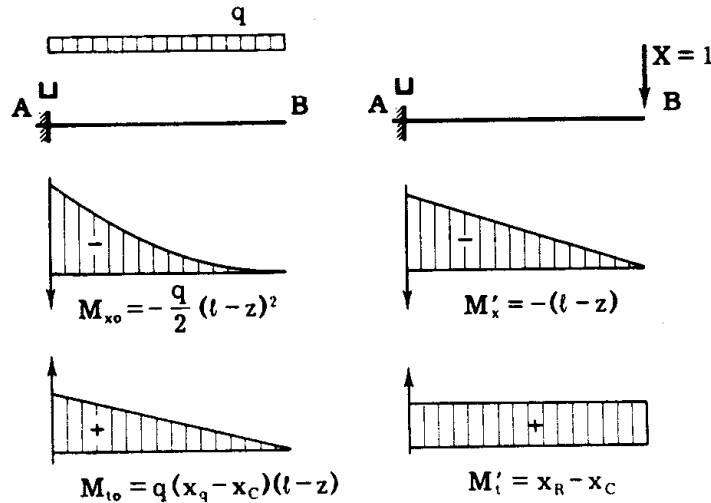


FIG. 2-39

La ricerca della reazione X in B si effettua, al solito, secondo il procedimento dei lavori virtuali. Si ha (fig. 2-39)

$$\frac{1}{EI_x} \int_0^l M'_{ox} M_x dz + \frac{1}{C_1} \int_0^l M'_{ot} M_t dz + \int_V \sigma'_z \frac{dw}{dz} dV = - \int_A \sigma'_{zA} w_A dA, \quad (n'')$$

dove $p'_{zA} = -\sigma'_{zA}$ sono le forze superficiali sulla sezione A nel sistema $X=1$, w_A gli spostamenti effettivi in A.

Risulta

$$\int_0^l M_{ox} M'_x dz = \frac{q}{2} \int_0^l (l-z)^3 dz = \frac{q l^4}{8};$$

$$\int_0^l M'^2_x dz = \int_0^l (l-z)^2 dz = \frac{l^3}{3};$$

$$\begin{aligned} \int_0^l M_{ot} M'_t dz &= q (x_q - x_c) (x_R - x_c) \int_0^l (l-z) dz = \\ &= \frac{q l^2}{2} (x_q - x_c) (x_R - x_c); \end{aligned}$$

$$\int_0^l M_t'^2 dz = (x_R - x_C)^2 \int_0^l dz = l (x_R - x_C)^2 ;$$

$$\begin{aligned} \int_V \sigma' \frac{dw}{dz} dV &= - \frac{1}{I_x} \int_A \int_0^l M_x' y w_1 m_t dz dA = \\ &= \frac{q}{I_x} (x_q - x_C) \int_A \int_0^l (l - z) y w_1 dz dA = \\ &= \frac{q l^2}{2 I_x} (x_q - x_C) \int_A w_1 y dA = \frac{q l^2}{2 C_1} (x_q - x_C) (x_O - x_C) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_A \sigma_A' w_A dA &= - \frac{l}{I_x} \int_A y w_A dA = - \frac{l}{I_x} \int_A y M_{tA} w_1 dA = \\ &= - \frac{l}{I_x} [q l (x_q - x_C) + X (x_R - x_C)] (x_O - x_C) \frac{I_x}{C_1} = \\ &= - \frac{l (x_O - x_C)}{C_1} [q l (x_q - x_C) + X (x_R - x_C)] . \end{aligned}$$

Dalla (n'') si trae perciò

$$\begin{aligned} X &= -q \frac{\frac{l^4}{8 EI_x} + \frac{l^2}{2 C_1} (x_q - x_C) (x_R - x_C) - \frac{l^2}{2 C_1} (x_O - x_C) (x_q - x_C)}{\frac{l^3}{3 EI_x} + \frac{l}{C_1} (x_R - x_C)^2 - \frac{l}{C_1} (x_O - x_C) (x_R - x_C)} = \\ &= -q \frac{\frac{l^4}{8 EI_x} + \frac{l^2}{2 C_1} (x_q - x_C) (x_R - x_O)}{\frac{l^3}{3 EI_x} + \frac{l}{C_1} (x_R - x_C) (x_R - x_O)} . \end{aligned} \quad (o'')$$

La stessa trattazione eseguita invece in presenza di coppie torcenti m_t uniformemente distribuite fornisce

$$X = -m_t \frac{\frac{l^2}{2 C_1} (x_R - x_O)}{\frac{l^3}{3 EI_x} + \frac{l}{C_1} (x_R - x_C) (x_R - x_O)} . \quad (p'')$$

Il valore del momento torcente M_{tB} è

$$M_{tB} = X (x_R - x_C) ;$$

si ha perciò in presenza di q

$$M_{tB} = - q \frac{\frac{\ell^4}{8 EI_x} + \frac{\ell^2}{2 C_1} (x_q - x_C) (x_R - x_O)}{\frac{\ell^3}{3 EI_x (x_R - x_C)} + \frac{\ell}{C_1} (x_R - x_O)} \quad (q'')$$

e, in presenza di m_t ,

$$M_{tB} = - m_t \frac{\frac{\ell^2}{2 C_1} (x_R - x_O)}{\frac{\ell^3}{3 EI_x (x_R - x_C)} + \frac{\ell}{C_1} (x_R - x_O)} . \quad (r'')$$

Alla (o'') può giungersi anche attraverso un'equazione diretta di congruenza. E' infatti

$$v_{70} = \frac{q \ell^4}{8 EI_x} + \frac{q (x_q - x_C) \ell^2}{2 C_1} (x_R - x_O)$$

$$v'_7 = \frac{\ell^3}{3 EI_x} + \frac{(x_R - x_C) \ell}{C_1} (x_R - x_O) ;$$

dalla

$$v_{70} + X v'_7 = 0$$

si perviene alla (o'').

Sono interessanti le particolarizzazioni delle (o'') (p'') (q'') (r'') contenute nella tabella annessa.

		X	M_{tB}
$x_R = x_O$	q	$-\frac{3}{8} q \ell$	$-\frac{3}{8} q \ell (x_R - x_C)$
	m_t	0	0

$x_R = \infty$	q	0	$-\frac{q \ell}{2} (x_q - x_c)$
	m_t	0	$-m_t \frac{\ell}{2}$
$x_R = x_C = x_q$	q	$-\frac{3}{8} q \ell$	0
	m_t	$\frac{3}{2} m_t \frac{EI_x}{\ell C_1} (x_O - x_R)$	0
$x_R = x_C = x_O$	q	$-\frac{3}{8} q \ell$	0
	m_t	0	0

12. Il principio dei lavori virtuali nella torsione non uniforme.

Si prenda in esame una trave caricata separatamente dal sistema a) di coppie torcenti distribuite m_t , e dal sistema b) di coppie torcenti distribuite m'_t ; si assuma a) come sistema di forze, b) come sistema di spostamenti.

Con riferimento al tronco elementare lungo dz si può scrivere

$$d\delta_1 L_1 = dz \int_m (\sigma \varepsilon' + \tau \gamma') \delta ds.$$

Per la (10-51) del Vol. II si ha

$$\int_m \sigma \varepsilon' \delta ds = \frac{d^2 \vartheta}{dz^2} \frac{d^2 \vartheta'}{dz^2} 4 E \int_m f^2 \delta ds = C_2 \frac{d^2 \vartheta}{dz^2} \frac{d^2 \vartheta'}{dz^2}.$$

D'altro canto, poichè le γ'_2 dovute alle τ'_2 si trascurano, è

$$\begin{aligned} \int_m \tau \gamma' \delta ds &= \int_m \tau \gamma'_1 \delta ds = \frac{1}{G} \int_m \tau \tau'_1 \delta ds = \\ &= \frac{1}{G} \int_m \tau_1 \tau'_1 \delta ds + \frac{1}{G} \int_m \tau_2 \tau'_1 \delta ds. \end{aligned}$$

Risulta (nota seconda del § 10-9 del Vol. II) che

$$\int_m \tau_2 \tau'_1 \delta ds = 0 ;$$

perciò può scriversi

$$\int_m \tau \gamma' \delta ds = \frac{1}{G} \int_m \tau_1 \tau'_1 \delta ds = M_1 \frac{d\vartheta'}{dz} = C_1 \frac{d\vartheta}{dz} \frac{d\vartheta'}{dz} .$$

Si ha quindi

$$d\delta_1 L_1 = C_1 \frac{d\vartheta}{dz} \frac{d\vartheta'}{dz} dz + C_2 \frac{d^2\vartheta}{dz^2} \frac{d^2\vartheta'}{dz^2} dz . \quad (37)$$

Poichè (§§ 10-9 e 10-10 del Vol. II) è

$$M_1 = C_1 \frac{d\vartheta}{dz}$$

e si pone

$$k^2 = \frac{C_1}{C_2}$$

la (2-37) può scriversi, trascurando la variazione di C_1 e C_2 nel tronco,

$$d\delta_1 L_1 = \frac{1}{C_1} M_1 M'_1 + \frac{1}{k^2 C_1} \frac{dM_1}{dz} \frac{dM'_1}{dz} .$$

L'espressione del principio dei lavori virtuali per la trave in esame è perciò

$$\int_0^l m_t \vartheta' dz = \int_0^l \frac{M_1 M'_1}{C_1} dz + \int_0^l \frac{1}{k^2 C_1} \frac{dM_1}{dz} \frac{dM'_1}{dz} dz . \quad (38)$$

Se la trave è di sezione costante si ha

$$\int_0^l m_t \vartheta' dz = \frac{1}{C_1} \int_0^l M_1 M'_1 dz + \frac{1}{k^2 C_1} \int_0^l \frac{dM_1}{dz} \frac{dM'_1}{dz} dz . \quad (39)$$

In presenza di altre caratteristiche, il termine relativo alla torsione si aggiunge semplicemente a quelli dovuti alle altre caratteristiche; infatti le σ da torsione sono caratterizzate da M_x , M_y ed N nulli, mentre le sezioni rette nella flessione e nello sforzo normale si conservano piane; inoltre le τ da torsione sono caratterizzate da $T_x = T_y = 0$, mentre le proiezioni delle sezioni rette sul loro piano non presentano nel taglio deformazioni, e non ruotano.