

L'ELLISSE DI ELASTICITA'

1. Fondamenti della teoria dell'ellisse di elasticità: i sistemi monodimensionali piani.

La teoria dell'ellisse di elasticità è limitata ai cosiddetti sistemi monodimensionali piani.

Si chiama *struttura monodimensionale piana* o *trave piana*, una trave il cui asse c sia contenuto in un piano π , e che sia simmetrica (simmetria ortogonale) rispetto a questo piano. Se le forze agenti sono pur esse simmetriche rispetto a π , si è in presenza di un *sistema monodimensionale piano*, e gli spostamenti dei punti dell'asse sono contenuti in π . Le reazioni vincolari sono simmetriche rispetto a π . Le caratteristiche della sollecitazione in corrispondenza della generica sezione normale S si riducono allo sforzo normale N , ad uno sforzo di taglio T diretto secondo la traccia della sezione su π , e ad un momento flettente M il cui asse è ortogonale a π . Gli spostamenti relativi tra due sezioni rette distanti ds si riducono ad una traslazione relativa secondo la tangente all'asse in S , di valore $\frac{N ds}{EA}$, ad una traslazione relativa media secondo la normale all'asse in S , di valore $\chi \frac{T ds}{GA}$, e ad una rotazione relativa il cui asse è ortogonale a π , di ampiezza $\frac{M ds}{EI}$; i valori di χ e di I sono relativi all'asse di simmetria della sezione S ed alla sua normale, che sono anche assi principali d'inerzia della sezione stessa.

Se l'asse della trave è contenuto in un piano, ma la trave non è simmetrica rispetto a questo piano, si può ancora supporre con buona approssimazione che siano valide le proprietà suddette, purchè nel piano dell'asse sia contenuto uno degli assi principali d'inerzia di ogni sezione retta; l'ordine dell'approssimazione è quello che condiziona l'ipotesi secondo cui un taglio agente lungo una direzione principale d'inerzia provoca uno spostamento relativo medio diretto secondo lo stesso asse.

Assimilando la deformazione da taglio del tronco elementare gene-

rico di lunghezza ds ad una traslazione relativa rigida $\chi \frac{T ds}{GA}$ delle due sezioni terminali, si accetta l'ipotesi di *conservazione delle sezioni piane*; una qualsiasi sezione retta S si trasforma in una figura S' contenuta ancora in un piano ortogonale a π , e incontra l'asse c' , trasformato dell'asse c , nel corrispondente G' del baricentro G di S (fig. 1-1). Questa ipotesi è tanto più vicina al vero quanto più gli spostamenti della sezione dovuti alla deformazione dell'intera struttura prevalgono sugli spostamenti dovuti alla sollecitazione locale di taglio, e cioè quanto più la lunghezza della trave predomina sulle dimensioni della sezione retta.

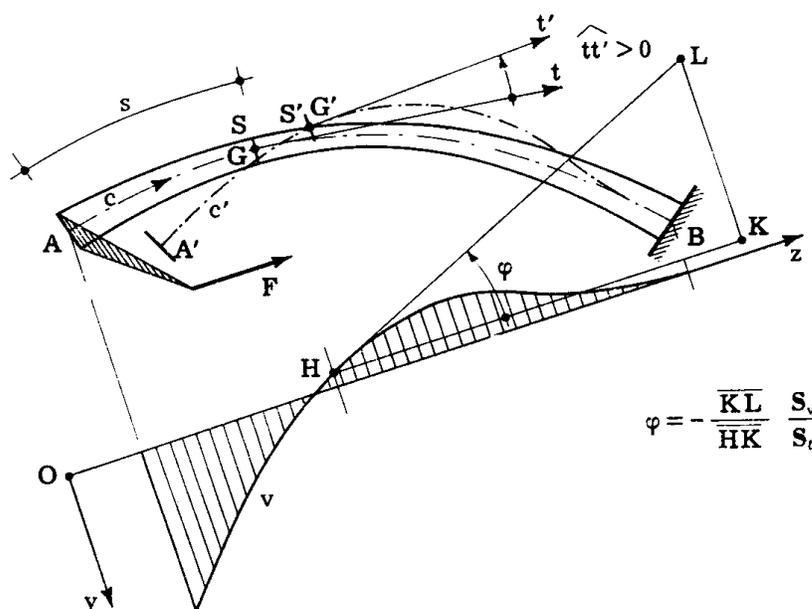


FIG. 1-1

La generica sezione S subisce perciò uno spostamento rigido, e poichè si mantiene ortogonale al piano π , lo spostamento è piano. Questo spostamento coincide con quello della traccia della sezione sul piano π , e per il teorema di Eulero può ridursi ad una rotazione intorno ad un asse c normale a π ; esso è definito perciò dalla posizione del *centro di rotazione* (traccia C dell'asse c su π) e dall'*ampiezza* della rotazione stessa.

Si definisce *spostamento rigido* di un corpo un qualsiasi insieme di spostamenti $u v w$ cui non si associano variazioni delle mutue distanze dei suoi punti.

Ogni spostamento rigido può ottenersi come somma di una traslazione che porta un punto P_0 in un punto P'_0 , e di una rotazione intorno ad un asse passante per P'_0 .

La suddetta scomposizione può effettuarsi in infiniti modi, ognuno corrispon-

dente ad un diverso punto P_0 del corpo; tutti gli assi di rotazione sono paralleli, e le ampiezze delle rotazioni sono uguali. E' sempre possibile scegliere un punto P_0 tale che il vettore traslazione sia parallelo all'asse della rotazione, e cioè ogni spostamento rigido si può pensare dovuto ad un moto elicoidale (teorema di Chasles, 1830); l'asse r di moto elicoidale è unico. Il teorema è valido per qualsiasi grandezza degli spostamenti; e come corollario si ha il seguente: se mediante n spostamenti rigidi successivi intorno agli assi r_1, r_2, \dots, r_n un corpo S passa nelle posizioni S_1, S_2, \dots, S_n , si può con un unico spostamento rigido di asse r passare da S ad S_n .

Questo spostamento è risultante degli n precedenti, che sono i componenti, e dipende da questi, e dal loro ordine di successione. In generale, solo se gli spostamenti u, v, w sono piccoli (e cioè se le loro derivate prime possono trascurarsi nei confronti dell'unità) lo spostamento rigido risultante è indipendente dall'ordine di successione degli spostamenti rigidi componenti. In tal caso essi coincidono, a meno di dt , con i vettori velocità di un atto di moto rigido; indicando con u_t, v_t, w_t le componenti del vettore traslazione, e con p, q, r quelle del vettore rotazione, può in tal caso porsi

$$\begin{aligned} u &= u_t && - ry + qz \\ v &= v_t + rx && - pz \\ w &= w_t - qx + py \end{aligned}$$

dove u_t, v_t, w_t sono le componenti dello spostamento di P_0 , e la terna di riferimento ha origine in P_0 .

Se, comunque si prenda P_0 , il vettore traslazione è ortogonale a quello rotazione, lo spostamento rigido è piano.

In tal caso esiste un punto C per cui il vettore traslazione è nullo; l'asse di rotazione passante per C è l'asse di moto elicoidale; esso è caratterizzato da traslazione nulla, quindi si riduce ad una rotazione. E cioè (teorema di Eulero, 1775) ogni spostamento rigido piano si riduce ad una rotazione intorno ad un asse ortogonale al piano del moto, di traccia C . Se gli spostamenti sono piccoli, e si assume un riferimento con origine C , e con gli assi yz sul piano del moto, si ha

$$\begin{aligned} v &= && - pz \\ w &= && py \end{aligned}$$

L'ampiezza φ della rotazione di S è misurata dall'angolo $\widehat{tt'}$ che la tangente t all'asse c in S forma con la tangente t' all'asse c' in S' ; t e t' sono orientate secondo le s e le s' crescenti. Fissato il verso positivo di rotazione nel piano (nella presente trattazione è quello antiorario), gli angoli $\widehat{tt'}$ sono due, uno positivo e uno negativo, a seconda che t per sovrapporsi a t' ruoti in senso antiorario od orario. La somma dei valori assoluti dei due angoli è 2π ; la tangente trigonometrica dei due angoli è la stessa.

L'ampiezza φ della rotazione coincide con il più piccolo in valore assoluto dei due angoli $\widehat{tt'}$; così φ è definita in valore e segno. Poichè si è nell'ipotesi di piccoli spostamenti, si può confondere in valore ed in

segno il minore dei due angoli $\widehat{tt'}$ con la sua tangente trigonometrica; cioè può porsi

$$\varphi = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \widehat{tt'} .$$

Considerando l'elemento di asse ds come rigido, dalle formule della rotazione rigida testè riportate in nota si ha

$$\varphi = - \frac{dv}{dz} = \frac{dw}{dy} . \quad (1)$$

Perciò può dirsi che l'ampiezza della rotazione coincide a meno del segno con la corrispondente inclinazione nel diagramma delle componenti v dello spostamento, valutate secondo una qualsiasi retta y , e riportate secondo y su una fondamentale normale ad y stessa.

La struttura fondamentale che si prende in esame nella teoria dell'ellisse di elasticità è una trave piana AB incastrata perfettamente all'estremo B (*mensola*) e sollecitata all'estremo opposto A da una distribuzione di forze che ammetta come risultante una forza F giacente nel piano dell'asse della trave (fig. 1-1).

Si è in presenza perciò di un particolare sistema monodimensionale piano; i risultati che da esso si traggono si utilizzano poi per lo studio di un sistema monodimensionale piano generico.

Il centro e l'ampiezza della rotazione della *sezione terminale* A dipendono soltanto dalla risultante F delle forze applicate su A , e non dalla loro effettiva distribuzione; infatti essi sono funzioni delle deformazioni, e cioè delle tensioni, di tutta la struttura, e queste, esclusa la zona più vicina ad A , sono a loro volta funzioni soltanto delle caratteristiche della sollecitazione. La deformazione della sezione A , derivante dal fatto che la distribuzione di forze su di essa non è alla De Saint-Venant, è caratterizzata da spostamenti tanto più trascurabili rispetto a quelli dovuti alla rotazione rigida, quanto più la lunghezza della trave predomina sulle dimensioni della sezione retta.

In particolare, se è valido il principio di sovrapposizione degli effetti — è su questo che poggia l'intero edificio della teoria — il centro C della rotazione di A è univocamente determinato una volta fissata la retta r di azione di F . Viceversa, fissato C è determinata univocamente r ; se infatti a C corrispondessero due rette distinte r' ed r'' , sarebbe possibile dosare le due forze F' ed F'' agenti lungo r' ed r'' in modo da fornire ciascuna la stessa ampiezza di rotazione, e quindi la risultante di F' e $-F''$, che non può essere nulla, non farebbe spostare la sezione A ; la $F' - F''$ quindi non compirebbe lavoro, e sarebbe nulla l'energia di deformazione.

Si istituisce così nel piano della struttura una corrispondenza biunivoca (*reciprocità*) tra le rette d'azione r delle forze agenti su A ed i centri C di rotazione di A.

Il centro C non può giacere sulla corrispondente retta r ; se infatti ciò accadesse, F non compirebbe lavoro, e quindi sarebbe nulla anche l'energia di deformazione. Nella corrispondenza tra C ed r *non esistono perciò elementi che contengano il proprio corrispondente (autoconiugati)*.

Sia C_1 il centro corrispondente ad una retta r_1 , ed r_2 una retta passante per C_1 ; una forza F_2 agente secondo r_2 non compie lavoro per effetto degli spostamenti provocati da una forza F_1 agente secondo r_1 .

Per il teorema di Betti, la F_1 non compie quindi lavoro per effetto degli spostamenti provocati da F_2 , e cioè deve passare per C_2 . Se ne trae che se C_1 appartiene ad r_2 , C_2 appartiene ad r_1 (fig. 1-2). Si è in presenza

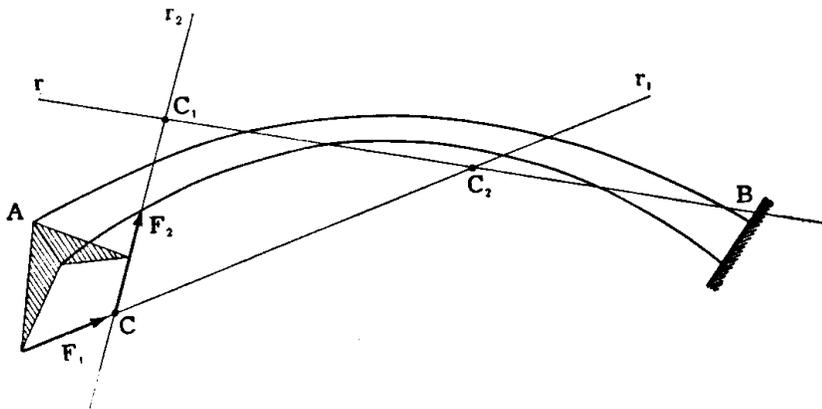


FIG. 1-2

quindi di una *reciprocità involutoria*; gli elementi come C_1 e C_2 , o come r_1 ed r_2 , tali che l'uno contiene l'ente corrispondente dell'altro, si dicono *coniugati*. Il nome si giustifica perchè a tutte le rette del fascio di centro C corrispondono i punti della punteggiata di sostegno r , corrispondente di C; e gli elementi coniugati (secondo la definizione testè data) del fascio di sostegno C (e quelli della punteggiata di sostegno r) sono coniugati in una involuzione.

La reciprocità involutoria tra i punti C e le rette r , detta anche *polarità*, ha nel caso in esame conica fondamentale immaginaria; infatti non esistono elementi autoconiugati (si ricordi che la conica fondamentale di una polarità è il luogo di tutti i punti autoconiugati, o anche l'involuppo di tutte le rette autoconjugate). Il *centro O* della polarità, corrispondente alla retta impropria del piano, è un punto proprio; infatti esso non può appartenere alla sua corrispondente. Questo punto si chiama *baricentro elastico* della trave, ed è il centro di rotazione di A quando su di essa agisce una coppia. Consideriamo i punti C' simmetrici di C rispetto ad O; la corri-

spondenza tra r e C' è ancora una polarità, con lo stesso centro O , ma sicuramente provvista di elementi autoconiugati.

Sia O il centro della polarità, ed r_1 una retta per O (fig 1-3); ad r_1 corrisponde un centro C_1 improprio. Ad ogni punto C di r_1 corrisponde una retta r passante per $C_1 = \infty$; chiamando B il punto di intersezione della r con r_1 , B e C sono coniugati, e si corrispondono in una *involutione*, la cui equazione è

$$OB \cdot OC = k ;$$

k è la cosiddetta *potenza* dell'involutione.

I *punti uniti* D sono forniti da

$$OD^2 = k$$

e sono due, simmetrici rispetto ad O , reali o immaginari secondo che $k \cong 0$.

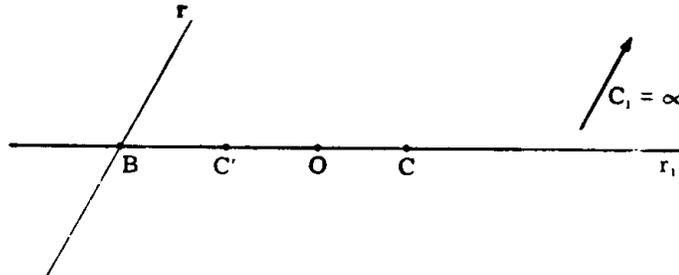


FIG. 1-3

Se i punti D sono reali, essi sono due elementi autoconiugati della polarità; nel caso in esame è perciò $k < 0$. Considerando la corrispondenza tra r e C' , e quindi l'involutione tra B e C' , k cambia di segno, e quindi i punti uniti sono reali.

La conica della polarità (rC') è perciò reale; il centro della polarità è il centro della conica; se ne trae che questa, essendo a centro reale, è una ellisse o una iperbole. La polarità (rC') non ammette punti autoconiugati impropri; tali punti infatti coincidono con i propri simmetrici rispetto al centro O , e quindi sarebbero autoconiugati anche nella polarità (rC). Si deduce da ciò che la conica della polarità (rC') è una ellisse; questa prende nome di *ellisse di elasticità degli spostamenti* della sezione A . Spesso, poichè la sezione A è quella estrema della mensola, la conica si chiama *ellisse terminale di elasticità*, o anche ellisse di *Culmann*, dal nome del prof. K. Culmann, cui la trattazione è dovuta (1875). Rispetto a tale ellisse le rette d'azione r delle forze applicate ad A e i centri C delle rotazioni di A si corrispondono come rette e antipoli, o come punti e antipolari. Assegnata perciò la retta r , il centro C si ottiene costruendo il polo C'

di r , e quindi il suo simmetrico C rispetto al centro O ; assegnato il centro C , la retta r si ottiene costruendo la polare r' di C , e quindi la sua simmetrica r rispetto a O . In particolare, se la retta r passa per il baricentro elastico O , il centro C è improprio, e coincide con il punto improprio del diametro t coniugato di r (fig. 1-4). Perciò lo spostamento di A è in tal caso una traslazione, secondo la direzione a ortogonale alla t ; soltanto se r è un asse principale dell'ellisse d'elasticità, la traslazione di A avviene nella stessa direzione di F .

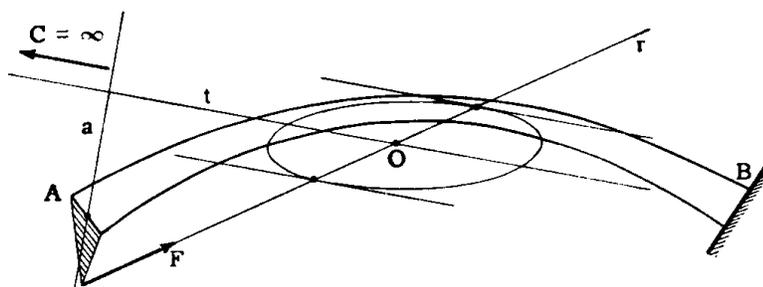


FIG. 1-4

Il sorgere dell'ellisse di elasticità è del tutto identico a quello dell'ellisse di inerzia (Vol. II, § 1-7). Valgono le stesse costruzioni riportate nel Vol. II, § 1-8.

2. I quattro teoremi fondamentali.

Se sulla sezione A agisce una coppia \mathcal{M} (si avverte una volta per sempre che, per brevità, nel seguito del capitolo si dice forza o coppia, in luogo della espressione più esatta: distribuzione di forze aventi per risultante una forza, o una coppia) la sezione stessa ruota intorno al baricentro elastico O , di un angolo φ equiverso e proporzionale ad \mathcal{M} ; il rapporto tra φ ed \mathcal{M} prende nome di *peso elastico* W ($W > 0$)

$$W = \frac{\varphi}{\mathcal{M}} . \quad (2)$$

Le dimensioni fisiche di W sono $[F^{-1} l^{-1}]$, quelle cioè dell'inverso di una coppia.

Se una forza F agisce secondo una retta orientata r distante d_{Or} da O (*), essa può suppirsi somma della forza $F' = F$, uguale e parallela ad

(*) Si ricordi che la distanza d_{Or} tra un punto O ed una retta orientata r è positiva se O è a sinistra di r .

F e passante per O , e della coppia $\mathcal{M}' = Fd_{Or}$ (fig. 1-5). La rotazione φ prodotta da F è, per il principio di sovrapposizione, somma di quelle prodotte da F' ed \mathcal{M}' ; poichè F' non provoca rotazioni, è

$$\varphi = W \mathcal{M}' = F W d_{Or} . \quad (3)$$

E cioè la rotazione di A prodotta da una forza F agente su A è uguale al prodotto della forza F , del peso elastico W , e della distanza d_{Or} del baricentro O dalla forza; essa è positiva (antioraria) se O è a sinistra di F .

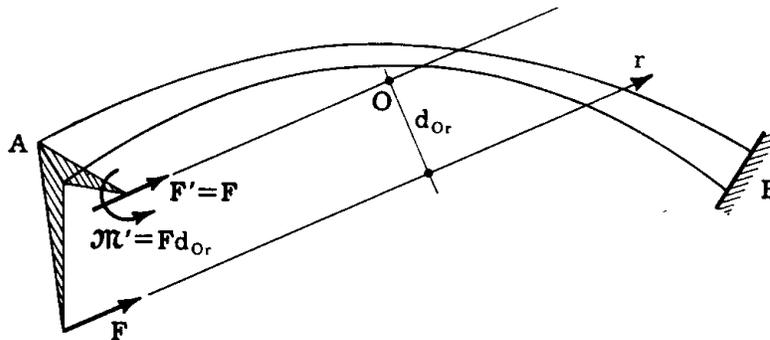


FIG. 1-5

La componente $s_p = PH$, secondo una retta orientata p , dello spostamento di un punto P qualsiasi collegato rigidamente con A , per effetto di

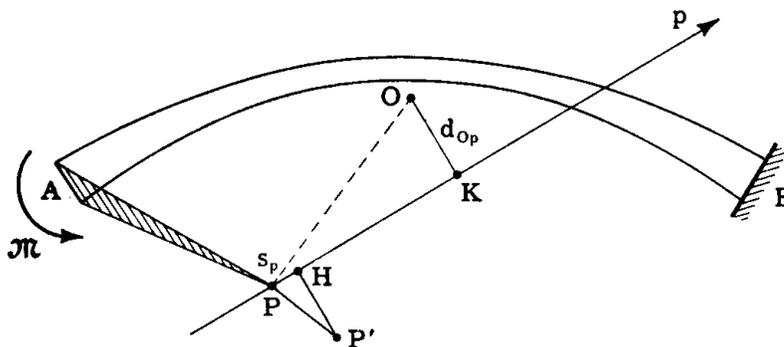


FIG. 1-6

una coppia \mathcal{M} agente su A , è fornita, per la (1-2), da

$$s_p = \varphi d_{Op} = \mathcal{M} W d_{Op} , \quad (4)$$

ove con d_{Op} si è indicata (fig. 1-6) la distanza del baricentro elastico O dalla retta p .

Se lo spostamento PP' è piccolo in rapporto alle dimensioni del corpo, e quindi in rapporto alla distanza PO , può assimilarsi PP' , che in realtà è un arco di circonferenza di centro O e raggio OP , ad un segmento di retta, normale alla congiungente OP . Si confonde cioè l'angolo $\varphi = \widehat{POP'}$ con la sua tangente trigonometrica; ciò vuol dire che l'angolo φ è fornito dal rapporto tra PP' e OP . In questo ordine di approssimazione, dalla similitudine dei due triangoli PHP' e OKP risulta

$$s_p = PH = \frac{PP'}{OP} OK = \varphi d_{Op} ;$$

può dirsi cioè che la componente secondo una retta p dello spostamento di un punto P di un corpo rigido che subisce una rotazione è fornito dal prodotto dell'ampiezza φ della rotazione per la distanza del centro O della rotazione dalla retta p . Questo risultato può anche trarsi dalla espressione di w riportata al § 1, ricordando che nel caso in esame è $p = \varphi$, e orientando l'asse z parallelo alla retta p .

Se è noto lo spostamento PP' di un punto P , e l'ampiezza φ della rotazione, può determinarsi il centro O di questa. Tale centro infatti è ubicato sulla normale a PP' per P , alla distanza

$$OP = \frac{PP'}{\varphi} ;$$

dei due punti, simmetrici rispetto alla retta PP' , che soddisfano tali condizioni, il centro O è quello per cui lo spostamento PP' e la rotazione φ hanno i versi assegnati.

La componente s_p , secondo una retta p dello spostamento di un punto P qualsiasi collegato rigidamente con A , per effetto di una forza F agente su A secondo una retta r , è fornito, per la (1-3), da

$$s_p = F W d_{Or} d_{Cp} \quad (5)$$

dove d_{Or} e d_{Cp} sono rispettivamente le distanze della retta r dal baricentro elastico O , e della retta p dal centro C di rotazione, antipolo di r rispetto all'ellisse di elasticità (fig. 1-7).

Si consideri sul piano della struttura una qualsiasi distribuzione fittizia di masse w , rispettante le sole condizioni che la sua ellisse d'inerzia coincida con l'ellisse di elasticità, e la sua somma sia pari a W ; queste masse costituiscono i *pesi elastici distribuiti*.

Con questa convenzione, i risultati consegnati nelle formule (1-2) (1-3) (1-4) (1-5) possono enunciarsi come segue.

a) L'angolo φ di cui ruota la sezione terminale, quando ad essa è applicata una coppia \mathcal{M} , è uguale al prodotto della coppia per il peso elastico W :

$$\varphi = \mathcal{M} W ; \quad (2')$$

b) L'angolo φ di cui ruota la sezione terminale, quando ad essa è applicata una forza F , è uguale al prodotto della forza per il momento statico S_r del peso elastico rispetto alla retta d'azione r della forza (r è orientata come la forza):

$$\varphi = F S_r ; \quad (3')$$

c) La componente s_p secondo una retta p dello spostamento di un punto collegato rigidamente alla sezione terminale, quando a questa è ap-

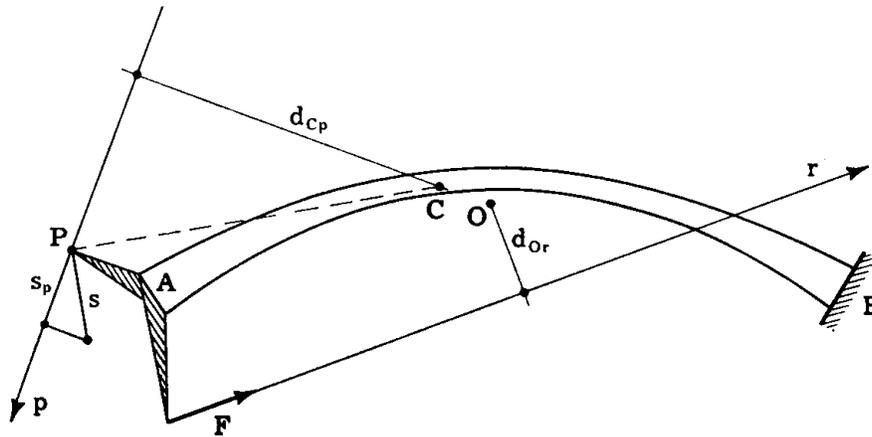


FIG. 1-7

plicata una coppia \mathcal{M} , è uguale al prodotto della coppia per il momento statico S_p del peso elastico rispetto alla retta p :

$$s_p = \mathcal{M} S_p ; \quad (4')$$

d) La componente s_p secondo una retta p dello spostamento di un punto collegato rigidamente alla sezione terminale, quando a questa è applicata una forza F di retta d'azione r , è uguale al prodotto della forza per il momento centrifugo I_{rp} del peso elastico rispetto alle rette r e p :

$$s_p = F I_{rp} . \quad (5')$$

Sono questi i cosiddetti quattro *teoremi fondamentali* della teoria dell'ellisse di elasticità. In particolare, dal quarto teorema si trae come corollario, per $p=r$, il seguente:

$$s_r = F I_r ; \quad (5'')$$

e cioè lo spostamento s_r , secondo la retta d'azione r della forza F applicata ad A, di un punto P giacente su r e collegato rigidamente con A, è

fornito dal prodotto della forza per il momento d'inerzia I_r , del peso elastico rispetto alla retta r .

3. La costruzione dell'ellisse di elasticità.

La costruzione dell'ellisse di elasticità si riduce alla ricerca degli spostamenti della sezione A per tre condizioni di carico. Si applichi in A una coppia \mathcal{M} (fig. 1-8 a) e si calcoli la rotazione φ della sezione A e lo sposta-

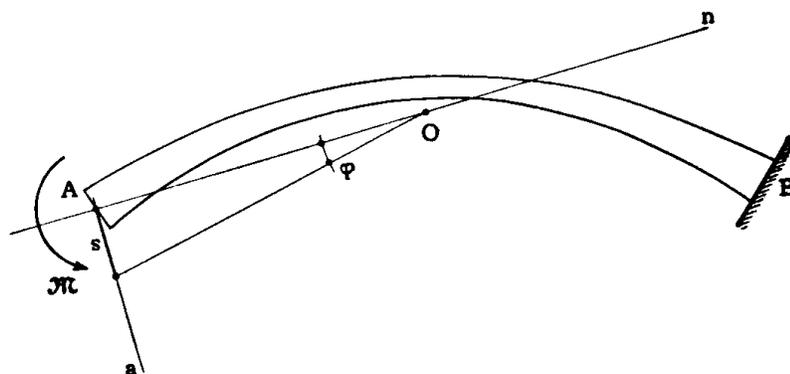


FIG. 1-8 a

mento s del suo baricentro. Il baricentro elastico O si trova sulla retta n normale alla retta a dello spostamento s condotta per il baricentro di A , ad una distanza da questo pari a s/φ , dalla parte per cui il segno di s è in accordo con il segno di φ .

Si faccia poi agire su A la forza F diretta secondo una retta r passante per O (fig. 1-8 b). Sia s la traslazione della sezione A , ed a la retta

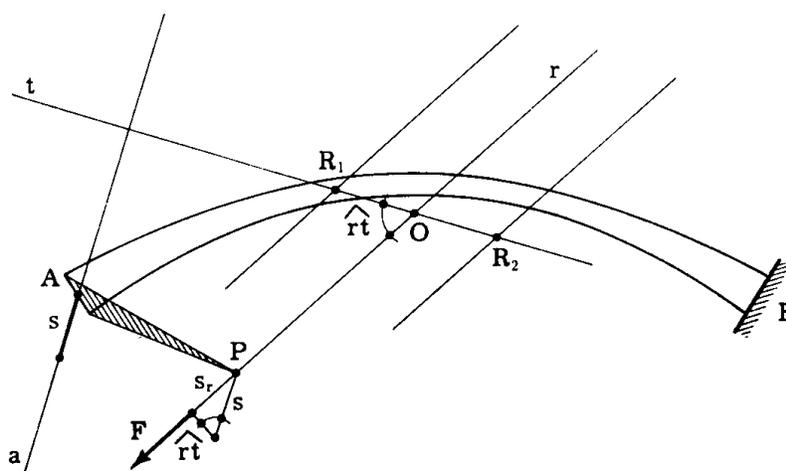


FIG. 1-8 b

secondo cui essa avviene; s è pure lo spostamento del punto P collegato rigidamente con A ed ubicato sulla retta r .

La normale t ad a è la direzione coniugata di r . Il valore OR_1 del semidiametro dell'ellisse disteso su t è fornito dalla relazione

$$s_r = s \cdot \widehat{\text{sen } rt} = F I_r = F W (OR_1 \widehat{\text{sen } rt})^2 . \quad (a)$$

Si faccia poi agire una forza F secondo la retta t , coniugata di r passante per O (fig. 1-8 c); sia s la traslazione di A , che si effettua necessa-

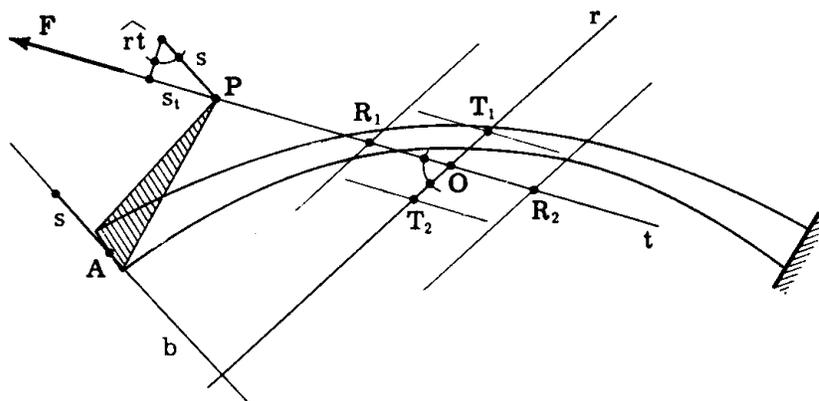


FIG. 1-8 c

riamente secondo la retta b normale ad r . Il semidiametro OT_1 disteso su r è fornito dalla relazione

$$s_t = s \cdot \widehat{\text{sen } rt} = F I_t = F W (OT_1 \widehat{\text{sen } rt})^2 . \quad (b)$$

Dell'ellisse si conoscono così il centro e due semidiametri coniugati; essa è determinata.

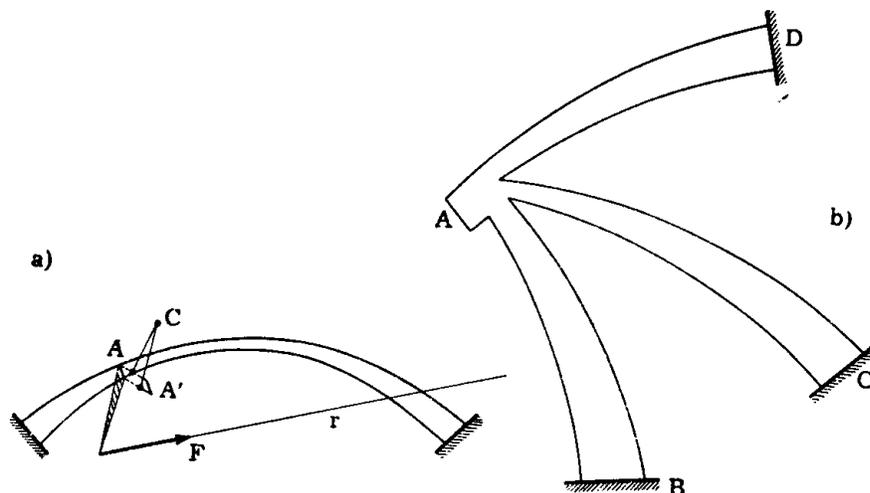


FIG. 1-9

Tutto quanto detto finora a proposito della sezione terminale di una struttura a mensola può essere identicamente ripetuto (fig. 1-9 a) per una

qualsiasi sezione A di una trave piana comunque vincolata. In tal caso però si parlerà soltanto di *ellisse di elasticità degli spostamenti della sezione A*, e non più di ellisse terminale.

In alcuni casi potrebbe ancora parlarsi di ellisse terminale, come in quello della fig. 1-9 b, dove la sezione A è comune a più mensole; si preferisce però, per non generare equivoci, dare il nome di ellisse terminale solo all'ellisse di elasticità relativa alla sezione terminale di una trave a mensola.

4. L'ellisse terminale di elasticità per il solido di De Saint-Venant.

Nel seguito si forniranno i metodi per il calcolo degli spostamenti in una struttura monodimensionale qualsiasi; per ora le costruzioni del numero precedente sono sfruttabili con riferimento al già noto solido di De

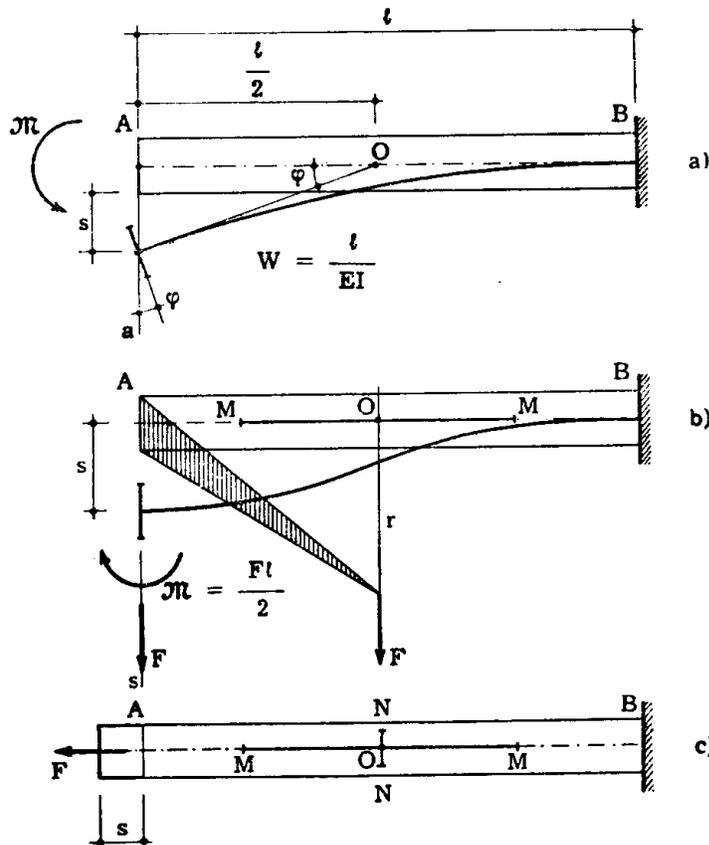


FIG. 1-10

Saint-Venant. Si consideri perciò (fig. 1-10 a) un solido prismatico costituito di materiale omogeneo, incastrato all'estremità B, e sottoposto all'altro estremo A ad una coppia \mathcal{M} , il cui vettore agisce secondo una delle di-

rezioni principali della sezione retta. La sezione A ruota della quantità (Vol. II, form. 5-4).

$$\varphi = \frac{\mathcal{M} l}{EI}, \quad (c)$$

e il suo baricentro si sposta, secondo la normale a all'asse e al vettore \mathcal{M} , della quantità (Vol. II, form. 5-3)

$$s = \frac{\mathcal{M} l^2}{2 EI}. \quad (d)$$

Il baricentro elastico giace perciò sull'asse del prisma, ad una distanza

$$\frac{s}{\varphi} = \frac{l}{2}$$

dall'estremo. Il peso elastico vale

$$W = \frac{\varphi}{\mathcal{M}} = \frac{l}{EI}. \quad (6)$$

Sulla base A dello stesso solido agisca una forza F avente per retta d'azione r la normale all'asse in O (fig. 1-10 b); questa sollecitazione equivale ad una forza F normale all'asse ed agente in A , e ad una coppia $\mathcal{M} = -F \frac{l}{2}$. Lo spostamento di A si effettua secondo la normale all'asse; il contributo flessionale di F è (Vol. II, form. 9-8)

$$\frac{F l^3}{3 EI}$$

il contributo tagliante di F è (Vol. II, form. 9-40)

$$\chi \frac{F l}{GA};$$

il contributo di \mathcal{M} è

$$-\frac{F l^3}{4 EI}$$

Si ha perciò

$$s = \frac{F l^3}{12 EI} + \chi \frac{F l}{GA} . \quad (e)$$

Poichè s si effettua normalmente all'asse, l'asse e la normale ad esso per O sono i diametri principali dell'ellisse d'elasticità; dal confronto tra la (a) e la (e) si ha la lunghezza del semidiametro giacente sull'asse (semidiametro *longitudinale*)

$$\rho_t = \sqrt{\frac{l^2}{12} + \chi \frac{E}{G} \frac{I}{A}} . \quad (7)$$

Sulla base A agisca una forza F secondo l'asse (fig. 1-10 c); si ha

$$s = \frac{F l}{EA} \quad (f)$$

e dal confronto tra la (b) e la (f) si ottiene la lunghezza del semidiametro normale all'asse (semidiametro *trasversale*)

$$\rho_t = \sqrt{\frac{I}{A}} . \quad (8)$$

Dalla (1-7) si osserva che il radicando è somma di un termine dovuto alla flessione, che aumenta con la lunghezza del solido, e di un termine dovuto al taglio, da essa indipendente. Per solidi abbastanza lunghi può quindi porsi

$$\rho_t = \frac{l}{\sqrt{12}} , \quad (9)$$

trascurando il termine da taglio. Dalla (1-8) si osserva che il semidiametro trasversale tiene conto del solo sforzo normale, ed è indipendente dalla lunghezza. E' facile riconoscere che, essendo I ed A il momento d'inerzia rispetto all'asse neutro e l'area della sezione retta del solido, il semidiametro ρ_t coincide con il semidiametro dell'ellisse d'inerzia della sezione retta disteso sulla normale all'asse neutro; se quindi la sezione retta è rettangolare, di dimensioni $b \times h$, risulta

$$\rho_t = \frac{h}{\sqrt{12}} . \quad (10)$$

5. L'ellisse di elasticità come ellisse d'inerzia delle masse pesi elastici; composizione in serie delle ellissi parziali di elasticità.

Al n. 2 si è detto potersi l'ellisse di elasticità considerare come l'ellisse d'inerzia di una distribuzione fittizia di masse, dette pesi elastici distribuiti. Ad una ellisse determinata non corrisponde una sola distribuzione di pesi elastici, ma infinite; se ne può adottare una qualsiasi a caratterizzare il comportamento elastico della struttura. Si vuole in questo paragrafo determinare una di queste distribuzioni. Si prenda in esame ancora la struttura della fig. 1-7, e si consideri il contributo fornito ad s_p dalle deformazioni di un solo tronco $A'B'$ della struttura (fig. 1-11), del quale sia noto il peso elastico w , il baricentro elastico O' e l'ellisse

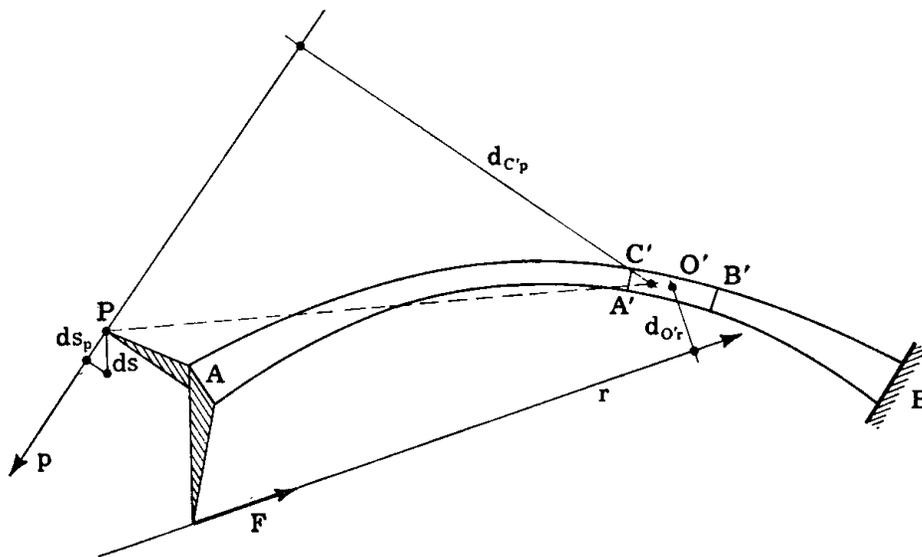


FIG. 1-11

di elasticità terminale, relativi alla sezione A' del tronco $A'B'$ incastrato in B' . Poichè sono valide le ipotesi a fondamento del principio di sovrapposizione, gli spostamenti sono così piccoli da poter essere trascurati in confronto alle dimensioni della struttura. Ciò significa che gli effetti della deformazione dei singoli tronchi come quello in esame, in cui può essere scomposta la struttura, possono essere valutati tutti sulla struttura avente la geometria di quella indeformata, e poi sommati. La componente ds_p secondo p dello spostamento ds dovuto alla deformabilità del tronco in esame è fornita da

$$ds_p = F w d_{O'r} d_{C'p} \quad (g)$$

ove $d_{O'r}$ e $d_{C'p}$ sono le distanze del baricentro elastico O' del tronco dalla retta r , e dell'antipolo C' della retta r , rispetto all'ellisse del tronco, dalla retta p ; e cioè ds_p è il prodotto della forza F per il momento centrifugo del peso elastico del tronco rispetto alle due rette r e p . Sommando i contributi (g) relativi a tutti i tronchi si ottiene

$$s_p = F \Sigma w d_{O'r} d_{C'p} . \quad (11)$$

Confrontando la (1-5') e la (1-11) si ha

$$I_{rp} = \Sigma w d_{O'r} d_{C'p} .$$

Poichè il momento centrifugo rispetto a due rette qualsiasi dei pesi elastici w dei singoli tronchi, distribuiti per ogni tronco in modo che la loro ellisse d'inerzia coincida con l'ellisse di elasticità del tronco, coincide con il momento centrifugo del peso elastico W complessivo, distribuito in modo che la sua ellisse d'inerzia coincida con l'ellisse di elasticità dell'intera struttura, può dirsi che alle due distribuzioni compete la stessa massa (il peso elastico W è pari alla somma dei w), lo stesso baricentro (il baricentro delle masse w concentrate nei baricentri elastici parziali O' , coincide con il baricentro elastico del sistema) e la stessa ellisse d'inerzia (l'ellisse di elasticità dell'intera struttura coincide con l'ellisse d'inerzia delle masse w la cui distribuzione è definita da ellissi d'inerzia coincidenti con le ellissi di elasticità dei singoli tronchi).

Le prime due proposizioni discendono pure direttamente dalle proprietà delle piccole rotazioni.

Se la struttura è tale da consentire l'uso dei risultati del De Saint-Venant, si può suddividere la struttura stessa in tronchi, dosandone la lunghezza in modo da poterli considerare come prismatici, e a ciascuno di essi applicare i risultati del numero precedente. Se la struttura non permette di reputare validi i risultati del De Saint-Venant, la teoria dell'ellisse di elasticità non cade in difetto, salvo a definire in modo diverso che nel numero precedente i pesi elastici e le ellissi di elasticità dei singoli tronchi. Si riparerà di ciò in tema di travi a forte curvatura.

Il procedimento esposto in questo numero si chiama anche di *composizione in serie* delle ellissi parziali; il nome deriva dal fatto che i pesi elastici w si sommano per fornire il peso elastico totale:

$$W = \Sigma w . \quad (12)$$

Il procedimento ora esposto permette di utilizzare i metodi caratteristici della geometria delle masse ogni volta che la trave sia scomponibile in tante altre travi HK, di ognuna delle quali sia nota l'ellisse di

elasticità terminale \bar{e}_{HK} (*) (ellisse relativa ad uno dei due estremi H o K, quando l'altro estremo sia perfettamente incastrato), e *collegate in serie*, cioè in modo che una sezione non possa essere comune a più di due travi (fig. 1-12). L'ellisse terminale \bar{e}_{AB} si ottiene in tal caso come ellisse d'inerzia

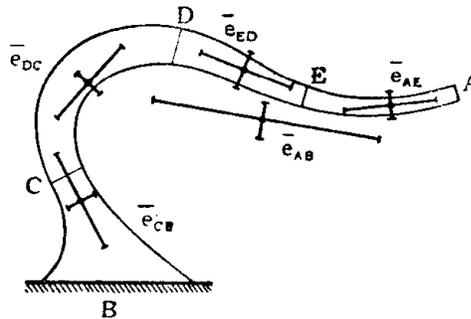


FIG. 1-12

dei pesi elastici w_{HK} delle singole travi HK (relativi alla sezione H della trave HK incastrata in K, o viceversa) distribuiti per ogni trave HK in modo da dar luogo ad un'ellisse d'inerzia coincidente con l'ellisse \bar{e}_{HK} .

6. Composizione in parallelo delle ellissi parziali di elasticità.

Quando più travi AK di cui sono note le ellissi di elasticità \bar{e}_{AK} sono collegate in modo che la sezione A è comune a tutte (struttura pluriconnessa), si ha il cosiddetto *collegamento in parallelo* (fig. 1-9 b). In tal caso l'ellisse degli spostamenti della sezione A (che non conviene chiamare, come già osservato, ellisse terminale) non può essere ottenuta come ellisse d'inerzia dei pesi elastici delle singole travi; essa deve essere calcolata attraverso il procedimento generale del § 3. La conoscenza dei pesi elastici w_{AK} e delle ellissi \bar{e}_{AK} delle singole travi può solo, a volte, essere di aiuto nella risoluzione dei tre casi di sollecitazione sui quali il suddetto procedimento si articola; si parla in tal caso di *composizione in parallelo* delle ellissi parziali. La denominazione è volutamente presa in prestito, come quella di composizione in serie, dalla elettrotecnica. Infatti, come nei circuiti in serie i valori della resistenza elettrica si sommano, e in quelli in parallelo invece si sommano i loro inversi; così nelle strutture collegate in serie i pesi elastici, e quindi le deformabilità, si sommano; in quelle collegate in parallelo la deformabilità del complesso è minore di quella dei singoli elementi.

(*) Il soprassegno indica che l'ellisse terminale è relativa ad una trave HK incastrata perfettamente in un estremo; e_{HK} è invece l'ellisse terminale della trave HK incastrata in K come lo è in realtà, e relativa agli spostamenti di H.

L'ellisse d'elasticità della sezione A si può chiamare semplicemente e_A ; a volte si indica con $e_{A(BCD)}$ per definire le travi la cui elasticità entra in gioco nella sua determinazione.

Le ellissi parziali di elasticità si possono sfruttare nella composizione in parallelo come segue. Si considerino le due travi AB e AC aventi in comune la sezione A (fig. 1-13). In genere la ricerca si effettua per determi-

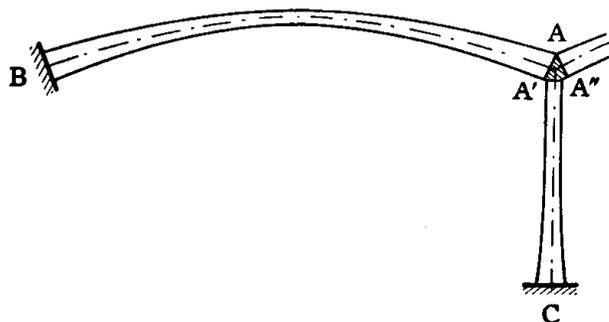


FIG. 1-13

nare le condizioni di vincolo di una trave impostata in A sul sistema considerato, perciò la sezione A è proprio la sezione d'imposta di questa trave; la trave AB si suppone elastica fino alla sezione A', la trave AC fino alla sezione A'', e il concio A A' A'', il cui comportamento non può assimilarsi a

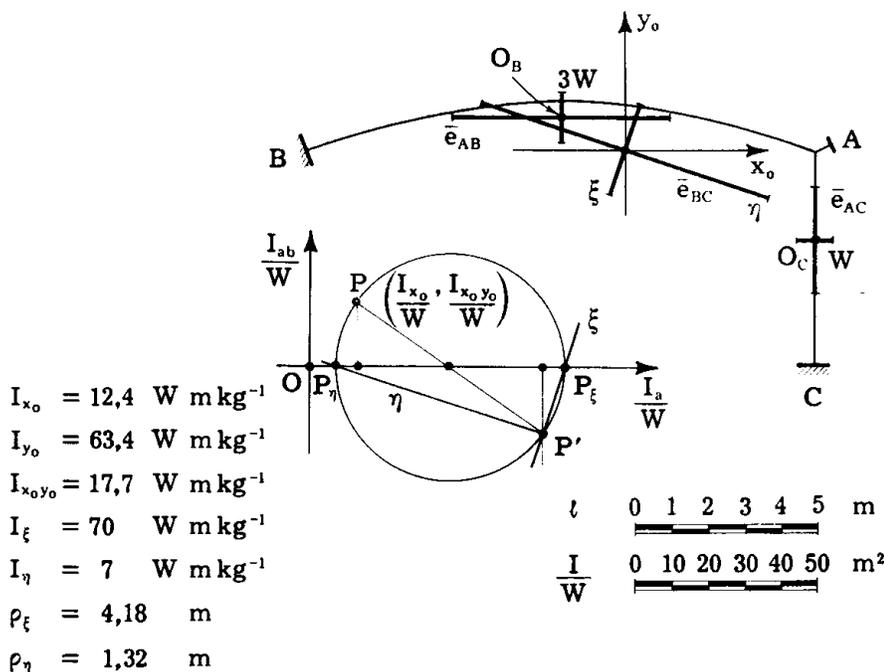
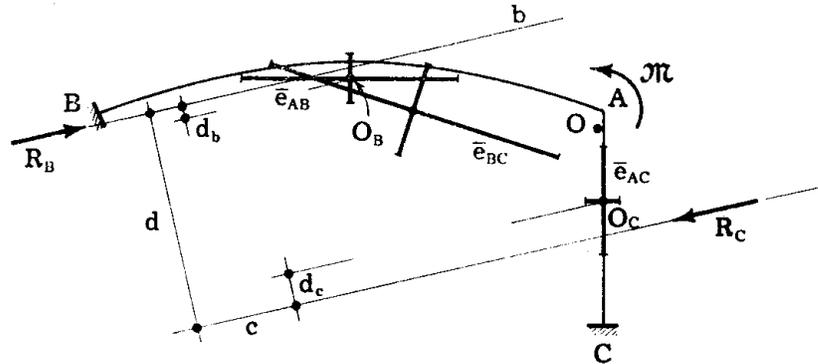


FIG. 1-14

quello di un solido di De Saint-Venant, e che per altro è molto poco deformabile, si suppone rigido, ed avente solo funzione di collegamento. Siano (fig. 1-14) \bar{e}_{AB} ed \bar{e}_{AC} le ellissi terminali dei tronchi AB e AC, ed \bar{e}_{BC} l'el-

lisse terminale del complesso BAC supposto incastrato in un estremo e libero all'altro; \bar{e}_{BC} si ottiene componendo in serie \bar{e}_{AB} ed \bar{e}_{AC} .

Una coppia \mathcal{M} applicata in A (fig. 1-15 a) farebbe ruotare la sezione C, supposta libera, intorno al baricentro elastico O_B della trave AB; perciò



$$W_A = 3W \frac{d_b}{d} = W \frac{d_c}{d} = 0,15 W$$

FIG. 1-15 a

il vincolo in C deve sviluppare una reazione R_C che annulli tale rotazione; la retta di azione c di R_C è cioè l'antipolare di O_B rispetto all'ellisse \bar{e}_{BC} . Analogamente, può dirsi che la retta d'azione b della reazione R_B esercitata dal vincolo B è l'antipolare di O_C rispetto all'ellisse \bar{e}_{BC} . Poichè i punti O_B e O_C sono allineati con il centro dell'ellisse \bar{e}_{BC} , le rette b e c risultano parallele, come dev'essere, poichè R_B ed R_C equilibrano la coppia \mathcal{M} . Se d è la distanza tra b e c , è

$$|R_B| = |R_C| = \frac{\mathcal{M}}{d};$$

il verso di R_B ed R_C è tale da equilibrare \mathcal{M} .

La rotazione della sezione A si esplica intorno al punto O, antipolo di b rispetto all'ellisse \bar{e}_{AB} ; infatti la sezione A può considerarsi come terminale di AB, e soggetta alla \mathcal{M} ed alla R_C , cioè in complesso alla $-R_B$. Il punto O è anche l'antipolo di c rispetto all'ellisse \bar{e}_{AC} . Per le note definizioni, O è il centro dell'ellisse degli spostamenti della sezione A. L'ampiezza della rotazione di A è

$$\varphi = R_B W_{AB} d_b = \frac{\mathcal{M}}{d} d_b W_{AB}$$

chè la sezione A trasla (e infatti r passa per O), b deve passare per O_B . Analogamente si dimostra che c passa per O_C .

La traslazione s di A avviene secondo la retta a , normale alla direzione t coniugata della b rispetto all'ellisse \bar{e}_{AB} (la t è anche coniugata della c rispetto all'ellisse \bar{e}_{AC}); la t è la direzione coniugata di r rispetto ad e_A . Lo spostamento s è fornito da

$$s = R_B I_{ab}^{AB} = R_C I_{ac}^{AC}$$

e il semidiametro OR_1 disteso su t è fornito da

$$s_r = s \cdot \widehat{\text{sen } rt} = FI_r = FW_A (OR_1 \widehat{\text{sen } rt})^2$$

da cui

$$OR_1^2 = \frac{R_B}{F} \frac{I_{ab}^{AB}}{W_A \widehat{\text{sen } rt}} = \frac{R_C}{F} \frac{I_{ac}^{AC}}{W_A \widehat{\text{sen } rt}} \quad (14)$$

In maniera del tutto analoga si ottiene il semidiametro OT_1 disteso sulla direzione r coniugata di t , facendo agire (fig. 1-15 c) una forza F se-

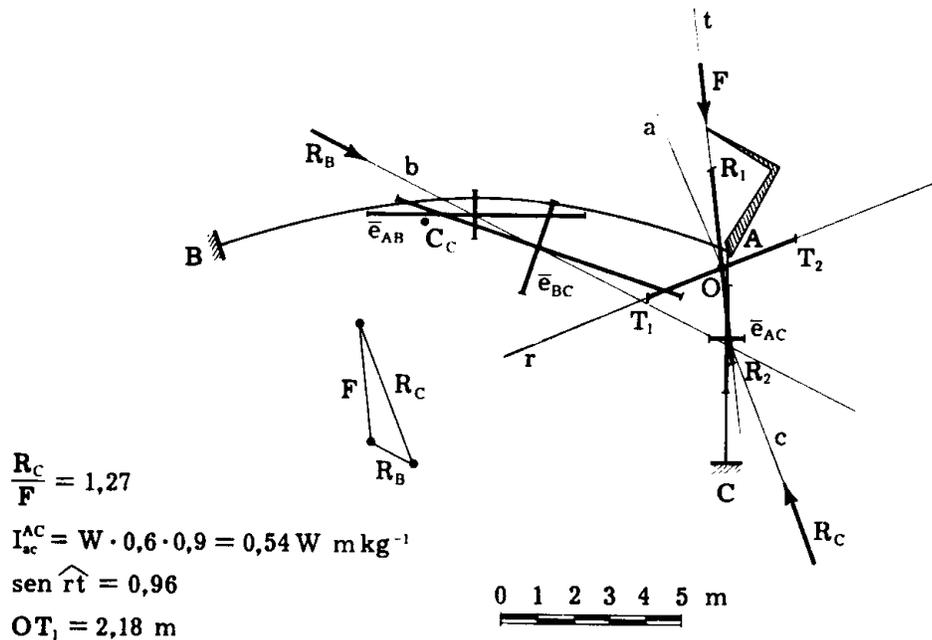


FIG. 1-15 c

condo la retta t ; lo spostamento s avverrà secondo la normale a ad r , e il

semidiametro è fornito dalla relazione, analoga alla (1-14),

$$OT_1' = \frac{R_B}{F} \frac{I_{ab}^{AB}}{W_A \widehat{\text{sen } rt}} = \frac{R_C}{F} \frac{I_{ac}^{AC}}{W_A \widehat{\text{sen } rt}}, \quad (15)$$

ove R_B ed R_C sono le reazioni relative alla forza F agente secondo t , b e c sono le loro rette d'azione, a è la normale ad r , r e t sono le stesse rette della (1-14).

Così l'ellisse e_A degli spostamenti della sezione A è perfettamente determinata.

Quanto detto per il caso di due travi vale anche per più travi aventi in comune la stessa sezione A ; basta comporre prima in parallelo due di queste, poi comporre, ancora in parallelo, il complesso di queste due, caratterizzato da un'unica ellisse, con la terza e così via.

Il procedimento su esposto è generale; esso si semplifica notevolmente se le ellissi \bar{e}_{AB} ed \bar{e}_{AC} hanno gli assi principali paralleli, così come accade, anche se non se ne è tenuto conto, nell'esempio della fig. 1-13. Ciò si verifica molto spesso negli archi e nelle travi continue solidali con i ritti. Si considerino un arco AB ed una pila AC solidali in A (fig. 1-16). Si soppri-

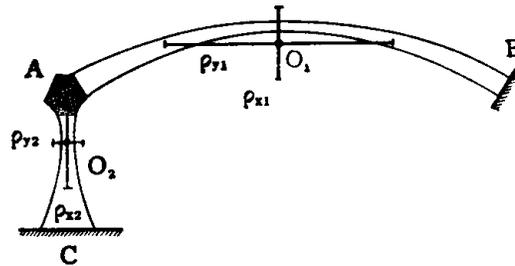


FIG. 1-16

ma il ritto, e si faccia agire sulla sezione A una forza orizzontale F_1 passante per il baricentro elastico O_1 dell'arco; la sezione A trasla orizzontalmente della quantità

$$F_1 W_1 \rho_{x1}^2 .$$

Si sopprima poi l'arco, e si faccia agire sulla sezione A una forza orizzontale F_2 passante per il baricentro elastico O_2 del ritto; la sezione A trasla orizzontalmente della quantità

$$F_2 W_2 \rho_{x2}^2 .$$

Se le forze F_1 ed F_2 sono tali che

$$F_1 W_1 \rho_{x1}^2 = F_2 W_2 \rho_{x2}^2 \quad (h)$$

le due traslazioni sono uguali; ciò significa che la risultante di F_1 ed F_2 , agente sulla sezione A della struttura integra, provoca una traslazione

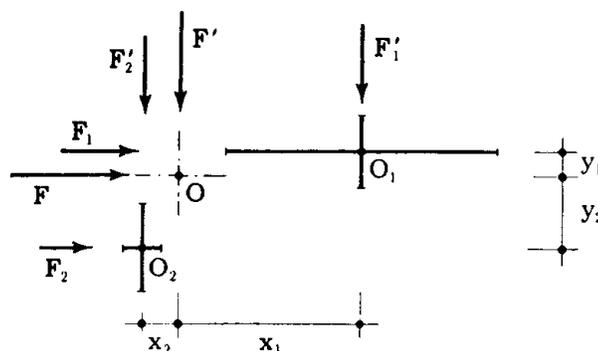


FIG. 1-17

orizzontale di A, fornita ancora dalla (h). Quindi la risultante di F_1 ed F_2 passa per il baricentro elastico O di tutta la struttura; se ne trae (fig. 1-17)

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{W_1 \rho_{x1}^2}{W_2 \rho_{x2}^2}, \quad (i)$$

ove y_1 ed y_2 indicano le distanze di O da O_1 e O_2 misurate secondo la verticale. Dalla relazione

$$(F_1 + F_2) W_A \rho_x^2 = F_1 W_1 \rho_{x1}^2 = F_2 W_2 \rho_{x2}^2$$

si trae poi

$$\rho_x^2 = \frac{W_1 \rho_{x1}^2}{W_A \left(1 + \frac{y_1}{y_2}\right)}. \quad (l)$$

Analogamente si ottiene, considerando due forze verticali F'_1 ed F'_2 (fig. 1-17)

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{W_1 \rho_{y1}^2}{W_2 \rho_{y2}^2} \quad (m)$$

$$\rho_y^2 = \frac{W_1 \rho_{y1}^2}{W_A \left(1 + \frac{x_1}{x_2}\right)}. \quad (n)$$

Nella fig. 1-18 sono riportate le ellissi parziali e l'ellisse totale; si osservi che O non è ubicato sulla congiungente $O_1 O_2$, come sarebbe avvenuto nella composizione in serie, e che i semiassi ρ_x e ρ_y principali sono anche essi, come quelli delle ellissi parziali, orizzontale e verticale.

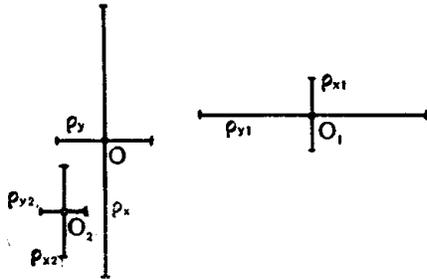


FIG. 1-18

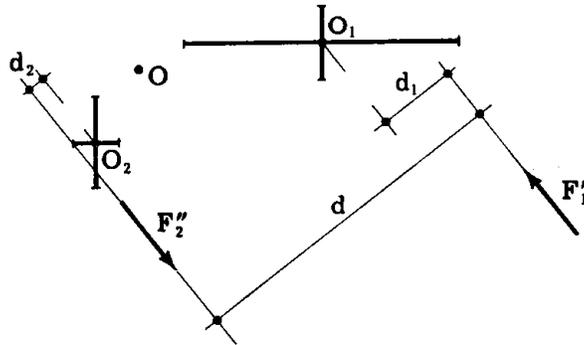


FIG. 1-19

Per determinare il peso elastico W_A si sopprime il ritto, e si faccia agire su A una forza F''_1 diretta secondo l'antipolare di O rispetto all'ellisse dell'arco (fig. 1-19); la sezione A ruota intorno al punto O dell'angolo

$$F''_1 W_1 d_1 ,$$

ove d_1 è la distanza della F''_1 da O_1 .

Si sopprime poi l'arco, e si faccia agire su A una forza F''_2 diretta secondo l'antipolare di O rispetto all'ellisse del ritto; la sezione A ruota intorno al punto O dell'angolo

$$F''_2 W_2 d_2 ,$$

ove d_2 è la distanza della F''_2 da O_2 .

Se le forze F''_1 ed F''_2 sono tali da provocare due rotazioni uguali

$$F''_1 W_1 d_1 = F''_2 W_2 d_2 , \quad (o)$$

agendo insieme sulla sezione A della struttura integra provocano la stessa rotazione di A . Poichè questa avviene intorno al baricentro elastico O , F''_1 ed F''_2 devono costituire una coppia, e cioè risultare parallele, uguali, e dirette in versi contrari. E' perciò, chiamato F'' il valore comune delle forze F''_1 ed F''_2 , e d la loro distanza,

$$F'' W_A d = F'' W_1 d_1 = F'' W_2 d_2$$

da cui

$$W_A = W_1 \frac{d_1}{d} = W_2 \frac{d_2}{d} . \quad (p)$$

Le (p) sono in accordo con le (1-13). Dal confronto di queste con la (1-12) appare che nella composizione in serie il peso elastico totale è somma di quelli parziali, e quindi le deformabilità dei singoli tronchi si sommano; nella composizione in parallelo invece il peso elastico totale è minore di quelli parziali, e quindi la deformabilità del complesso è minore di quella dei singoli tronchi.

7. Composizione in serie e in parallelo.

La trave a mensola AB trattata nei paragrafi da 1 a 5 può essere incastrata in B su una imposta elasticamente cedevole (fig. 1-20 a); la cedibilità di B è definita da un peso elastico W_B e da una ellisse di elasticità e_B ,

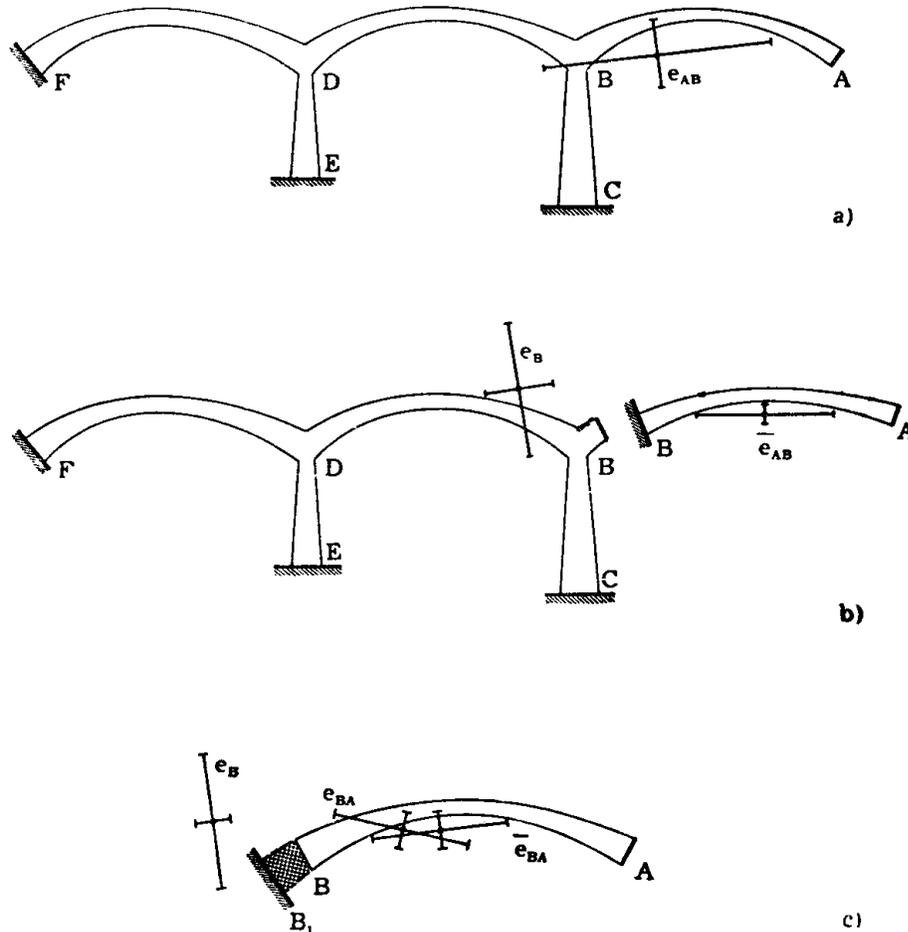


FIG. 1-20

ottenibile in genere operando secondo il procedimento del § 3, sulla struttura a sinistra di B (fig. 1-20 b). L'ellisse terminale e_{AB} relativa alla sezione A si ottiene componendo in serie l'ellisse \bar{e}_{AB} terminale della trave

AB perfettamente incastrata in B, con la ellisse e_B dell'imposta B; infatti gli spostamenti di A non variano se si suppone che la trave AB sia collegata al suolo attraverso un concio BB_1 , prolungamento ideale della struttura, incastrato perfettamente in B_1 , e le cui caratteristiche elastiche siano definite da W_B ed e_B (fig. 1-20 c).

L'ellisse e_B può ottenersi per successive composizioni in parallelo e in serie. Infatti componendo in parallelo l'ellisse \bar{e}_{DF} e l'ellisse \bar{e}_{DE} (fig. 1-20 b), si ottiene l'ellisse e_D della sezione D comune alle due travi DF e DE; componendo in serie l'ellisse e_D con l'ellisse \bar{e}_{BD} si ottiene l'ellisse e_{BD} ; componendo in parallelo quest'ultima con l'ellisse \bar{e}_{BC} si ottiene l'ellisse e_B . Questo procedimento può adottarsi per le strutture cosiddette

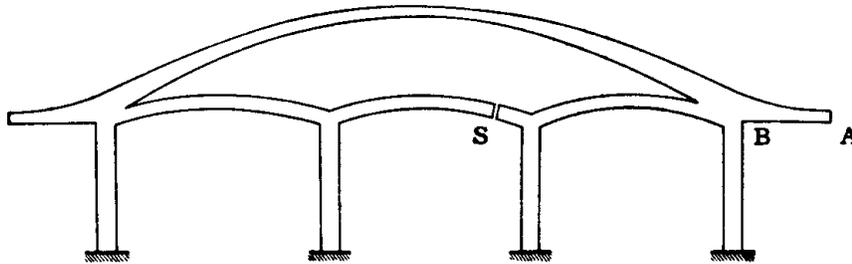


FIG. 1-21

aperte; si definiscono così gli insiemi di travi in cui un taglio, secondo una qualsiasi sezione retta, divide la struttura in due parti indipendenti, nel senso che una forza agente su una delle facce risultanti dal taglio non provoca spostamenti dell'altra faccia. Se per qualche sezione S ciò non accade, la struttura si chiama *chiusa* (fig. 1-21); in tal caso il procedimento della composizione in serie e in parallelo non è più adottabile, e occorre ripiegare sul procedimento generale del § 3.

8. La ricerca delle incognite iperstatiche negli archi.

Il procedimento del § 6 permette di conoscere le reazioni R_B ed R_C delle imposte di un arco caricato da una forza F o da una coppia M in corrispondenza di una sezione A, purchè siano preventivamente costruite le ellissi terminali \bar{e}_{AB} ed \bar{e}_{AC} delle due parti in cui la sezione A divide l'arco. Siamo perciò in grado, attraverso la teoria dell'ellisse di elasticità, di risolvere il problema della ricerca delle incognite iperstatiche negli archi.

Se l'arco BC è incastrato in B e in C su imposte elastiche (fig. 1-22) si può ricondurre l'arco al caso dell'incastro perfetto, facendo l'ipotesi che esso sia collegato al suolo attraverso due concii ideali BB_1 e CC_1 , perfetta-

mente incastrati in B_1 e C_1 , ed aventi pesi elastici W_B e W_C caratterizzati

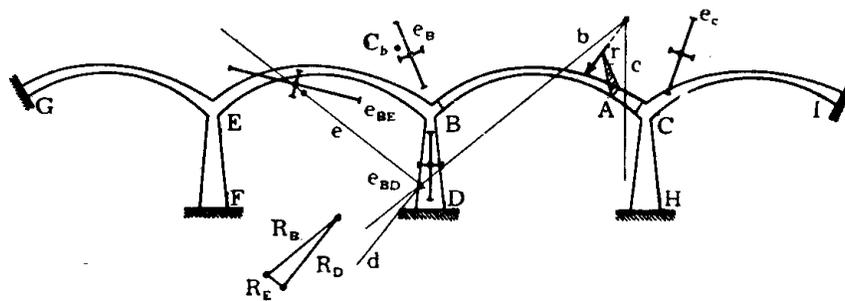


FIG. 1-22

dalle ellissi e_B e_C (fig. 1-23). Si compongono perciò l'ellisse \bar{e}_{AB} con la e_B , ottenendo la e_{AB} , e l'ellisse \bar{e}_{AC} con l'ellisse e_C , ottenendo la e_{AC} ; attra-

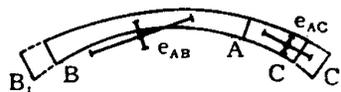


FIG. 1-23

verso le e_{AB} ed e_{AC} , si opera come al § 6. La reazione R_B in corrispondenza dell'imposta B agisce sulla sezione B che unisce l'arco BE con il ritto BD; essa si scompone in una parte R_E che interessa l'arco e in una parte R_D che interessa il ritto, nel modo che segue. La R_B , agendo sulla sezione B considerata come appartenente al complesso alla sinistra di B, provoca una rotazione di B intorno all'antipolo C_b della retta d'azione b della R_B rispetto all'ellisse e_B . La stessa rotazione può pensarsi dovuta alla R_E che agisce sulla sezione B considerata appartenente all'arco EB; quindi la retta d'azione e della R_E è l'antipolare di C_b rispetto all'ellisse e_{BE} . Per analogo motivo la retta di azione d della R_D è l'antipolare di C_b rispetto all'ellisse \bar{e}_{BD} . Le rette d ed e devono incontrarsi sulla b ; questa condizione, necessaria per l'equilibrio, è rispettata, come può dedursi con un ragionamento analogo a quello svolto al § 6. Si osservi infatti che la ricerca delle rette d ed e si è eseguita più rapidamente, sfruttando la conoscenza di e_B , ma essa può essere condotta anche secondo il procedimento del § 6, e cioè d ed e possono ottenersi come antipolari, rispetto all'ellisse somma di e_{BE} ed \bar{e}_{BD} , degli antipoli C'_b e C''_b della retta b rispetto alle ellissi e_{BE} ed \bar{e}_{BD} .

9. Il calcolo degli spostamenti della mensola attraverso le ellissi parziali.

Per il calcolo, analitico o grafico, degli spostamenti di una trave a mensola non è necessario conoscere l'ellisse di tutta la struttura, ma basta

conoscere le ellissi parziali dei singoli tronchi. Il caso più importante, perchè si incontra frequentemente nel disegno delle linee d'influenza, è quello della ricerca del diagramma (*deformata*) delle componenti degli spostamenti dei punti dell'asse secondo una direzione p , indotti da una forza F agente sulla sezione terminale secondo una retta r (fig. 1-24).

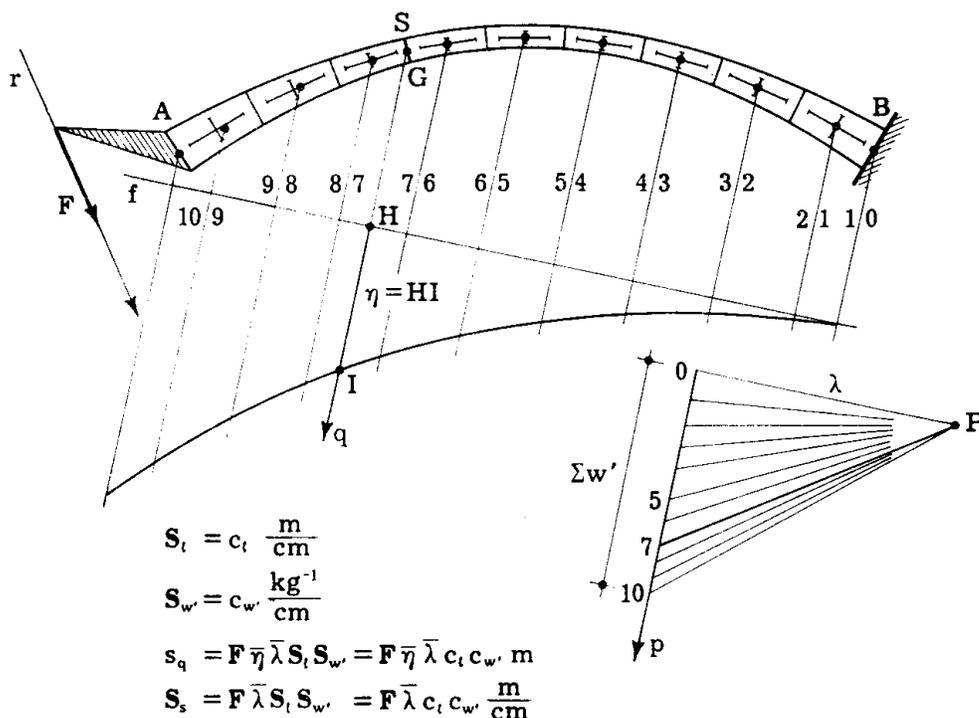


FIG. 1-24

La componente richiesta è fornita, in corrispondenza della generica sezione S , dal prodotto (1-5')

$$s_q = F I_{qr}^{BS}, \quad (q)$$

dove I_{qr}^{BS} è il momento centrifugo dei pesi elastici compresi tra la sezione S e l'incastro B , rispetto alla retta r orientata come F , ed alla retta q parallela ed equiversa alla p e passante per il baricentro G di S . Infatti si può considerare la sezione S come terminale del tronco BS , e la forza F applicata ad S attraverso il tronco rigido AS , le cui deformazioni non influiscono sullo spostamento di S .

Il calcolo di s_q si esegue per un numero discreto di sezioni; divisa cioè la struttura in un certo numero di tronchi assimilabili a solidi di De Saint-Venant, di cui siano note quindi le caratteristiche dell'ellisse di elasticità, si calcola s_q in corrispondenza delle sezioni dividenti, in relazione ai tronchi compresi tra la generica sezione e l'incastro.

Il calcolo analitico fornisce direttamente il valore delle s_q , che si riportano in diagramma secondo una certa scala, grafica o numerica, nella direzione e nel verso di p , a partire da una retta f (*fondamentale*) in genere normale alla p stessa. E' ben raro il caso in cui la funzione $s_q(f)$ possa determinarsi analiticamente, a meno che non si tratti di travi rettilinee di sezione costante o variabile con legge semplice.

Il concetto di scala grafica è elementare, e così pure quello di scala numerica. Per quest'ultima si ricorda soltanto la definizione: la scala S_q di una certa grandezza q è la quantità per cui occorre moltiplicare un segmento η , letto direttamente sul disegno in $\bar{\eta}$ cm, se si vuole ottenere il valore q che η rappresenta. E' cioè

$$\eta = \bar{\eta} S_q .$$

La scala S_q ha le dimensioni $[q l^{-1}]$, e si esprime in $\frac{\text{unità di } q}{\text{cm}}$; se è

$$S_q = c_q \frac{\text{unità di } q}{\text{cm}}$$

risulta

$$\eta = \bar{\eta} c_q \text{ unità di } q .$$

Si fa qualche esempio. Se q è uno spostamento s , ed è

$$S = 5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{cm}} ,$$

un segmento η tale che sul disegno si legge $\bar{\eta} = 3$ cm rappresenta uno spostamento

$$\eta = \bar{\eta} S_s = 3 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ m} .$$

Se q è un peso elastico w , ed è

$$S_w = 10^{-8} \frac{\text{Kg}^{-1} \text{ m}^{-1}}{\text{cm}} ,$$

si ha

$$\eta = \bar{\eta} S_w = 3 \cdot 10^{-8} \text{ Kg}^{-1} \text{ m}^{-1} .$$

Se q è un momento statico w' di peso elastico, ed è

$$S_{w'} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Kg}^{-1}}{\text{cm}} ,$$

è pure

$$\eta = \bar{\eta} S_{w'} = 3 \cdot 2 \cdot 10^{-7} \text{ Kg}^{-1} .$$

Il calcolo grafico fornisce invece direttamente il diagramma delle s_q , evitando i calcoli numerici.

Si calcolano anzitutto i momenti statici w' rispetto alla retta r dei pesi elastici w dei singoli tronchi. Questo calcolo può essere eseguito graficamente attraverso un poligono funicolare, ma è in genere preferibile ottenere i w' analiticamente, moltiplicando il peso elastico $w = \Delta s/EI$ del tronco generico per la distanza d del suo baricentro della retta r . Si costruisce poi sulla retta p la punteggiata dei w' ordinandoli, a partire dall'incastro, così come i tronchi si succedono sulla struttura, e infine il poligono funicolare che connette i vettori w' applicati, parallelamente alla p , negli antipoli della retta r rispetto alle ellissi dei singoli tronchi.

Nella fig. 1-24 si è fatta l'ipotesi più generale che in B l'incastro sia angolarmente cedevole; la deformata presenta perciò in B una inclinazione, corrispondente ad un peso elastico concentrato in B.

Sia λ la base del poligono funicolare, η il segmento HI compreso, sulla parallela alla retta p condotta per il baricentro G della generica sezione S di separazione tra due tronchi successivi, fra il primo lato del poligono funicolare ed il lato parallelo alla congiungente il polo P con l'estremo comune dei due vettori w' relativi ai due tronchi adiacenti in S. Si può scrivere (Vol. II, § 1-10, form. 1-35)

$$I_{qr}^{BS} = \bar{\eta} \bar{\lambda} S_t S_w \quad (r)$$

essendo $\bar{\eta}$ e $\bar{\lambda}$ le lunghezze in cm di η e λ lette direttamente sul disegno. Dal confronto delle (q) ed (r) si ha perciò

$$s_q = F \bar{\eta} \bar{\lambda} S_t S_w \quad (16)$$

Si osservi che S_w ha le dimensioni di un peso elastico, e perciò il prodotto $F \bar{\eta} \bar{\lambda} S_t S_w$ ha le dimensioni di una lunghezza.

La scala degli spostamenti è

$$S_s = F \bar{\lambda} S_t S_w \quad (s)$$

ed è espressa come S_t . Se S_t è in m/cm, e si vogliono gli spostamenti in grandezza reale, occorre far sì che sia $S_s = 10^{-2}$ m/cm, e cioè

$$\bar{\lambda} = \frac{10^{-2}}{F S_t S_w} \quad (t)$$

dove 10^{-2} ha le dimensioni di m/cm.

Le dimensioni di $\bar{\lambda}$, come si desume dalla (t), sono quelle di una lunghezza.

La relazione (1-16) è valida solo in corrispondenza delle sezioni comuni ai singoli tronchi; il diagramma delle componenti s_q è perciò una curva che ha in comune con il poligono funicolare i punti I in cui questo è intersecato dalle parallele a p relative alle sezioni dividenti, e la cui retta di riferimento è il lato del poligono funicolare relativo alla sezione fissa. Poichè al limite, dividendo la struttura in tronchi piccolissimi, il poligono funicolare coincide con la curva suddetta, quest'ultima è pure tangente in I a qualsiasi poligono funicolare relativo ad una divisione in tronchi che ammetta S tra le sezioni rette dividenti. La costruzione ora detta permette di tracciare le deformate dell'asse della trave anche in presenza di più forze, poichè ogni parte compresa tra due forze successive si comporta come la trave AB della fig. 1-24. Si consideri per esempio l'arco AB della fig. 1-25;

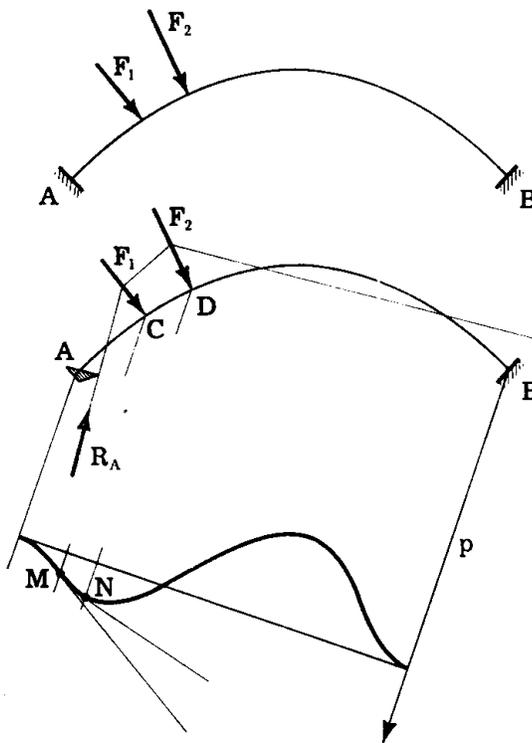


FIG. 1-25

se si conosce la reazione R_A di sinistra, si può pensare l'arco incastrato in B e soggetto alle forze R_A , F_1 , F_2 , riconducendosi così al caso della mensola. Se si vuol conoscere il diagramma delle componenti degli spostamenti dei punti dell'asse secondo una retta p , si esegue innanzitutto la costruzione della fig. 1-24 per il tratto BD, considerando come forza agente sull'estremo D la risultante di R_A , F_1 ed F_2 (e cioè la forza uguale e contraria alla reazione R_B). Si ripete poi la stessa costruzione per il tratto CD, come se fosse incastrato in D, imponendo che il lato corrispondente a D passi per l'estremo N del poligono prima tracciato, e sia ad esso tangente

per la (t), gli spostamenti in grandezza reale (*). I momenti statici dei pesi elastici del tratto ED sono calcolati rispetto alla retta d'azione della risultante delle forze R_A , F_1 , F_2 , e cioè rispetto alla retta d'azione della $4 \cdot 2$ fornita dalla intersezione delle parallele alle P4 e P2; essi sono da intendersi applicati negli antipoli di questa retta rispetto alle ellissi dei tronchi compresi tra D e E. Il poligono funicolare che connette i w' ha per base $\bar{\lambda}_3 = \frac{10^{-2}}{4 \cdot 2 S_w S_t S_F}$.

Nella stessa maniera si procede per le parti DC e CA.

Poichè in realtà la trave è appoggiata in A e B, occorre imprimere ad essa una rotazione rigida intorno al baricentro della sezione B per ricondurla al rispetto del vincolo in A; e cioè la fondamentale della deformata è la congiungente HI.

Si fa osservare che il procedimento è valido per tracciare le deformate di travi comunque vincolate, a sezione variabile o meno, iperstatiche o isostatiche; se la trave è iperstatica, occorre preventivamente calcolare le reazioni iperstatiche, con uno qualsiasi dei metodi che in seguito si esporranno.

Se i tronchi sono di spessore piccolissimo, e si trascura l'effetto del taglio, il diametro longitudinale delle ellissi parziali si annulla, e gli antipoli coincidono con i baricentri dei tronchi; il momento statico w' del peso elastico $w = ds/EI$ del tronco è (fig. 1-27)

$$w' = \frac{ds}{EI} d = \frac{ds}{EI} \frac{d}{F_s} F_s = \frac{M_s ds}{EI} \frac{1}{F_s}$$

dove F_s è la risultante delle forze a sinistra della sezione S corrispondente

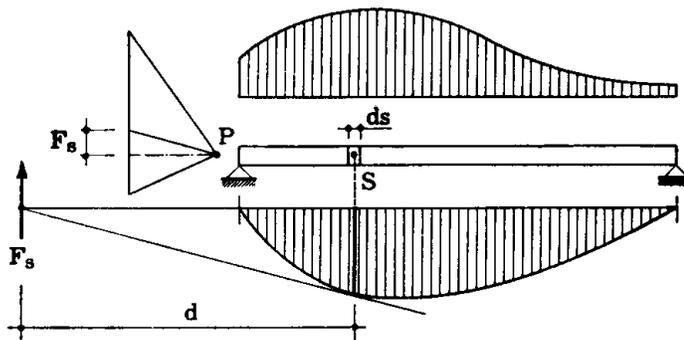


FIG. 1-27

al tronco in esame, d la distanza di F_s da S, M_s il momento flettente in S.

(*) Se si preferisce avere gli spostamenti in scala diversa, per esempio h volte più grandi dei reali, basta assumere le basi h volte più piccole.

Invece di connettere i w' , si possono connettere i $w' \cdot F_s$, purchè le basi si moltiplichino pur esse per F_s ; per la (t), perciò, la deformata si può avere in grandezza reale anche connettendo le quantità $M ds/EI$ (di dimensioni fisiche zero) con un poligono funicolare di base unica e pari a

$\bar{\lambda} = \frac{10^{-2}}{S_{Fw'} S_t}$ o in scala h (valori h volte più grandi del vero) se la base

è pari a $\bar{\lambda} = \frac{10^{-2}}{h S_{Fw'} S_t}$.

Su ciò si tornerà diffusamente trattando delle travi inflesse.

10. Ellisse degli spostamenti relativi.

Si considerino due generiche sezioni S_1 ed S_2 , (fig. 1-28), soggette a due forze uguali e contrarie agenti lungo una retta r ; lo spostamento relativo delle due sezioni è, per quanto detto al § 1, una rotazione intorno ad un punto C . La corrispondenza tra le rette r ed i centri C è dello stesso

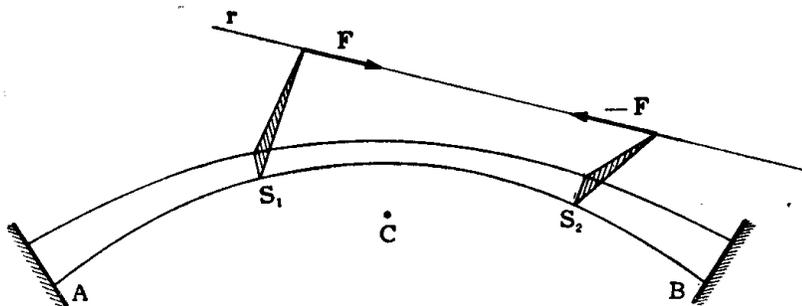


FIG. 1-28

tipo di quella del § 1, e cioè una polarità a conica immaginaria; la corrispondenza tra le rette r ed i punti C' simmetrici di C rispetto al baricentro elastico O (centro della rotazione relativa tra S_1 ed S_2 quando sulle due sezioni agiscono due coppie \mathcal{M} e $-\mathcal{M}$) è ancora una polarità, la cui conica, reale, è un'ellisse. E' questa l'ellisse degli spostamenti relativi delle due sezioni S_1 ed S_2 . Se la struttura è libera alle due estremità A e B , la ellisse degli spostamenti relativi per le sezioni A e B coincide con la ellisse terminale \bar{e}_{AB} della struttura incastrata in B e libera in A (o, il che è lo stesso, incastrata in A e libera in B).

Particolare importanza riveste un altro tipo di ellisse, chiamata anche essa degli spostamenti relativi, ma di natura e di significato diversi da quelli dell'ellisse poc'anzi definita. Si effettui in corrispondenza di una generica sezione retta S della struttura un taglio, e si facciano agire sulle due facce risultanti dal taglio due forze uguali e contrarie, con linea d'azione r ,

le due facce subiscono uno spostamento relativo, che è una rotazione intorno ad un centro C (fig. 1-29). La corrispondenza tra le rette r ed i centri C è dello stesso tipo di quella esposta al § 1, e perciò essi sono rispettivamente polare e antipolo (o antipolare e polo) rispetto ad un'ellisse, detta

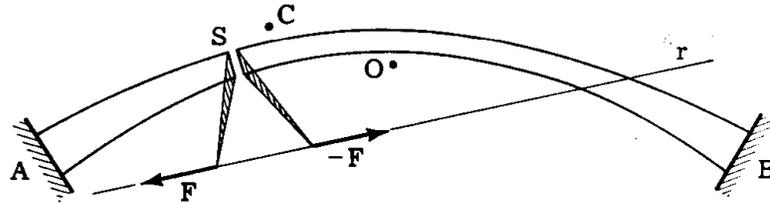


FIG. 1-29

ellisse degli spostamenti relativi della sezione S . Anche dal punto di vista della nomenclatura non c'è possibilità di equivoco rispetto alla omonima ellisse prima definita, perchè quella è relativa a due sezioni S_1 ed S_2 , questa ad una sola sezione S .

Se i due estremi A e B sono perfettamente incastrati, l'ellisse degli spostamenti relativi della generica sezione S coincide con l'ellisse terminale \bar{e}_{AB} . Infatti in tal caso si può considerare il suolo come un collegamento rigido tra A e B (fig. 1-30), e la struttura, tagliata in S , come una

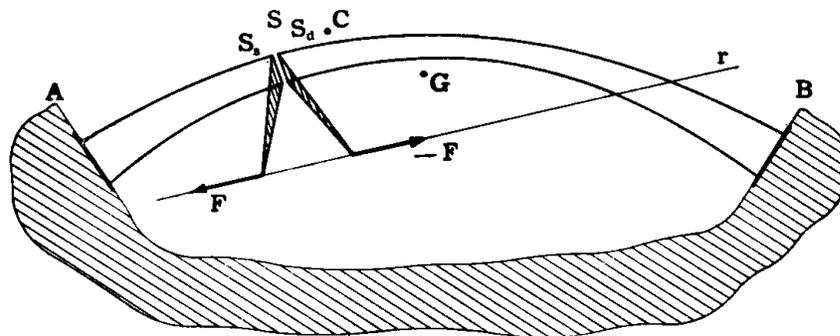


FIG. 1-30

unica trave avente per estremi le due facce del taglio in S . Supponendo una di queste due facce, per esempio quella S_d di destra, incastrata, l'ellisse terminale (relativa alla faccia S_s di sinistra) coincide con l'ellisse degli spostamenti relativi della sezione S . D'altro canto, costruendo nel modo già esposto al § 5 l'ellisse terminale della struttura della fig. 1-30 incastrata in S_d , si ottiene un'ellisse che coincide con quella terminale \bar{e}_{AB} della struttura AB incastrata in B , o in A ; infatti la distribuzione dei pesi elastici è la stessa, essendo il suolo rigido e perciò a peso elastico nullo. Si può quindi concludere che in una trave AB rigidamente incastrata alle estremità l'ellisse degli spostamenti relativi di una generica se-

zione S non dipende dall'ascissa della sezione, e coincide con l'ellisse terminale della struttura.

Sovente accade che la trave AB sia incastrata in A e B su imposte elasticamente cedevoli; questa cedibilità può essere dovuta, come già osservato, alla deformabilità delle strutture contigue ad AB (fig. 1-31), o alla

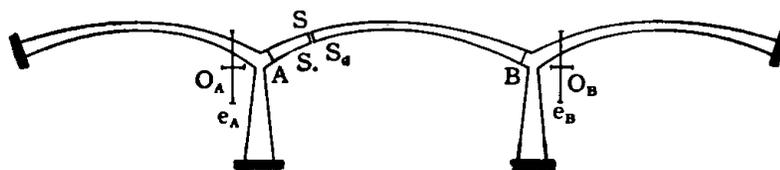


FIG. 1-31

deformabilità del suolo (fig. 1-32). In qualsiasi caso, la cedibilità dell'imposta A può essere definita, come si sa, attraverso un'ellisse di elasticità e_A di centro O_A , e un peso elastico W_A ; altrettanto vale per l'imposta B . Gli

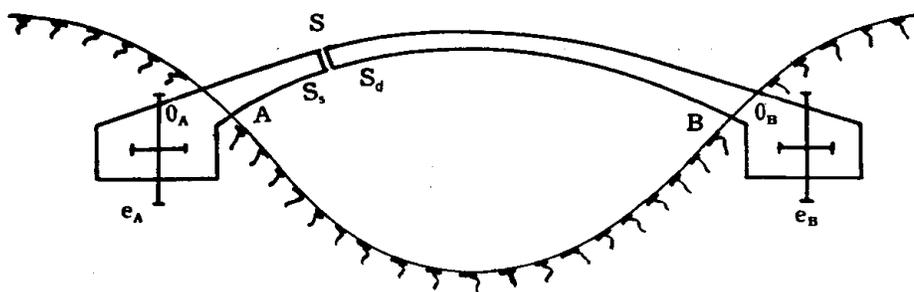


FIG. 1-32

spostamenti assoluti di S_s sono gli stessi che si verificherebbero se la trave AS_s fosse vincolata al suolo attraverso un prolungamento costituito dal solito concio ideale AA_1 , incastrato rigidamente in A_1 , e la cui ellisse di elasticità coincide con l'ellisse e_A ; altrettanto vale per gli spostamenti assoluti di S_d .

Si è ricondotti così al caso precedente; l'ellisse degli spostamenti relativi di una qualsiasi sezione S si ottiene perciò componendo in serie la ellisse e_A , l'ellisse \bar{e}_{AB} e l'ellisse e_B . Tale ellisse è la stessa per qualsiasi sezione della trave e prende anche nome di *ellisse degli spostamenti relativi della trave AB*.

11. I pesi elastici nelle travature reticolari.

Se la trave AB è reticolare (fig. 1-33) le applicazioni della teoria dell'ellisse di elasticità sono molto semplificate; infatti la distribuzione fitti-

zia di pesi elastici w la cui ellisse d'inerzia coincide con l'ellisse di elasticità terminale (§ 5) si può in questo caso supporre formata da masse concentrate in punti discreti, per ognuna delle quali quindi l'ellisse di elasticità si

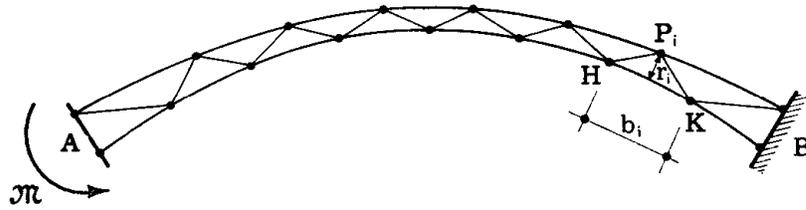


FIG. 1-33

riduce a un punto. Si consideri una coppia M applicata in A , e si supponga di irrigidire tutte le aste, ad eccezione della generica asta HK . Se P è il polo dell'asta, a distanza r_1 da questa, nell'asta si genera la forza assiale

$$N_1 = \frac{\mathcal{M}}{r_1}$$

e quindi l'asta presenta la variazione di lunghezza

$$db_1 = \pm \frac{\mathcal{M} b_1}{r_1 E_1 A_1} .$$

Per effetto di questa variazione, tutta la parte a sinistra dell'asta, e con essa la sezione A , ruota dell'angolo

$$d\varphi_1 = \pm \frac{db_1}{r_1} = \frac{\mathcal{M} b_1}{r_1^2 E_1 A_1} .$$

Per effetto dell'elasticità di tutte le aste, la sezione A ruota dell'angolo

$$\varphi = \Sigma d\varphi_1 = \mathcal{M} \Sigma \frac{b_1}{r_1^2 E_1 A_1}$$

e quindi il peso elastico è fornito da

$$W = \Sigma \frac{b_1}{r_1^2 E_1 A_1} . \quad (u)$$

La rotazione φ si effettua, per le note regole sulla composizione delle piccole rotazioni, intorno a un punto O che si ottiene come baricentro di masse proporzionali alle ampiezze φ_i delle rotazioni componenti, e concen-

trate nei centri C_i di queste ultime; quindi il baricentro elastico O è il baricentro delle quantità $\frac{b_i}{r_i^2 E_i A_i}$ concentrate ognuna nel rispettivo polo P_i .

Se infine su A agisce una forza F diretta secondo una retta r (fig. 1-34), la componente ds_p secondo p dello spostamento ds della sezione A

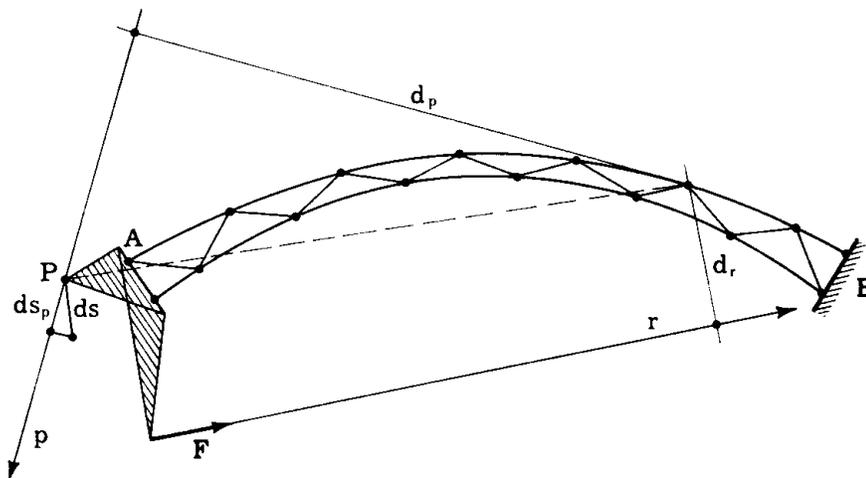


FIG. 1-34

dovuto alla deformabilità della sola asta HK è

$$ds_p = d\varphi_i \cdot d_p = \frac{M b_i d_p}{r_i^2 E_i A_i} = F \frac{b_i}{r_i^2 E_i A_i} d_r d_p$$

e quindi

$$s_p = F \Sigma \frac{b_i}{r_i^2 E_i A_i} d_r d_p . \quad (v)$$

Confrontando la (v) con la (1-5') si ha

$$I_{rp} = \Sigma \frac{b_i}{r_i^2 E_i A_i} d_r d_p . \quad (z)$$

Perciò i pesi elastici concentrati

$$w_i = \frac{b_i}{r_i^2 E_i A_i} \quad (17)$$

applicati ciascuno nel polo dell'asta relativa, sono tali che il loro momento centrifugo rispetto a due rette r e p è pari a quello del peso elastico W distribuito in modo che la sua ellisse d'inerzia coincida con l'ellisse di ela-

sticità; se ne trae che la somma dei w_i è pari a W , che il baricentro dei w coincide con il baricentro di W (e i due risultati sono già stati acquisiti direttamente poco prima), e inoltre che l'ellisse d'inerzia di W coincide con quella dei w_i . Quindi la distribuzione dei w_i è una delle infinite possibili distribuzioni la cui ellisse d'inerzia coincide con l'ellisse di elasticità.

Quanto detto vale per le aste di parete come per quelle dei correnti; il polo delle aste di parete però è spesso ubicato fuori dei limiti del disegno, e occorre far ricorso ad artifici piuttosto complessi per ovviare a questo inconveniente. E' fortunata circostanza che le aste di parete abbiano sulla deformabilità della struttura una incidenza molto minore di quelle dei correnti, e perciò spesso i pesi elastici ad esse relativi si trascurano.

12. Ricerca di spostamenti e di reazioni iperstatiche.

La teoria dell'ellisse di elasticità permette in molti casi di ottenere rapidamente gli spostamenti dovuti a determinate forze, ma soprattutto è spesso il mezzo più semplice ed elegante per ricavare le forze capaci di produrre determinati spostamenti; quindi essa è, in tutti questi casi, il migliore strumento per la risoluzione dei problemi iperstatici, e diviene pressochè indispensabile, come si mostrerà nel capitolo ventesimo, per il tracciamento delle linee d'influenza.

Si svilupperanno in questo paragrafo alcuni esempi di ricerca di spostamenti e di reazioni iperstatiche, trascurando, nei procedimenti analitici, gli effetti del taglio e dello sforzo normale.

a) *La trave a mensola caricata da una forza concentrata all'estremità.*

La trave AB ad asse rettilineo e di sezione costante, incastrata in un estremo A , sia soggetta all'altro estremo B alla forza concentrata F nor-

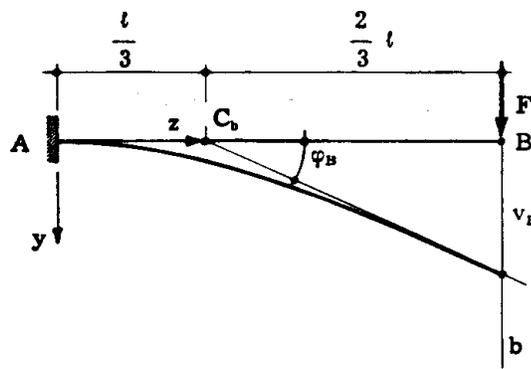


FIG. 1-35

male all'asse (fig. 1-35). La rotazione φ_B della sezione B e lo spostamento

v_B del suo baricentro sono forniti da

$$\varphi_B = - FW \frac{l}{2} = - \frac{F l^2}{2 EI} \quad (a')$$

$$v_B = FW \frac{l}{2} \frac{2}{3} l = \frac{F l^3}{3 EI} \quad (b')$$

Il punto C_b , intorno al quale la sezione B ruota, dista da B della quantità

$$BC_b = \frac{v_B}{\varphi_B} = \frac{2}{3} l ; \quad (c')$$

esso è quindi, come è noto, l'antipolo della retta d'azione b di F rispetto all'ellisse di elasticità terminale della trave.

b) *La trave a mensola soggetta ad un carico uniformemente distribuito.*

Sulla stessa trave del n. precedente agisca un carico q uniformemente distribuito. Si determinano le parti φ_B e v_B dovute alla forza $q dz$ agen-

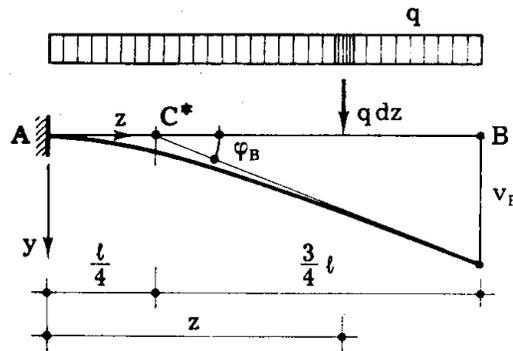


FIG. 1-36

te alla generica ascissa z (fig. 1-36); esse sono, per quanto sopra detto (fig. 1-37),

$$d\varphi_B = - q dz \frac{z^2}{2 EI}$$

$$dv_B = q dz \frac{z^3}{3 EI} + d\varphi_B (l - z) .$$

Integrando si ottiene

$$\varphi_B = -\frac{q}{2EI} \int_0^l z^2 dz = -\frac{ql^3}{6EI} \quad (d')$$

$$v_B = \frac{q}{3EI} \int_0^l z^3 dz + \frac{q}{2EI} \int_0^l z^2 (l-z) dz = \frac{ql^4}{8EI} \quad (e')$$

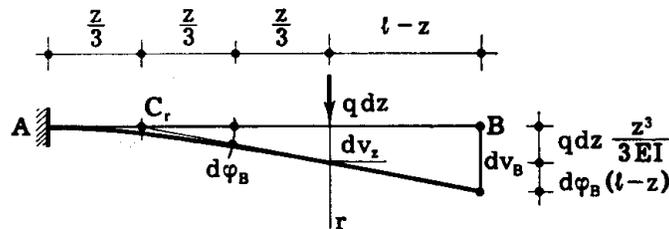


FIG. 1-37

Il punto C^* intorno al quale ruota la sezione B è definito dalla distanza

$$BC^* = \frac{v_B}{\varphi_B} = \frac{3}{4} l \quad (f')$$

c) *La trave appoggiata soggetta ad una coppia in un estremo.*

La trave AB ad asse rettilineo e di sezione costante sia appoggiata alle estremità, e soggetta in corrispondenza dell'estremo B ad una coppia \mathcal{M} (fig. 1-38 a).

Lo stato tensionale della trave della fig. 1-38 a è identico a quello della trave della fig. 1-38 b; quindi gli spostamenti delle due strutture coincidono, a meno di uno spostamento rigido. La deformata $v^*(z)$ della trave della fig. 1-38 b è riportata nella fig. 1-38 c. In A l'inclinazione è nulla, poichè in A la trave è incastrata; in B si ha

$$\varphi_B^* = FW \frac{l}{2} = \frac{\mathcal{M} l}{2EI}$$

$$v_B^* = FI_{ab} = -FW \frac{l}{2} \frac{l}{3} = -\frac{\mathcal{M} l^2}{6EI}$$

Il punto C_a intorno al quale ruota la sezione B dista da B della quantità

$$BC_a = \frac{v_B^*}{\varphi_B^*} = \frac{l}{3}$$

e cioè, come è noto, coincide con l'antipolo della retta a . Lo spostamento rigido che fa passare dagli spostamenti v^* della trave incastrata in A a quelli v della trave appoggiata in A e B è una rotazione rigida; il centro

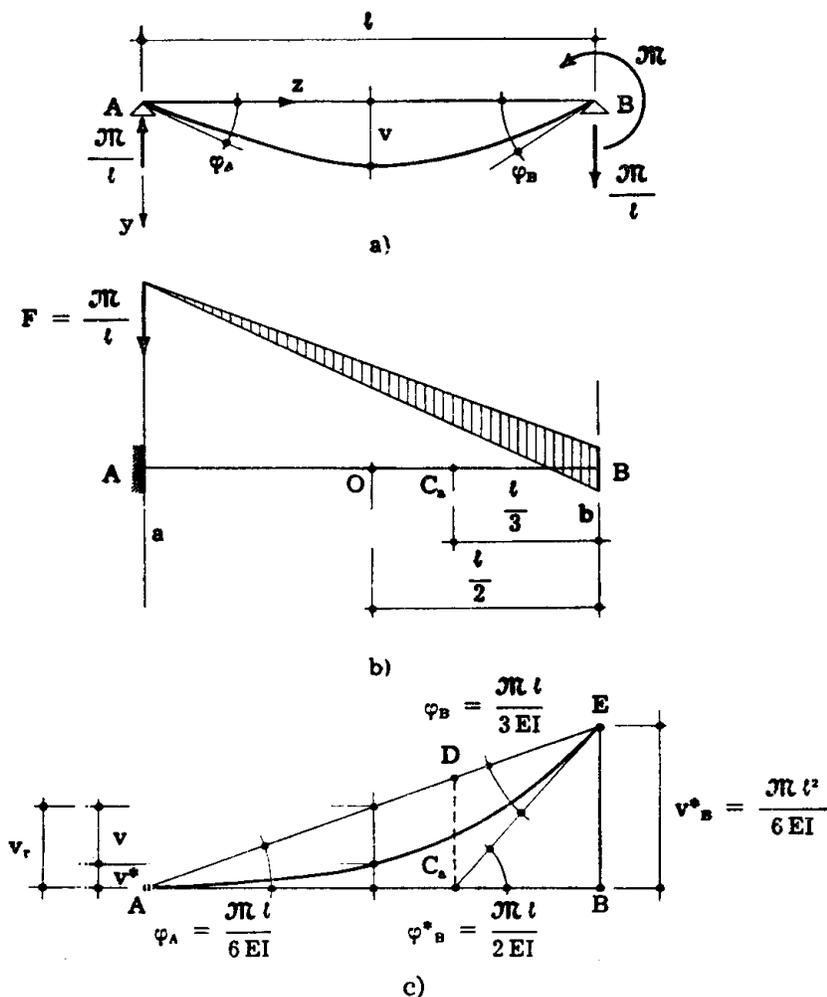


FIG. 1-38

della rotazione è il baricentro di A. L'ampiezza della rotazione è tale da riportare E in B (fig. 1-38 c), e cioè pari a

$$\varphi_A = - \frac{v_B}{l} = \frac{v_B^*}{l} = - \frac{\pi t}{6 EI} ;$$

è questa anche l'ampiezza della rotazione della sezione A nella trave della fig. 1-38 a. L'angolo φ_B è fornito da

$$\varphi_B = \varphi_B^* + \varphi_A = \frac{\pi t}{3 EI} .$$

Si può perciò scrivere, in definitiva, per una coppia \mathcal{M}_B applicata in B,

$$\varphi_B = \frac{\mathcal{M}_B \ell}{3 EI} \quad (g')$$

$$\varphi_A = - \frac{\mathcal{M}_B \ell}{6 EI} .$$

d) *La trave appoggiata a sezione variabile soggetta ad una coppia in un estremo.*

Particolare importanza riveste il caso della trave ad asse rettilineo ed a sezione comunque variabile, appoggiata alle estremità, e soggetta ad una coppia unitaria in corrispondenza di una di queste; soprattutto interessa conoscere le rotazioni delle due sezioni estreme. Si conviene (fig. 1-39)

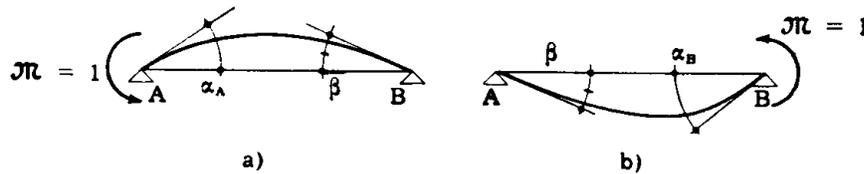


FIG. 1-39

chiamare α_A e β le rotazioni φ_A e φ_B provocate da una coppia $\mathcal{M} = +1$ in A, α_B e β le rotazioni φ_B e φ_A provocate da una coppia $\mathcal{M} = +1$ in B; la rotazione in A provocata da una coppia $\mathcal{M} = +1$ in B è uguale in valore e segno alla rotazione in B provocata da una coppia $\mathcal{M} = +1$ in A, conformemente al teorema di Betti.

Si consideri la coppia $\mathcal{M} = +1$ agente in B (fig. 1-40 a); gli spostamenti delle due travi delle figg. 1-40 a e 1-40 b sono uguali, a meno di uno spostamento rigido. La deformata v^* dell'asse della trave incastrata in A si ottiene come caso particolare del procedimento generale esposto al § 9: si divide la trave in tronchi elementari, si calcolano i momenti statici w'_a dei pesi elastici di questi tronchi rispetto alla retta a , si fanno agire dei vettori verticali proporzionali ai w'_a negli antipoli dei tronchi corrispondenti rispetto alla retta a , e si collegano tali vettori con un poligono funicolare di base λ . In corrispondenza della generica sezione S è

$$v^* = \frac{1}{\ell} \bar{\eta}^* \bar{\lambda} S_i S_w$$

dove η^* è l'ordinata intercetta tra il primo lato del poligono funicolare e il lato corrispondente ad S, λ la base del poligono funicolare. Le quantità v^*

hanno le dimensioni fisiche $[F^{-1}]$, essendo spostamenti provocati da una coppia unitaria, e quindi rapporti tra lunghezza e momento.

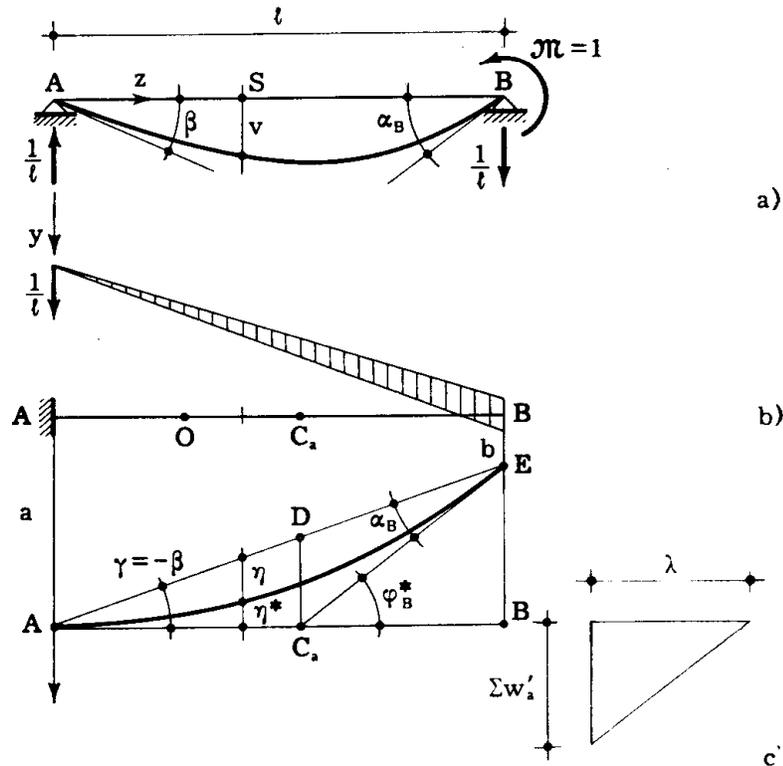


FIG. 1-40

Gli spostamenti v della trave appoggiata in A e B si ottengono sommando ai v^* gli spostamenti v_r derivanti da una rotazione rigida negativa della trave intorno ad A, di ampiezza $\gamma = -\frac{BE}{AB}$; è perciò

$$v = \frac{1}{l} \overline{\eta \lambda} S_i S_w$$

ove η è l'ordinata verticale compresa tra la retta AE e il poligono funicolare. Così pure si ha (i segmenti come BE, $C_a B$ etc. sono presi in valore assoluto).

$$\beta = -\gamma = \frac{v_B^*}{l} = -\frac{1}{l^2} \overline{BE \lambda} S_i S_w = -\frac{\overline{BE \lambda}}{l^2} \frac{S_w}{S_i}$$

$$\varphi_B^* = -\frac{v_B^*}{C_a B} = \frac{1}{l \cdot C_a B} \overline{BE \lambda} \frac{S_w}{S_i}$$

$$\alpha_B = \varphi_B^* - \gamma = \frac{\overline{BE} \bar{\lambda}}{\bar{l}} \left(\frac{1}{\overline{C_a B}} - \frac{1}{\bar{l}} \right) \cdot \frac{S_w'}{S_t} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{l}} \frac{\overline{BE} (\bar{l} - \overline{C_a B})}{\overline{C_a B} \cdot \bar{l}} \frac{S_w'}{S_t} =$$

$$= \frac{\bar{\lambda}}{\bar{l}} \frac{\overline{BE} \cdot \overline{C_a A}}{\overline{C_a B} \cdot \bar{l}} \cdot \frac{S_w'}{S_t} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{l}} \frac{\overline{C_a D}}{\overline{C_a B}} \frac{S_w'}{S_t} .$$

Alla stessa espressione di α_B può giungersi direttamente, osservando che gli spostamenti v^* e v sono piccoli in rapporto alle dimensioni della trave (*):

$$\alpha_B = \frac{C_a D}{C_a B} = \frac{\frac{1}{\bar{l}} \overline{C_a D} \cdot \bar{\lambda}}{\overline{C_a B}} \cdot S_w' = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{l}} \frac{\overline{C_a D}}{\overline{C_a B}} \frac{S_w'}{S_t} .$$

Si noti che α_B e β hanno le dimensioni $[F^{-1} l^{-1}]$, essendo angoli provocati da una coppia unitaria.

e) *La trave a sezione costante incastrata in un estremo e appoggiata all'altro, soggetta ad una coppia in corrispondenza di questo.*

Si consideri la trave della fig. 1-42, incastrata in A e appoggiata in B, soggetta in B ad una coppia \mathcal{M} . La coppia \mathcal{M} e la reazione R_B in B equivalgono ad un'unica forza verticale avente anch'essa valore R_B , e agente

(*) Se gli spostamenti HD e HC sono piccoli in confronto alla distanza HE

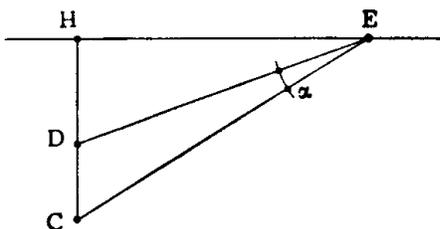


FIG. 1-41

(fig. 1-41), gli angoli \widehat{CEH} e \widehat{DEH} possono confondersi con le loro tangenti trigonometriche; è lecito perciò scrivere prescindendo dal segno di α ,

$$\alpha = \widehat{CEH} - \widehat{DEH} = \text{tg } \widehat{CEH} - \text{tg } \widehat{DEH} =$$

$$= \frac{CH}{EH} - \frac{DH}{EH} = \frac{CD}{EH} .$$

alla distanza \mathcal{M}/R_B da B. Nella trave incastrata in A e soggetta in B a tale forza la sezione terminale B ruota intorno al proprio baricentro; quindi

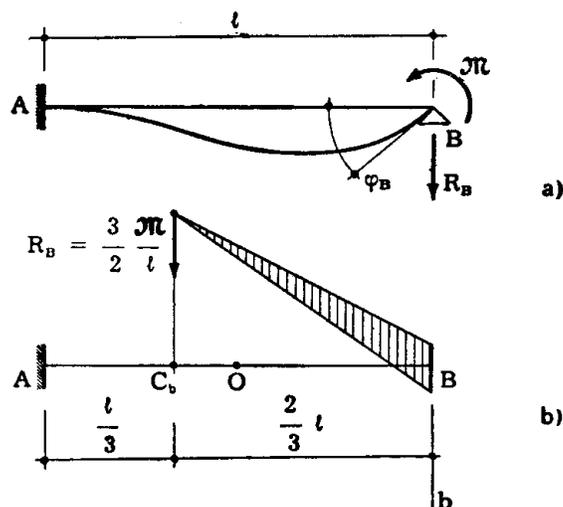


FIG. 1-42

R_B deve avere per retta di azione l'antipolare di B, e cioè la verticale passante per il punto C_b a distanza $2l/3$ da B. E' quindi $\mathcal{M}/R_B = 2l/3$, da cui

$$R_B = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{M}}{l}. \quad (h')$$

L'ampiezza φ_B della rotazione della sezione B è

$$\varphi_B = FW \cdot C_b O = FW \frac{l}{6} = \frac{\mathcal{M} l}{4 EI}. \quad (i')$$

f) *L'anello circolare.*

L'anello di sezione costante della fig. 1-43 è ad asse circolare di rag-

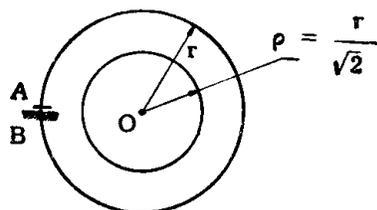


FIG. 1-43

gio r ; in corrispondenza di una sezione l'anello è tagliato secondo una sezione retta, una delle due facce risultanti dal taglio, B, è incastrata, sul-

l'altra, A, agiscono le forze. Un tronco elementare lungo ds ha peso elastico ds/EI ; il baricentro O di questi pesi, baricentro elastico della trave, è il centro dell'anello; l'ellisse d'inerzia è notoriamente il cerchio di raggio

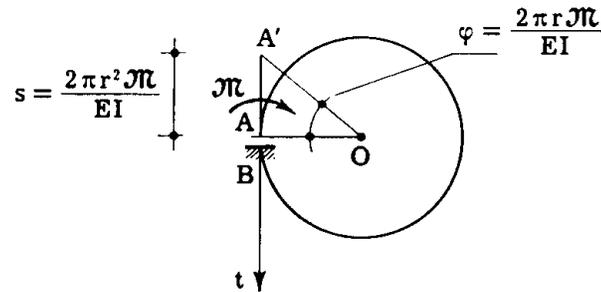


FIG. 1-44

$\rho = r/\sqrt{2}$; la somma dei ds/EI , peso elastico dell'anello, è $W = 2\pi r/EI$.

Una coppia \mathcal{M} agente su A (fig. 1-44) provoca una rotazione di A intorno ad O, la cui ampiezza è

$$\varphi = \mathcal{M}W = \frac{2\pi r \mathcal{M}}{EI};$$

lo spostamento di A è diretto secondo la tangente t all'asse, e vale

$$s = \mathcal{M}W r = \frac{2\pi r^2 \mathcal{M}}{EI}.$$

Una forza F agente in A secondo la tangente t (fig. 1-45) provoca una rotazione intorno al punto C_t , situato sul diametro per A, a distan-

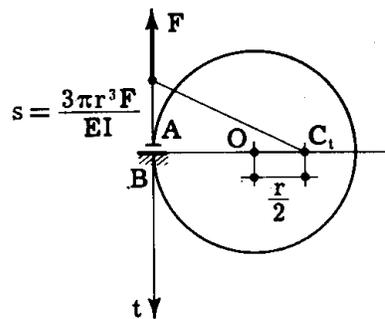


FIG. 1-45

za $r/2$ da O; lo spostamento di A si esplica anche in questo caso secondo la tangente all'asse, e vale

$$s = FW r \frac{3}{2} r = \frac{3\pi r^3 F}{EI}.$$

Una forza F agente in A secondo il diametro (fig. 1-46) provoca una traslazione della sezione A, secondo il diametro stesso; lo spostamento vale

$$s = FW \frac{r^2}{2} = \frac{\pi r^3 F}{EI} .$$

Una qualsiasi forza F agente su A attraverso un braccio rigido, e pas-

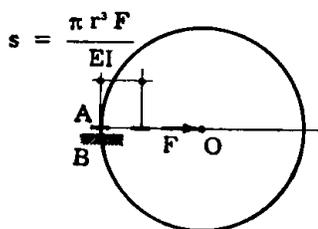


FIG. 1-46

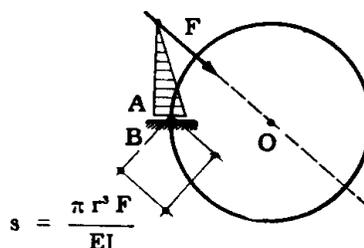


FIG. 1-47

sante per O, (fig. 1-47), provoca una traslazione di A parallela alla sua direzione, e di valore pari ancora ad

$$s = \frac{\pi r^3 F}{EI} .$$

g) *Il portale.*

Il portale della fig. 1-48 a, incastrato in A e B, è soggetto ad un carico orizzontale q distribuito sul ritto di sinistra; sia C^* il centro e φ_q l'ampiezza della rotazione della sezione D della trave AD incastrata in A, libera in D, e soggetta allo stesso carico q (fig. 1-48 b).

Si liberi la sezione B, facendo agire su essa la reazione R_B prima sviluppata dall'incastro (fig. 1-48 c).

Poichè la sezione B non può subire alcuno spostamento, la R_B deve provocare su B lo stesso spostamento, cambiato di segno, che è provocato da q ; e cioè la R_B , dovendo far ruotare la sezione R intorno al punto C^* , ha per retta d'azione b l'antipolare di C^* rispetto all'ellisse terminale di tutto il portale. Il valore di R_B si ottiene uguagliando a φ_q l'ampiezza della rotazione provocata da R_B :

$$R_B W d = - \varphi_q$$

da cui

$$R_B = - \frac{\varphi_q}{W d}$$

ove W è il peso elastico di tutto il portale, e d la distanza del baricentro elastico O dalla retta b .

Se il carico cui è soggetto il ritto si riduce ad una forza concentrata,

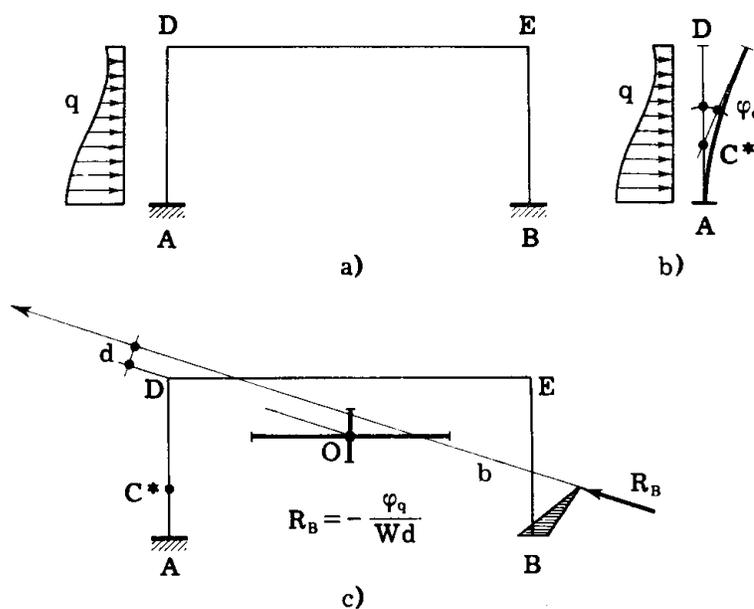


FIG. 1-48

o a una coppia, il problema ora esposto è un caso particolare di quello già trattato al § 8.

Se il portale è incernierato in B (fig. 1-49) la reazione R_B è obbligata a passare per B; basta conoscere un secondo punto per determinare la sua retta d'azione b . Il telaio può supporre libero in B, e soggetto al carico q

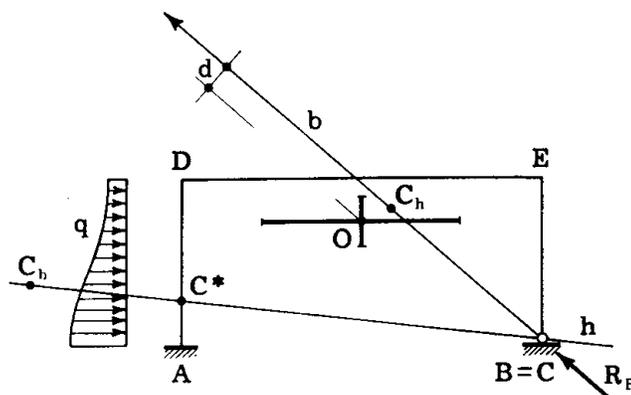


FIG. 1-49

e alla reazione R_B . Per effetto di q la sezione B ruota intorno al punto C^* , per effetto di R_B intorno ad un punto C_h ; la rotazione risultante, come è noto dalla teoria delle piccole rotazioni, ha per ampiezza φ la somma delle ampiezze delle rotazioni componenti φ_q e φ_r , e si svolge intorno ad un

punto C, baricentro delle masse φ_q e φ_r concentrate in C^* e C_b , e quindi giacente sulla retta $C^* C_b$.

Le componenti degli spostamenti secondo due assi x e y di un punto $P (x_P y_P)$ per effetto della piccola rotazione di centro $C_1 (x_1 y_1)$ e ampiezza φ_1 sono (fig. 1-50)

$$\begin{aligned} u_1 &= -\varphi_1 (y_P - y_1) \\ v_1 &= \varphi_1 (x_P - x_1) . \end{aligned}$$

Le componenti degli spostamenti di P per effetto della rotazione φ_2 di centro $C_2 (x_2 y_2)$ sono

$$\begin{aligned} u_2 &= -\varphi_2 (y_P - y_2) \\ v_2 &= \varphi_2 (x_P - x_2) . \end{aligned}$$

Le due rotazioni equivalgono ad un'unica rotazione di ampiezza φ somma di φ_1 e φ_2 (ciò è vero comunque grandi siano φ_1 e φ_2) intorno ad un punto $C (x y)$, cui si associano le componenti dello spostamento

$$\begin{aligned} u &= -(\varphi_1 + \varphi_2) (y_P - y) \\ v &= (\varphi_1 + \varphi_2) (x_P - x) . \end{aligned}$$

Poichè le rotazioni sono piccole, le componenti $u_1 v_1$, $u_2 v_2$, $u v$, sono trascurabili in confronto alle distanze $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x y$; si può perciò ammettere che

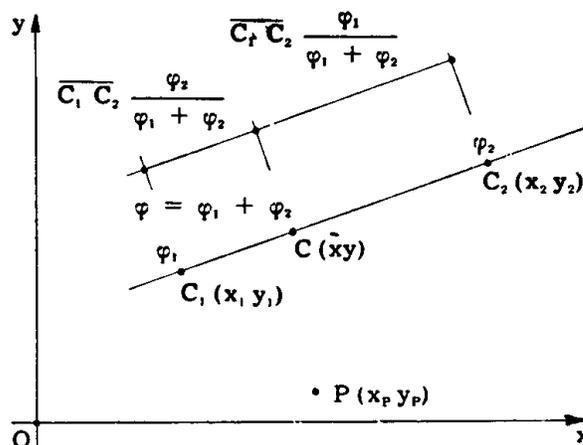


FIG. 1-50

le componenti u e v siano rispettivamente somma di $u_1 u_2$ e di $v_1 v_2$, calcolate tutte in $x_P y_P$. Si può porre perciò

$$\begin{aligned} (\varphi_1 + \varphi_2) (y_P - y) &= \varphi_1 (y_P - y_1) + \varphi_2 (y_P - y_2) \\ (\varphi_1 + \varphi_2) (x_P - x) &= \varphi_1 (x_P - x_1) + \varphi_2 (x_P - x_2) . \end{aligned} \tag{1'}$$

Dalle (1') si riconosce che il punto $C (x y)$ è il baricentro delle masse φ_1 e φ_2 concentrate in C_1 e C_2 .

Dei tre punti $C C^* C_b$ i primi due sono conosciuti, poichè C è il baricentro della sezione B , ove nella struttura effettiva esiste una cerniera; il punto C_b dunque giace sulla retta h congiungente B con C^* . Poichè l'antipolo C_b della retta b (rispetto all'ellisse di tutto il portale) giace sulla retta h , l'antipolo C_h della retta h giace sulla retta b ; quindi la retta d'azione b della R_b è la congiungente BC_h . Il punto C_b può adesso essere determinato come antipolo della retta b ; esso deve giacere sulla retta h . Dalla relazione

$$\varphi_r \cdot C_b C + \varphi_q \cdot C^* C = 0$$

si ha il valore di φ_r :

$$\varphi_r = - \varphi_q \frac{C^* C}{C_b C} ;$$

dalla relazione

$$\varphi_r = R_B W d ,$$

ove d è la distanza dalla retta b del baricentro elastico O , si ottiene il valore di R_B

$$R_B = - \varphi_q \frac{C^* C}{C_b C} \frac{1}{W d} . \quad (m')$$

h) I sistemi chiusi.

Il telaio rettangolare della fig. 1-51 a, avente una cerniera in A , sia sollecitato in B e C da due coppie di valore \mathcal{M} , uguali e contrarie. Se si taglia la struttura in corrispondenza della sezione A , le due facce A' e A'' ruotano l'una rispetto all'altra, per effetto delle coppie \mathcal{M} , intorno al baricentro elastico O del tratto BC ; poichè in realtà lo spostamento tra A' e A'' è una rotazione intorno ad A , le reazioni R e $-R$ che sono sviluppate dalla cerniera in A devono provocare una rotazione relativa tra A' e A'' il cui centro C_a deve giacere sulla retta $OA = h$. Poichè l'antipolo C_a (rispetto all'ellisse di tutto il telaio) della retta d'azione a delle reazioni R giace su h , la retta a deve passare per l'antipolo C_h di h , e quindi è determinata. Il punto C_a si ottiene come antipolo della retta a , e deve giacere sulla retta h ; il valore di R si ottiene da una relazione analoga alla (m'). Nella fig. 1-51 b è tracciato il diagramma dei momenti.

Il telaio rettangolare della fig. 1-52 a è soggetto lungo la mediana AB a due forze uguali e contrarie F e $-F$.

Considerando in luogo della F due forze $F/2$ vicinissime, le condizioni della struttura non variano; l'asse AB è di simmetria, quindi le sezioni

A e B non ruotano tra loro. Si può perciò studiare il semitelaio della

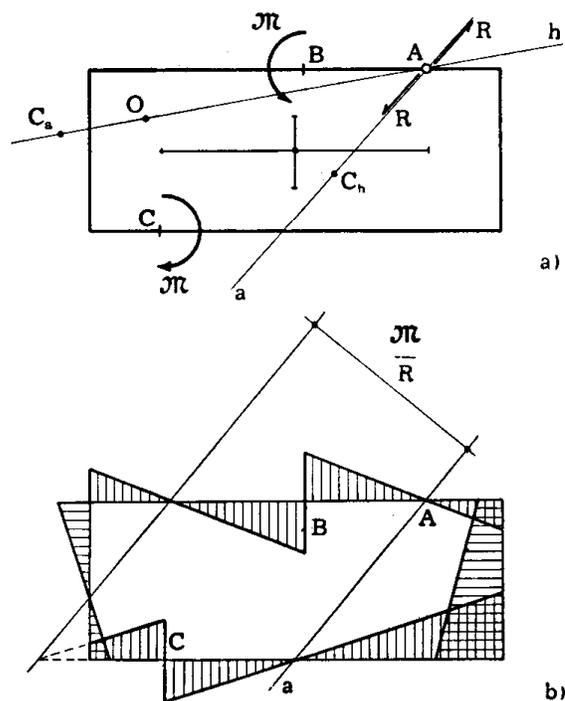


FIG. 1-51

fig. 1-52 b; in A e in B agiscono, oltre alle forze $F/2$, due coppie M ,

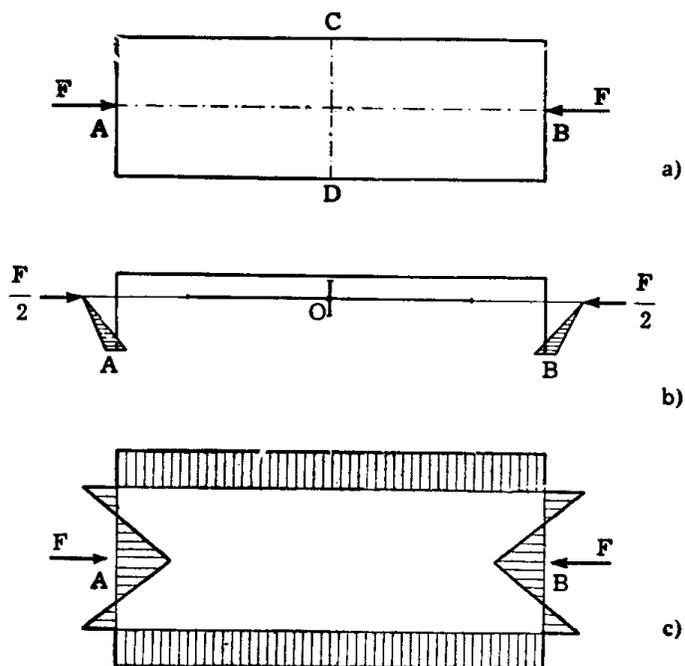


FIG. 1-52

uguali e contrarie perchè anche la mediana CD è asse di simmetria; lo

sforzamento normale in A e B è nullo, per lo stesso motivo. Il problema è perciò risolto una volta conosciuta la coppia \mathcal{M} , e cioè la retta d'azione della forza $F/2$, distante $2\mathcal{M}/F$ dall'asse AB. Poichè le sezioni A e B non ruotano l'una rispetto all'altra, questa retta deve passare per il baricentro elastico O del semitelaiio AB, e cioè è la parallela ad AB per O. Nella fig. 1-52 c è riportato il diagramma dei momenti flettenti.

L'anello circolare della fig. 1-53 a è soggetto a tre forze F uguali agenti in ABC lungo tre diametri a 120° .

I possibili poligoni delle successive risultanti R sono tutti (e solo) i triangoli aventi i vertici sulle rette d'azione delle forze stesse ed alla stessa distanza da T; di questi infiniti triangoli, uno, e uno soltanto, è

quello vero. Il valore della R è $\frac{F}{\sqrt{3}}$.

L'effettiva posizione della r si ottiene considerando il settore AB soggetto in A e B alle forze R e $-R$ (fig. 1-53 b); poichè le sezioni A e B per ragioni di simmetria non ruotano l'una rispetto all'altra, la r passa per il baricentro elastico O del tratto AB.

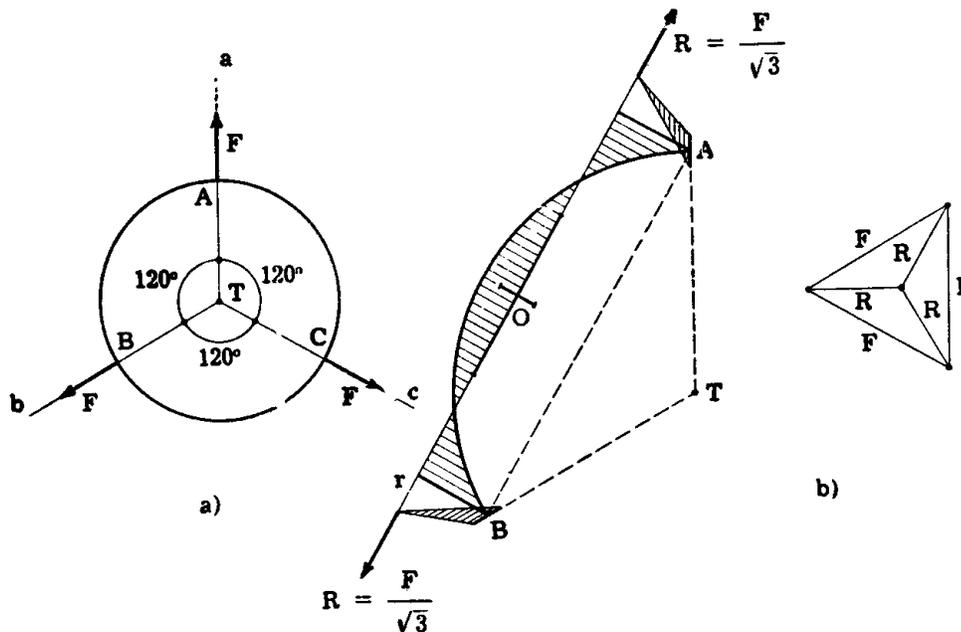


FIG. 1-53

Nella fig. 1-53 b è riportato anche il diagramma dei momenti.

In maniera analoga si risolve il problema dell'anello circolare caricato da n forze F uguali ed agenti secondo i diametri delimitanti angoli pari a $2\pi/n$.

13. Gli effetti statici delle variazioni termiche.

L'ellisse di elasticità è spesso particolarmente utile nella determinazione degli effetti statici indotti da una variazione termica. Nei riguardi delle travi, le variazioni termiche che si prendono generalmente in considerazione sono di due tipi. La prima è la *variazione termica uniforme*, uguale per tutti i punti di un tronco elementare di lunghezza ds ; in tal caso, per effetto della variazione termica Δt , le sezioni restano piane, e il tronco presenta la variazione di lunghezza

$$dds = \alpha ds \Delta t \quad (18)$$

ove α è il *coefficiente di dilatazione termica* del materiale. La dds è positiva (allungamento) se è positivo Δt (aumento di temperatura). La seconda è la *variazione termica variabile linearmente lungo l'altezza*, affine ad un qualsiasi diagramma tensionale derivante da flessione semplice del tronco, che può anche chiamarsi perciò *variazione termica alla Navier*; essa è costante per tutte le fibre del tronco appartenenti ad un qualsiasi

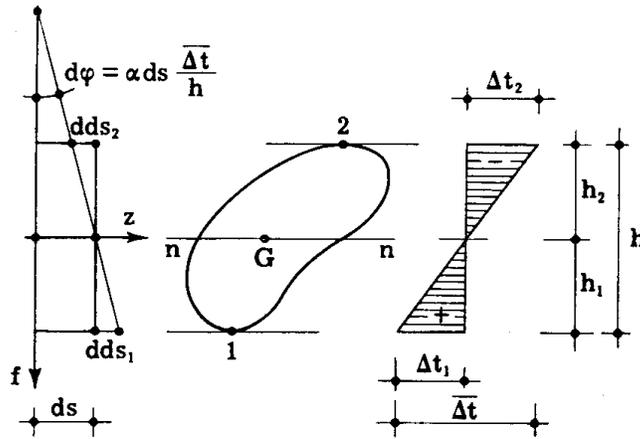


FIG. 1-54

piano parallelo al piano zn , ove z è l'asse del tronco ed n una retta bari-centrica della sezione retta, varia linearmente con la distanza da n , e si annulla in corrispondenza di n ; i valori estremi della variazione, Δt_1 e Δt_2 , si verificano nei punti 1 e 2 più distanti dalla retta n (fig. 1-54). La somma dei valori assoluti di Δt_1 e Δt_2 sia $\overline{\Delta t}$, ed h la distanza, presa normalmente ad n , tra i punti 1 e 2. Le sezioni rette restano piane, e le due sezioni estreme del tronco lungo ds ruotano l'una rispetto all'altra dell'angolo

$$d\varphi = \frac{\alpha ds \overline{\Delta t}}{h} ; \quad (19)$$

infatti è (fig. 1-54)

$$d\varphi = \frac{dds_1}{h_1} = \frac{dds_2}{h_2} = \frac{dds_1 + dds_2}{h_1 + h_2} = \frac{\alpha ds \overline{\Delta t}}{h}$$

Il verso di $d\varphi$ è definito dai segni di Δt_1 e Δt_2 .

Si conviene di legare la convenzione sul segno di $\overline{\Delta t}$ a quella sul segno del momento M_n ; e precisamente, $\overline{\Delta t}$ è positivo se l'angolo di rotazione da essa provocato ha lo stesso verso dell'angolo di rotazione provocato da un momento flettente positivo (fig. 1-55); in tal caso un $\overline{\Delta t}$ positivo fa

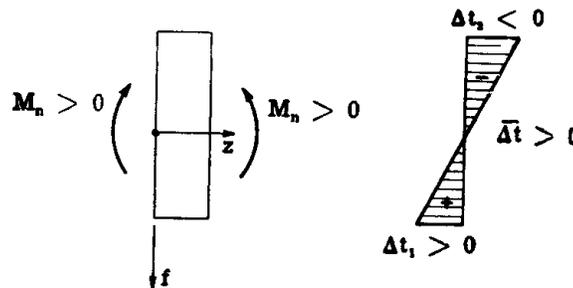


FIG. 1-55

ruotare la faccia di destra del tronco, rispetto a quella di sinistra, nel verso positivo definito dagli assi f e z già fissati nella trattazione della flessione.

Per una struttura a mensola, è immediato ottenere gli spostamenti dovuti alle variazioni termiche. Una variazione termica uniforme Δt interessante con lo stesso valore tutta la struttura, provoca per ogni elemento ds dell'asse una variazione di lunghezza proporzionale a ds secondo il coefficiente $\alpha \Delta t$; se α è lo stesso in ogni punto della struttura le ϵ sono tutte uguali, le γ nulle, e l'asse s si trasforma in una curva s' simile

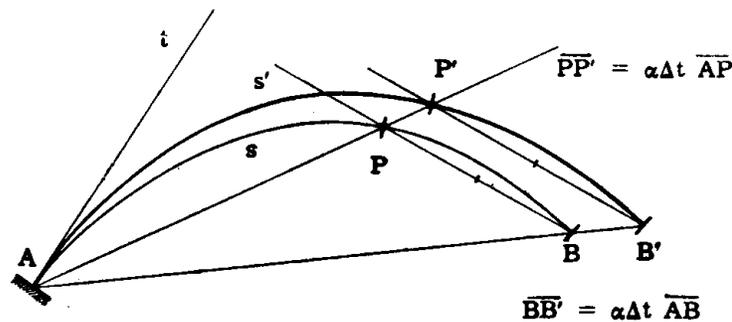


FIG. 1-56

ad s , nel rapporto $1 + \alpha \Delta t$. Poichè la tangente t all'asse in corrispondenza dell'incastro A rimane invariata, qualsiasi retta per A si trasforma in se stessa, e le due curve s ed s' sono omotetiche, con centro di omotetia A ; ogni punto P dell'asse si sposta secondo la congiungente AP di una quantità $\alpha \Delta t \cdot AP$ (fig. 1-56). La sezione retta in P è,

per le proprietà dell'omotetia, parallela alla sezione retta in P' ; si ha conferma di ciò dal fatto che in ogni tronco elementare le due facce estreme presentano solo una traslazione relativa, e quindi lo spostamento della sezione retta in P , somma delle traslazioni relative dei tronchi compresi tra A e P , è pur essa una traslazione.

Se la trave è soggetta ad una variazione termica uniforme Δt di valore variabile con l'ascissa, le conclusioni cui si è pervenuti sono valide per ciascun tronco ove Δt è costante.

Se la trave è soggetta ad una variazione termica $\bar{\Delta t}$, di valore comunque variabile con l'ascissa, la rotazione della sezione generica P (fig. 1-57) ha per valore la somma delle rotazioni $d\varphi = \alpha \bar{\Delta t} ds/h$ dei tronchi elementari compresi tra A e P , e si effettua intorno al baricentro delle masse $d\varphi$ concentrate nei baricentri dei tronchi elementari corrispondenti.

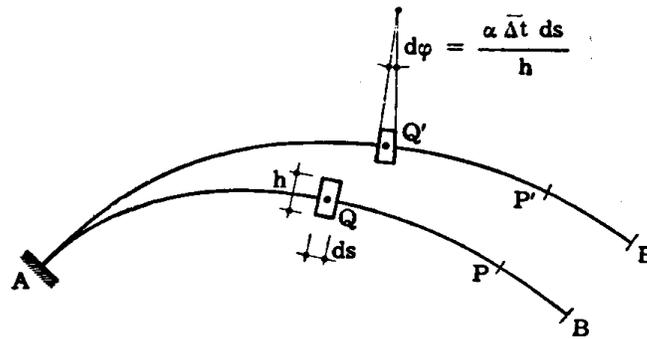


FIG. 1-57

Se la trave è isostatica, le variazioni termiche del tipo suddetto non possono indurre reazioni vincolari, e quindi non sono accompagnate da tensioni. Infatti le sezioni rette rimangono piane; ciò significa che ogni trave della struttura, considerata a sè stante, può suddividersi in tronchi elementari; ad ognuno di questi tronchi si assegna poi la variazione termica che gli compete, e infine i vari tronchi si riportano a contatto, e ciò può avvenire senza intervento di tensioni, perchè le facce di separazione dei tronchi sono ancora piane. Un procedimento analogo può essere seguito per il complesso di travi che costituiscono la struttura; si può liberare ogni trave dai vincoli che la legano al suolo, o alle altre travi, far agire le variazioni termiche, e ricondurre le travi, deformate per effetto termico, al rispetto dei vincoli, con semplici spostamenti rigidi, poichè la struttura è isostatica.

Non altrettanto accade se la struttura è iperstatica; in essa, in generale, le variazioni termiche inducono reazioni vincolari, e quindi tensioni. Il metodo più spontaneo per la ricerca delle reazioni vincolari è quello di rendere la struttura isostatica sopprimendo n vincoli, calcolare gli n

spostamenti Δ_i che per effetto delle deformazioni termiche sorgono nella struttura isostatica in corrispondenza dei vincoli soppressi (*), e ricavare infine i valori X_i delle n forze corrispondenti ai vincoli soppressi, capaci di indurre sulla struttura isostatica gli spostamenti $-\Delta_i$, uguali e contrari ai Δ_i prima determinati; nella applicazione effettiva di tale metodo si rivela spesso di grande aiuto la teoria dell'ellisse di elasticità.

L'arco incastrato AB della fig. 1-58 sia soggetto ad una variazione termica uniforme $+\Delta t$ costante con l'ascissa. Si rende la struttura isostatica eliminando l'incastro in A; per effetto termico, la sezione A trasla secondo la retta c , congiungente i due punti A e B, di una quantità $\alpha l \Delta t$, ove l

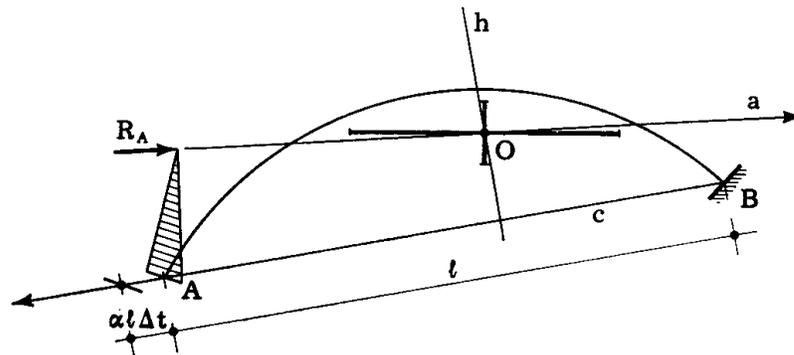


FIG. 1-58

è la distanza tra A e B. La reazione R_A sviluppata dall'incastro A deve essere tale da provocare in A la stessa traslazione cambiata di segno; perciò la sua retta d'azione a deve essere l'antipolare del punto improprio della retta h normale alla AB, e cioè la coniugata di h passante per il baricentro elastico O. Il valore di R_A si ottiene uguagliando il valore della traslazione da essa prodotta a quello della traslazione provocata dalla variazione termica $+\Delta t$, cambiata di segno:

$$R_A I_{ac} = -\alpha l \Delta t .$$

Lo stesso arco, soggetto alla stessa variazione termica, sia vincolato con una cerniera in A (fig. 1-59).

La reazione R_A , agendo sulla sezione A appartenente alla struttura libera in A ed incastrata in B, provoca una rotazione della sezione A intorno ad un punto C_a ; poichè la somma di tale rotazione e della traslazione indotta dalla variazione termica deve essere una rotazione intorno al baricentro di A, il punto C_a deve trovarsi sulla retta h passante per A

(*) Il generico Δ_i è uno spostamento assoluto se il vincolo i -esimo era un vincolo esterno, relativo se il vincolo era interno.

e normale alla retta c . Poichè l'antipolo C_a della retta d'azione a della R_A giace su h , l'antipolo C_h della retta h giace su a ; quindi a è la congiungente AC_h . Il punto C_a si trova come antipolo della retta a , e deve giacere sulla retta b .

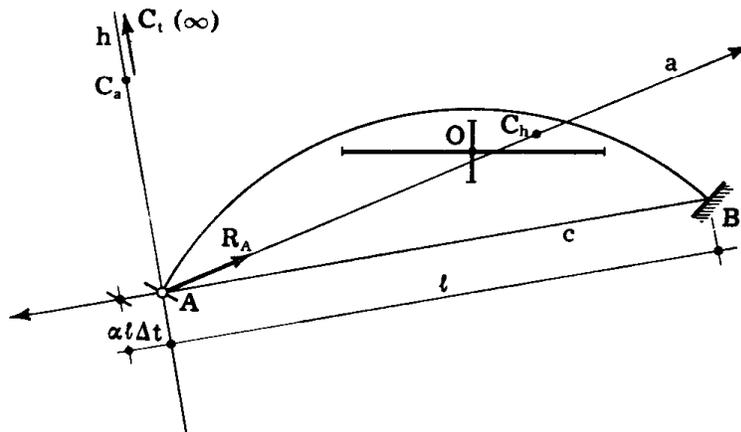


FIG. 1-59

Il valore della reazione R_A si ottiene imponendo la condizione che lo spostamento della sezione A lungo la retta c indotto dalla reazione R_A sia uguale a $-\alpha l \Delta t$:

$$R_A I_{ac} = -\alpha l \Delta t .$$

Si osservi che la $R_A I_{ac}$ non è solo la componente dello spostamento di A lungo la retta c , ma tutto lo spostamento di A, poichè il centro C_a della rotazione si trova sulla normale alla retta c per A.

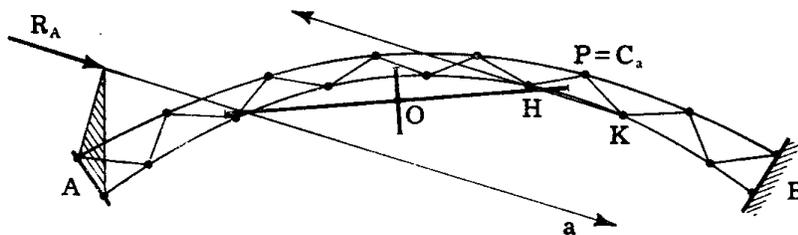


FIG. 1-60

Si consideri l'arco reticolare della fig. 1-60, incastrato in A e B, ove un'asta HK del corrente inferiore è soggetta alla variazione termica uniforme $+\Delta t$. Poichè liberando la sezione A quest'ultima ruota, per effetto della variazione termica, intorno al polo P dell'asta HK, la reazione R_A deve agire secondo l'antipolare a di P.

Il valore di R_A si ottiene uguagliando l'ampiezza della rotazione indotta da R_A a quella della rotazione indotta dalla variazione termica:

$$R_A W d = \frac{-\alpha b \Delta t}{r}$$

ove d è la distanza di a dal baricentro elastico O , b la lunghezza dell'asta HK , r la distanza del polo P dalla congiungente HK .

E' molto utile osservare che in una trave due volte connessa (*) soggetta a variazione termica dei due tipi suddetti si annulla lo stato tensionale eseguendo un taglio secondo una qualsiasi sezione retta; le tensioni presenti sulla struttura reale sono quelle derivanti da due forze uguali e contrarie che, agendo sulle due facce del taglio, le riportano a contatto. Dette forze sono le stesse, quale che sia la sezione retta secondo cui si è eseguito il taglio; infatti esse sono uguali alle reazioni di vincolo indotte dalla variazione termica. Si ha conferma di ciò osservando quanto segue. Lo spostamento relativo indotto dalle variazioni termiche tra le due facce del taglio eseguito secondo una generica sezione S_1 sia una rota-

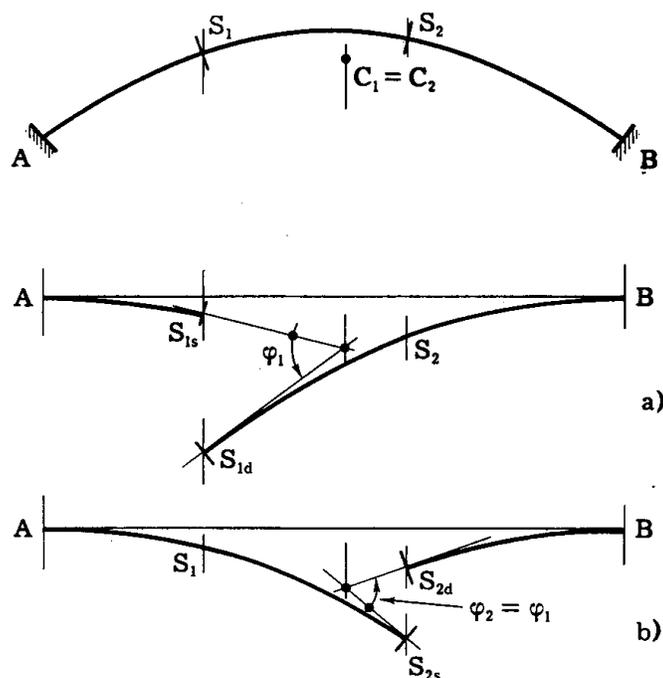


FIG. 1-61

zione di centro C_1 e ampiezza φ_1 (fig. 1-61 a); lo spostamento relativo indotto dalle stesse variazioni termiche tra le due facce del taglio eseguito secondo un'altra sezione S_2 sia una rotazione di centro C_2 e ampiez-

(*) Il grado di connessione si valuta considerando il dominio costituito dalla trave e dal suolo.

za φ_2 (fig. 1-61 b). Si può passare dalla prima alla seconda struttura eseguendo un taglio secondo S_2 , e imprimendo alla parte $S_1 S_2$, libera nel piano, una rotazione rigida che riporti le due facce S_1 a contatto; tale rotazione rigida non può che essere la rotazione di centro C_1 e ampiezza $-\varphi_1$; per essa tra le due facce S_2 si genera uno spostamento relativo, che è una rotazione di centro C_1 e ampiezza φ_1 (*).

Perciò C_1 coincide con C_2 , e φ_1 con φ_2 ; e poichè l'ellisse degli spostamenti relativi tra S_{1s} ed S_{1d} coincide con quella degli spostamenti relativi tra S_{2s} ed S_{2d} , le due forze uguali e contrarie che agendo su S_{1s} ed S_{1d} ripristinano la congruenza coincidono con le due forze, pur esse uguali e contrarie, che ripristinano la congruenza attraverso S_2 .

Si conclude asserendo che, in presenza di una trave biconnessa, l'effetto statico di una generica variazione termica uniforme o alla Navier coincide con quello indotto da due forze uguali e contrarie agenti tra le due facce risultanti da un taglio secondo una sezione retta. Assegnate le variazioni termiche, le due forze sono quelle che danno luogo a una rotazione relativa definita dalla variazione termica come già detto, il cui centro e la cui ampiezza sono indipendenti dalla sezione secondo cui si effettua il taglio. Non altrettanto può dirsi degli spostamenti, che sono diversi dipendentemente dalla sezione del taglio; però la somma degli spostamenti dovuti alle variazioni termiche sulla struttura tagliata, e degli spostamenti dovuti alle due forze sono indipendenti dalla sezione del taglio; essi infatti coincidono con quelli effettivi.

Se due diverse variazioni termiche danno luogo, sulla struttura tagliata, allo stesso spostamento relativo tra le due facce del taglio, ad esse sono connesse gli stessi stati tensionali; gli spostamenti però sono diversi.

Se la trave è connessa più di due volte (fig. 1-62), e le variazioni ter-

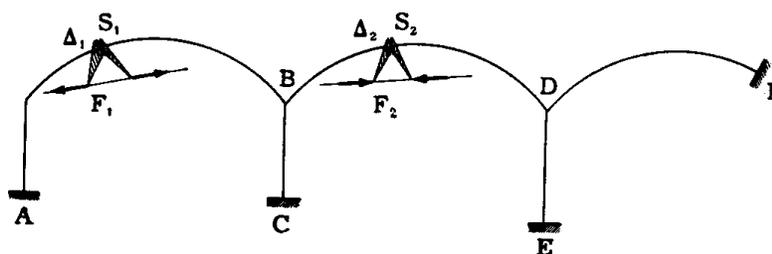


FIG. 1-62

niche interessano solo una campata come BD, compresa tra due nodi successivi, è ancora valido quanto sopra detto, con riferimento all'ellisse degli spostamenti relativi della generica sezione retta di BD. Se invece le variazioni termiche interessano più campate comprese tra due nodi succes-

(*) Se la parte $S_1 S_2$ ruota in senso orario, S_{1d} ruota in senso orario rispetto ad S_{1s} , ed S_{2d} in senso antiorario rispetto ad S_{2s} .

sivi, per annullare lo stato tensionale occorre eseguire tanti tagli quante sono queste campate; le tensioni presenti nella struttura reale sono quelle derivanti dalle forze uguali e contrarie F_i e $-F_i$ agenti in corrispondenza di ogni taglio S_i . La determinazione delle forze F_i e $-F_i$ si effettua imponendo la condizione che esse siano in grado di riportare a contatto le facce dei tagli, ripristinando così la congruenza. Se si fa riferimento alla struttura sulla quale sono presenti tutti i tagli S_i , tra i quali sono presenti gli spostamenti relativi Δ_i provocati dalla variazione termica, non può sfruttarsi per la ricerca delle F_i la teoria dell'ellisse di elasticità; infatti le forze F_i e $-F_i$ agenti tra le due facce del taglio S_i provocano non solo uno spostamento relativo Δ_{ii} tra le facce di S_i , ma anche uno spostamento relativo Δ_{hi} tra le facce del generico taglio S_h , e quest'ultimo la teoria dell'ellisse non è in grado di fornirlo, almeno nella forma di Culmann.

Convienne perciò, sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti, operare un taglio S_i alla volta, e determinare le forze F_{ii} e $-F_{ii}$ che applicate in corrispondenza delle due facce del taglio inducono tra esse uno spostamento relativo $-\Delta_i$, e poi sommare gli effetti. In tal caso (fig. 1-

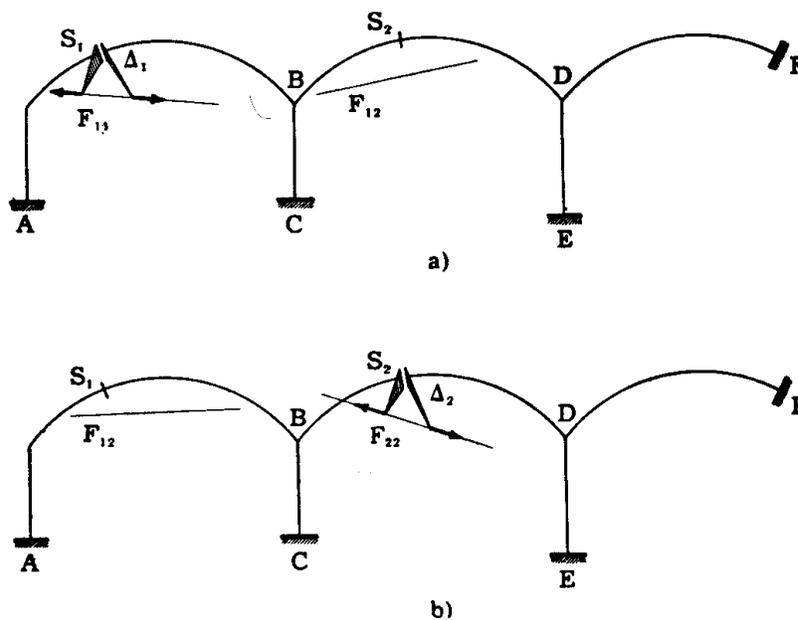


FIG. 1-63

63 a, b) le forze F_{ii} non sono le forze F_i che attraverso S_i si trasmettono nella struttura reale (fig. 1-62); infatti ad esse vanno sommate le F_{ih} provocate dalle F_{hh} agenti sulle altre campate.

14. Le distorsioni di Volterra.

Quanto è stato detto per le variazioni termiche uniformi e alla Navier vale ogni volta che sulla trave agiscono cause, diverse dalle forze, che

provocano sul concio elementare gli stessi effetti delle variazioni termiche, e cioè uno spostamento relativo rigido tra le due facce estreme.

Esempi di queste cause sono il ritiro o l'espansione dei conglomerati, il rigonfiamento provocato dall'umidità in alcuni materiali, alcune deformazioni plastiche o viscosi, le deformazioni di precompressione; di esse si parlerà diffusamente nelle applicazioni.

Le suddette cause sono comprese nella classe più generale delle *distorsioni*, intendendo come tali tutte le cause deformanti che non siano forze; esse si definiscono come *distorsioni relative a travi e rispettanti la condizione di planeità delle sezioni rette*, o più brevemente come *distorsioni di Volterra*, dal nome del matematico che ad esse dedicò studi sistematici definitivi (*).

Tra le distorsioni di Volterra possono essere inclusi anche i cedimenti vincolari, o gli spostamenti relativi indotti, tra le due facce ottenute dall'asportazione di un tronco di piccolo spessore, con l'aiuto di martinetti o con altri mezzi. Queste distorsioni si distinguono dalle prime per essere *concentrate* in una sezione anzichè *distribuite*; ma la loro natura è la stessa, e lo studio degli effetti statici da esse prodotti è identico a quello esposto. Si può anzi osservare che lo studio di una distorsione distribuita si riduce a determinare gli spostamenti relativi Δ_i da essa indotti tra le facce S_{is} ed S_{id} ottenute da tagli secondo le sezioni rette S_i , ed a calcolare gli effetti statici prodotti dalle distorsioni concentrate — Δ_i agenti in corrispondenza delle sezioni S_i ; in tal senso una qualsiasi distorsione distribuita è equivalente, dal punto di vista statico, a una o più distorsioni concentrate.

Nel caso delle travi piane, una generica distorsione distribuita di Volterra è definita da tre funzioni dell'ascissa curvilinea s , $\lambda(s)$, $\vartheta(s)$, $\mu(s)$, *caratteristiche della distorsione*, tali che i prodotti

$$\lambda ds$$

$$\vartheta ds$$

$$\mu ds$$

rappresentino rispettivamente le componenti, secondo la tangente t e la normale n all'asse, dello spostamento relativo tra i baricentri delle facce estreme del tronco lungo ds sito all'ascissa s , e l'ampiezza della rotazione relativa tra le stesse facce (fig. 1-64 a). Si conviene di legare la convenzione sul segno delle distorsioni a quella sul segno delle caratteristiche delle sollecitazioni interne; e cioè le distorsioni $\lambda \vartheta \mu$ sono positive se per esse le caratteristiche positive corrispondenti (sforzo normale N , sfor-

(*) V. Volterra: « Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes ». Annales de l'Ecole Normale Supérieure. 3^a sér. vol. 24 (1907).

zo tagliante T , e momento flettente M), supposte agenti sulle facce risultanti dall'asportazione del tronco ds , compiono lavoro positivo (fig. 1-64 b). In altre parole λ ϑ μ sono positive se λds , ϑds , μds sono di verso opposto agli spostamenti e rotazioni relativi provocati nel concio ds dalle

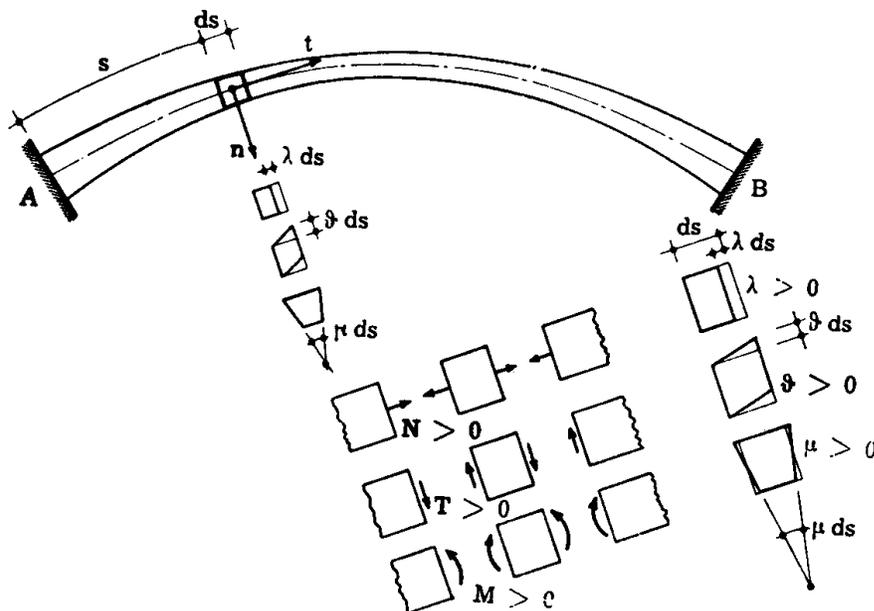


FIG. 1-64

caratteristiche $N T M$ positive. La distorsione λ si chiama *di spostamento assiale relativo*, la ϑ *di scorrimento relativo*, la μ *di rotazione relativa*. Le variazioni termiche uniformi e alla Navier, definite dalle (1-18) e (1-19), corrispondono a distorsioni distribuite del tipo λ e μ , fornite da

$$\lambda = -\alpha \Delta t \quad (20)$$

$$\mu = -\alpha \frac{\Delta t}{h}$$

Le distorsioni concentrate D_φ D_η D_ζ rispettano la stessa convenzione dei segni; esse sono positive se le caratteristiche positive $M T N$, agenti sulle facce S_s ed S_d tra le quali si esercita la distorsione, compiono per esse lavoro positivo (fig. 1-65).

Le componenti delle forze, delle reazioni (agenti dal vincolo sulla struttura), degli spostamenti, dei cedimenti vincolari, sono tutte positive se equiverse agli assi fissi y e z ; le coppie (applicate o reattive) e le rotazioni sono positive se nel verso $y \rightarrow z$ (antiorario). A volte ad una reazione di direzione nota si dà un segno indipendentemente dalle sue componenti, e quindi dagli assi fissi; in tal caso il cedimento corrispondente è

positivo se per esso la reazione positiva agente sulla struttura compie lavoro positivo.

Assegnato il verso di percorrenza della struttura, e cioè il verso della tangente t all'asse, è assegnata anche la terna destrorsa $m n t$; nel caso piano infatti m va verso l'osservatore, e quindi n è alla destra di t . Gli spostamenti e rotazioni relativi sono forniti da

$$\begin{aligned}d\varphi &= \varphi_d - \varphi_s \\d\eta &= \eta_d - \eta_s \\d\zeta &= \zeta_d - \zeta_s ;\end{aligned}$$

η e ζ sono gli spostamenti secondo n e t , gli indici s e d indicano le sezioni alle ascisse s ed $s + ds$. Le caratteristiche MNT della sollecitazione

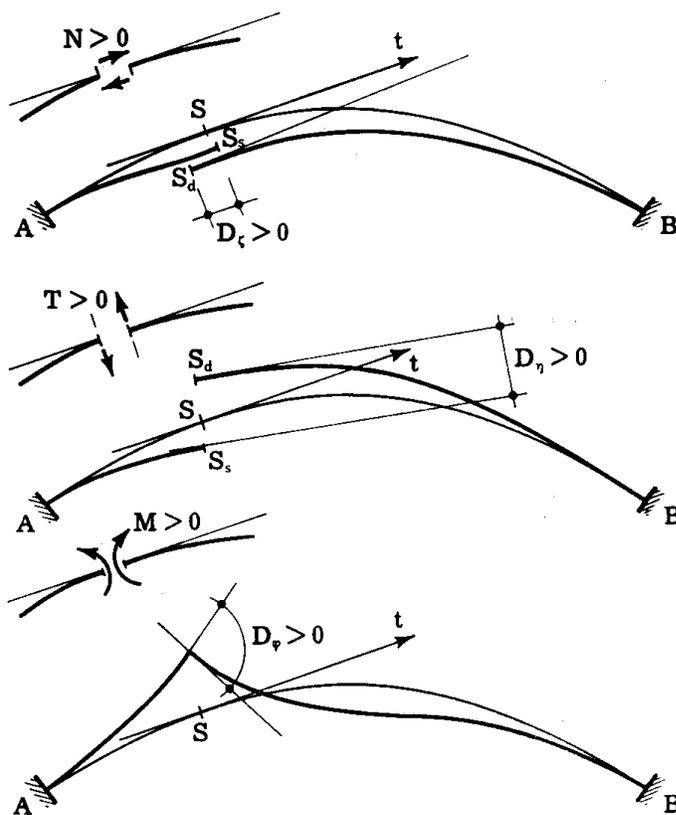


FIG. 1-65

interna sono positive se, con riferimento alla faccia la cui normale (orientata verso l'esterno) è equiversa a t , sono orientate nel verso positivo di n e t . Si ha così che caratteristiche positive provocano spostamenti e rotazioni relativi positivi.

Attesa la convenzione dei segni sulle distorsioni, si può porre

$$- \lambda ds = d\zeta \quad , \quad - \vartheta ds = d\eta \quad , \quad - \mu ds = d\varphi \quad ,$$

e per distorsioni concentrate

$$- D_\varphi = \Delta\varphi \quad , \quad - D_\eta = \Delta\eta \quad , \quad - D_\zeta = \Delta\zeta \quad .$$

Nel caso più generale, le distorsioni distribuite possono essere di sei tipi; se infatti t è la tangente all'asse, m ed n due assi ortogonali giacenti sulla sezione retta, lo spostamento relativo dei baricentri delle due sezioni distanti ds è definito dalle tre componenti $d\xi, d\eta, d\zeta$ secondo i tre assi m, n, t , e la rotazione relativa delle due sezioni dalle tre componenti $d\varphi_m, d\varphi_n, d\varphi_t$ intorno agli stessi assi. Corrispondentemente possono definirsi sei funzioni $\vartheta_m(s), \vartheta_n(s), \lambda(s), \mu_m(s), \mu_n(s), \omega(s)$, atte a fornire i suddetti valori (cambiati di segno) alla generica ascissa s . Una distorsione concentrata è a sua volta definita dalle componenti $\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta$ dello spostamento relativo dei baricentri delle sezioni S_s ed S_d , e dalle componenti $\Delta\varphi_m, \Delta\varphi_n, \Delta\varphi_t$, della rotazione relativa delle stesse sezioni; le suddette sei quantità, cambiate di segno, si chiamano *caratteristiche* della distorsione concentrata in S .

15. Le ellissi di elasticità degeneri.

Alcune volte l'ellisse di elasticità degenera in un segmento, o addirittura in un punto. Si consideri per esempio l'arco della fig. 1-66, incastrato in A e appoggiato in B , e si ricerchi l'ellisse di elasticità relativa alla sezione B . Poichè qualsiasi forza agisca su B , il baricentro della sezione non può che spostarsi secondo la traccia del piano di scorrimento del carrello, il centro della rotazione della sezione B è ubicato di necessità sulla normale b per B alla suddetta traccia. Si trae che, essendo gli antipoli di qualsiasi retta ubicati su b , l'ellisse deve ridursi ad un segmento contenuto in b .

La corrispondenza non è più biunivoca, perchè ad un punto C_1 giacente su b corrispondono tutte le rette del fascio avente per sostegno il punto C_2 corrispondente di C_1 nell'involuzione determinata sulla retta b dai due punti doppi D_1 e D_2 estremi del segmento in cui degenera l'ellisse. In tal caso invece della polarità si considera l'involuzione, e in essa la corrispondenza tra C_1 e C_2 è biunivoca.

Il baricentro elastico O e il peso elastico W si determinano applicando in B una coppia \mathcal{M} , e ricercando il centro della rotazione e la sua ampiezza. Poichè la risultante della reazione R_B e della coppia \mathcal{M} , agendo sulla struttura incastrata in A e libera in B , deve indurre in B una rota-

zione che si effettua intorno ad un punto della retta b , la sua retta d'azione h deve essere tale che il suo antipolo C_h rispetto all'ellisse terminale e_{AB} giaccia su b ; perciò l'antipolo C_b di b rispetto alla stessa ellisse deve

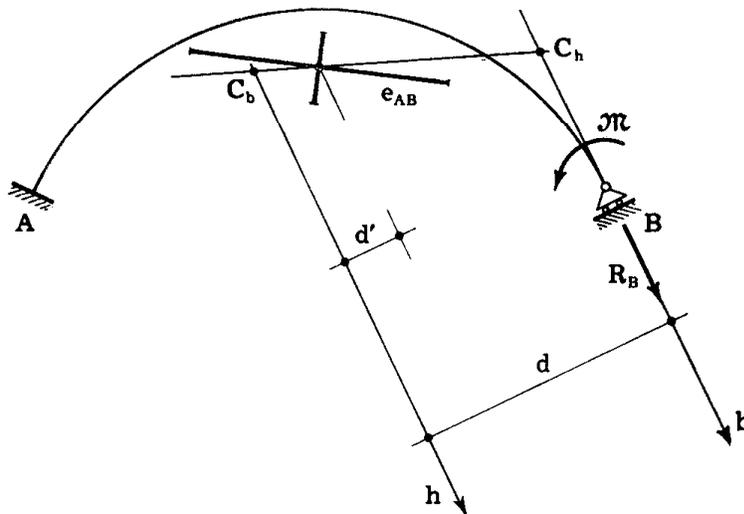


FIG. 1-66

giacere sulla retta h . La h , poichè deve comunque essere parallela alla b , risulta così determinata. Il valore di R_B si ottiene dividendo \mathcal{M} per la distanza d di B da h . L'antipolo C_h di h , centro della rotazione di B , e perciò coincidente con il baricentro elastico O , è la intersezione della retta b con la retta che congiunge C_h e il centro dell'ellisse e_{AB} ; infatti b ed h sono parallele, e perciò la retta $C_b C_h$ deve passare per il baricentro dell'ellisse e_{AB} .

L'ampiezza della rotazione è fornita da

$$\varphi = R W_{AB} d'$$

ove d' è la distanza del centro dell'ellisse e_{AB} dalla retta h ; si trae

$$W = W_{AB} \frac{d'}{d}.$$

Per ottenere la lunghezza del semidiametro $OD_1 = OD_2 = \rho$ si fa agire (fig. 1-67) una forza F su B normalmente alla b ; la risultante R di F e di R_B deve provocare sulla sezione B appartenente alla struttura incastrata in A e libera in B una rotazione intorno ad un punto di b , quindi la sua retta d'azione r passa per C_b .

Dall'uguaglianza

$$R I_{fr}^{AB} = F (\rho^2 + \overline{OB}^2) W ,$$

ove I_{fr}^{AB} è il momento centrifugo del peso elastico W_{AB} rispetto alle rette f ed r , si ottiene ρ .

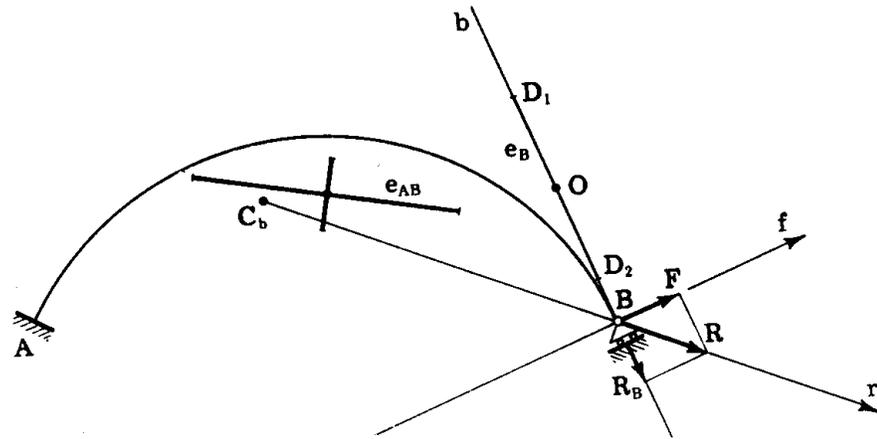


FIG. 1-67

Si consideri ora un arco AB, vincolato ad incastro in A, e a cerniera in B (fig. 1-68). L'ellisse di elasticità relativa alla sezione B si riduce ad

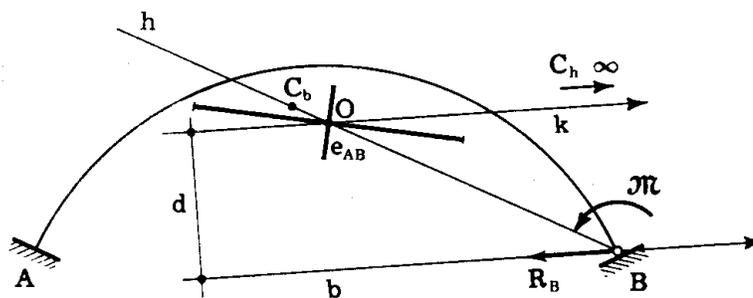


FIG. 1-68

un punto, e cioè al baricentro di B, poichè qualsiasi forza agisca su essa, la sezione B ruota di necessità intorno al suo baricentro, ove è ubicata la cerniera. Per determinare il peso elastico W_B si applica in B una coppia \mathcal{M} . Per effetto di \mathcal{M} , la sezione B, considerata appartenente alla struttura incastrata in A e libera in B, ruota intorno al centro dell'ellisse e_{AB} ; poichè la rotazione prodotta dalla \mathcal{M} e dalla R_B deve avere per centro B, la R_B deve produrre una rotazione della sezione B intorno ad un punto della retta h congiungente B con il centro di e_{AB} . Poichè l'antipolo C_b della retta di azione b di R_B deve giacere su h , l'antipolo C_h di h deve apparte-

nera alla retta b ; questa risulta così essere la parallela per B al diametro k coniugato di h . Il valore della reazione R_B può ottenersi dalla condizione che sia nullo lo spostamento di B secondo una qualsiasi direzione, per esempio secondo b ; si ha così

$$\mathcal{N} W_{AB} d + R_B I_b^{AB} = 0$$

e cioè

$$R_B = - \mathcal{N} d \frac{W_{AB}}{I_b^{AB}} \quad (n')$$

ove d è la distanza di O da b , I_b^{AB} il momento d'inerzia rispetto alla retta b . Dalla relazione

$$\varphi_B = \mathcal{N} W_{AB} + R_B W_{AB} d = \mathcal{N} W_B$$

si ottiene

$$W_B = W_{AB} \left(1 - d^2 \frac{W_{AB}}{I_b^{AB}} \right). \quad (o')$$

Alle (n') ed (o') può anche giungersi considerando che la sezione B dell'arco incastrato in A e libero in B è soggetta ad una forza F , parallela

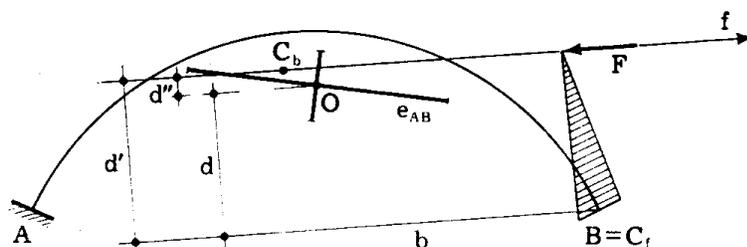


FIG. 1-69

ad R_B e dello stesso valore, risultante di R_B ed \mathcal{N} , e per effetto di F deve ruotare intorno al suo baricentro. Perciò la retta d'azione f di F è l'anti-polare di B (fig. 1-69); chiamando d' e d'' le distanze da f di B e di O , si ha

$$F = \frac{\mathcal{N}}{d'} \quad (p')$$

$$\varphi_B = F W_{AB} d'' = \mathcal{N} W_B$$

da cui

$$W_B = W_{AB} \frac{d''}{d'} \quad (q')$$

Poichè è (*)

$$I_b^{AB} = - W_{AB} dd'$$

si ha

$$F = \frac{\mathcal{M}}{d'} = - \mathcal{M} d \frac{W_{AB}}{I_b^{AB}}$$

$$W_B = W_{AB} \frac{d' + d}{d'} = W_{AB} \left(1 + \frac{d}{d'} \right) = W_{AB} \left(1 - d^2 \frac{W_{AB}}{I_b^{AB}} \right).$$

16. L'involuzione di elasticità nelle travi continue.

Si prenda in esame (fig. 1-70) una trave continua ad asse rettilineo solidale con i ritti; uno dei due estremi sia vincolato in modo da impedire

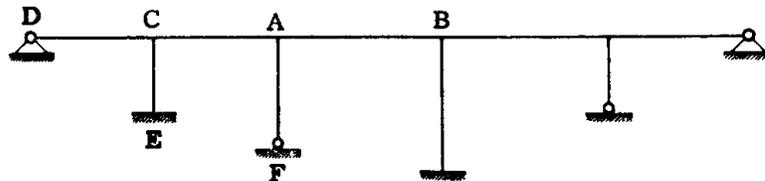


FIG. 1-70

gli spostamenti secondo l'asse della trave. Se si trascurano gli effetti dello sforzo assiale, tutti i nodi della struttura (punti di concorso degli assi delle travi e dei ritti) non subiscono spostamenti; la trave si definisce a *nodi fissi*. La trave che si studia rientra nella categoria delle strutture *aperte*, già definite al § 7 del presente capitolo; è possibile perciò adottare per essa il procedimento di composizione in serie e in parallelo, che peraltro si semplifica notevolmente. Infatti, l'ellisse della sezione comune ad un ritto e ad una campata si riduce al suo baricentro, poichè la sezione ha possibilità di ruotare soltanto intorno ad esso. Inoltre, l'ellisse degli spostamenti relativi per la generica sezione S appartenente alla generica campata AB (ellisse degli spostamenti relativi della trave AB) si riduce ad un segmento $D_1 D_2$ appartenente all'asse della trave, poichè qualsiasi spostamento relativo è una rotazione intorno ad un punto appartenente all'asse della trave stessa. Si è perciò in presenza di un caso di ellisse degenerate; la polarità cede il posto all'involuzione che lega i punti C_1 e C_2 rispettivamente intersezione con l'asse AB della retta d'azione f delle due

(*) La distanza di C_b da b è uguale a quella di B da f , cambiata di segno.

forze verticali uguali e contrarie F e $-F$ agenti sulle facce S_s ed S_d del taglio effettuato secondo una generica sezione S della campata AB , e centro della rotazione relativa tra le due facce S_s ed S_d (fig. 1-71).

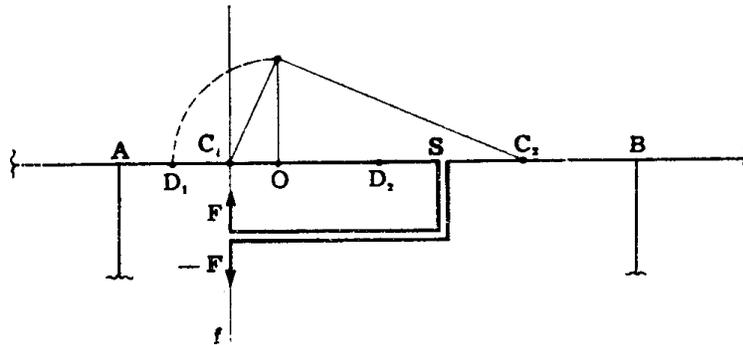


FIG. 1-71

Il centro C_2 corrisponde nella polarità dei pesi elastici a qualsiasi retta f passante per C_1 ; di queste si considera quella ortogonale all'asse della trave.

Se sono noti gli angoli α_A α_B β di cui ruotano le sezioni A e B della trave appoggiata AB soggetta ad una coppia $\mathcal{M} = 1$ in A o in B (fig. 1-39), è immediato ricavare il valore del peso elastico \bar{W}_{AB} distribuito lungo AB , e il relativo baricentro \bar{O} . Infatti gli angoli di rotazione φ_A e φ_B delle

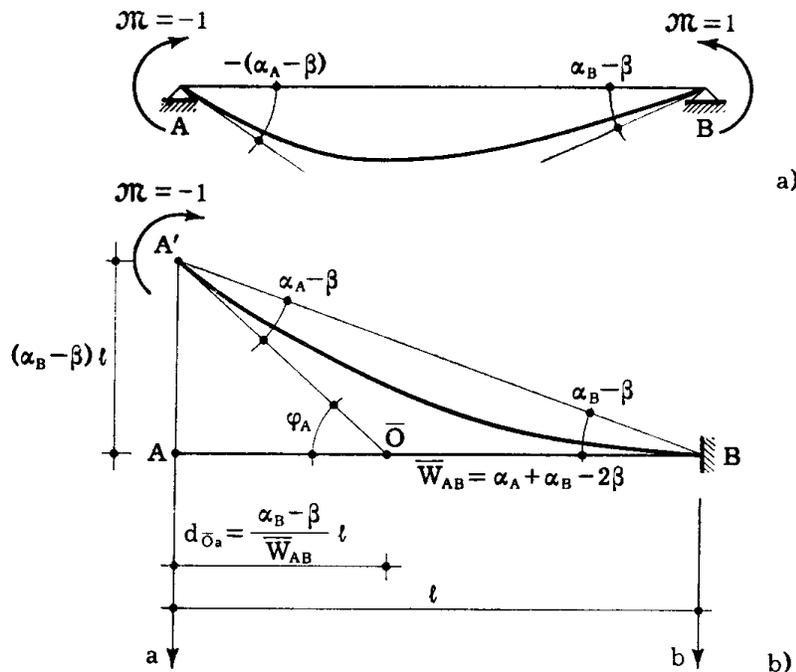


FIG. 1-72

sezioni A e B per effetto di due coppie $\mathcal{M} = -1$ in A ed $\mathcal{M} = +1$ in B (fig. 1-72 a) sono rispettivamente $\varphi_A = -(\alpha_A - \beta)$ e $\varphi_B = \alpha_B - \beta$ (si ricordi

che α_A ed α_B sono positive, e β è negativo, così che φ_A ha per valore assoluto la somma dei valori assoluti di α_A e β , e φ_B di α_B e β); la deformata dell'asse della trave incastrata in B e libera in A, e soggetta in A ad una coppia $\mathcal{M} = -1$, coincide con quella della trave prima considerata, a meno di una rotazione rigida intorno al baricentro di B, per ricondurre al rispetto dell'incastro (fig. 1-72 b).

E' perciò, in tal caso,

$$\varphi_A = -(\alpha_A - \beta) - (\alpha_B - \beta) = -\alpha_A - \alpha_B + 2\beta$$

e quindi risulta

$$\bar{W}_{AB} = \alpha_A + \alpha_B - 2\beta. \quad (21)$$

E' inoltre

$$d_{\bar{O}a} = A'A \frac{1}{\bar{W}_{AB}}$$

e cioè

$$d_{\bar{O}a} = \frac{\alpha_B - \beta}{\bar{W}_{AB}} l; \quad (22)$$

così pure è

$$d_{\bar{O}b} = -\frac{\alpha_A - \beta}{\bar{W}_{AB}} l. \quad (23)$$

Se \bar{O} è tra A e B, è $d_{\bar{O}a} > 0$, $d_{\bar{O}b} < 0$, poichè a e b sono ambedue dirette verso il basso.

Dai valori di α_A α_B β può trarsi anche il valore della semilunghezza $\bar{\rho}$ dell'ellisse degenera. La deformata dell'asse della trave della fig. 1-73 a coincide infatti, a meno di una rotazione rigida intorno al baricentro di B, con quella della trave della fig. 1-73 b. Dalla relazione

$$AA' = \beta l = \frac{1}{l} I_{ab}^{AB} = \frac{1}{l} [\bar{\rho}^2 \bar{W}_{AB} + d_{\bar{O}a} d_{\bar{O}b} \bar{W}_{AB}]$$

si ottiene

$$\bar{\rho}^2 = \frac{\beta l^2}{\bar{W}_{AB}} - d_{\bar{O}a} d_{\bar{O}b}. \quad (24)$$

I due termini di $\bar{\rho}^2$ sono negativo il primo, e positivo il secondo.

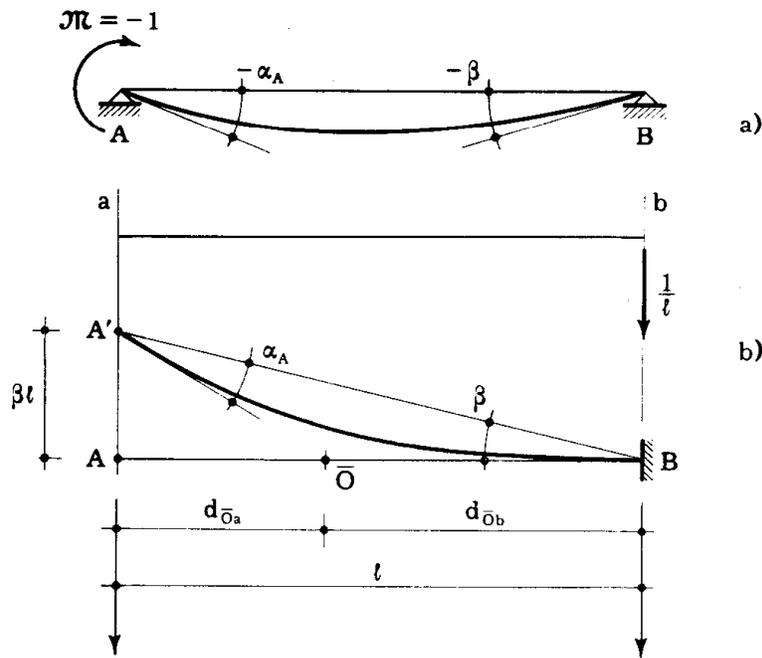


FIG. 1-73

Nel caso della trave a sezione costante si ha, trascurando l'effetto del taglio,

$$\alpha_A = \alpha_B = \frac{l}{3EI}$$

$$\beta = -\frac{l}{6EI}$$

$$\bar{W}_{AB} = \frac{l}{EI}$$

$$d_{O_a} = -d_{O_b} = \frac{l}{2}$$

e quindi, come noto,

$$\bar{\rho}^2 = \frac{l^2}{12}$$

Le formule da (1-21) a (1-24) sono specialmente utili in tutti i casi — molto frequenti — in cui i valori di α_A , α_B , β sono consegnati nei manuali.

Calcolati gli elementi \bar{W}_{AB} , $d_{\bar{O}a}$, e $\bar{\rho}$, relativi alla trave AB perfetta-

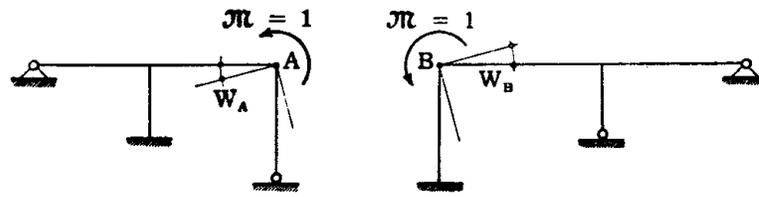


FIG. 1-74

tamente incastrata in B e libera in A (o viceversa), per ottenere gli analoghi elementi per l'ellisse degli spostamenti relativi della trave AB basta

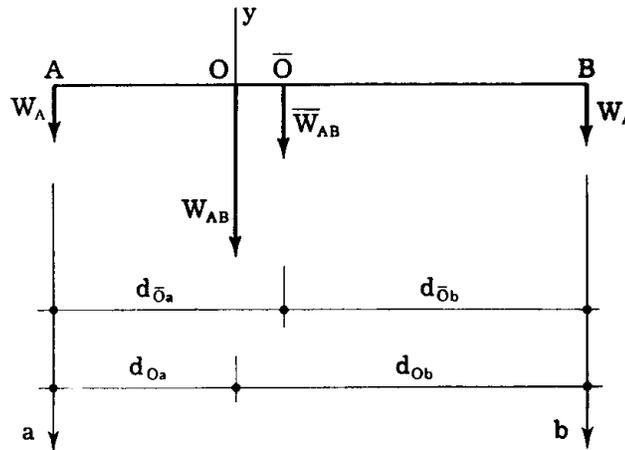


FIG. 1-75

conoscere ancora i pesi elastici W_A e W_B della parte a sinistra di A, e a destra di B (fig. 1-74). Si ha così (fig. 1-75)

$$W_{AB} = \bar{W}_{AB} + W_A + W_B \quad (25)$$

$$d_{Oa} = \frac{\bar{W}_{AB} d_{\bar{O}a} + W_B l}{W_{AB}} \quad (26)$$

$$d_{Ob} = \frac{\bar{W}_{AB} d_{\bar{O}b} - W_A l}{W_{AB}} \quad (27)$$

Dall'uguaglianza

$$I_y = \rho^2 W_{AB} = \bar{W}_{AB} [\bar{\rho}^2 + (d_{Oa} - d_{\bar{O}a})^2] + W_A d_{Oa}^2 + W_B d_{Ob}^2$$

si trae

$$\rho^2 = \frac{\bar{W}_{AB}}{W_{AB}} [\bar{\rho}^2 + (d_{Oa} - d_{\bar{O}a})^2] + \frac{W_A}{W_{AB}} d_{Oa}^2 + \frac{W_B}{W_{AB}} d_{Ob}^2 \quad (28)$$

Il peso elastico W_A concentrato in un nodo A, considerato come appartenente alla parte di struttura risultante dalla rimozione di AB, si chiama anche *cedibilità* dell'incastro A della trave AB, e spesso si indica con il simbolo ϵ_{AB} ; nel seguito si adotterà questo simbolo. Conoscendo le cedibilità ϵ_{HA} degli incastrati H delle travi AH che concorrono in A (esclusa la AB), e le caratteristiche elastiche delle stesse travi, si può calcolare

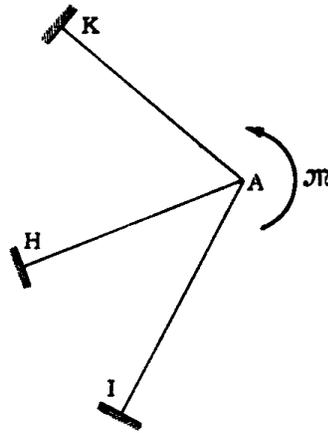


FIG. 1-76

agevolmente ϵ_{AB} . Infatti (fig. 1-76) una coppia \mathcal{M} in A si ripartisce nelle coppie \mathcal{M}_{AH} all'estremo A di ogni trave AH; per l'equilibrio del nodo A si ha

$$\sum_i \mathcal{M}_{Ai} = \mathcal{M} . \tag{r'}$$

La generica trave AH può considerarsi incastrata in H con cedibilità

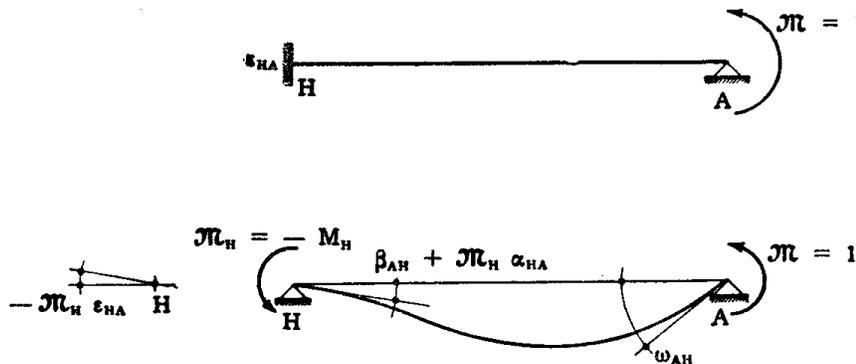


FIG. 1-77

ϵ_{HA} , appoggiata in A, e soggetta in questa sezione alla coppia \mathcal{M}_{AH} ; la sezione A ruota così dell'angolo

$$\varphi_A = \mathcal{M}_{AH} \omega_{AH}$$

dove ω_{AH} (fig. 1-77) è l'angolo φ_A provocato, nelle stesse condizioni, dalla coppia \mathcal{M}_{AH} unitaria.

Il valore di ω_{AH} si può ottenere come segue. Scrivendo (fig. 1-77) la condizione di congruenza in H

$$\beta_{AH} + \mathcal{N}_H \alpha_{HA} = - \varepsilon_{HA} \mathcal{N}_H$$

si ottiene

$$\mathcal{N}_H = - \frac{\beta_{AH}}{\alpha_{HA} + \varepsilon_{HA}} ; \quad (s')$$

la rotazione di A è perciò

$$\varphi_A = \alpha_{AH} + \beta_{AH} \mathcal{N}_H = \alpha_{AH} - \frac{\beta_{AH}^2}{\alpha_{HA} + \varepsilon_{HA}}$$

e quindi si può scrivere

$$\omega_{AH} = \alpha_{AH} - \frac{\beta_{AH}^2}{\alpha_{HA} + \varepsilon_{HA}} . \quad (29)$$

La condizione di uguaglianza degli angoli di rotazione in A si scrive

$$\mathcal{N}_{AH} \omega_{AH} = \mathcal{N}_{AI} \omega_{AI} = \mathcal{N}_{AK} \omega_{AK} = \dots$$

da cui si ottiene

$$\frac{\mathcal{N}_{AH}}{\omega_{AH}} = \frac{\sum_i \mathcal{N}_{AI}}{\sum_i \frac{1}{\omega_{AI}}}$$

e, per la (r'),

$$\mathcal{N}_{AH} = \mathcal{N} \frac{\frac{1}{\omega_{AH}}}{\sum_i \frac{1}{\omega_{AI}}} = \mathcal{N} c_{rAH} .$$

Il numero

$$c_{rAH} = \frac{\frac{1}{\omega_{AH}}}{\sum_i \frac{1}{\omega_{AI}}} \quad (30)$$

si chiama *fattore di ripartizione* relativo alla trave AH appartenente al gruppo di travi A_i concorrenti in A. Dalla relazione

$$\varphi_A = \mathcal{N}_{AH} \omega_{AH} = \mathcal{N} c_{TAH} \omega_{AH}$$

si ha

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\varphi_A}{\mathcal{N}} = c_{TAH} \omega_{AH} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{\omega_{Ai}}} . \quad (31)$$

Poichè la struttura è aperta si può iniziare il calcolo dalle travi collegate al suolo, per le quali ε è noto, in particolare nullo; utilizzando poi alternativamente le (1-29) e le (1-31), si perviene al valore ε che interessa. E' questo un caso particolarmente semplice di composizione in serie e in parallelo.

E' opportuno un breve riassunto delle simbologie adottate in questo paragrafo. Gli angoli α e β sono relativi alla trave appoggiata e caricata da una coppia unitaria in un estremo; α è l'angolo di rotazione in corrispondenza della coppia, β l'angolo di rotazione all'estremo opposto. Il primo indice è relativo alla sezione cui si riferisce la rotazione, il secondo indice, assieme al primo, definisce la trave. Per esempio, α_{AB} è relativo alla trave AB, appoggiata in A e B, ed è l'angolo di rotazione di A quando in A è applicata una coppia unitaria.

Per il principio di Betti risulta $\beta_{AB} = \beta_{BA}$. Se la trave AB è unica, bastano i simboli α_A , α_B e β a definire gli angoli; il secondo indice è necessario quando in A e in B concorrono più travi.

L'angolo ε rappresenta la cedibilità elastica angolare di un vincolo; il primo indice definisce la sezione di vincolo; il secondo, con il primo, la trave.

Perciò, ε_{AB} è la cedibilità dell'incastro A della trave AB. Nella formula (1-31), che fornisce ε_{AB} , la sommatoria è estesa a tutte le travi concorrenti in A, ad eccezione di AB.

L'angolo ω è relativo alla trave incastrata in un estremo con il suo grado d'incastro effettivo, e appoggiata all'altro; esso è la rotazione della sezione d'appoggio quando su essa agisce una coppia unitaria; il primo indice indica la sezione d'appoggio, il secondo, con il primo, la trave.

Il fattore di ripartizione c_{TAH} è relativo ad un gruppo di travi che concorrono in A; le travi sono quelle i cui ω entrano nella sommatoria al denominatore. Esso è la frazione della coppia $\mathcal{N} = 1$ applicata in A che è assorbita dalla trave AH.

Gli angoli α , β , ω , ε hanno tutti le dimensioni dell'inverso di un momento ($F^{-1} l^{-1}$), e cioè le dimensioni di un peso elastico.

Si ricordi pure che sia le coppie che le rotazioni sono positive se antiorarie; perciò α , ω ed ε sono positivi, β è negativo.

17. I punti fissi.

Quanto esposto nel paragrafo precedente è strettamente collegato con la nozione di *punto fisso*; della teoria e delle svariate applicazioni dei punti fissi si tratta in genere nella teoria dei ponti. In un sistema di travi *aperto* e a *nodi fissi*, come per esempio quello della fig. 1-70, si può parlare con proprietà di una parte del sistema *a sinistra* di una trave generica AB, e di una parte *a destra*, nel senso che, soppressa la trave AB, ogni forza agente su una delle due parti non fa risentire i suoi effetti sull'altra. Si osserva che, in tal caso, se la parte di sinistra e la trave AB sono scariche, comunque sia sollecitata la parte di destra, il diagramma dei momenti nella trave AB è sempre rappresentato da una retta, e si annulla comunque in un punto I, chiamato *punto fisso di sinistra* della trave AB. La distanza i del punto I dall'estremo di sinistra A (in valore assoluto) si chiama *distanza fissa di sinistra*. Analogamente, se è sollecitata la sola parte di sinistra, il diagramma dei momenti lungo AB è ancora rappresentato da una retta, e si annulla nel *punto fisso di destra* K; il segmento $k = KB$ è (in valore assoluto) *la distanza fissa di destra*. Poichè, come si trae

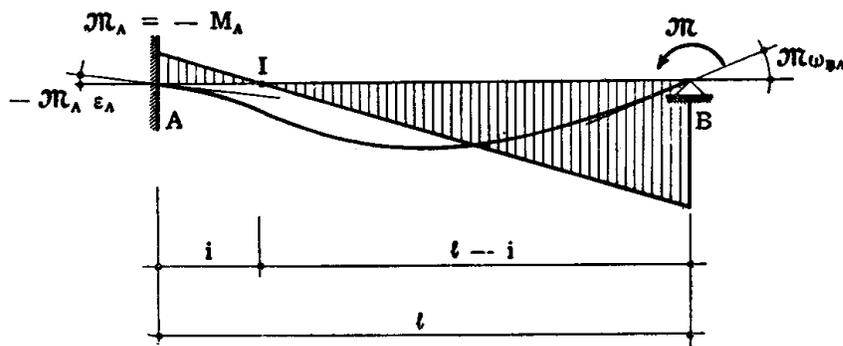


FIG. 1-78

dalla (s'), una coppia \mathcal{M} agente in B provoca in A una coppia d'incastro (reazione sulla sezione A della trave AB) fornita da

$$\mathcal{M}_A = - \mathcal{M} \frac{\beta}{\alpha_A + \epsilon_A},$$

si ha (fig. 1-78)

$$\frac{i}{l - i} = - \frac{\beta}{\alpha_A + \epsilon_A}$$

e quindi

$$i = -l \frac{\beta}{\alpha_A - \beta + \varepsilon_A} . \quad (32)$$

Analogamente si ottiene

$$k = -l \frac{\beta}{\alpha_B - \beta + \varepsilon_B} . \quad (33)$$

La conoscenza dei punti fissi permette di esprimere in forma molto semplice la rotazione ω_{BA} dell'estremo B; essa è

$$\omega_{BA} = \alpha_B + \beta \frac{i}{l - i} . \quad (34)$$

Analogamente si ha

$$\omega_{AB} = \alpha_A + \beta \frac{k}{l - k} . \quad (35)$$

Le (1-34) e (1-35) sono equivalenti alla (1-29). La costruzione dei punti fissi è del tutto meccanica; il procedimento coincide con quello esposto al paragrafo precedente per il calcolo di ε_A .

Si parte (fig. 1-70) dall'estremo di sinistra, e si considerano le travi DC e EC vincolate al suolo che concorrono nel primo nodo C; le ε corrispondenti all'incastro col suolo sono nulle (incastro perfetto), infinitamente grandi (cerniera), o presentano un valore noto (incastro elasticamente cedevole). Attraverso la (1-32) si calcolano le i per questi travi.

La (1-34) permette poi di calcolare le quantità ω_{CD} ed ω_{CE} relative all'estremo C comune a ciascuna di queste aste, e la (1-31) fornisce la cedibilità ε_{CA} relativa all'altra asta CA concorrente in C. Si è così effettuato il *collegamento in parallelo* delle aste vincolate al suolo e concorrenti in C. Si può ora calcolare la i relativa all'asta CA, e la relativa ω_{AC} , effettuando così il *collegamento in serie* tra il nodo C e l'asta CA.

Passando poi al nodo A, si effettua il collegamento in parallelo tra l'asta CA e le altre aste vincolate al suolo e concorrenti in A, determinando ε_{AB} .

La conoscenza di ε_{AB} permette di calcolare la i relativa all'asta AB. Il procedimento si itera, portando alla conoscenza di tutte le distanze i ; ripetendolo da destra a sinistra, si ottengono le distanze k .

Conosciuti i punti fissi, si può ottenere immediatamente il diagramma dei momenti generati da una qualsiasi condizione di carico che interessi

una sola campata, per esempio la AB. Siano φ_A^0 e φ_B^0 le rotazioni provocate in A e B dai carichi e dalle distorsioni agenti sulla trave AB appoggiata (fig. 1-79 a). Le due condizioni di congruenza in A e B si scrivono

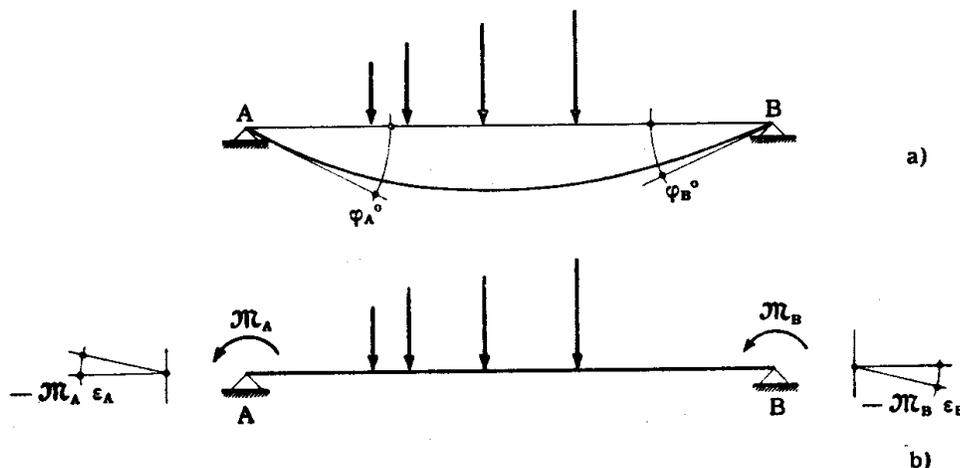


FIG. 1-79

(fig. 1-79 b), chiamando \mathcal{M}_A ed \mathcal{M}_B le coppie trasmesse dalla rimanente struttura,

$$\varphi_A^0 + \mathcal{M}_A \alpha_A + \mathcal{M}_B \beta = -\mathcal{M}_A \varepsilon_A \quad (36)$$

$$\varphi_B^0 + \mathcal{M}_A \beta + \mathcal{M}_B \alpha_B = -\mathcal{M}_B \varepsilon_B$$

e ancora

$$\mathcal{M}_A (\alpha_A + \varepsilon_A) + \mathcal{M}_B \beta = -\varphi_A^0$$

$$\mathcal{M}_A \beta + \mathcal{M}_B (\alpha_B + \varepsilon_B) = -\varphi_B^0$$

Poichè è

$$\alpha_A + \varepsilon_A = -\beta \frac{l-i}{i}$$

$$\alpha_B + \varepsilon_B = -\beta \frac{l-k}{k}$$

il sistema si scrive

$$-\mathcal{M}_A \frac{l-i}{i} \beta + \mathcal{M}_B \beta = -\varphi_A^0$$

$$\mathcal{M}_A \beta - \mathcal{M}_B \frac{l-k}{k} \beta = -\varphi_B^0$$

e ancora

$$\begin{aligned} -\mathcal{M}_A \frac{l-i}{l} + \mathcal{M}_B \frac{i}{l} &= -\frac{\varphi_A^0}{\beta} \frac{i}{l} \\ \mathcal{M}_A \frac{k}{l} - \mathcal{M}_B \frac{l-k}{l} &= -\frac{\varphi_B^0}{\beta} \frac{k}{l} \end{aligned} \quad (t')$$

Il sistema (t') si presta ad una soluzione grafica immediata. Portando (fig. 1-80) sulle verticali per A e B i segmenti

$$\begin{aligned} AA' &= \frac{\varphi_B^0}{\beta} \\ BB' &= -\frac{\varphi_A^0}{\beta}, \end{aligned}$$

si unisce A' con B, e B' con A, ottenendo le cosiddette *incrociate*. Dai punti I e K si innalzano le verticali, segnando i punti di incontro M, della verticale per I con la AB', ed N, della verticale per K con la BA'. La retta MN

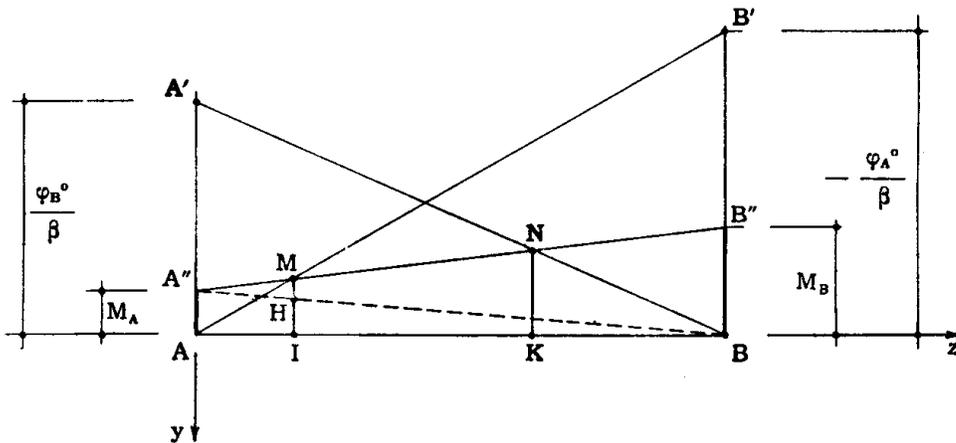


FIG. 1-80

stacca sulle verticali per A e B due segmenti AA'' e BB'' che, nella stessa scala in cui sono riportati AA' e BB', forniscono in valore e segno i momenti flettenti M_A e M_B . Infatti si ha

$$\begin{aligned} IH &= M_A \frac{l-i}{l} = -\mathcal{M}_A \frac{l-i}{l} \\ HM &= M_B \frac{i}{l} = \mathcal{M}_B \frac{i}{l} \\ IM &= -\frac{\varphi_A^0}{\beta} \frac{i}{l} \end{aligned}$$

e quindi la prima delle (t') è verificata; analogamente si osserva che è verificata la seconda. Circa i segni, si osservi che, nel caso considerato, φ°_A è negativo e φ°_B positivo, β è comunque negativo, perciò AA' e BB' sono tutti e due negativi; in tutti e due gli incastrati il momento flettente è negativo, e perciò sono tese le fibre superiori. Si nota così che, con la costruzione ora eseguita, i momenti in A e B, M_A ed M_B , risultano automaticamente segnati, sulla fondamentale AB, dalla parte che loro compete (fibre tese).

La coppia \mathcal{M}_{AC} agente in A sulla struttura alla sinistra di AB si ripartisce tra le travi concorrenti in A, ad esclusione ovviamente di AB, e cioè fra le travi AC ed AF (fig. 1-81) secondo i coefficienti c_{rAC} e c_{rAF} forniti

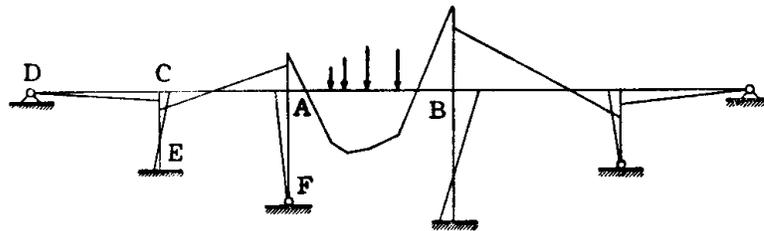


FIG. 1-81

dalla (1-30); il verso della coppia \mathcal{M}_{AC} che si ripartisce è contrario a quello della coppia \mathcal{M}_{AB} che agisce in A sulla trave. Il diagramma dei momenti lungo AC e AF è rettilineo, e si annulla nei punti fissi di sinistra. La coppia \mathcal{M}_{CA} in C cambiata di segno a sua volta va ripartita tra le travi CE e CD. Analogo procedimento si adopera per la parte di struttura a destra di AB. Per la trave AB il diagramma dei momenti si ottiene dalla sovrapposizione della *superficie semplice dei momenti* (diagramma dei momenti della trave appoggiata) e del trapezio avente per basi M_A ed M_B .

Il procedimento è molto utile in quei casi ove occorre esaminare più condizioni di carico interessanti ciascuna una sola campata, poichè il calcolo dei punti fissi va eseguito una volta per sempre. Esso è valido in rigore per i sistemi aperti, ma è anche applicabile, con buona approssimazione, per i sistemi chiusi; è possibile pure tener conto dello spostamento dei nodi, ma di tutto ciò si tratta diffusamente in altra sede. Interessa piuttosto qui mostrare, come già annunciato, la sostanziale identità della teoria dei punti fissi con quella dei pesi elastici. Il punto fisso di sinistra I non è che il corrispondente dell'estremo B di destra nell'involutione definita da O e ρ ; infatti, effettuando un taglio immediatamente a sinistra della sezione B, due forze uguali e contrarie applicate su B_s e B_a secondo una retta passante per I forniscono (fig. 1-82) lo stesso diagramma del momento della fig. 1-78, e quindi producono la stessa deformazione, cioè una rotazione relativa di B_s e B_a intorno al loro baricentro; ciò significa che I e B sono corrispondenti nell'involu-

zione determinata dall'ellisse degli spostamenti relativi della trave AB. Così pure K è il corrispondente dell'estremo A di sinistra. Conosciuti

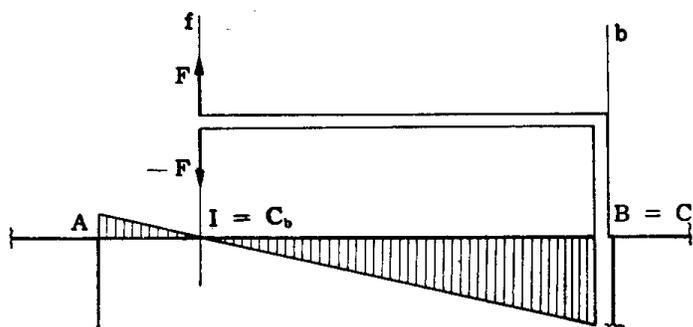


FIG. 1-82

perciò I e K , basta costruire (fig. 1-83) i due semicerchi di diametri AK e IB per ottenere sulla verticale per il loro punto comune C il baricentro

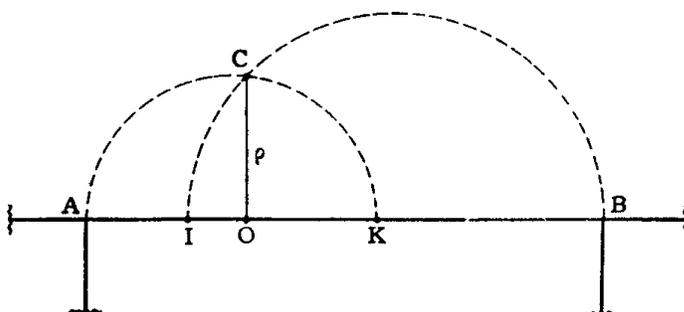


FIG. 1-83

elastico O , centro dell'involuzione; nello stesso tempo si ottiene ρ , fornito dal segmento OC , e quindi i due punti doppi D_1 e D_2 dell'involuzione.

Si osservi che i punti I e B si corrispondono anche nella involuzione definita soltanto dai pesi elastici W_A e \bar{W}_{AB} ; infatti, considerando I come antipolo della retta b , la distanza di I da b non dipende da W_B , poichè sia il momento statico che il momento d'inerzia di W_B rispetto alla retta b sono nulli.

Le relazioni analitiche che forniscono d_{Oa} d_{Ob} ρ in funzione di i e k si ottengono dalla costruzione della fig. 1-83. Si ha infatti

$$\rho^2 = d_{Oa} (-d_{Ob} - k) = -d_{Ob} (d_{Oa} - i)$$

da cui

$$-\frac{d_{Oa}}{d_{Ob}} = \frac{i}{k}$$

e quindi

$$d_{Oa} = l \frac{i}{i+k} \quad (37)$$

$$d_{Ob} = -l \frac{k}{i+k} \quad (38)$$

$$\rho^2 = l i k \frac{l-i-k}{(i+k)^2} \quad (39)$$

La costruzione di I e K, una volta conosciuti O e ρ , è la stessa della fig. 1-83; basta costruire i due triangoli rettangoli in C aventi come cateti AC e BC.

Analiticamente si ha

$$i = l + d_{Ob} + \frac{\rho^2}{d_{Ob}} \quad (40)$$

$$k = l - d_{Oa} - \frac{\rho^2}{d_{Oa}} \quad (41)$$

18. L'ellisse di elasticità trasversale.

Si consideri (fig. 1-84) una trave AB il cui asse sia contenuto in un piano π ; questo piano sia di simmetria geometrica e fisica della struttura.

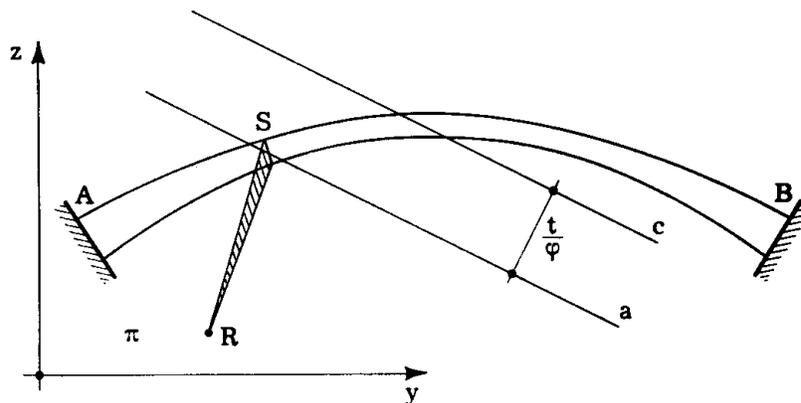


FIG. 1-84

Se ad una sezione S qualsiasi è applicata, attraverso un braccio rigido, una forza F normale al piano π , la sollecitazione della struttura è emisimme-

trica rispetto al piano π , e produce quindi spostamenti pur essi emisimmetrici. La sezione S si porta in S' ; per gli stessi motivi esposti al § 1, si può supporre che S' sia ancora piana, e perciò si può assimilare la trasformazione $S \rightarrow S'$ ad uno spostamento rigido. In genere tale spostamento si può scindere in tre traslazioni del baricentro di S secondo tre assi ortogonali x, y, z , di cui due, y e z , contenuti in π , e in tre rotazioni intorno a tre assi passanti per il baricentro di S e paralleli ad x, y, z . Per l'emisimmetria rispetto a π , le traslazioni secondo y e z , e la rotazione intorno all'asse parallelo ad x , devono essere nulle, e quindi lo spostamento di S si riduce ad una traslazione di valore t del suo baricentro, ortogonale al piano π , e ad una rotazione di valore φ intorno ad un asse a passante per il baricentro stesso e contenuto in π ; e cioè, in definitiva, ad una rotazione intorno ad un asse c , contenuto in π , parallelo all'asse a , e distante da questo (nell'ipotesi di piccoli spostamenti) della quantità t/φ . Quanto detto nell'ipotesi di esistenza di un piano π di simmetria vale anche, con buona approssimazione, se il piano dell'asse, pur non essendo di simmetria, contiene uno degli assi principali d'inerzia della sezione (*).

Fissata la traccia R sul piano π della retta di azione della forza F , è fissata univocamente — per il principio di sovrapposizione — la retta c . Viceversa, fissata la retta c , è univocamente fissata la traccia R ; infatti se alla c corrispondessero due punti R' ed R'' , si potrebbero dosare le due forze F' ed F'' in modo che ciascuna fornisca la stessa ampiezza di rotazione; ne deriva che la sezione S , sottoposta alla risultante delle forze F' e $-F''$, che non può essere nulla, non si sposterebbe, e quindi la $F' - F''$ non compirebbe lavoro, e ad essa corrisponderebbe energia di deformazione nulla. Sorge così nel piano una corrispondenza biunivoca tra i punti R e le rette c . Tale reciprocità è priva di elementi autoconiugati, perchè se un punto R giacesse sulla retta c ad esso corrispondente, la forza di traccia R non compirebbe lavoro. Inoltre è di carattere involutorio; infatti, se la corrispondente c_1 di R_1 contiene un punto R_2 , la forza F_2 non compie lavoro per effetto di F_1 ; per il teorema di Betti la F_1 non compie lavoro per effetto di F_2 , e cioè c_2 deve contenere R_1 . La polarità che intercorre tra i punti R e le rette c ha conica fondamentale immaginaria, per l'inesistenza di elementi autoconiugati; il suo centro O_t , corrispondente alla retta impropria di π , è proprio, perchè non può appartenere alla sua polare; esso è il punto in cui deve essere applicata la F normale a π perchè la sezione S trasli senza ruotare.

Considerando i punti R' simmetrici di R rispetto ad O_t , la corrispondenza tra c ed R' è ancora una polarità di centro O_t , a conica reale. Questa,

(*) L'approssimazione è dovuta al fatto che gli spostamenti dovuti al taglio dipendono non solo dall'ellisse di inerzia della sezione, ma anche dalla forma di quest'ultima; gli scarti dal vero sono però in genere estremamente piccoli.

essendo a centro proprio, è una ellisse o una iperbole; si scarta il secondo caso, perchè i punti impropri, ove la iperbole è tangente ai suoi asintoti, conterrebbero i propri corrispondenti sia nella polarità (R c) che in quella (R' c). Perciò la conica della polarità (R' c) è una ellisse; essa prende nome di *ellisse di elasticità trasversale* o di *ellisse di Ricci*, dal nome del prof. C. L. Ricci cui la trattazione è dovuta (1911); rispetto ad essa i punti R e le rette c si corrispondono come punti e antipolari, o come rette e antipoli.

Il rapporto costante tra il valore di una forza F applicata in O_t , e il valore della traslazione t della sezione S provocato dalla forza stessa, si chiama *peso elastico trasversale* W_t :

$$W_t = \frac{F}{t} . \quad (42)$$

Le dimensioni fisiche di W_t sono $[Fl^{-1}]$.

Se la forza F agisce in un punto R, l'asse di rotazione è l'antipolare c di R rispetto all'ellisse trasversale; si può trasportare la forza F in O_t , sommando ad essa il momento di trasporto $M = F \cdot RO_t$. Il momento M, equivalente ad una forza piccolissima normale a π ed agente nel punto improprio della retta RO_t , produce una rotazione φ della sezione S intorno alla retta coniugata della RO_t , e passante per O_t ; la forza F induce una traslazione di S pari a F/W_t . Il punto O_t , supposto rigidamente collegato con S, si sposta perciò, per effetto della forza F applicata in R, della quantità F/W_t ; ma questo spostamento è anche pari al prodotto φd , ove φ è l'ampiezza della rotazione provocata da F, e d è la distanza di O_t da c. Dall'uguaglianza

$$\varphi d = \frac{F}{W_t}$$

si trae

$$F = \varphi W_t d . \quad (43)$$

La (1-43) assicura che la forza F da cui è prodotta una certa rotazione φ è il prodotto di φ per il momento statico del peso elastico rispetto all'asse c di rotazione. Si avverte che si considera un qualsiasi peso elastico fittizio, distribuito in modo che la sua ellisse coincida con quella trasversale, e che la sua somma sia pari a W_t .

Moltiplicando ambedue i membri della (1-43) per la distanza d' di R da una retta qualsiasi p del piano π , si ha

$$M_q = \varphi W_t d d' ; \quad (44)$$

e cioè il momento rispetto ad una retta p della forza capace di produrre una rotazione φ è pari al prodotto della rotazione φ per il momento centrifugo del peso elastico rispetto alla retta p ed all'asse c di rotazione. Se p coincide con c , si trae che il momento di una forza F rispetto all'asse c della rotazione da essa prodotta è pari al prodotto della rotazione φ per il momento d'inerzia del peso elastico rispetto all'asse c .

In particolare, una coppia \mathcal{M} di asse m contenuto in π può considerarsi come una forza piccolissima, normale a π e applicata nel punto improprio della normale in π ad m , e che presenti il momento M rispetto ad m ; essa provoca una rotazione di S intorno all'asse c passante per O , e coniugato della normale ad m , la cui ampiezza è fornita da

$$\varphi = \frac{M}{I_c} = \frac{M}{W_t \rho_c^2} \quad (45)$$

ove ρ_c è la proiezione sulla normale a c del raggio dell'ellisse trasversale disteso sull'asse coniugato di c (e cioè sull'asse normale ad m).

Si osservi come le (1-42), (1-43), (1-44), possono ottenersi dalle (1-1), (1-2) e (1-4) scambiando i termini forza e rotazione, coppia e spostamento.