

CAPITOLO IX

CRITERI DI RESISTENZA

1. La condizione di plasticizzazione e il coefficiente di sicurezza.

Lo stato tensionale nell'intorno di un punto è definito una volta conosciute le tre tensioni principali $\sigma_\xi \sigma_\eta \sigma_\zeta$; se il materiale è isotropo (*), si può dire che il verificarsi delle prime deformazioni permanenti nell'intorno stesso dipende solo dallo stato tensionale e cioè dalle $\sigma_\xi \sigma_\eta \sigma_\zeta$, e non dal riferimento $\xi \eta \zeta$ rispetto al corpo.

La relazione analitica cui le tensioni principali devono soddisfare perchè sia attinta nel punto la soglia plastica prende nome di *condizione di plasticizzazione*.

Ogni condizione di plasticizzazione deriva da certi presupposti, che costituiscono il *criterio di resistenza*.

I parametri caratteristici del materiale chiamati in gioco nella condizione di plasticizzazione devono essere determinabili con prove di laboratorio quanto più rapide ed economiche possibile; solo così infatti si può seguire un processo di lavorazione o di costruzione in ogni sua fase. In genere ci si rifà alle tensioni di plasticizzazione relative alle prove monoassiali di trazione o di compressione; altre volte a prove triassiali, conservando uguali due delle tre tensioni principali; a volta anche a prove in regime biassiale.

La condizione di plasticizzazione si presenta quindi sotto la forma

$$f(\sigma_\xi \sigma_\eta \sigma_\zeta) = 0 ; \quad (1)$$

nei coefficienti della (9-1) sono contenuti i parametri sui quali il criterio si basa. Nello spazio $\sigma_\xi \sigma_\eta \sigma_\zeta$ la (9-1) definisce una superficie detta *superficie limite*; essa è frontiera di un dominio chiuso, detto *dominio di elasticità*.

(*) Esplicitamente si ricorda che si può considerare isotropo anche un materiale con diversi moduli a trazione e a compressione, purchè questi siano identici in ogni direzione.

Ogni possibile stato tensionale in regime elastico è rappresentato da un punto P di tale dominio, e viceversa; ogni stato tensionale che provoca l'inizio della plasticizzazione è rappresentato da un punto P' della superficie limite, e viceversa.

Se una terna $\sigma_\xi \sigma_\eta \sigma_\zeta$ di tensioni principali cui corrisponde il punto P interno al dominio cresce conservando inalterati i mutui rapporti, quando esse sono incrementate nel rapporto (fig. 9-1)

$$s = \frac{OP'}{OP} \quad (2)$$

si verificano le prime deformazioni permanenti.

Il numero s prende nome di *coefficiente di sicurezza nel punto*; esso è relativo all'intorno cui le $\sigma_\xi \sigma_\eta \sigma_\zeta$ si riferiscono, all'inizio della plasticiz-

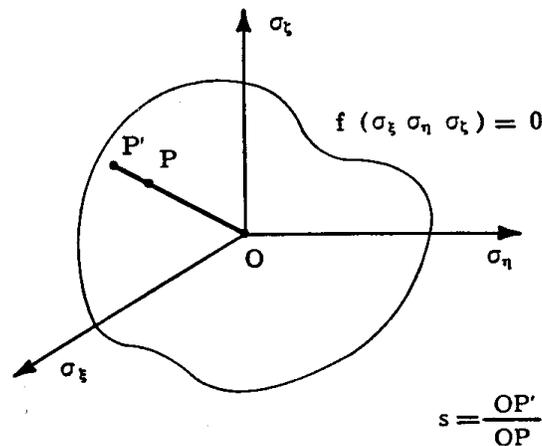


FIG. 9-1

zazione, ed all'aumento proporzionale dello stato tensionale. Tale numero si può ricavare analiticamente dalla (9-1) scritta per $s \sigma_\xi$, $s \sigma_\eta$, $s \sigma_\zeta$:

$$f(s \sigma_\xi, s \sigma_\eta, s \sigma_\zeta) = 0 \quad (3)$$

Interessa in realtà conoscere il più elevato numero per cui si possono esaltare le forze applicate alla struttura senza provocare plasticizzazione; e cioè il *coefficiente di sicurezza elastico globale* s_e relativo a tutta la struttura, all'inizio della plasticizzazione, ed all'aumento proporzionale delle forze applicate. Le $\sigma_\xi \sigma_\eta \sigma_\zeta$ sono calcolate nell'ipotesi di elasticità lineare in tutta la struttura e di piccolezza degli spostamenti; se si ammette che tale comportamento si conservi fino alla prima plasticizzazione, s_e è il più piccolo dei coefficienti s di sicurezza calcolati in tutti i punti della struttura.

Le due suddette ipotesi, bene accettabili sotto le forze di esercizio F_1 , non lo sono altrettanto bene, in genere, sotto le forze $s_e F_1$. La loro rimozione però implica grossissime e quasi sempre insormontabili difficoltà; è opportuno perciò conservarle, tenendone il dovuto conto nella scelta del minimo accettabile per s_e .

Il coefficiente s_e non coincide in genere con il coefficiente di sicurezza della struttura nei riguardi della crisi. Questa infatti può intervenire, in alcuni casi, ancora in fase elastica, per eccesso di spostamenti; per esempio, la centina di un ponte ad arco in conglomerato armato che cede sotto il getto si da ingenerare nella curva d'asse dell'arco variazioni intollerabili delle ordinate rispetto a quelle di progetto; i cuscinetti di banco di un albero che presentino rotazioni tali da squilibrare in modo inammissibile le masse ruotanti di una turbina, o da far variare troppo il traferro di una macchina elettrica; i sostegni di una centrale telefonica che cedano tanto da far bloccare i relais; i conduttori di una linea ad alta tensione che subiscano per la neve, o il vento, spostamenti tali da non far più rispettare le minime distanze reciproche prescritte dai regolamenti; l'impalcato di un ponte metallico che abbia frecce tali da sconnettere la massicciata. Viceversa, molte volte la crisi è da intendersi soltanto come rottura; si chiama *coefficiente di sicurezza a rottura* il moltiplicatore s_r delle forze che porta al crollo dell'intera struttura o di una sua parte.

Condizione ideale sarebbe che il coefficiente s nel punto fosse uguale in tutti i punti della struttura, ed in tal caso s_e coinciderebbe con s e con s_r . Spesso però non è possibile che ciò avvenga: il coefficiente s_r allora è superiore ad s_e , e tanto maggiore quanto più duttile è il materiale e più iperstatica la struttura. Il coefficiente s_e è quindi in ogni caso un limite inferiore del coefficiente di sicurezza a rottura, ed in questo senso i calcoli in fase elastica contengono implicito un margine di sicurezza. Si osservi che quanto maggiore è la differenza tra gli s calcolati nei punti della struttura tanto più è vicino al vero il valore di s_e assunto coincidente con il minimo degli s ; infatti se gli s sono molto diversi tra loro, sotto le forze $s_{\min} F_1$ gran parte della struttura è ancora lontana dalla plasticizzazione, e perciò le tensioni possono ancora con buona approssimazione reputarsi quasi tutte comprese nel campo dell'elasticità lineare.

In alcuni casi poi s_e può assumere proprio il significato di coefficiente di crisi; ciò accade quando le plasticizzazioni inducono lesioni, come nel conglomerato teso, e la struttura non consenta la presenza di cavillature, vuoi per il conseguente deterioramento dell'acciaio delle armature in ambienti particolarmente aggressivi, vuoi per evitare la fuoriuscita o il deterioramento del materiale trasportato (condotte) o conservato (serbatoi e silos).

Il valore minimo che s_e , e quindi s , può assumere è fissato dai regola-

menti o, in casi particolari, dai capitolati; i criteri seguiti nel fissare tale minimo devono però essere conosciuti non solo dal compilatore dei regolamenti e dei capitolati, ma anche dal progettista, per valutare l'opportunità di sfruttare o meno tutti i margini concessi, o, all'opposto, di ridurre tali margini, spesso eccessivi per vetustà delle disposizioni. E non appare questo un procedimento illegale, se trova saldo fondamento nella competenza e nella serietà del calcolatore, cui è bene anzi sia commessa questa responsabilità.

Il valore da imporre al minimo di s dipende principalmente dai seguenti fattori:

- a) difetti dei materiali adoperati, di carattere sistematico o aleatorio;
- b) maggiore o minore rispondenza alla realtà delle ipotesi su cui si basa la teoria seguita nelle verifiche;
- c) aderenza al vero più o meno spinta dello schema cui la struttura è ridotta per piegarla al calcolo;
- d) metodi di calcolo più o meno raffinati seguiti nella risoluzione del problema;
- e) errori nella valutazione del peso proprio e dei carichi accidentali;
- f) modalità di realizzazione, considerando soprattutto l'efficienza del cantiere e la sorveglianza in corso d'opera, anche in relazione alla località;
- g) danni che l'eventuale rovina può arrecare agli uomini ed ai beni, in relazione soprattutto ai servizi connessi con l'opera stessa;
- h) prevedibili riserve di sicurezza della struttura, e cioè del rapporto s_r/s_e , in relazione alla natura dei materiali ed al tipo di struttura.

Per fissare il minimo valore imposto di s è necessario innanzitutto conoscere la distribuzione della densità di probabilità d_{pc} dello stato tensionale nel punto — definito genericamente attraverso la tensione equivalente σ_{eq} che presto si incontrerà — e d_{pc} della tensione di crisi σ_c , in relazione a tutti i fattori che influenzano tali tensioni, e che si sono elencati poco prima da a) ad h). Le distribuzioni della densità di probabilità d_{pe} e d_{pc} si presentano come curve a campana (fig. 9-2), tanto più strette quanto meno giocano i suddetti fattori, e cioè quanto minore è la dispersione dei valori relativi; esse legano i valori delle σ_{eq} e σ_c alle rispettive densità di probabilità, attingendo queste il massimo per il valore sperimentale di σ_c e per quello di calcolo della σ_{eq} , il cui rapporto fornisce s .

La probabilità che la crisi avvenga per un valore σ^* di σ (e che si indica con la frazione $1/n^*$) è pari a quella che si verifichi contemporaneamente $\sigma_e \geq \sigma^*$, $\sigma_c \leq \sigma^*$. La probabilità dell'evento $\sigma_e \geq \sigma^*$ (principio delle probabilità totali) è

$$\frac{1}{n_e^*} = \int_{\sigma^*}^{\infty} d_{pc} d\sigma,$$

pari (fig. 9-2) all'area sottostante alla curva d_{pe} ed a destra della verticale per σ^* . La probabilità dell'evento $\sigma_c \leq \sigma^*$ è

$$\frac{1}{n_c^*} = \int_{-\infty}^{\sigma^*} d_{pe} d\sigma,$$

pari all'area sottostante alla curva d_{pe} ed a sinistra della verticale per

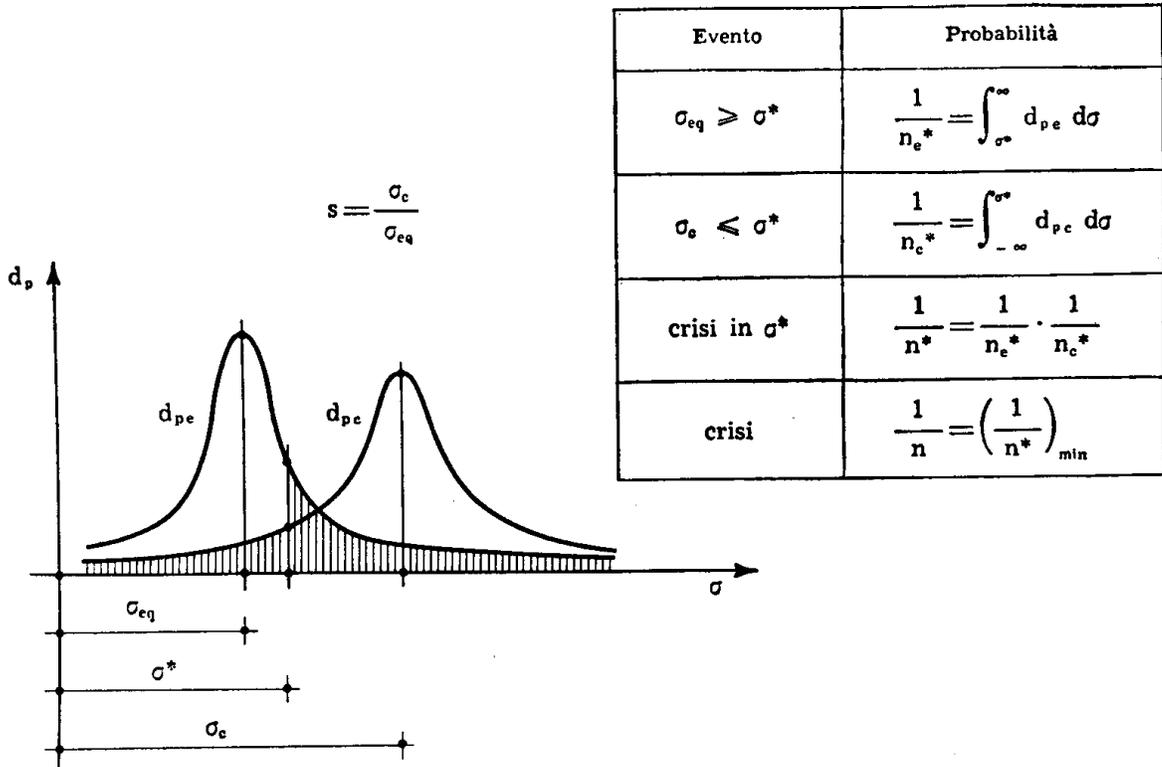


FIG. 9-2

σ^* . Il principio delle probabilità composte fornisce

$$\frac{1}{n^*} = \frac{1}{n_e^*} \cdot \frac{1}{n_c^*};$$

il valore $1/n^*$ è funzione di σ^* .

La probabilità di crisi $1/n$ corrisponde al massimo valore di $1/n^*$; secondo alcuni autori l'ordine di grandezza tollerabile per $1/n$ è di $1/100.000$.

Il valore di $1/n$ non è però definibile prescindendo dal lato economico; poichè $1/n$ diminuisce all'aumentare di s_e ed al restringersi delle due curve a campana, e con essa diminuisce il premio di assicurazione per i danni, mentre aumenta il costo dell'opera, il valore optimum di s_e ,

e quindi di $1/n$, è quello per cui risulta minima la somma del costo dell'opera e della capitalizzazione del premio di assicurazione per i danni, ivi comprese le perdite di vite umane.

Il Torroya propone nei riguardi delle strutture edilizie i coefficienti di sicurezza riportati nella tabella seguente.

		E D I F I C I			P O N T I		
		Solai	Travi	Ritti	Im- palcato	Travi port.	Archi
D a n n i i m p o r - t a n t i	sovraccarico	3,1	3,4	3,9	3,1	2,8	2,6
	peso proprio	2,9	3,1	3,4	2,9	2,6	2,5
D a n n i p o c o i m p o r - t a n t i	sovraccarico	2,6	2,8	3,2	2,6	2,4	2,1
	peso proprio	2,4	2,6	2,8	2,4	2,3	2,0

Questi dati sono relativi a cantieri con sorveglianza normale; essi vanno moltiplicati per $1,6 \div 1,9$ (edifici) ed $1,6 \div 1,8$ (ponti) nei cantieri poco sorvegliati, e per $0,7 \div 0,8$ (edifici) e $0,77 \div 0,84$ (ponti) nei cantieri ben sorvegliati.

2. Le prove di laboratorio su cui si basano i criteri di resistenza.

Si è detto che perchè un criterio di resistenza sia di pratica applicazione è necessario che faccia riferimento a prove di laboratorio di rapida esecuzione e di basso costo.

Per i materiali metallici le prove più semplici sono quelle in regime monoassiale di trazione, per i materiali lapidei quelle in regime monoassiale di compressione, per le terre quelle in regime triassiale.

La prova di trazione si esegue su una barra di dimensioni regolamentari, costituita in genere da un tratto prismatico e da due espansioni, sulle quali si esercitano due forze F uguali e contrarie, generalmente a mezzo di macchine idrauliche, a volte a carico diretto. Per il postulato del De Saint-Venant, il tratto prismatico intermedio è sollecitato in regime monoassiale da una trazione σ diretta secondo l'asse, costante lungo la sezione normale all'asse, e pari a

$$\sigma = \frac{F}{A}, \quad (4)$$

ove A è l'area della sezione stessa.

La variazione Δl di una lunghezza l prefissata della barra, rapportata ad l , fornisce la componente di deformazione ε :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} . \quad (5)$$

Il diagramma $\sigma\varepsilon$ per i materiali metallici si presenta in genere come nella fig. 9-3; esso è registrato dalla stessa macchina con la quale si esegue

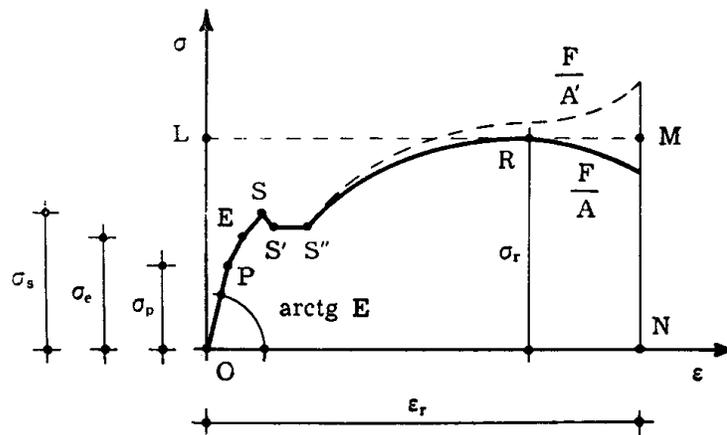


FIG. 9-3

la prova, come diagramma $F \Delta l$, e cioè a meno delle quantità $1/A$ ed $1/l$. In un primo intervallo

$$0 \leq \sigma \leq \sigma_p$$

il diagramma è sensibilmente un segmento di retta OP passante per l'origine; la tangente trigonometrica dell'angolo che OP forma con l'asse delle ε fornisce il modulo E di elasticità normale

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} . \quad (6)$$

La tensione σ_p si chiama *tensione al limite di proporzionalità*; nel tratto $0 \leq \sigma \leq \sigma_p$ il comportamento del materiale è elastico lineare, e scaricando il provino si ripercorre il segmento OP .

Per

$$\sigma_p \leq \sigma \leq \sigma_e$$

il comportamento è ancora elastico, ma non lineare; il diagramma $\sigma\varepsilon$ è curvilineo (tratto PE) e volge la sua concavità all'asse delle ascisse, cioè

le ε crescono più che linearmente con le σ . La quantità

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad (7)$$

chiamata *modulo tangente* è minore di E ; la tensione σ_e si chiama *tensione al limite di elasticità*.

Nell'intervallo

$$\sigma_e \leq \sigma \leq \sigma_s$$

il comportamento non è più elastico, anche se il diagramma (tratto ES) ancora non si scosta sensibilmente dalla retta OP; se a partire da un punto intermedio M del tratto ES (fig. 9-4) si scarica il provino, per

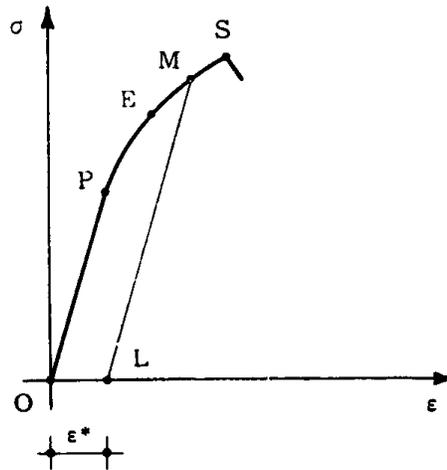


FIG. 9-4

$\sigma=0$ resta una deformazione residua $OL = \varepsilon^*$. Nella fase di scarico si nota che il diagramma è ancora rettilineo, e costituito da un tratto ML parallelo al tratto OP; quindi per $d\sigma > 0$ è

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_t,$$

per $d\sigma < 0$ è

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E,$$

ove $E_t < E$. Continua a valere la definizione di modulo tangente, pur non essendosi più in fase elastica. In pratica è molto difficile distinguere i due limiti σ_p e σ_e , che si reputano perciò quasi sempre coincidenti.

Per un valore σ_s di σ chiamato *tensione di snervamento* la barra si allunga spontaneamente senza che la σ si incrementi; questo comportamento, nettamente diverso da quello che finora la barra ha tenuto, denota un rilassamento, una improvvisa stanchezza del materiale. Per $\sigma = \sigma_s$ si ha quindi un tratto orizzontale $S'S''$ del diagramma $\sigma\varepsilon$. Le macchine di prova idrauliche presentano una certa inerzia, e non possono adeguarsi all'istante all'improvviso cedimento del materiale; ai primi valori del Δl che si verifica per $\sigma = \sigma_s$, corrisponde uno spostamento rapidissimo del pistone, e quindi una diminuzione della pressione dell'olio. E' per questo che il diagramma $\sigma\varepsilon$ registrato dalle macchine idrauliche presenta per $\sigma = \sigma_s$ un calo SS' della σ , cui segue il tratto $S'S''$ orizzontale, mentre nelle prove a carico diretto il tratto SS' non si accusa.

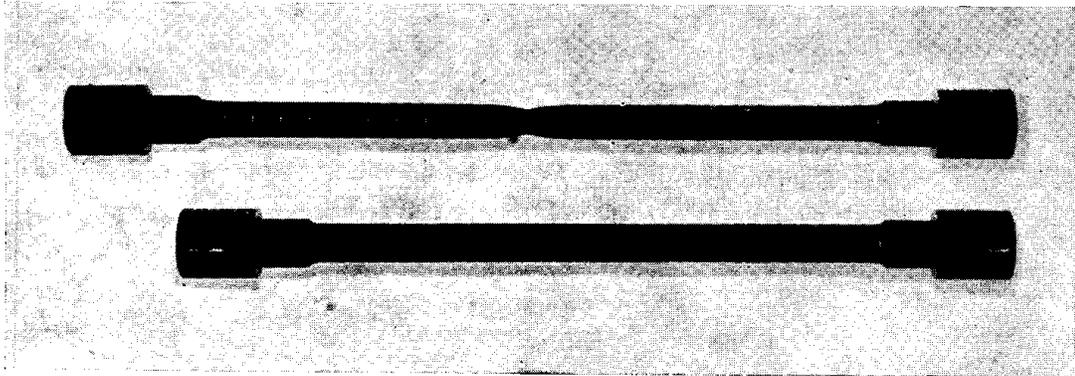


FIG. 9-5

Dopo un certo allungamento a tensione costante, il materiale si riprende dal collasso, e il diagramma $\sigma\varepsilon$ ripiglia a salire (tratto $S''R$); ma l'ingiuria subita è rivelata dal valore molto più basso del rapporto $d\sigma/d\varepsilon$. Anche in questa fase se si scarica il provino a partire da un punto qualsiasi della $S''R$ il ritorno avviene secondo una retta parallela alla OP .

Il diagramma $\sigma\varepsilon$, dopo avere raggiunto un massimo in R , flette verso il basso, finchè per $\varepsilon = \varepsilon_r$ (*allungamento di rottura*) la barra si spezza.

Questo fenomeno è solo apparente, e dipende dal fatto che in realtà il diagramma registrato dalla macchina presenta in ordinata la F ; per ottenere la σ , occorre dividere la F per l'area effettiva A' della sezione normale, che diminuisce all'aumentare di ε , e molto sensibilmente appena superato il limite σ_s . Con tale modifica il diagramma assume l'andamento riportato in tratteggio nella fig. 9-3. In genere però si adotta come *tensione di rottura* σ_r quella corrispondente al punto R del diagramma.

Il fenomeno della contrazione trasversale per $\sigma > \sigma_s$ non è più identico in tutte le sezioni, ma si accentra in una zona ristretta della barra (*strizione*); ciò si nota bene nella fig. 9-5, dove è riportata una barra a rottura avvenuta. Deriva da ciò che la ε_r del diagramma registrato è tanto più elevata quanto più corto è il tratto l cui ci si riferisce per la misura del Δl e quindi di ε ; ε_r ha un valore reale, che si può ottenere effettuando le misure nella sola zona di strizione, o meglio con prove di piegamento, ed attinge valori $3 \div 4$ volte maggiori di quelli apparenti ottenuti rapportando il Δl di rottura al valore l iniziale fissato dai regolamenti. La deformazione massima che si verifica prima della rottura ha un cospicuo valore tecnico e quindi commerciale, ma a distinguere in tal senso i materiali è sufficiente la ε_r apparente, purchè misurata su una lunghezza standard; ed è essa in genere che si definisce come *allungamento di rottura*.

Se dopo l'azione di una σ che ha provocato una deformazione permanente ε^* (fig. 9-4) si ricarica il provino, il diagramma $\sigma\varepsilon$ ripercorre il tratto LM; apparentemente quindi l'escursione in campo plastico ha in-

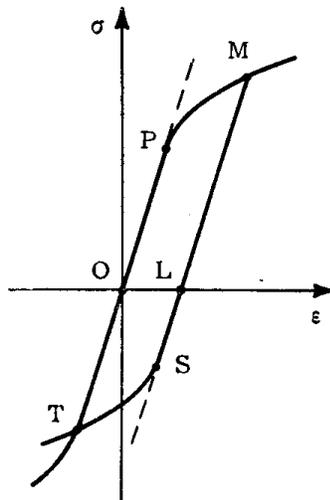


FIG. 9-6

crementato la tensione al limite di elasticità (*fenomeno di incrudimento, o effetto Bauschinger*).

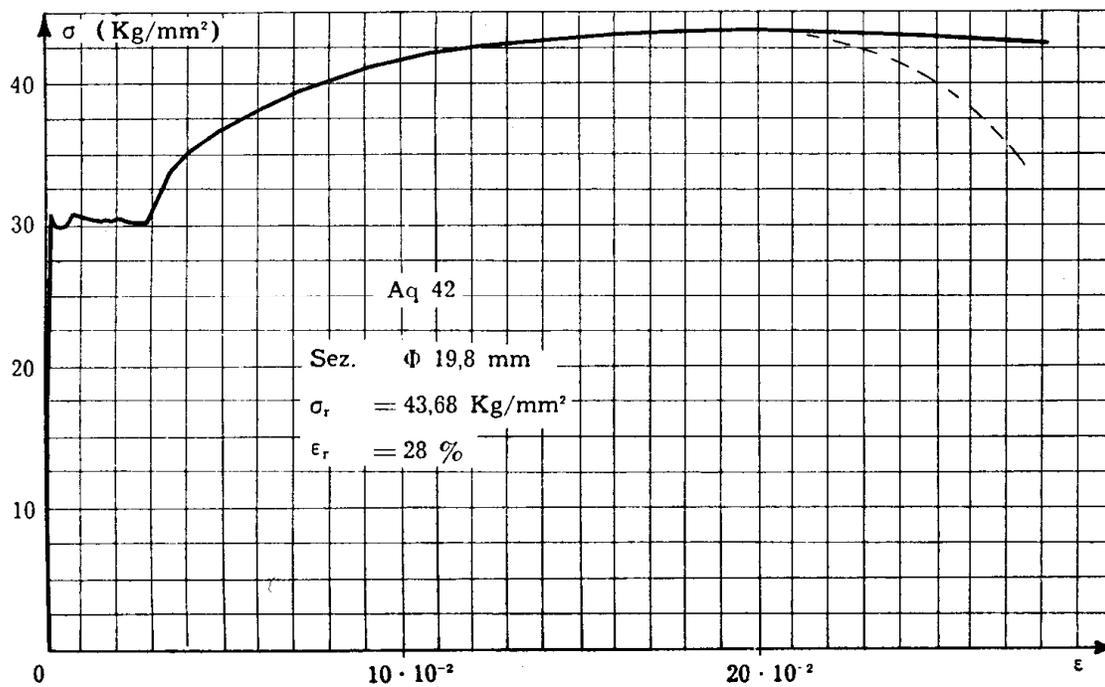


FIG. 9-7 a

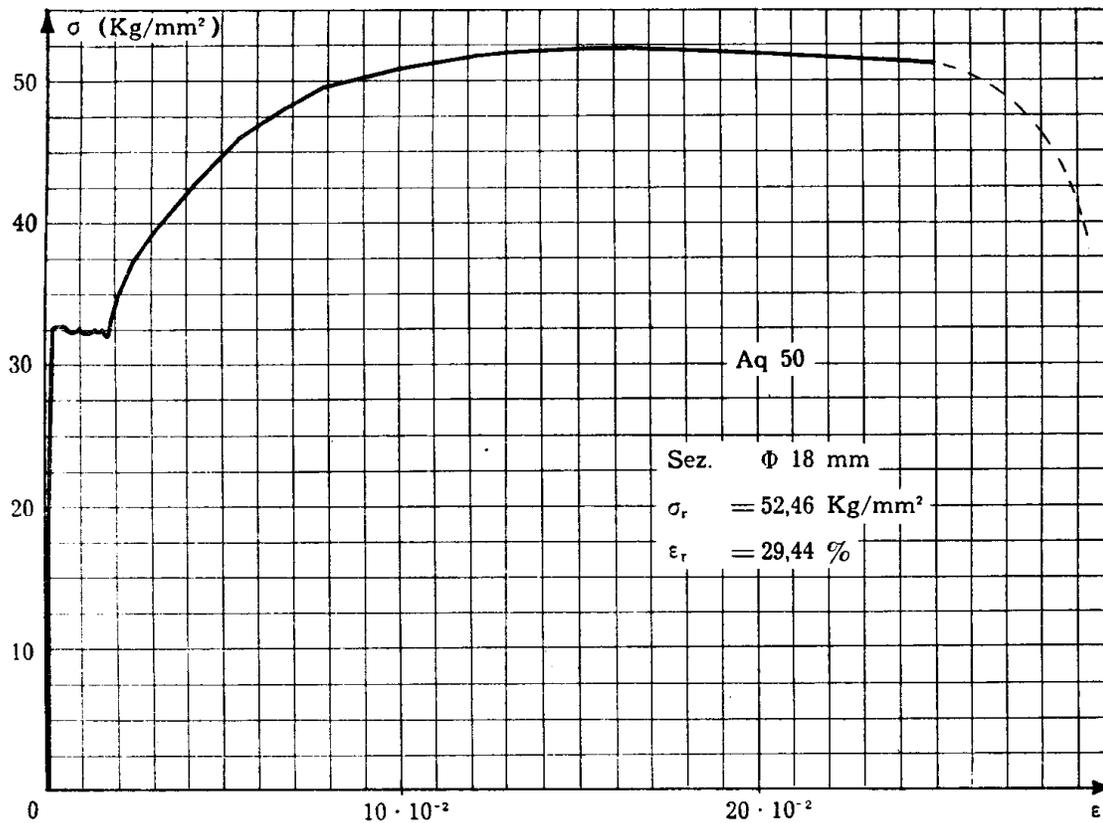


FIG. 9-7 b

In realtà una plasticizzazione di allungamento eleva il limite elastico a trazione, ma abbassa quello a compressione, e l'intero campo $+\sigma_e$, $-\sigma_e$ della fase elastica resta invariato; e cioè la proiezione verticale del segmento MS è uguale a quella del segmento PT (fig. 9-6).

Con riferimento alla stessa figura, si osserva che se il comportamento in trazione è uguale a quello in compressione, il punto del diagramma $\sigma\varepsilon$ cui corrisponde nella fase di ritorno una deformazione plastica negativa uguale a quella positiva precedente è proprio il punto T estremo del tratto elastico iniziale TP. Il lavoro perduto per deformazioni plastiche e per unità di volume è pari, in un ciclo completo, all'area della superficie OMST, e cioè circa a $2\sigma_e \varepsilon^*$, non ugualmente diviso nelle due fasi di andata e di ritorno.

Per i materiali molto duttili, come gli acciai dolci o semiduri (fig. 9-7), o particolari leghe di alluminio, sia il tratto S'S'' che quello S''R sono molto marcati; il diagramma $\sigma\varepsilon$ può assimilarsi con ottima approssimazione a quello della fig. 9-8 ove il tratto elastico plastico ES della fig. 9-3

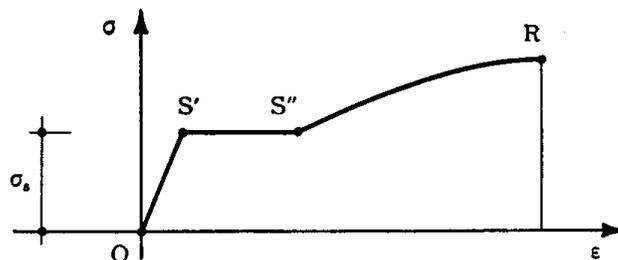


FIG. 9-8

è trascurato, e il tratto S''R è una parabola, o, ancora con approssimazione molto buona, a quello della fig. 9-9, ove il tratto S''R è rettilineo.

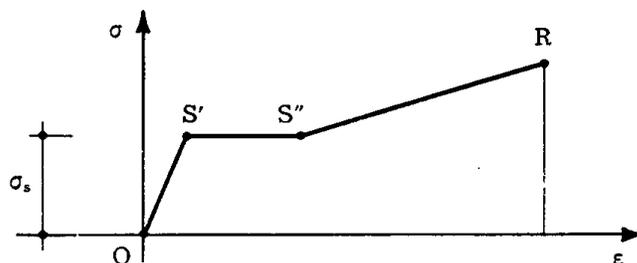


FIG. 9-9

Altri due diagrammi ideali meno approssimati, ma di più facile utilizzazione sono quelli della fig. 9-10, derivato dalla fig. 9-9 trascurando il tratto S'S'' (*diagramma ideale bilatero con incrudimento*) e della fig. 9-11,

costituito dal segmento OA del tratto elastico, e da un segmento AB orizzontale per il tratto plastico. Quest'ultimo tipo di diagramma è il cosiddetto

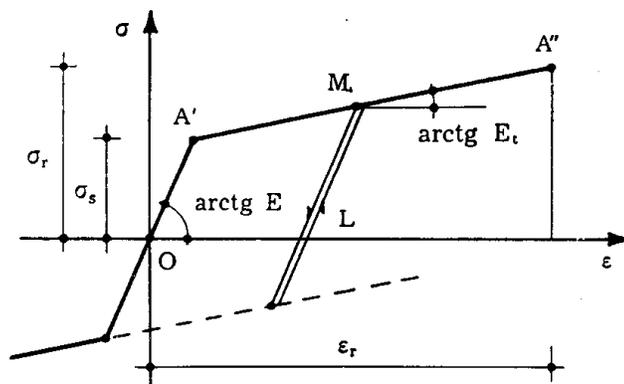


FIG. 9-10

detto *diagramma elasto plastico ideale*, e la sua adozione è a base dei più utili procedimenti di calcolo a rottura. La tensione corrispondente

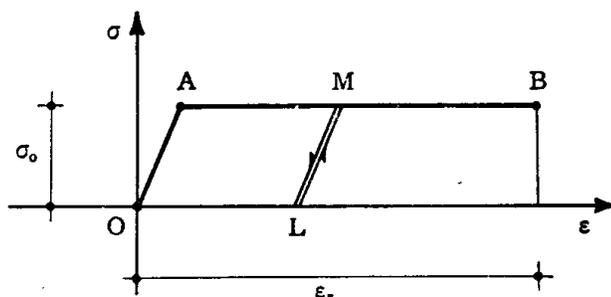


FIG. 9-11

al tratto orizzontale (*tensione limite* σ_0) si assume prudenzialmente pari a quella di snervamento. Nelle figg. 9-7 a e 9-7 b sono riportati i diagrammi $\sigma\epsilon$ per un Aq 42 ed un Aq 50.

Gli acciai molto duri sono invece caratterizzati da un diagramma $\sigma\epsilon$ come quello della fig. 9-12 (non riportato fino a rottura), che si riferisce ad un acciaio armonico; per questi l'approssimazione della fig. 9-10 è ancora bene accettabile, un po' meno forse quella della fig. 9-11; molto minore è la ϵ_r . In questi tipi di acciai, di grande uso nelle costruzioni in conglomerato precompresso, si può dire che il diagramma $\sigma\epsilon$ si riduce al tratto OS della fig. 9-3, e il tratto ES non è più certo trascurabile. L'effetto Bauschinger inoltre riveste nel caso in esame particolare importanza. Un limite di snervamento non esiste; il limite di elasticità è pur esso di difficile reperimento, e per gli acciai armonici è sostituito agli effetti pratici dai limiti convenzionali di elasticità al 0,1 % ed al

0,2 % (limiti elastici all'1 ed al 2 per mille) intendendo per tali quelle tensioni cui corrisponde una ε^* del 0,1 % e del 0,2 %; esse si indicano coi simboli $\sigma_{f0,1}$ e $\sigma_{f0,2}$. La determinazione della $\sigma_{f0,2}$ si esegue tracciando il diagramma $\sigma\varepsilon$ e riportando dal punto dell'asse delle ε di ascissa 0,002 la parallela alla tangente in O al diagramma stesso (fig. 9-12).

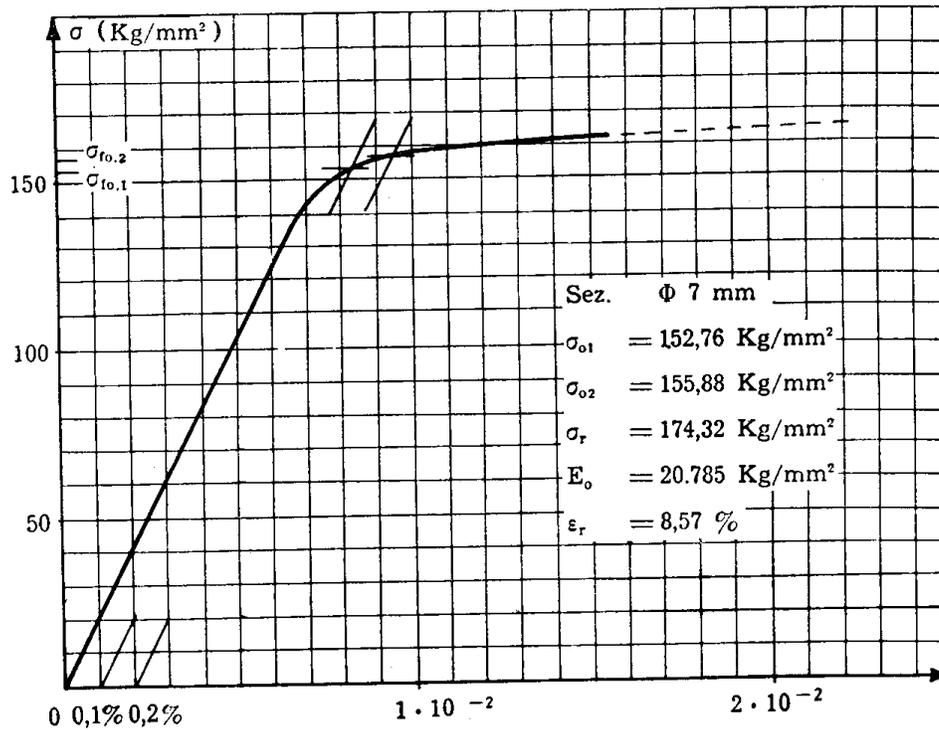


FIG. 9-12

Prove a compressione su materiali metallici non sono di uso corrente: i diagrammi $\sigma\varepsilon$ a compressione hanno lo stesso andamento di quelli a trazione, ed i valori della σ_s e σ_r sono in genere maggiori. In pratica i due diagrammi a trazione e compressione si assumono coincidenti, a vantaggio di sicurezza. I materiali lapidei (conglomerati, pietre artificiali e naturali) hanno un comportamento del tutto diverso da quello dei materiali metallici: i due diagrammi a trazione e a compressione, pur avendo aspetti tra loro analoghi, sono caratterizzati da valori delle tensioni di crisi a trazione molto più bassi di quelli a compressione, ed il tratto di deformazione a tensione costante è sempre assente. Inoltre i diagrammi $\sigma\varepsilon$ hanno per tutti i materiali lapidei l'andamento riportato nella fig. 9-13, relativo ad un conglomerato cementizio; non esiste un tratto rettilineo corrispondente al comportamento elastico lineare. Il rapporto $d\sigma/d\varepsilon$ nell'origine ($\sigma=0$) prende nome di *modulo iniziale* E_o ; in tutti gli altri punti $d\sigma/d\varepsilon$ è minore di E_o , ed a parità del valore assoluto della tensione è più elevato per la compressione che per

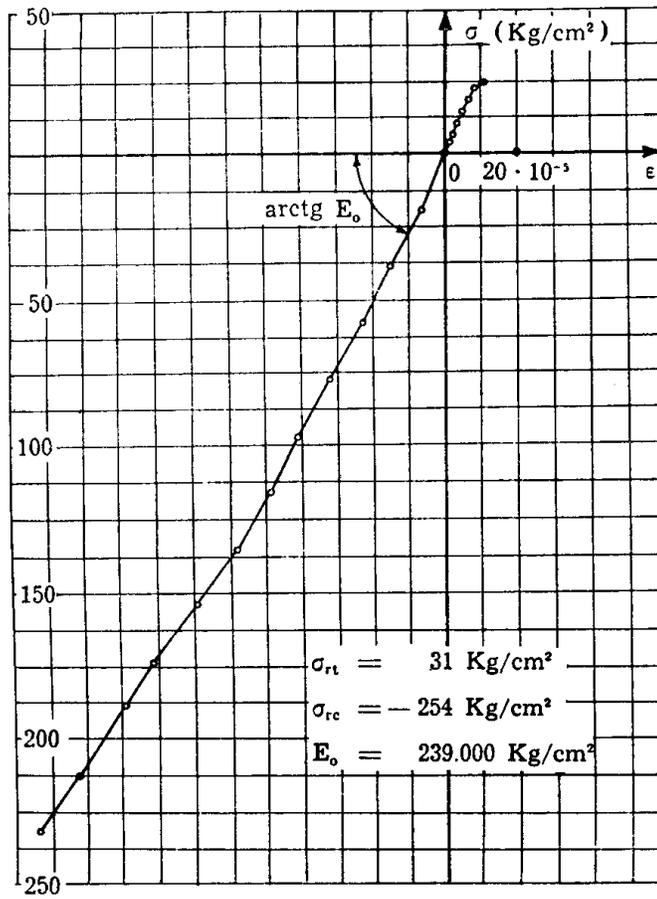


FIG. 9-13 a

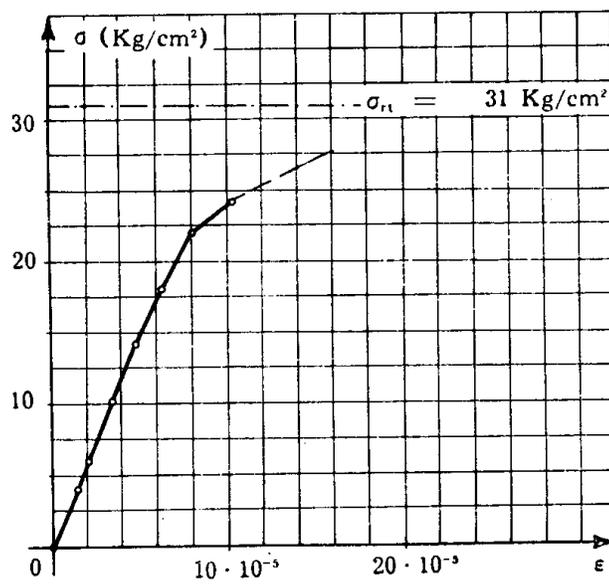


FIG. 9-13 b

la trazione. I diagrammi trazione, compressione della fig. 9-13 a sono relativi allo stesso conglomerato, ed eseguiti su provini $15 \times 15 \times 60$ cm a compressione, $10 \times 10 \times 60$ cm a trazione; di necessità essi non sono riportati fino a rottura. Il diagramma di fig. 9-13 b fornisce l'ingrandimento della curva di trazione relativa alla stessa prova. Le prove di laboratorio più comuni per materiali lapidei sono quelle di compressione, e per di più limitate alla determinazione della sola tensione di rottura σ_{rc} ; il valore di questa tensione varia di molto con la forma del provino, e si distingue in *cubica* e *prismatica*.

Le prove a trazione sui materiali lapidei sono molto difficoltose; pressochè impossibili poi sia a trazione che a compressione sui materiali sciolti, come le terre. In questo caso è molto più semplice eseguire delle prove in regime triassiale, sottoponendo un provino a tre tensioni principali, in genere di compressione, di cui due uguali e l'altra variabile, in più o in meno rispetto al valore delle altre due, fino a raggiungere la crisi; un criterio di resistenza per le terre deve quindi basarsi su tale tipo di prova.

3. Gli adattamenti plastici.

L'allungamento di rottura ϵ_r è uno dei più significativi indici di qualità del materiale; ad esso il costruttore tiene in modo particolare, perchè un notevole valore di ϵ_r significa la possibilità che nei punti più sollecitati del corpo si verificano deformazioni permanenti tali da far migrare le tensioni da quelle zone alle altre meno impegnate, con una più

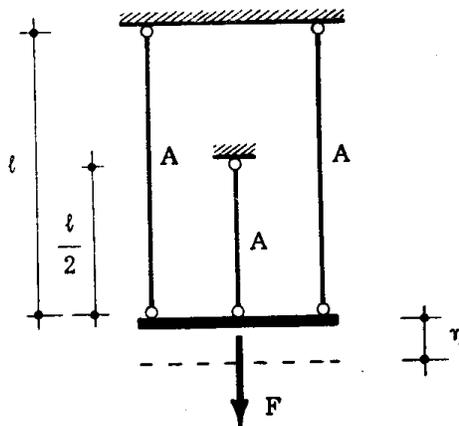


FIG. 9-14

uniforme distribuzione delle sollecitazioni, il che permette una maggiore economia in fase di progettazione, o una più elevata sicurezza nell'esercizio. L'esempio che segue varrà a giustificare tale osservazione.

Si consideri l'insieme della fig. 9-14, costituito da tre aste dello stesso

materiale e della stessa sezione retta, di lunghezze l , $l/2$, l , vincolate con cerniera in un estremo, e collegate da una piastra rigida all'altro; il materiale sia caratterizzato da un diagramma $\sigma\varepsilon$ elasto plastico ideale (fig. 9-11).

Alla piastra sia applicata in condizioni di simmetria la forza F ; le tre aste si allungano tutte della stessa quantità η , spostamento della piastra. Poichè il coefficiente di dilatazione ε nelle due aste lunghe l è metà di quello nell'asta lunga $l/2$, e così pure la tensione σ , la forza F genera gli sforzi normali $F/4$ nelle due aste lunghe l , ed $F/2$ nell'asta lunga $l/2$.

Con riferimento all'asta lunga $l/2$ si ha

$$\eta = \varepsilon \frac{l}{2} = \frac{F}{2AE} \frac{l}{2} = \frac{F l}{4AE}; \quad (a)$$

il diagramma $F\eta$ è perciò una retta passante per l'origine ed inclinata di

$$\arctg \frac{4AE}{l}$$

sull'asse delle η (fig. 9-15).

Quanto sopra è valido finchè nell'asta più sollecitata, e cioè quella di

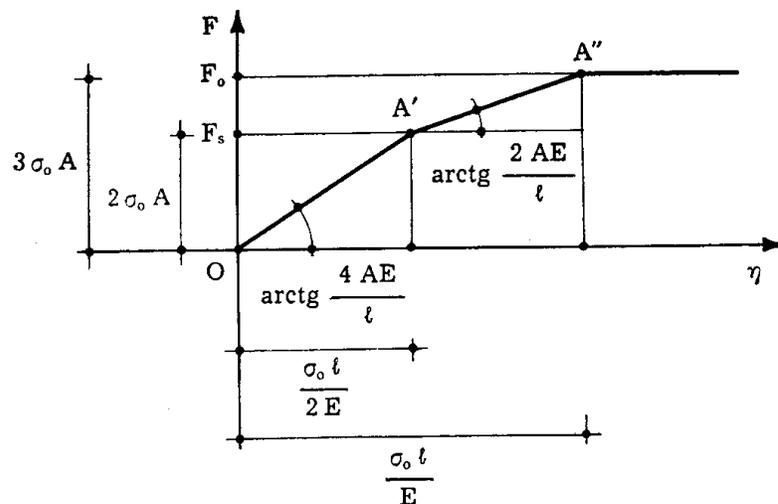


FIG. 9-15

lunghezza $l/2$, è raggiunta la tensione limite σ_0 , e cioè fino al valore F_s di F fornito dalla relazione

$$\frac{F_s}{2} = \sigma_0 A$$

da cui

$$F_s = 2 \sigma_0 A . \quad (b)$$

Per $F > F_s$, l'asta lunga $l/2$ si allunga senza subire variazioni di tensione, e cioè sotto la tensione limite σ_0 ; la forza $F - F_s$ è assorbita quindi solo dalle due aste lunghe l .

Con riferimento a queste si ha

$$d\eta = l d\varepsilon = \frac{dF}{2 A E} l ; \quad (c)$$

e cioè il diagramma $F\eta$ è ancora una retta (fig.9-15), ma inclinata di

$$\text{arctg} \frac{2 A l}{E}$$

sull'asse delle η . La forza F può raggiungere il valore limite

$$F_0 = 3 \sigma_0 A \quad (d)$$

per cui tutte le aste sono plasticizzate; ma ciò può verificarsi solo se l'allungamento plastico dell'asta $l/2$ non attinge l'allungamento di rottura prima che le due aste l siano completamente plasticizzate. Per $F = F_0$ il comportamento nelle aste lunghe è ancora elastico, e quindi in dette aste è $\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E}$; nell'asta $l/2$ la ε è doppia, e cioè pari a $\frac{2 \sigma_0}{E}$. Perchè si possa attingere il valore F_0 deve essere perciò

$$\varepsilon_r \geq 2 \frac{\sigma_0}{E} . \quad (e)$$

Se $\varepsilon_r < 2 \frac{\sigma_0}{E}$, il valore massimo che F può attingere è pari a

$$2 \sigma_0 A + \sigma_0 A \frac{\varepsilon_r - \frac{\sigma_0}{E}}{\frac{\sigma_0}{E}} . \quad (f)$$

Passando perciò da un materiale privo di deformazioni plastiche ($\varepsilon_r = \frac{\sigma_0}{E}$) ad un materiale duttile, sia pure nel grado molto modesto che la (e) richiede, il coefficiente di sicurezza si esalta nel rapporto $3/2$, a pa-

rità di struttura e quindi di costo, mentre a parità di sicurezza si può realizzare una economia nel rapporto 2/3.

Il prodotto $\sigma_r \varepsilon_r$ prende nome di *coefficiente di qualità*; esso è poco discosto dall'area compresa tra il diagramma $\sigma \varepsilon$ e l'asse delle ascisse:

$$\sigma_r \varepsilon_r \approx \int^{\varepsilon_r} \sigma d\varepsilon,$$

e misura perciò il lavoro compiuto dalla forza F applicata al provino fino alla rottura, riferito all'unità di volume del provino stesso. Il prodotto $\sigma_r \varepsilon_r$ compendia in un solo numero le due qualità precipue del materiale, e cioè la resistenza alla rottura e l'adattabilità plastica.

L'esempio della fig. 9-14 permette di dare una evidente rappresentazione grafica delle quantità definite nel capitolo precedente, e di verificare alcune delle proprietà enunciate in quella sede. Se a partire da un punto M del tratto $A'A''$ (fig. 9-15) la forza F diminuisce, le tensioni diminuiscono in tutte e tre le aste in fase elastica, mentre la ε^* plastica nell'asta centrale resta invariata. Si trae da ciò che il diagramma $F\eta$

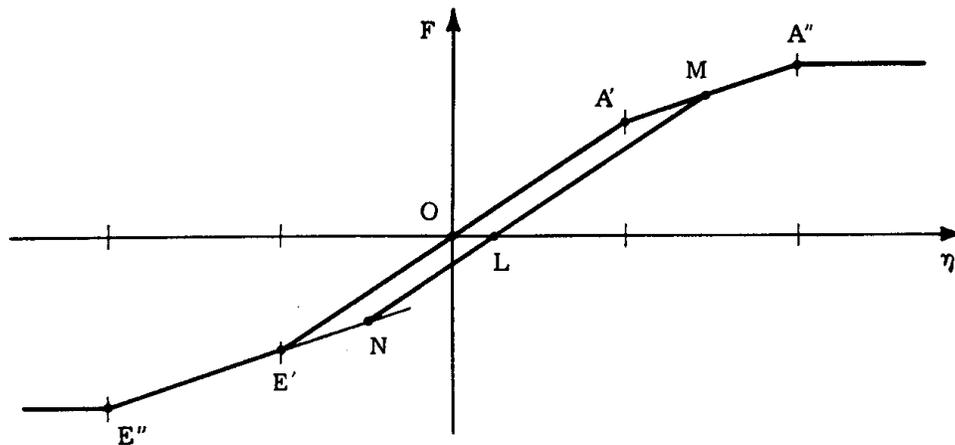


FIG. 9-16

per F decrescente è una retta ML parallela alla retta OA' (fig. 9-16). Il comportamento in fase elastica ha luogo finchè la σ nell'asta centrale non raggiunge il valore limite a compressione σ''_0 ; è perciò

$$\frac{F_M - F_N}{2A} = \sigma'_0 - \sigma''_0$$

da cui

$$F_M - F_N = F_{A'} - F_{E'}.$$

Se è $\sigma'_o = -\sigma''_o = \sigma_o$, è pure $OA' = OE'$.

Ad una ε^* generica nell'asta centrale (fig. 9-17) corrisponde una forza

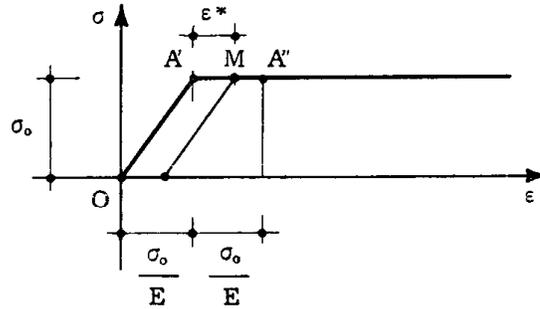


FIG. 9-17

$F + \Delta F$ ed uno spostamento $\eta + \Delta\eta$. Questi incrementi sono forniti da

$$\Delta F : \sigma_o A = \varepsilon^* : \frac{\sigma_o}{E}$$

$$\Delta\eta : \frac{\sigma_o}{2E} l = \varepsilon^* : \frac{\sigma_o}{E},$$

e cioè si ha (fig. 9-18)

$$\Delta F = A E \varepsilon^*$$

$$\Delta\eta = \varepsilon^* \frac{l}{2};$$

il punto M di coordinate $F + \Delta F$, $\eta + \Delta\eta$ si trova sul segmento $A'A''$.

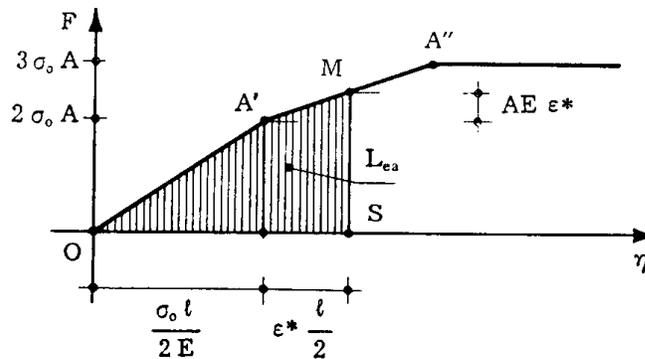


FIG. 9-18

L'area del poligono $OA'MS$ rappresenta il lavoro L_{ea} svolto dalla forza

F nel passaggio da zero al valore $2\sigma_0 A + A E \varepsilon^*$, e cioè nella fase di andata. L'area del triangolo LMS (fig. 9-19) rappresenta il lavoro L_{er}

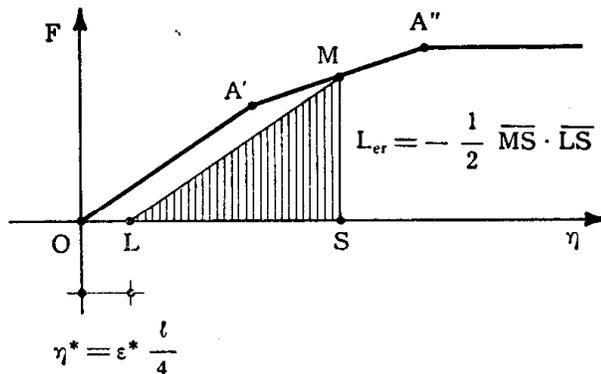


FIG. 9-19

svolto dalla forza F nel passaggio dal valore $2\sigma_0 A + A E \varepsilon^*$ al valore zero, e cioè nella fase di ritorno; esso è negativo.

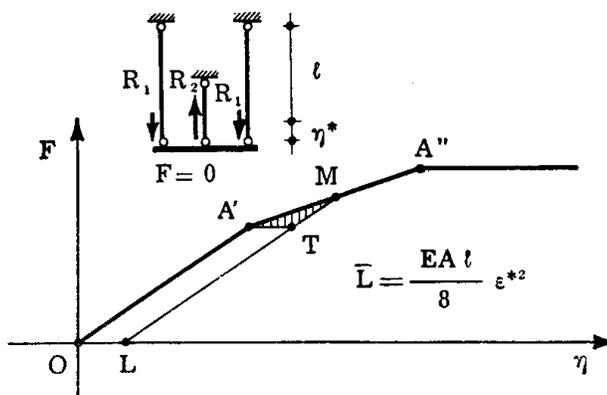


FIG. 9-20

Per $F=0$ è presente nella struttura uno stato di sollecitazione (fig. 9-20), e cioè due forze \bar{R}_1 nelle due aste laterali, ed una forza \bar{R}_2 nell'asta centrale. Risulta

$$\frac{\bar{R}_1 l}{EA} = \frac{l}{2} \varepsilon^* + \frac{\bar{R}_2 l}{2 EA} = \eta^* \quad (g)$$

$$2 \bar{R}_1 + \bar{R}_2 = 0$$

da cui si trae

$$\bar{R}_1 = \frac{EA}{4} \varepsilon^*$$

$$\bar{R}_2 = - \frac{EA}{2} \varepsilon^*$$

Dalla prima delle (g) si ha poi

$$\eta^* = \frac{\ell}{4} \varepsilon^* . \quad (h)$$

Per $F=0$ esiste quindi nella struttura un'energia di deformazione elastica vincolata dovuta alla distorsione ε^* (cap. VIII § 6); essa è

$$\bar{L} = 2 \frac{\bar{R}_1^2 \ell}{2 EA} + \frac{\bar{R}_2^2 \ell}{4 EA} = \frac{EA \ell}{8} \varepsilon^{*2} . \quad (i)$$

Essa è pari al prodotto $\frac{\Delta F \eta^*}{2}$, ed è fornita quindi dall'area del triangolo $A'TM$ (fig. 9-20).

Il lavoro complementare relativo alle distorsioni (cap. VIII § 11) è dato da

$$\bar{L}^* = \bar{R}_2 \varepsilon^* \frac{\ell}{2} = - \frac{EA \ell}{4} \varepsilon^{*2} , \quad (l)$$

e cioè dall'area del parallelogramma $A'RMT$ (fig. 9-21) considerata ne-

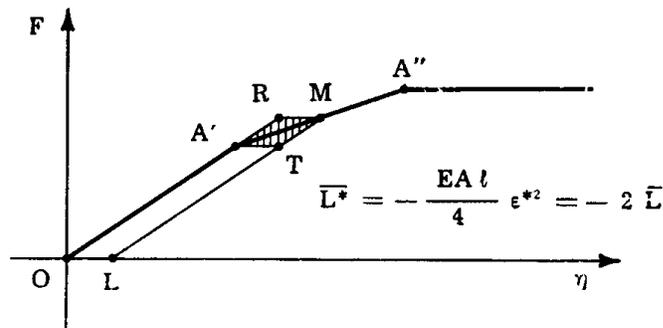


FIG. 9-21

gativa; si conferma così la (8-37):

$$\bar{L}^* = - 2 \bar{L} .$$

Il lavoro complementare relativo alle forze è dato da

$$L_F^* = \frac{2 \sigma_0 A + AE \varepsilon^*}{2 A} \varepsilon^* A \frac{\ell}{2} = \frac{A \ell}{2} \sigma_0 \varepsilon^* + \frac{EA \ell}{4} \varepsilon^{*2} \quad (m)$$

e cioè dall'area del parallelogramma ORML (fig. 9-22).

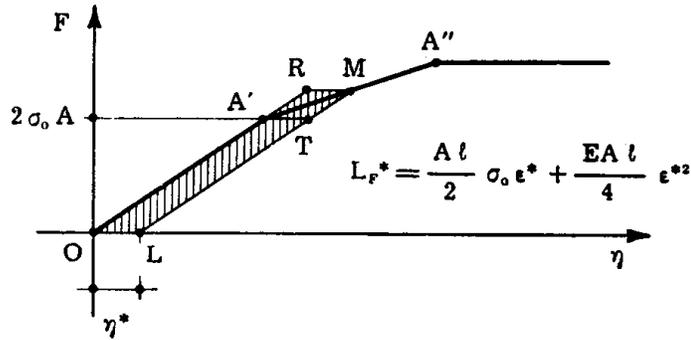


FIG. 9-22

Dal confronto delle suddette espressioni si ha (fig. 9-23)

$$\mathcal{L}_e = L_{ea} + L_{er} = L_F^* + \bar{L}^* + \bar{L} = \mathcal{L}_p + \bar{L},$$

che è conferma della (8-7), e di quanto detto al § 6 del cap. VIII. Il lavoro complementare coincide nel caso esaminato con quello perduto.

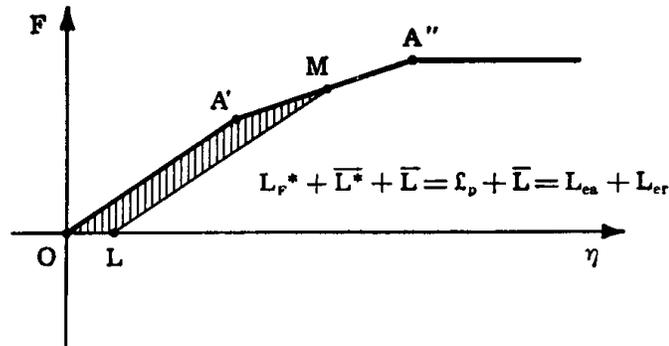


FIG. 9-23

Un comportamento del tutto analogo a quello ora descritto presenta

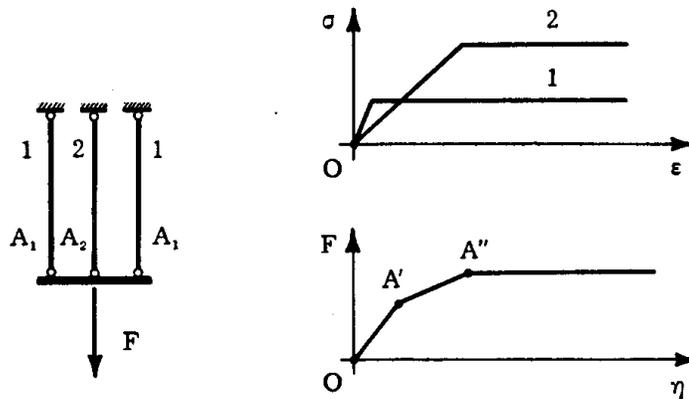


FIG. 9-24

la struttura della fig. 9-24, costituita da tre aste di uguale lunghezza ma

con due differenti tensioni limiti; ad un primo tratto elastico OA' del diagramma $F\eta$ segue, non appena verificatesi le prime plasticizzazioni, un tratto elasto plastico $A'A''$, e poi un tratto orizzontale esteso fino a rottura. Se le aste sono cinque, con tre tensioni limiti (fig. 9-25), i tratti elasto plastici sono due, $A'A''$ ed $A''A'''$; al limite, aumentando il numero delle aste, il tratto elasto plastico tende ad una curva continua. E' questa

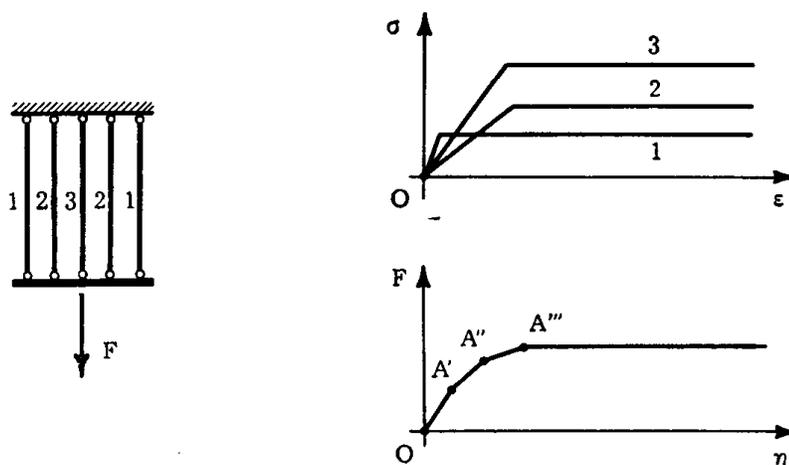


FIG. 9-25

l'elegante spiegazione dell'effetto Bauschinger, dovuta al Colonnetti: il provino è formato da parecchi elementi affiancati, tutti a comportamento elasto plastico perfetto (fig. 9-11), ma con tensioni limiti diverse, e può quindi schematizzarsi in una struttura analoga a quella della fig. 9-25. Il tratto curvilineo del diagramma $\sigma\epsilon$ (fig. 9-12) corrisponde alle successive plasticizzazioni degli elementi.

4. Criterio di Beltrami.

Degli innumeri criteri finora proposti si prenderanno in esame solo quelli più interessanti dal punto di vista storico-dialettico o applicativo. Il posto di onore spetta, a nostro avviso, al criterio di Beltrami, come capostipite di tutti i criteri energetici, in definitiva i più agili tra i più vicini al vero.

Secondo *Beltrami* (1885) ed *Haigh* (1920) nell'intorno di un punto le deformazioni permanenti si verificano quando l'energia di deformazione dell'intorno, e cioè il potenziale elastico nel punto, raggiungono un valore limite. La condizione di plasticizzazione di Beltrami scritta (9-3) in funzione delle tensioni principali di esercizio e del coefficiente di sicurezza è perciò (8-24)

$$\frac{s^2}{2E} \left[\sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\eta}^2 + \sigma_{\zeta}^2 - \frac{2}{m} (\sigma_{\xi} \sigma_{\eta} + \sigma_{\eta} \sigma_{\zeta} + \sigma_{\zeta} \sigma_{\xi}) \right] = \varphi_0. \quad (n)$$

In regime monoassiale, la tensione cui corrispondono le prime plasticizzazioni si assume in genere per i materiali duttili pari a quella di snervamento; si trascura cioè, come già detto, il tratto $\sigma_e \sigma_s$. Le due tensioni di snervamento a trazione e compressione si indicano rispettivamente con σ'_o e σ''_o ; per i materiali duttili si può supporre

$$\sigma'_o = -\sigma''_o = \sigma_o. \quad (8)$$

Nell'ipotesi (9-8), in regime monoassiale la (n) si scrive, per $s=1$, $\sigma_\xi = \sigma_o$, $\sigma_\eta = \sigma_\zeta = 0$,

$$\frac{\sigma_o^2}{2E} = \varphi_o. \quad (o)$$

Dalle (n) ed (o) si trae

$$s^2 \left[\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\zeta^2 - \frac{2}{m} (\sigma_\xi \sigma_\eta + \sigma_\eta \sigma_\zeta + \sigma_\zeta \sigma_\xi) \right] = \sigma_o^2. \quad (9)$$

La (9-9) è la condizione di plasticizzazione secondo Beltrami; da essa si ricava

$$s = \frac{\sigma_o}{\sqrt{\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\zeta^2 - \frac{2}{m} (\sigma_\xi \sigma_\eta + \sigma_\eta \sigma_\zeta + \sigma_\zeta \sigma_\xi)}}. \quad (10)$$

Poichè in regime monoassiale è

$$s = \frac{\sigma_o}{\sigma},$$

la tensione

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\zeta^2 - \frac{2}{m} (\sigma_\xi \sigma_\eta + \sigma_\eta \sigma_\zeta + \sigma_\zeta \sigma_\xi)} \quad (11)$$

si chiama *tensione equivalente* connessa con il regime $\sigma_\xi \sigma_\eta \sigma_\zeta$, intendendo come tale la tensione cui in regime monoassiale sarebbe connesso un grado di sicurezza pari a quello relativo allo stato tensionale $\sigma_\xi \sigma_\eta \sigma_\zeta$.

Nella (9-9) le $\sigma_\xi \sigma_\eta \sigma_\zeta$ sono quelle di esercizio; se la stessa relazione si scrive per $s=1$, le $\sigma_\xi \sigma_\eta \sigma_\zeta$ sono quelle di crisi, e l'equazione

$$\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\zeta^2 - \frac{2}{m} (\sigma_\xi \sigma_\eta + \sigma_\eta \sigma_\zeta + \sigma_\zeta \sigma_\xi) = \sigma_o^2 \quad (12)$$

rappresenta la superficie limite già definita al § 1 di questo capitolo.

Per materiali isotropi la superficie limite deve essere tale da rimanere invariata permutando comunque gli assi $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \sigma_\zeta$; e cioè ruotando la superficie di 120° intorno alla retta giacente nell'ottante positivo ed equiinclinata sui tre assi (trisettrice dell'ottante positivo, di equazione $\sigma_\xi = \sigma_\eta = \sigma_\zeta$) si riottiene la stessa superficie.

La suddetta trisettrice si chiama *asse della superficie limite*.

Il *Meldahl* ha proposto (1944) di rappresentare la superficie limite attraverso sezioni eseguite con piani equidistanti ortogonali all'asse; più interessanti sono le tre sezioni secondo i piani coordinati, tra loro uguali, che rappresentano le curve limiti relative ad uno stato tensionale piano (fig. 9-30). Notevoli anche le tre sezioni con uno dei tre piani definiti ciascuno da un asse coordinato e dall'asse della superficie limite (piani $\sigma_\xi = \sigma_\eta, \sigma_\eta = \sigma_\zeta, \sigma_\zeta = \sigma_\xi$); tali sezioni, tra loro uguali (fig. 9-26), rappre-

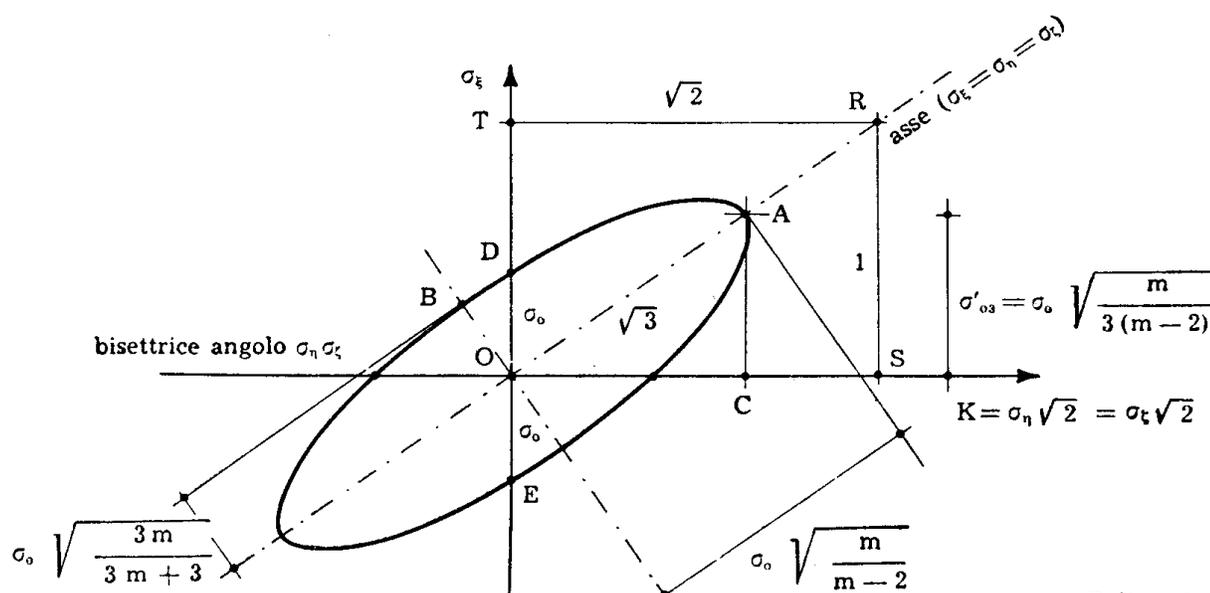


FIG. 9-26

Beltrami

sentano (riducendo le ascisse relative all'asse non coordinato nel rapporto $1/\sqrt{2}$) le curve limiti relative agli stati tensionali con due tensioni principali uguali, particolarmente utili nel caso degli equilibri delle terre.

La superficie limite connessa con il criterio di Beltrami è una quadrica, come si trae dall'equazione (9-12); per le proprietà generali delle superfici limiti ora enunciate, un asse principale di tale quadrica deve coincidere con la trisettrice dell'ottante positivo, e la quadrica stessa deve essere di rotazione intorno a tale asse. La sezione con il piano $\sigma_\eta = \sigma_\zeta$ (fig. 9-26) si ottiene dalla (9-12) ponendo in essa

$$\sigma_\eta = \sigma_\zeta = \frac{k}{\sqrt{2}} ; \quad (p)$$

si ha così

$$\sigma_{\xi}^2 + \left(1 - \frac{1}{m}\right) k^2 - \frac{4}{m\sqrt{2}} \sigma_{\xi} k = \sigma_0^2. \quad (13)$$

La (9-13) è un'ellisse (*) per $-1 < 1/m < 1/2$, e degenera in due rette parallele per $1/m = 1/2$, e per $1/m = -1$; perciò la quadrica (9-12) è un ellissoide per $-1 < 1/m < 1/2$, un cilindro per $1/m = 1/2$, due piani paralleli per $1/m = -1$.

(*) La conica

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2 a_{12} xy + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0$$

si distingue come segue:

$$C_{33} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 \begin{cases} > 0 \text{ ellisse} \\ = 0 \text{ parabola} \\ < 0 \text{ iperbole} \end{cases}$$

Nel caso in esame è

$$C_{33} = 1 - \frac{1}{m} - \frac{2}{m^2},$$

positivo per $-1 < 1/m < 1/2$, nullo per $1/m = 1/2$ ed $1/m = -1$ (e pari ad 1 per $1/m = 0$).

Per $1/m = 1/2$ ed $1/m = -1$ risulta però

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

e questa è la condizione necessaria e sufficiente perchè la conica degeneri in una coppia di rette (si ricordi che le coordinate omogenee della intersezione delle due rette sono proporzionali ai complementi algebrici degli elementi di una linea di A). Poichè i minori di A non sono tutti nulli, le due rette sono distinte (si ricordi infatti che condizione necessaria e sufficiente perchè le due rette coincidano è che tutti i minori di A siano nulli). Perciò la conica è una ellisse per $-1 < 1/m < 1/2$, e degenera in due rette per $1/m = 1/2$ ed $1/m = -1$. Le equazioni di queste sono (9-13)

$$\sigma_{\xi} - \frac{k}{\sqrt{2}} = \pm \sigma_0$$

$$\sigma_{\xi} + k\sqrt{2} = \pm \sigma_0$$

e quindi risultano parallele all'asse $\sigma_{\xi} = \sigma_{\eta} = \sigma_{\zeta}$, o ortogonali a questo.

La natura della (9-12) si può anche riconoscere direttamente. E' noto che data una quadrica

$$\begin{aligned}
 & a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + \\
 & + 2 a_{12} xy + 2 a_{13} xz + 2 a_{23} yz + \\
 & + 2 a_{14} x + 2 a_{24} y + 2 a_{34} z + \\
 & + a_{44} = 0
 \end{aligned}$$

con i relativi invarianti

$$I = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$J = a_{11} a_{22} + a_{11} a_{33} + a_{22} a_{33} - a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2$$

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

si ha

I	J	A_{44}	A	
+	+	+	$\left\{ \begin{array}{l} + \\ 0 \\ - \end{array} \right.$	ellissoide immaginario
				cono immaginario
-		-		ellissoide reale
qualsiasi caso diverso dai due precedenti		+	$\left\{ \begin{array}{l} + \\ 0 \\ - \end{array} \right.$	iperboloide a una falda
				-
				iperboloide a due falde
+	+	0	$\left\{ \begin{array}{l} - \\ 0 \end{array} \right.$	paraboloide ellittico
				cilindro ellittico
qualsiasi caso	-	0	$\left\{ \begin{array}{l} + \\ 0 \end{array} \right.$	paraboloide iperbolico
				cilindro iperbolico
+	0	0	0	cilindro parabolico
				-

Nel caso in esame è

$$\begin{aligned} I &= 3 \\ J &= 3 \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) \\ A_{44} &= 1 - \frac{3}{m^2} - \frac{2}{m^3} \\ A &= -\sigma_0^2 A_{44} ; \end{aligned}$$

per $-1 < 1/m < 1/2$ risulta $J > 0$, $A_{44} > 0$, $A < 0$, e quindi si ha un ellissoide reale, mentre per $1/m = 1/2$ risulta $J > 0$, $A_{44} = 0$, $A = 0$, e cioè si ha un cilindro ellittico, e per $1/m = -1$ risulta $J = 0$, $A_{44} = 0$, $A = 0$, e cioè si ha un cilindro parabolico, che per ragioni di simmetria degenera in una coppia di piani.

L'asse della superficie limite si ottiene in ogni caso sul piano σ_ξ k (fig. 9-26) congiungendo il punto R ($\sqrt{2}$, 1) con l'origine; infatti l'asse è equinclinato sui tre assi, e quindi

$$\cos \widehat{\text{ROT}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

da cui

$$\text{sen } \widehat{\text{ROT}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{tg } \widehat{\text{ROT}} = \sqrt{2} .$$

Dunque nel caso in esame la retta OR è uno degli assi dell'ellisse (9-13) sezione dell'ellissoide di Beltrami con il piano $\sigma_\eta = \sigma_\zeta$. Ponendo

$$k = \sigma_\xi \sqrt{2}$$

(equazione della retta OR) dalla (9-13) si ha

$$k = \sigma_0 \sqrt{\frac{2}{3} \frac{m}{m-2}}$$

e quindi

$$\text{AC} = \sigma_0 \sqrt{\frac{m}{3(m-2)}} \quad (\text{q})$$

Il valore di AC è quello della *trazione idrostatica* di crisi σ'_{03} ($\sigma_\xi = \sigma_\eta = \sigma_\zeta > 0$).

Dalla (q) si ottiene il valore del semiasse OA

$$OA = \frac{AC}{\cos \widehat{CAO}} = AC \sqrt{3} = \sigma_0 \sqrt{\frac{m}{m-2}} \quad (r)$$

La retta OB ha l'equazione

$$k = -\frac{\sigma_\xi}{\sqrt{2}};$$

ponendo questa espressione nella (9-13) si ha

$$k = \sigma_0 \sqrt{\frac{m}{3m+3}}$$

da cui si ottiene l'altro semiasse OB:

$$OB = \frac{k}{\cos \widehat{AOD}} = k \sqrt{3} = \sigma_0 \sqrt{\frac{3m}{3m+3}} \quad (s)$$

I segmenti OD ed OE sono pari a $\pm \sigma_0$; il valore σ''_{03} , *compressione idrostatica di crisi* ($\sigma_\xi = \sigma_\eta = \sigma_\zeta < 0$), è pari all'ordinata di F, e cioè a $-\sigma'_{03}$.

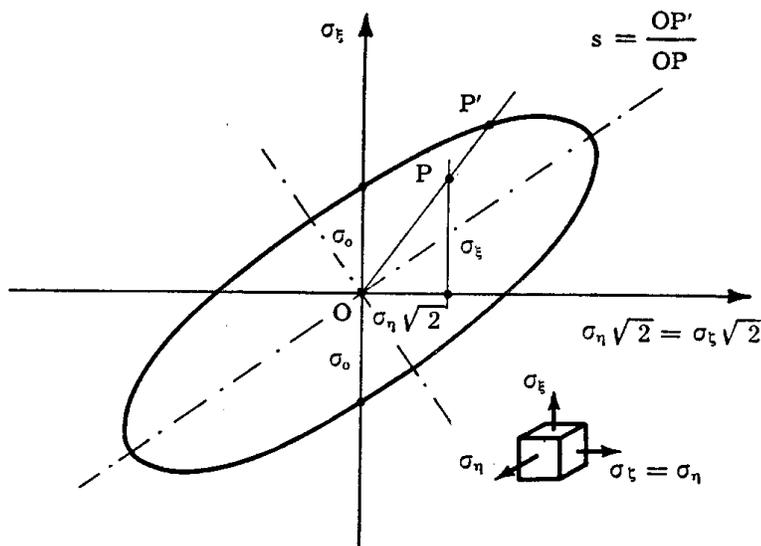


FIG. 9-27

Dato uno stato tensionale con due tensioni principali uguali ($\sigma_\zeta = \sigma_\eta$), si traccia il punto P (fig. 9-27) di coordinate $\sigma_\eta \sqrt{2}$ e σ_ξ ; il coefficiente di sicurezza è dato dal rapporto $\frac{OP'}{OP}$.

Per $1/m=0$ è $OA=OB=\sigma_0$, e l'ellisse si particolarizza (fig. 9-28 a) in un cerchio, per $1/m=-1$ è $OA=\sigma_0/\sqrt{3}$, $OB=\infty$, e l'ellisse

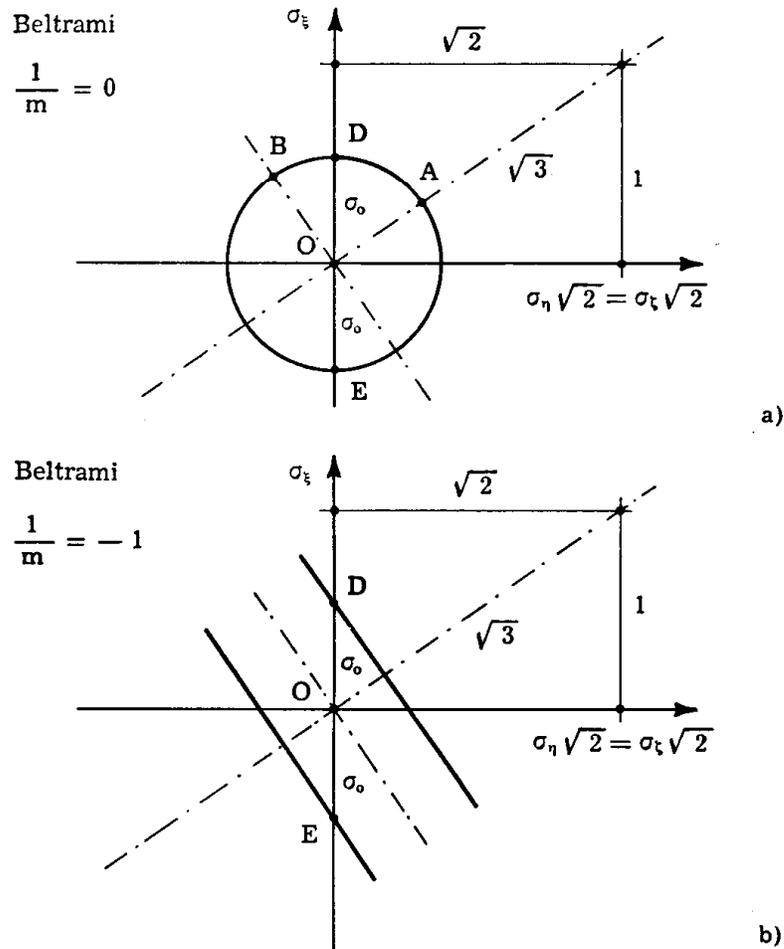


FIG. 9-28

si particolarizza in due rette ortogonali all'asse passanti per D ed E (fig. 9-28 b). Per $1/m=1/2$ è $OA=\infty$, $OB=\sigma_0 \sqrt{\frac{2}{3}}$, e l'equazione (9-13) diviene

$$\left(\sigma_{\xi} - \frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2 = \pm \sigma_0^2 \quad (t)$$

che è l'equazione delle due rette

$$\sigma_{\xi} - \frac{k}{\sqrt{2}} = \sigma_0$$

$$\sigma_{\xi} - \frac{k}{\sqrt{2}} = -\sigma_0$$

passanti per D ed E (fig. 9-29) e parallele alla retta OA.

In tal caso è

$$\sigma'_{03} = -\sigma''_{03} = \infty . \tag{u}$$

Nei tre casi suddetti l'ellissoide di Beltrami si particolarizza in una sfera di centro O e raggio σ_0 (per $\frac{1}{m} = 0$), o in una coppia di piani ortogonali all'asse (per $\frac{1}{m} = -1$), o in un cilindro la cui sezione retta è un cerchio di raggio $\sigma_0 \sqrt{\frac{2}{3}}$ (per $\frac{1}{m} = \frac{1}{2}$).

L'intersezione della (9-12) con uno dei piani coordinati, per esempio con il $\sigma_\xi \sigma_\eta$ (piano $\sigma_\tau = 0$), è una curva (*curva limite*) che racchiude la

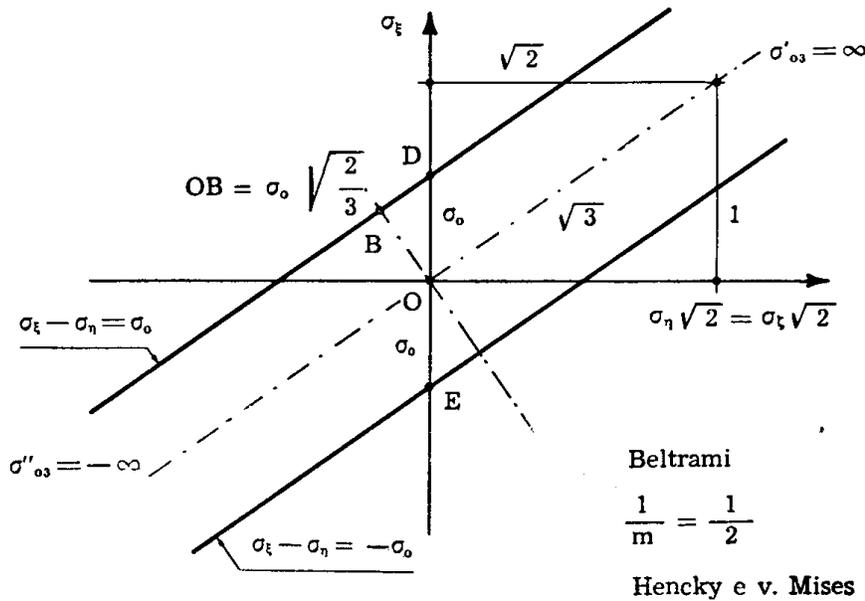


FIG. 9-29

zona di comportamento elastico nel caso degli stati tensionali piani. L'equazione di tale linea è

$$\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 - \frac{2}{m} \sigma_\xi \sigma_\eta = \sigma_0^2 \tag{14}$$

e rappresenta un'ellisse essendo sezione di un ellissoide (*).

(*) Risulta pure

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 1 - \frac{1}{m^2}$$

che per $-1 < 1/m < 1/2$ è positivo (e pari ad 1 per $1/m = 0$, a zero per $1/m = -1$).

Un asse principale di questa ellisse (fig. 9-30) è la bisettrice del quadrante positivo, poichè se la (9-14) è soddisfatta per $\sigma_\xi = a$ e $\sigma_\eta = b$, lo è pure per $\sigma_\xi = b$ e $\sigma_\eta = a$.

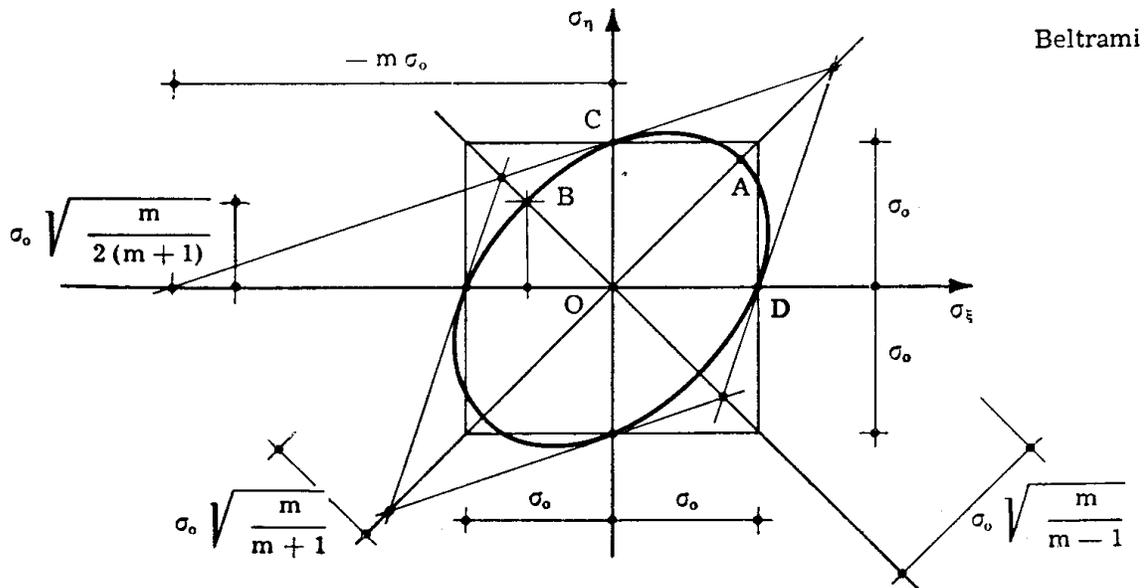


FIG. 9-30

Il semidiametro OA è fornito dalla (9-14) per $\sigma_\xi = \sigma_\eta$:

$$2 \left(1 - \frac{1}{m} \right) \sigma_\xi^2 = \sigma_o^2$$

$$\sigma_\xi = \sigma_o \sqrt{\frac{m}{2(m-1)}}$$

$$OA = \sigma_o \sqrt{\frac{m}{m-1}}$$

Così pure il semidiametro OB è fornito dalla (9-14) per $\sigma_\xi = -\sigma_\eta$:

$$2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) \sigma_\xi^2 = \sigma_o^2$$

$$\sigma_\xi = \sigma_o \sqrt{\frac{m}{2(m+1)}}$$

$$OB = \sigma_o \sqrt{\frac{m}{m+1}}$$

L'ellisse taglia gli assi principali a distanza σ_0 dall'origine. L'inclinazione sull'asse delle x della tangente in un punto generico di una curva $f(x, y) = 0$ è fornita da

$$\operatorname{tg} \widehat{s x} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} ;$$

si verifica da questa formula che la tangente in C è inclinata di $1/m$ sull'asse delle x . Uguale inclinazione, per simmetria, ha la tangente in D.

Per $1/m = 0$, l'ellisse è un cerchio; per $1/m = 1/2$, il semidiametro maggiore OA è la diagonale del quadrato di lato σ_0 (fig. 9-31).

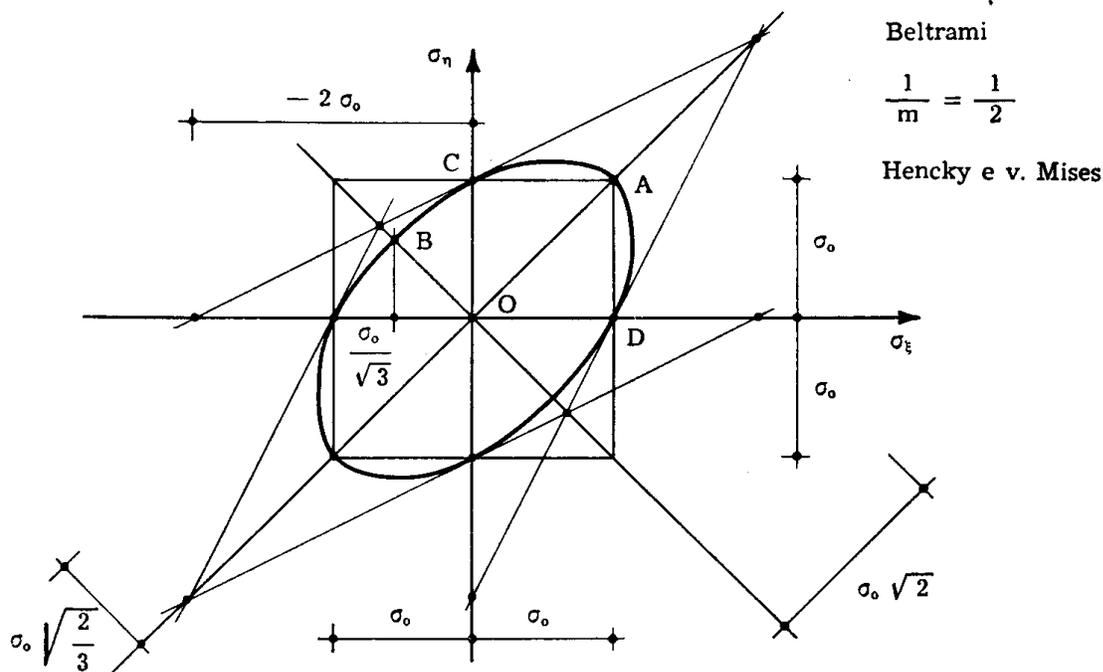


FIG. 9-31

Dato uno stato tensionale piano σ_x, σ_y , il coefficiente di sicurezza si ottiene graficamente come nella fig. 9-32.

Se il tratto compreso tra il comportamento elastico lineare e le prime plasticizzazioni non è trascurabile, è da notare che l'espressione del potenziale in corrispondenza dello snervamento non è più fornita dalla (n), valida per elasticità lineare; se c è il moltiplicatore delle tensioni di esercizio, la funzione reale $\varphi(c)$ presenta a parità di c valori più elevati

della funzione $\varphi(c)$ quadratica, perciò per $\varphi = \varphi_0$ il coefficiente di sicurezza reale è più basso di quello calcolabile attraverso la φ quadratica

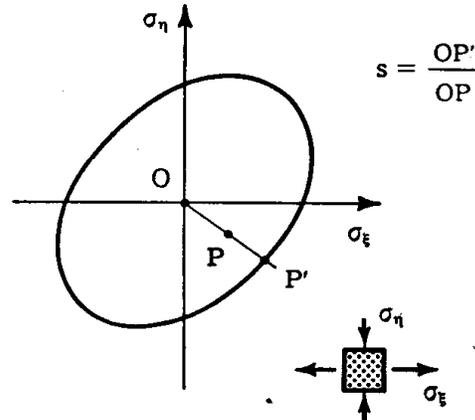


FIG. 9-32

(fig. 9-33). Però la φ_0 si ottiene attraverso la (o), e quindi è pur essa calcolata in difetto; i due errori tendono così a compensarsi.

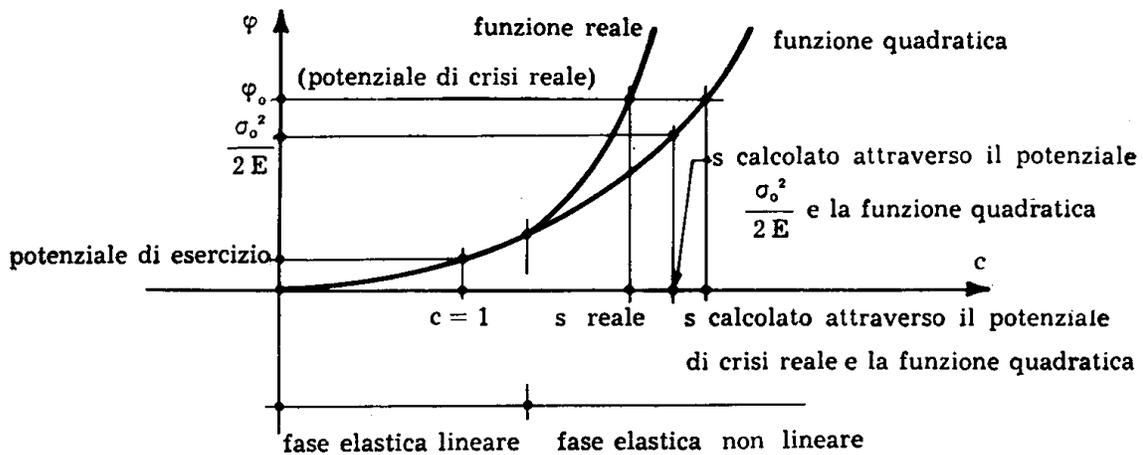


FIG. 9-33

Per il fatto stesso che si presuppone un comportamento elastico lineare fino alle prime plasticizzazioni, il criterio di Beltrami è limitato ai materiali duttili. Questa limitazione è imposta anche da altre considerazioni; infatti per materiali non duttili si ha $\sigma''_0 \neq -\sigma'_0$. In tal caso, e nell'ipotesi di uguale comportamento a trazione e compressione, l'espressione (n) della φ_0 non varia, ma ha un doppio valore, secondo che si faccia riferimento alle prove a trazione o a compressione, e quindi in regime

non monoassiale occorre scegliere fra i due. Parrebbe accettabile scegliere l'uno o l'altro dei due valori secondo che $T \geq 0$; e cioè

$$\varphi_0 = \begin{cases} \frac{\sigma'_0{}^2}{2E} & T > 0 \\ \frac{\sigma''_0{}^2}{2E} & T < 0 \end{cases} \quad (v)$$

Nel riferimento $\sigma_\xi \sigma_\eta \sigma_\zeta$ le due zone $T > 0$ e $T < 0$ sono separate dal piano

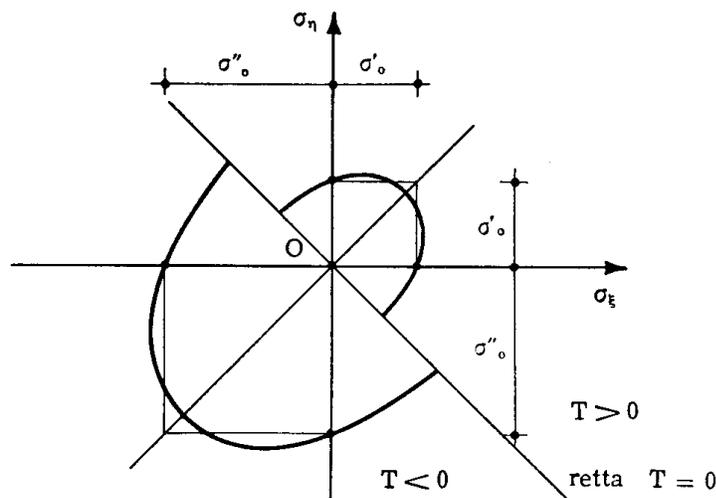
$$T = \sigma_\xi + \sigma_\eta + \sigma_\zeta = 0 \quad (z)$$

che si riconosce contenere l'origine ed essere ortogonale alla trisettrice dell'ottante positivo. La superficie limite è così rappresentata dalle due equazioni.

$$\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\zeta^2 - \frac{2}{m} (\sigma_\xi \sigma_\eta + \sigma_\eta \sigma_\zeta + \sigma_\zeta \sigma_\xi) = \sigma'_0{}^2 \quad T > 0$$

$$\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\zeta^2 - \frac{2}{m} (\sigma_\xi \sigma_\eta + \sigma_\eta \sigma_\zeta + \sigma_\zeta \sigma_\xi) = \sigma''_0{}^2 \quad T < 0$$

e cioè da due semi ellissoidi diversi, aventi lo stesso asse di rotazione (coincidente con la trisettrice dell'ottante positivo) e separati dal piano $T=0$, in corrispondenza del quale quindi la superficie limite presenta



Beltrami

FIG. 9-34

una discontinuità. Nella rappresentazione piana ($\sigma_\zeta = 0$) la retta $T=0$ è la bisettrice dei quadranti $+ -$; la curva limite è costituita dalle due semiellissi (fig. 9-34)

$$\sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\eta}^2 - \frac{2}{m} \sigma_{\xi} \sigma_{\eta} = \sigma'_o{}^2 \quad T > 0$$

$$\sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\eta}^2 - \frac{2}{m} \sigma_{\xi} \sigma_{\eta} = \sigma''_o{}^2, \quad T < 0$$

ed è discontinua in corrispondenza della retta $T=0$. Le suddette discontinuità non sono fisicamente accettabili, e la difficoltà non si supererebbe che formalmente raccordando i due semiellissoidi con una superficie continua; ecco il secondo motivo per cui il criterio di Beltrami non è applicabile se $\sigma'_o \neq -\sigma''_o$.

In presenza di taglio puro è

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi} &= \tau \\ \sigma_{\eta} &= -\tau \\ \sigma_{\zeta} &= 0; \end{aligned}$$

chiamando τ_o la sollecitazione di taglio puro cui corrisponde la crisi, dalla (9-9) si ha

$$2 \tau_o^2 \left(1 + \frac{1}{m}\right) = \sigma_o^2$$

da cui

$$\tau_o = \sqrt{\frac{m}{2(m+1)}} \sigma_o \quad (15)$$

oppure ancora, per la (4-4),

$$\tau_o = \sqrt{\frac{G}{E}} \sigma_o \quad (16)$$

Per l'acciaio $\left(m = \frac{10}{3}\right)$ si ha

$$\tau_o = 0,62 \sigma_o \quad (17)$$

Il valore di τ_o varia con $1/m$ come segue

$\frac{1}{m}$	τ_o
-1	∞
0	$0,71 \sigma_o$
$\frac{1}{2}$	$0,58 \sigma_o$

esso coincide, qualsiasi criterio si adotti, con l'ascissa, o l'ordinata, dei

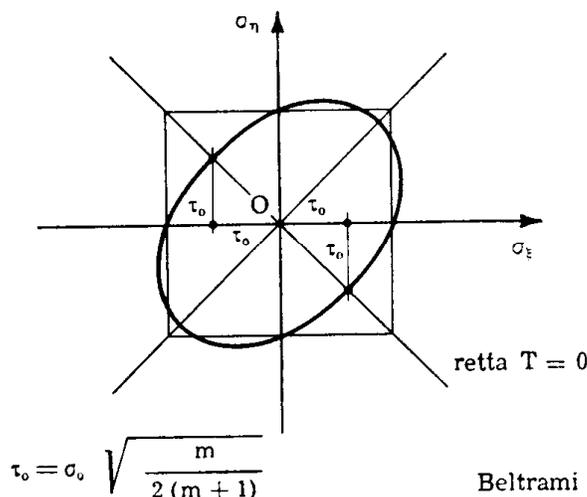


FIG. 9-35

due punti ove la curva limite nella rappresentazione piana (fig. 9-35) taglia la retta $T = 0$.

5. Criterio di Huber.

Secondo il criterio di Beltrami il valore di crisi della trazione idrostatica σ'_{o3} e quello (assoluto) della compressione idrostatica σ''_{o3} coincidono. Parte da ciò la più seria critica che si appunta al criterio suddetto, poichè un materiale può sopportare valori elevatissimi — e comunque non sperimentalmente determinabili — della compressione idrostatica, senza raggiungere la crisi.

Dato un generico stato di sollecitazione $\sigma_\xi \sigma_\eta \sigma_\zeta$ nell'intorno di un punto, ad esso si accoppia una *variazione di volume*

$$\vartheta = \frac{T}{E} \left(1 - \frac{2}{m} \right)$$

ed una *variazione di forma* (da non confondersi con la deformazione) dovuta alla variazione degli angoli formati da due rette generiche prima e dopo la deformazione; una sola variazione di volume senza variazione di forma trasforma una qualsiasi figura dell'intorno in una figura simile, mentre una sola variazione di forma senza variazione di volume trasforma una qualsiasi figura dell'intorno in un'altra figura dello stesso volume.

E' possibile scindere lo stato tensionale generico $\sigma_\xi \sigma_\eta \sigma_\zeta$ in due stati tensionali ideali, uno dei quali provoca una variazione di forma pari a quella effettiva e nessuna variazione di volume, e l'altro una variazione

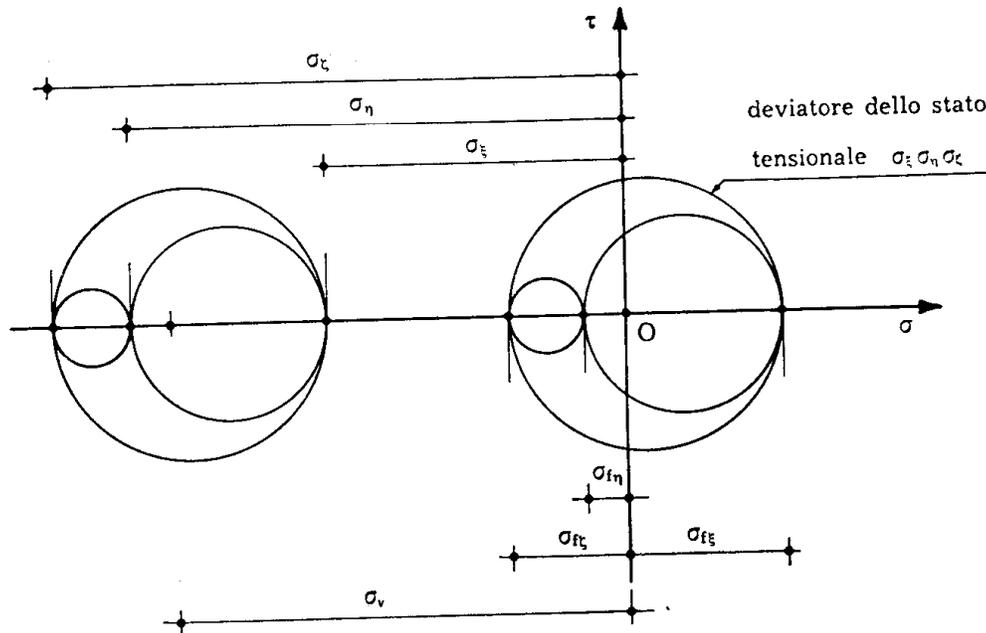


FIG. 9-36

di volume pari a quella effettiva e nessuna variazione di forma. Si ponga infatti (fig. 9-36)

$$\begin{aligned}\sigma_\xi &= \sigma_{f\xi} + \sigma_v \\ \sigma_\eta &= \sigma_{f\eta} + \sigma_v \\ \sigma_\zeta &= \sigma_{f\zeta} + \sigma_v\end{aligned}\quad (18)$$

ove

$$\sigma_v = \frac{\sigma_\xi + \sigma_\eta + \sigma_\zeta}{3}; \quad (19)$$

allo stato tensionale definito dalle tre tensioni principali $\sigma_{f\xi} \sigma_{f\eta} \sigma_{f\zeta}$ (detto *deviatore delle tensioni*) corrisponde l'invariante di tensione T_f , allo stato tensionale definito dalle tre tensioni principali uguali σ_v (tensione media) corrisponde l'invariante di tensione T_v . Poichè è

$$T = T_f + T_v$$

e per la (9-19) è pure

$$T = T_v$$

risulta

$$T_f = 0 ;$$

perciò le $\sigma_{f\xi} \sigma_{f\eta} \sigma_{f\zeta}$ non provocano variazione di volume. Ciò vuol dire che la variazione di volume connessa con le σ_v coincide con quella reale.

D'altro canto allo stato tensionale σ_v corrisponde variazione di forma nulla; infatti per esse è ovunque nell'intorno $\tau_{ij} = 0$ (il cerchio di Mohr principale si riduce ad un punto) e quindi $\gamma_{ij} = 0$. Ciò significa che la variazione di forma reale è quella connessa con le $\sigma_{f\xi} \sigma_{f\eta} \sigma_{f\zeta}$.

Data la suddivisione (9-18), può scriversi, per il potenziale,

$$\varphi = \varphi_f + \varphi_v + \varphi_{fv} ,$$

ove φ_{fv} è il potenziale di scambio. Si ha però (*)

$$\varphi_{fv} = (\sigma_{f\xi} + \sigma_{f\eta} + \sigma_{f\zeta}) \varepsilon_v = T_f \frac{\sigma_v}{E} \left(1 - \frac{2}{m} \right)$$

e quindi, per la (9-19) che comporta $T_f = 0$, è pure

$$\varphi_{fv} = 0 . \quad (20)$$

Si può scrivere così

$$\varphi = \varphi_f + \varphi_v ; \quad (21)$$

la parte φ_f del potenziale si chiama *potenziale di distorsione*, o meglio *potenziale di variazione di forma*, la parte φ_v si chiama *potenziale di variazione di volume*.

Poichè una compressione idrostatica non produce mai crisi, sembra logico, per $T < 0$, far dipendere la crisi non da tutto il potenziale φ , ma solo dalla parte φ_f ; così, se $\varphi_f = 0$ e $T < 0$ (come appunto si verifica nella compressione idrostatica) si ha $s = \infty$, e cioè $\sigma''_{c3} = -\infty$. E' quanto ha proposto *Huber* (1904).

(*) Nel regime $\sigma_\xi = \sigma_\eta = \sigma_\zeta = \sigma_v$ le σ e le ε in ogni direzione sono uguali, e pari a

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_v \\ \varepsilon &= \frac{\sigma_v}{E} \left(1 - \frac{2}{m} \right) . \end{aligned} \quad (a')$$

Poichè risulta

$$\sigma_{f\xi} = \sigma_{\xi} - \frac{\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta} + \sigma_{\zeta}}{3}$$

da cui

$$\sigma_{f\xi} = \frac{2\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta} - \sigma_{\zeta}}{3}, \quad (22)$$

e ancora

$$\begin{aligned} \varepsilon_{f\xi} &= \frac{1}{E} \left(\sigma_{f\xi} - \frac{\sigma_{f\eta} + \sigma_{f\zeta}}{m} \right) = \\ &= \frac{1}{3E} \left(2\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta} - \sigma_{\zeta} - \frac{2\sigma_{\eta} - \sigma_{\xi} - \sigma_{\zeta} + 2\sigma_{\zeta} - \sigma_{\xi} - \sigma_{\eta}}{m} \right) \end{aligned}$$

da cui

$$\varepsilon_{f\xi} = \frac{m+1}{3Em} (2\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta} - \sigma_{\zeta}), \quad (23)$$

si ha

$$\begin{aligned} \varphi_f &= \frac{1}{2} (\sigma_{f\xi} \varepsilon_{f\xi} + \sigma_{f\eta} \varepsilon_{f\eta} + \sigma_{f\zeta} \varepsilon_{f\zeta}) = \\ &= \frac{m+1}{18Em} [(2\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta} - \sigma_{\zeta})^2 + (2\sigma_{\eta} - \sigma_{\xi} - \sigma_{\zeta})^2 + (2\sigma_{\zeta} - \sigma_{\xi} - \sigma_{\eta})^2] = \\ &= \frac{m+1}{3Em} (\sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\eta}^2 + \sigma_{\zeta}^2 - \sigma_{\xi}\sigma_{\eta} - \sigma_{\eta}\sigma_{\zeta} - \sigma_{\zeta}\sigma_{\xi}) \end{aligned}$$

e ancora

$$\varphi_f = \frac{1}{6G} (\sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\eta}^2 + \sigma_{\zeta}^2 - \sigma_{\xi}\sigma_{\eta} - \sigma_{\eta}\sigma_{\zeta} - \sigma_{\zeta}\sigma_{\xi}). \quad (24)$$

La condizione di plasticizzazione secondo Huber è quindi, per $T < 0$, la seguente

$$\frac{s^2}{6G} (\sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\eta}^2 + \sigma_{\zeta}^2 - \sigma_{\xi}\sigma_{\eta} - \sigma_{\eta}\sigma_{\zeta} - \sigma_{\zeta}\sigma_{\xi}) = \varphi_0. \quad (b')$$

Nell'ipotesi $\sigma'_o = -\sigma''_o = \sigma_o$ vale ancora la (o), per cui la (b') si scrive

$$s^2 (\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\zeta^2 - \sigma_\xi \sigma_\eta - \sigma_\eta \sigma_\zeta - \sigma_\zeta \sigma_\xi) = \sigma_o^2 \quad (T < 0) \quad (25)$$

da cui

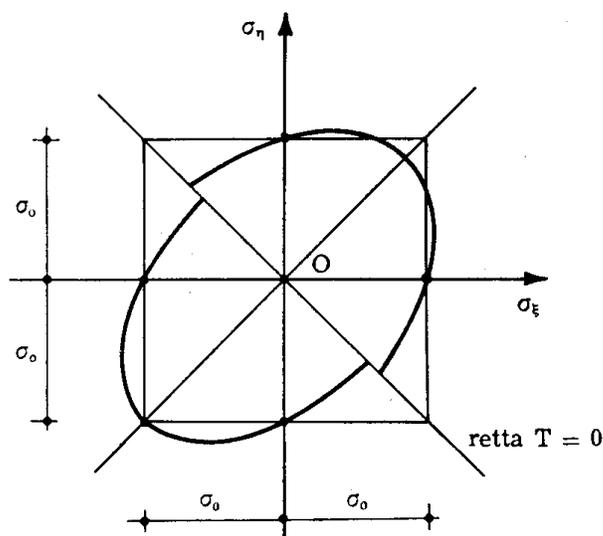
$$s = \frac{\sigma_o}{\sqrt{\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\zeta^2 - \sigma_\xi \sigma_\eta - \sigma_\eta \sigma_\zeta - \sigma_\zeta \sigma_\xi}} \quad (T < 0) \quad (26)$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\zeta^2 - \sigma_\xi \sigma_\eta - \sigma_\eta \sigma_\zeta - \sigma_\zeta \sigma_\xi} \quad (T < 0) \quad (27)$$

La superficie limite è rappresentata dalla (9-12) per $T > 0$, e dalla

$$\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\zeta^2 - \sigma_\xi \sigma_\eta - \sigma_\eta \sigma_\zeta - \sigma_\zeta \sigma_\xi = \sigma_o^2 \quad (T < 0) \quad (28)$$

per $T < 0$; la (9-28) rappresenta la specializzazione dell'ellissoide di Beltrami per $1/m = 1/2$, e cioè il cilindro avente per asse la trisettrice dell'ottante positivo. Quindi la superficie limite è nel semispazio $T > 0$



Huber

FIG. 9-37

l'ellissoide di Beltrami, nel semispazio $T < 0$ il cilindro di Beltrami; ciò implica una discontinuità in corrispondenza del piano $T = 0$. Nella rappresentazione piana (fig. 9-37) la curva limite è costituita dall'ellisse di Beltrami per il valore effettivo di $1/m$ nella zona $T > 0$, dalla ellisse di

Beltrami per il valore $1/m = 1/2$ nella zona $T < 0$; si nota la discontinuità sulla retta $T = 0$.

Sono queste discontinuità, verificantisi anche per $\sigma'_o = -\sigma''_o$, che discreditano il criterio di Huber; per esempio, si ha incertezza nella determinazione della τ_o . Nella fig. 9-38 è riportata la sezione assiale del solido di Huber.

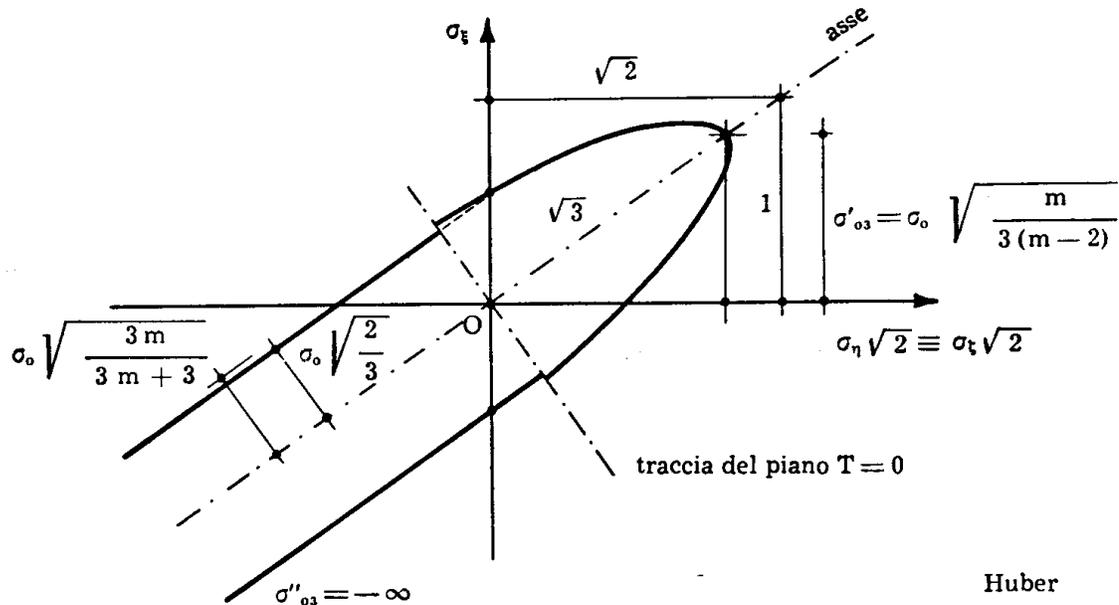


FIG. 9-38

Va senza dire che comunque anche il criterio di Huber non è applicabile se $\sigma'_o \neq -\sigma''_o$; in tal caso si avrebbero le ben più gravi discontinuità lamentate trattando del criterio di Beltrami.

6. Criterio di Hencky e V. Mises.

Sostanzialmente coincidente con il criterio di Huber è quello proposto dal V. Mises nel 1923, e giustificato dall'Hencky nel 1924 attraverso la già citata considerazione del potenziale di distorsione. Secondo tale criterio la crisi si fa dipendere dal solo potenziale di distorsione quale che sia il segno di T ; e quindi la condizione di plasticizzazione di Hencky e V. Mises è

$$s^2 (\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\zeta^2 - \sigma_\xi \sigma_\eta - \sigma_\eta \sigma_\zeta - \sigma_\zeta \sigma_\xi) = \sigma_o^2 \quad (T \geq 0) \quad (29)$$

da cui

$$s = \frac{\sigma_o}{\sqrt{\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\zeta^2 - \sigma_\xi \sigma_\eta - \sigma_\eta \sigma_\zeta - \sigma_\zeta \sigma_\xi}} \quad (30)$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\zeta^2 - \sigma_\xi \sigma_\eta - \sigma_\eta \sigma_\zeta - \sigma_\zeta \sigma_\xi} \quad (31)$$

La superficie limite è fornita dall'unica equazione

$$\sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\eta}^2 + \sigma_{\zeta}^2 - \sigma_{\xi} \sigma_{\eta} - \sigma_{\eta} \sigma_{\zeta} - \sigma_{\zeta} \sigma_{\xi} = \sigma_0^2 . \quad (32)$$

Le (9-29) (9-30) (9-31) e (9-32) coincidono con le corrispondenti (9-9) (9-10) (9-11) e (9-12) di Beltrami per $1/m = 1/2$; ciò si spiega fisicamente perchè in tal caso è $\varepsilon_v = 0$ (a') e quindi è comunque $\varphi_v = \varphi_{IV} = 0$, e $\varphi = \varphi_I$.

La superficie limite di Hencky e V. Mises è perciò il cilindro in cui si specializza l'ellissoide di Beltrami per $1/m = 1/2$, e le sezioni di tale cilindro con i piani $\sigma_{\eta} = \sigma_{\zeta}$ e $\sigma_{\zeta} = 0$ sono quelle delle figg. 9-29 e 9-31.

La tensione τ_0 è fornita dalla (9-15) per $1/m = 1/2$, ed è

$$\tau_0 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} = 0,58 \sigma_0 \quad (33)$$

indipendente da $1/m$.

Il criterio di Hencky e V. Mises, come quello di Beltrami, non è applicabile se $\sigma'_0 \neq -\sigma''_0$.

Rispetto al criterio di Huber, sono eliminate le discontinuità in corrispondenza del piano $T = 0$, ma si ha

$$\begin{aligned} \sigma'_{03} &= \infty \\ \sigma''_{03} &= -\infty ; \end{aligned} \quad (34)$$

la prima delle (9-34) non corrisponde al vero, perchè la σ'_{03} (trazione idrostatica) è in realtà limitata. E' da notare però che nei materiali per cui si può supporre $\sigma'_0 = -\sigma''_0$, è pure σ'_{03} molto elevata; e comunque, per tutti i materiali è $\sigma'_0 < -\sigma''_0$, e perciò il compromesso che si accetta supponendo $\sigma'_0 = -\sigma''_0$ non è meno repugnante dell'altro $\sigma'_{03} = \infty$.

7. Il criterio di Hencky e V. Mises come criterio della tensione tangenziale ottaedrale.

Si consideri l'ottaedro regolare con i vertici sugli assi principali, tale che le distanze dei vertici dall'origine siano uguali tra loro (fig. 9-39); le tensioni σ e τ sulle otto facce (uguali in ogni faccia, come in ogni ottaedro) si chiamano *tensione normale ottaedrale* σ_{ott} e *tensione tangenziale ottaedrale* τ_{ott} .

I coseni direttori α_ξ α_η α_ζ della normale alla faccia generica del sud-

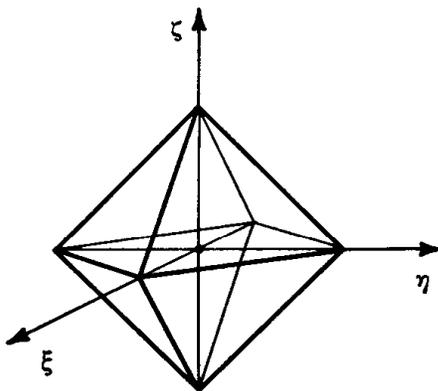


FIG. 9-39

detto ottaedro sono uguali in valore assoluto, e forniti quindi dalla relazione

$$3 \alpha^2 = 1$$

$$\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm 0,577 ;$$

ad $\alpha = + 0,577$ corrisponde

$$\varphi = 54^\circ 45'.$$

La costruzione grafica per ottenere σ_{ott} e τ_{ott} è quella della fig. 9-40;

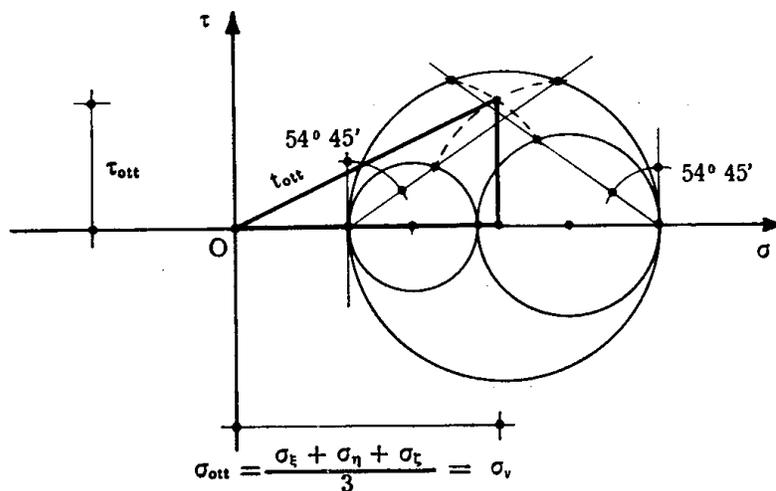


FIG. 9-40

analiticamente si ha, dalle (2-12) e (2-9)

$$\sigma_{ott} = \sigma_\xi \alpha_\xi^2 + \sigma_\eta \alpha_\eta^2 + \sigma_\zeta \alpha_\zeta^2$$

da cui

$$\sigma_{\text{ott}} = \frac{\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta} + \sigma_{\zeta}}{3} \quad (35)$$

E' inoltre

$$t_{\text{ott } \xi} = \sigma_{\xi} \alpha_{\xi} = \pm \frac{\sigma_{\xi}}{\sqrt{3}}$$

$$t_{\text{ott } \eta} = \sigma_{\eta} \alpha_{\eta} = \pm \frac{\sigma_{\eta}}{\sqrt{3}}$$

$$t_{\text{ott } \zeta} = \sigma_{\zeta} \alpha_{\zeta} = \pm \frac{\sigma_{\zeta}}{\sqrt{3}}$$

da cui

$$t_{\text{ott}}^2 = \frac{\sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\eta}^2 + \sigma_{\zeta}^2}{3}$$

E' perciò

$$\begin{aligned} \tau_{\text{ott}}^2 &= t_{\text{ott}}^2 - \sigma_{\text{ott}}^2 = \frac{3\sigma_{\xi}^2 + 3\sigma_{\eta}^2 + 3\sigma_{\zeta}^2 - \sigma_{\xi}^2 - \sigma_{\eta}^2 - \sigma_{\zeta}^2 - 2\sigma_{\xi}\sigma_{\eta} - 2\sigma_{\eta}\sigma_{\zeta} - 2\sigma_{\zeta}\sigma_{\xi}}{9} \\ &= \frac{2}{9} (\sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\eta}^2 + \sigma_{\zeta}^2 - \sigma_{\xi}\sigma_{\eta} - \sigma_{\eta}\sigma_{\zeta} - \sigma_{\zeta}\sigma_{\xi}) \end{aligned}$$

da cui

$$\tau_{\text{ott}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\eta}^2 + \sigma_{\zeta}^2 - \sigma_{\xi}\sigma_{\eta} - \sigma_{\eta}\sigma_{\zeta} - \sigma_{\zeta}\sigma_{\xi}} \quad (36)$$

Si osserva come τ_{ott}^2 sia proporzionale al potenziale di distorsione φ_f (9-24).

Assumendo come parametro determinante la crisi la tensione tangenziale ottaedrale, si deve perciò ricadere nel criterio di Hencky e V. Mises; ed infatti in tal caso la condizione di plasticizzazione è

$$s \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\eta}^2 + \sigma_{\zeta}^2 - \sigma_{\xi}\sigma_{\eta} - \sigma_{\eta}\sigma_{\zeta} - \sigma_{\zeta}\sigma_{\xi}} = \tau_{\text{ott}, o}$$

e poichè risulta

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_o = \tau_{\text{ott}, o}$$

si ha pure

$$s \sqrt{\sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\eta}^2 + \sigma_{\zeta}^2 - \sigma_{\xi} \sigma_{\eta} - \sigma_{\eta} \sigma_{\zeta} - \sigma_{\zeta} \sigma_{\xi}} = \sigma_0$$

che coincide con la (9-29).

8. Il criterio di Stassi D'Alia.

Le contraddizioni dei precedenti criteri sono tutte superate da quello dello *Stassi D'Alia* (1951), che può considerarsi allo stato come il più completo tra i criteri di più agevole manipolazione.

Lo Stassi suppone che il parametro determinante la crisi sia la somma del potenziale di distorsione e di una quantità proporzionale alla tensione media σ_v . Si osserva subito che così, rispetto alla condizione di Hencky, se si fa più credito al materiale nel verso della σ_v decrescente, se ne fa di meno nel verso della σ_v crescente, e ciò offre la possibilità di conservare $\sigma''_{03} = -\infty$, e di ridurre a termine finito la σ'_{03} .

Posta quindi la condizione di plasticizzazione nella forma

$$\begin{aligned} \frac{s^2}{6G} (\sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\eta}^2 + \sigma_{\zeta}^2 - \sigma_{\xi} \sigma_{\eta} - \sigma_{\eta} \sigma_{\zeta} - \sigma_{\zeta} \sigma_{\xi}) + \\ + s a (\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta} + \sigma_{\zeta}) = \varphi_r \end{aligned} \quad (c')$$

si ha, nei due casi di sollecitazione assiale dei due segni,

$$\frac{\sigma'_{03}{}^2}{6G} + a \sigma'_{03} = \varphi_r$$

$$\frac{\sigma''_{03}{}^2}{6G} + a \sigma''_{03} = \varphi_r$$

da cui

$$a = - \frac{\sigma'_{03} + \sigma''_{03}}{6G}$$

$$\varphi_r = \frac{\sigma'_{03}{}^2}{6G} - \sigma'_{03} \frac{\sigma'_{03} + \sigma''_{03}}{6G}$$

Ponendo

$$\rho = \frac{\sigma''_{03}}{\sigma'_{03}}, \quad (37)$$

dove è $\rho \leq -1$ per qualsiasi materiale, si ha

$$a = -\sigma'_o \frac{\rho + 1}{6G}$$

$$\varphi_r = -\rho \frac{\sigma'_o{}^2}{6G}.$$

La (c') si scrive così

$$s^2 (\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\zeta^2 - \sigma_\xi \sigma_\eta - \sigma_\eta \sigma_\zeta - \sigma_\zeta \sigma_\xi) -$$

$$- s (\rho + 1) \sigma'_o (\sigma_\xi + \sigma_\eta + \sigma_\zeta) = -\rho \sigma'_o{}^2. \quad (38)$$

E' questa la condizione di plasticizzazione di Stassi D'Alia.

Dalla (9-38) si può ricavare il rapporto

$$s = \frac{\sigma'_o}{g (\sigma_\xi \sigma_\eta \sigma_\zeta)}$$

ove la $g (\sigma_\xi \sigma_\eta \sigma_\zeta)$ rappresenta la tensione equivalente a quella monoassiale di trazione. La superficie limite è fornita dalla equazione

$$\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\zeta^2 - \sigma_\xi \sigma_\eta - \sigma_\eta \sigma_\zeta - \sigma_\zeta \sigma_\xi -$$

$$- (\rho + 1) \sigma'_o (\sigma_\xi + \sigma_\eta + \sigma_\zeta) = -\rho \sigma'_o{}^2. \quad (39)$$

L'intersezione di tale superficie con il piano $\sigma_\eta = \sigma_\zeta = \frac{k}{\sqrt{2}}$ è retta dall'equazione

$$\sigma_\xi^2 + \frac{k^2}{2} - \sigma_\xi \frac{k}{\sqrt{2}} - \sigma_\xi \frac{k}{\sqrt{2}} - (\rho + 1) \sigma'_o \left(\sigma_\xi + 2 \frac{k}{\sqrt{2}} \right) = -\rho \sigma'_o{}^2,$$

e cioè ancora

$$\sigma_\xi^2 + \frac{k^2}{2} - \sqrt{2} \sigma_\xi k - (\rho + 1) \sigma'_o \sigma_\xi - \sqrt{2} (\rho + 1) \sigma'_o k + \rho \sigma'_o{}^2 = 0; \quad (40)$$

la (9-40) è una parabola (fig. 9-41), perchè

$$C_{33} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = 0,$$

mentre è pure

$$A \neq 0.$$

Se $A=0$, e cioè per $\rho=-1$, la parabola degenera in due rette, distinte perchè i minori di A non sono tutti nulli.

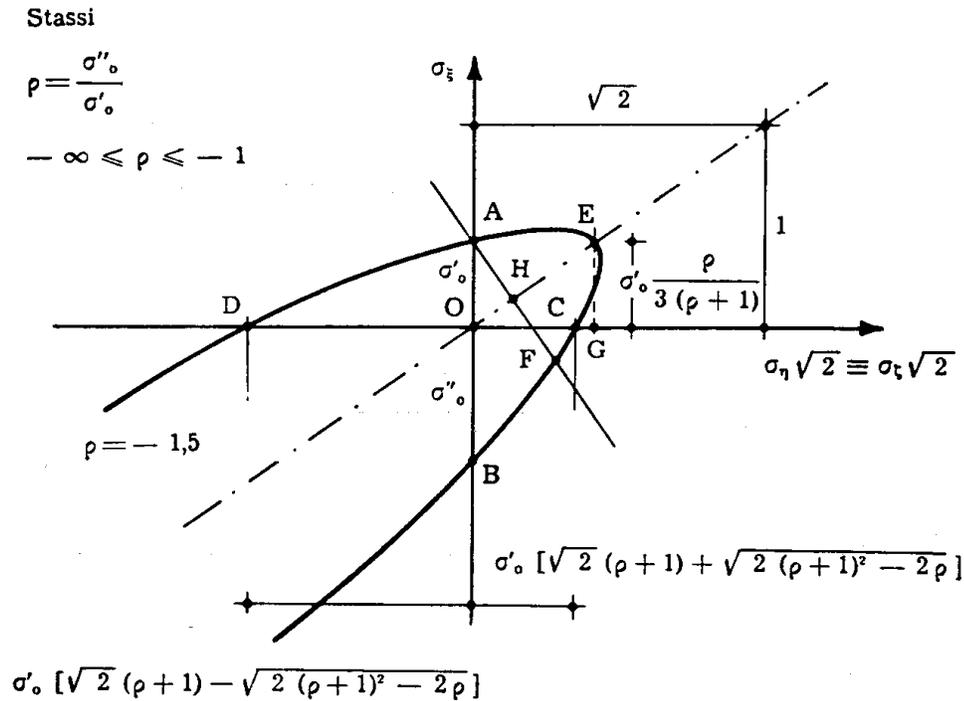


FIG. 9-41

L'equazione delle due rette è (9-40)

$$\left(\sigma_{\xi} - \frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2 = -\rho \sigma'_0{}^2$$

e quindi le due rette sono parallele. Perciò la (9-39) rappresenta per $-\infty < \rho < -1$ un paraboloide di rotazione intorno alla trisettrice dell'ottante positivo, per $\rho=-1$ un cilindro.

Questo è il cilindro di Hencky; ciò si riconosce anche dal fatto che per $\rho=-1$ la (9-39) si riduce alla (9-32).

Le ordinate delle intersezioni A e B della parabola (9-40) con l'asse delle σ_{ξ} sono fornite dalla (9-40) per $k=0$; si ha così

$$\sigma_{\xi}^2 - (\rho+1) \sigma'_0 \sigma_{\xi} + \rho \sigma'_0{}^2 = 0$$

da cui

$$\sigma_{\xi} = \begin{cases} \sigma'_0 \\ \rho \sigma'_0 = \sigma''_0 \end{cases} .$$

Le ascisse delle intersezioni C e D della parabola con l'asse delle k sono fornite dalla (9-40) per $\sigma_{\xi} = 0$; si ha

$$\frac{k^2}{2} - \sqrt{2} (\rho + 1) \sigma'_0 k + \rho \sigma'^2_0 = 0$$

da cui

$$k = \sigma'_0 [\sqrt{2} (\rho + 1) \pm \sqrt{2 (\rho + 1)^2 - 2\rho}] .$$

L'ordinata del vertice E si ha dalla (9-40) ponendo $\sigma_{\xi} = \frac{k}{\sqrt{2}}$; si trae

$$(\rho + 1) k \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \right) = \rho \sigma'_0$$

da cui

$$k_E = \sigma'_0 \frac{\rho}{\rho + 1} \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\sigma_{\xi E} = \sigma'_0 \frac{\rho}{3 (\rho + 1)}$$

per $\rho = -1$ è $k_E = \sigma_{\xi E} = \infty$; per $\rho = -\infty$ è $k_E = \sigma'_0 \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\sigma_{\xi E} = \frac{\sigma'_0}{3}$, e cioè E degenera in H, e la parabola nella retta AF'.

Da quanto sopra si evince che per $-\infty \leq \rho \leq -1$ le parabole (9-40) descrivono, tenendo fisso σ'_0 , la famiglia di parabole di asse OH intersecantesi in A ed F, e le due parabole limiti sono la retta AF' e la coppia di rette AK ed FL passanti per A ed F e parallele alla OH (fig. 9-42 a).

La (9-40) può anche scriversi

$$\sigma_{\xi}^2 + \frac{k^2}{2} - \sqrt{2} \sigma_{\xi} k - \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \sigma''_0 \sigma_{\xi} - \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \sigma''_0 k + \frac{\sigma''^2_0}{\rho} = 0. \quad (40')$$

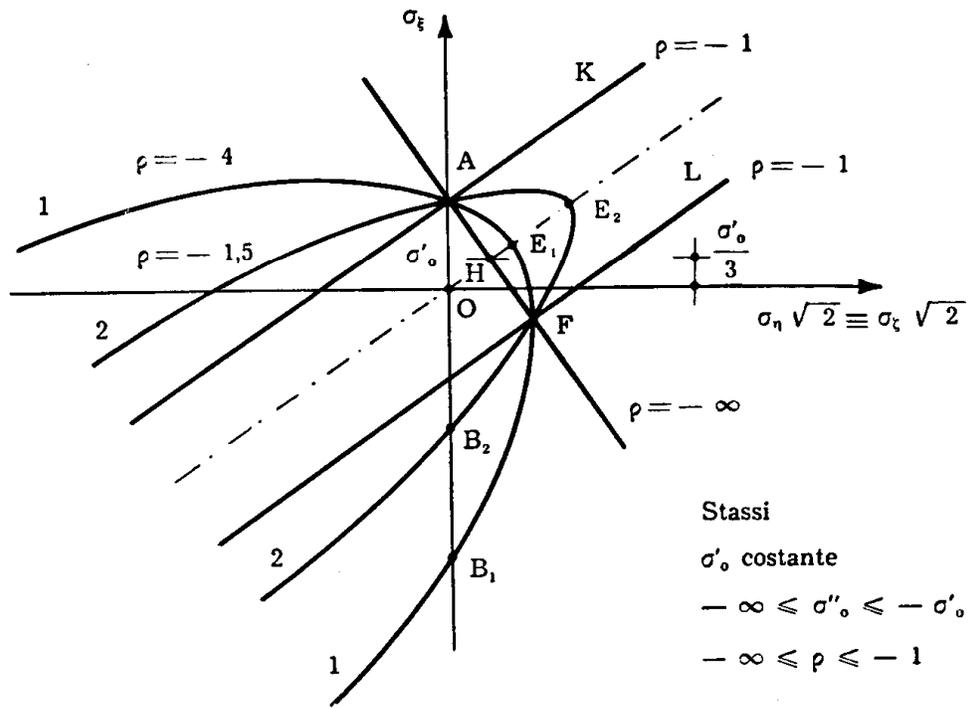


FIG. 9-42 a

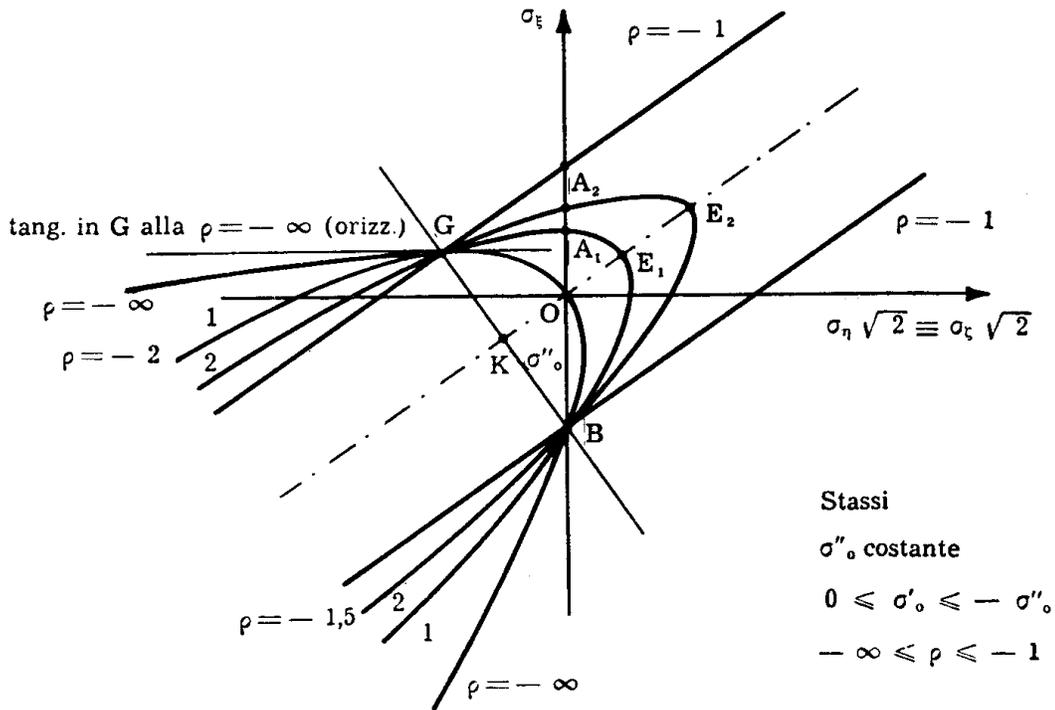


FIG. 9-42 b

Le ordinate OA e OB delle intersezioni con l'asse delle σ_ξ sono fornite dalla (9-40') per $k=0$, e cioè da

$$\rho \sigma_\xi^2 - (\rho + 1) \sigma''_o \sigma_\xi + \sigma''_o{}^2 = 0$$

da cui

$$\sigma_\xi = \begin{cases} \frac{\sigma''_o}{\rho} = \sigma'_o \\ \sigma''_o \end{cases}$$

Le coordinate del vertice E si hanno dalla (9-40') ponendo $\sigma_\xi = \frac{k}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{3}{\sqrt{2}} (\rho + 1) k = \sigma''_o$$

da cui

$$k_E = \sigma''_o \frac{\sqrt{2}}{3(\rho + 1)}$$

$$\sigma_{\xi E} = \sigma''_o \frac{1}{3(\rho + 1)}$$

Per $\rho = -1$ è $k_E = \sigma_{\xi E} = \infty$; per $\rho = -\infty$ è $k_E = \sigma_{\xi E} = 0$. Per $-\infty \leq \rho \leq -1$ le parabole (9-40') descrivono, tenendo fisso σ''_o , la famiglia di parabole di asse OK ed intersecantisi in B e G; per $\rho = -1$ si hanno le due rette di Hencky, per $\rho = -\infty$ la parabola passante per l'origine (fig. 9-42 b). L'intersezione del paraboloido (9-38) con il piano $\sigma_\zeta = 0$ è fornita dall'equazione

$$\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 - \sigma_\xi \sigma_\eta - (\rho + 1) \sigma'_o (\sigma_\xi + \sigma_\eta) + \rho \sigma'_o{}^2 = 0 \quad (41)$$

o dall'altra

$$\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 - \sigma_\xi \sigma_\eta - \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \sigma''_o (\sigma_\xi + \sigma_\eta) + \frac{1}{\rho} \sigma''_o{}^2 = 0 \quad (41')$$

Poichè risulta

$$C_{33} = 1 - \frac{1}{4} > 0$$

la (9-41) e la (9-41') sono ellissi, per qualsiasi valore di ρ ; per $\sigma''_o = -\infty$ ($\rho = -\infty$) la (9-41) degenera (*) nella retta doppia

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = \sigma'_o.$$

Uno degli assi dell'ellisse (9-41) è la bisettrice del quadrante positivo.

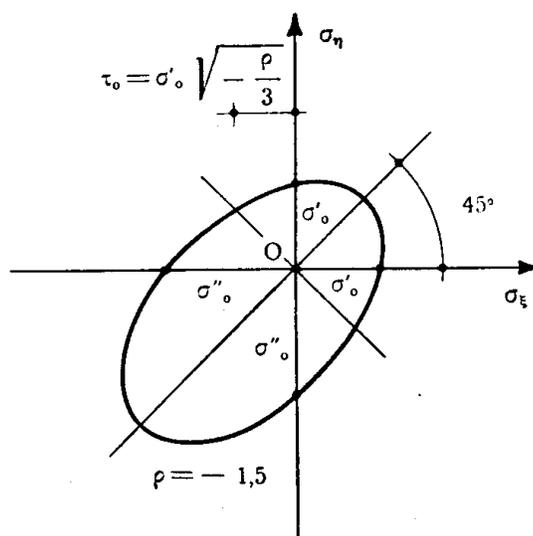


FIG. 9-43

L'ellisse taglia (fig. 9-43) i due assi nei punti di ascissa σ'_o e σ''_o ; infatti è, per $\sigma_\eta = 0$,

$$\sigma_\xi^2 - (\rho + 1) \sigma'_o \sigma_\xi + \rho \sigma_o'^2 = 0$$

da cui

$$\sigma_\xi = \begin{cases} \sigma'_o \\ \rho \sigma'_o = \sigma''_o \end{cases}.$$

(*) Infatti, scrivendo la (9-41) nella forma

$$\frac{\sigma_\xi^2}{\rho} + \frac{\sigma_\eta^2}{\rho} - \frac{\sigma_\xi \sigma_\eta}{\rho} - \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \sigma'_o (\sigma_\xi + \sigma_\eta) + \sigma_o'^2 = 0, \quad (d')$$

per $\rho = -\infty$ il discriminante A è nullo, ed inoltre tutti i suoi minori sono nulli; e questa è condizione necessaria e sufficiente perchè la conica degeneri in una retta doppia. L'equazione di tale retta si ha dalla (d') per $\rho = -\infty$:

$$-\sigma'_o (\sigma_\xi + \sigma_\eta) + \sigma_o'^2 = 0$$

da cui

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = \sigma'_o.$$

Il valore della sollecitazione τ_0 di taglio puro corrispondente alla crisi coincide con le due coordinate del punto di intersezione con la retta $T=0$; esso si ottiene ponendo nella (9-41) $\sigma_\xi = \tau_0$, $\sigma_\eta = -\tau_0$, ed è fornito da

$$\tau_0 = \sqrt{-\frac{\rho}{3}} \sigma'_0. \quad (42)$$

Per $-\infty \leq \rho \leq -1$ e per σ'_0 costante le ellissi (9-41) descrivono la famiglia di ellissi con asse a 45° (fig. 9-44 a), e passanti per A e B; per

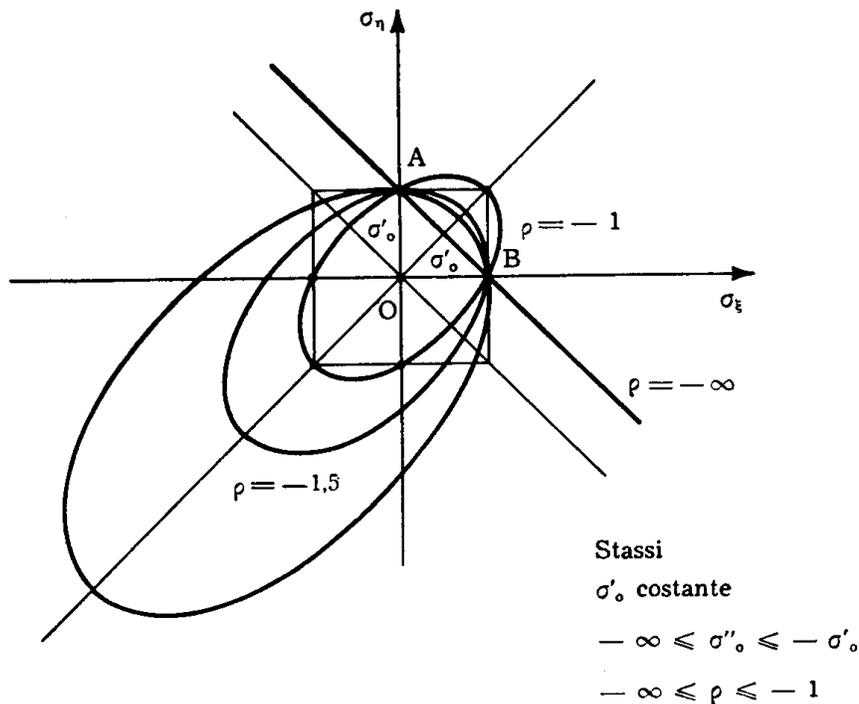


FIG. 9-44 a

$\rho = -1$ si ricade nell'ellisse di Hencky, per $\rho = -\infty$ ($\sigma''_0 = -\infty$) nella retta AB. Per σ''_0 costante, le ellissi (9-41) descrivono la famiglia di asse OC, e passanti per C e D (fig. 9-44 b); per $\rho = -1$ si ricade nell'ellisse di Hencky, per $\rho = -\infty$ nell'ellisse passante per l'origine. Si osservi che, con riferimento ad uno stato biassiale $\sigma_\xi = \sigma_\eta = \sigma_b$, a parità di σ'_0 l'aumento di $|\sigma''_0|$ fa diminuire la σ_{b0} di trazione fino a $\sigma'_0/2$, mentre a parità di σ''_0 la diminuzione di σ'_0 fa aumentare la $|\sigma_{b0}|$ di compressione fino a $|2\sigma''_0|$. Questo risultato è degno di attenzione.

Il criterio di Stassi d'Alia elimina l'inaccettabile condizione $\sigma''_0 \neq -\infty$ del Beltrami, e l'altra $\sigma'_0 = \infty$ dell'Hencky; inoltre è applicabile, a differenza dei criteri suddetti, ai materiali per cui $\sigma'_0 \neq \sigma''_0$.

Si può obiettare che per $\sigma'_o = -\sigma''_o$ si ricade nel criterio di Hencky, e ricompare quindi la condizione $\sigma'_o = \infty$; è pur vero però che per nessun

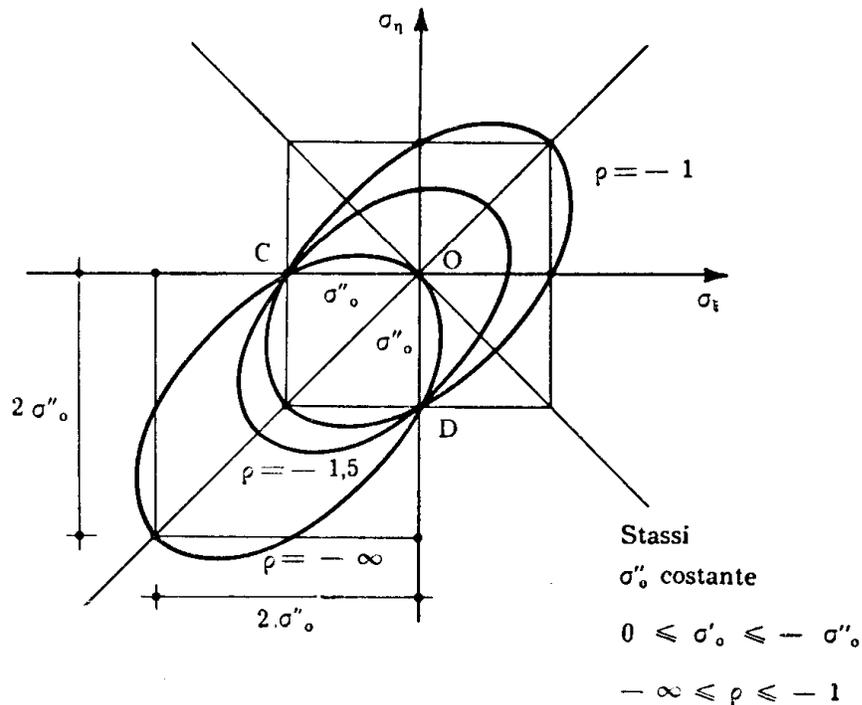


FIG. 9-44 b

materiale è $\sigma'_o = -\sigma''_o$, e d'altronde per quelli in cui σ'_o è molto prossimo a $-\sigma''_o$, è pure σ'_{o3} molto elevato, come apparirà più innanzi dall'esame delle curve intrinseche.

9. Criterio di Grashof.

Secondo questa teoria, proposta in forma incompleta dal *Poncelet* nel 1839, messa a punto dal *Grashof* nel 1878, ed avallata dal *Bach* e dal *Resal*, il parametro determinante la crisi è la dilatazione lineare; la teoria in questione è anche chiamata *della massima e minima dilatazione*, o *delle tensioni ideali*. La condizione di plasticizzazione non è più esprimibile con una sola relazione; infatti, nell'ipotesi di $\sigma'_o \neq -\sigma''_o$, e di E ed m uguali a trazione e compressione, il coefficiente di sicurezza s è il più piccolo dei valori positivi calcolabili con le sei relazioni

$$\frac{s}{E} \left(\sigma_{\xi} - \frac{\sigma_{\eta} + \sigma_{\zeta}}{m} \right) = \varepsilon'_o$$

$$\frac{s}{E} \left(\sigma_{\eta} - \frac{\sigma_{\xi} + \sigma_{\zeta}}{m} \right) = \varepsilon'_o$$

$$\begin{aligned} \frac{s}{E} \left(\sigma_{\zeta} - \frac{\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta}}{m} \right) &= \varepsilon'_{\circ} \\ \frac{s}{E} \left(\sigma_{\xi} - \frac{\sigma_{\eta} + \sigma_{\zeta}}{m} \right) &= \varepsilon''_{\circ} \\ \frac{s}{E} \left(\sigma_{\eta} - \frac{\sigma_{\xi} + \sigma_{\zeta}}{m} \right) &= \varepsilon''_{\circ} \\ \frac{s}{E} \left(\sigma_{\zeta} - \frac{\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta}}{m} \right) &= \varepsilon''_{\circ} \end{aligned} \quad (43)$$

dove con ε'_{\circ} ed ε''_{\circ} si sono chiamati gli allungamenti e gli accorciamenti corrispondenti alla crisi.

Poichè in regime monoassiale le (9-43) forniscono $\sigma'_{\circ}/E = \varepsilon'_{\circ}$, $\sigma''_{\circ}/E = \varepsilon''_{\circ}$, il dominio di compatibilità è la parte dello spazio racchiusa dai sei piani definiti dalle equazioni seguenti:

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi} - \frac{\sigma_{\eta} + \sigma_{\zeta}}{m} &= \sigma'_{\circ} \\ \sigma_{\eta} - \frac{\sigma_{\xi} + \sigma_{\zeta}}{m} &= \sigma'_{\circ} \\ \sigma_{\zeta} - \frac{\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta}}{m} &= \sigma'_{\circ} \\ \sigma_{\xi} - \frac{\sigma_{\eta} + \sigma_{\zeta}}{m} &= \sigma''_{\circ} \\ \sigma_{\eta} - \frac{\sigma_{\xi} + \sigma_{\zeta}}{m} &= \sigma''_{\circ} \\ \sigma_{\zeta} - \frac{\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta}}{m} &= \sigma''_{\circ} \end{aligned} \quad (44)$$

Il coefficiente di sicurezza è perciò il più piccolo valore positivo ricavabile dalle sei relazioni

$$\begin{aligned} s \left(\sigma_{\xi} - \frac{\sigma_{\eta} + \sigma_{\zeta}}{m} \right) &= \sigma'_{\circ} \\ s \left(\sigma_{\eta} - \frac{\sigma_{\xi} + \sigma_{\zeta}}{m} \right) &= \sigma'_{\circ} \end{aligned}$$

$$s \left(\sigma_{\zeta} - \frac{\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta}}{m} \right) = \sigma'_{\circ}$$

$$s \left(\sigma_{\xi} - \frac{\sigma_{\eta} + \sigma_{\zeta}}{m} \right) = \sigma''_{\circ}$$

$$s \left(\sigma_{\eta} - \frac{\sigma_{\xi} + \sigma_{\zeta}}{m} \right) = \sigma''_{\circ}$$

$$s \left(\sigma_{\zeta} - \frac{\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta}}{m} \right) = \sigma''_{\circ} ;$$

le tensioni in parentesi si chiamano *tensioni ideali*, intendendo come tali quelle tre tensioni che, agendo una per volta in regime monoassiale, forniscono dilatazioni pari alle dilatazioni principali reali. Una di esse,

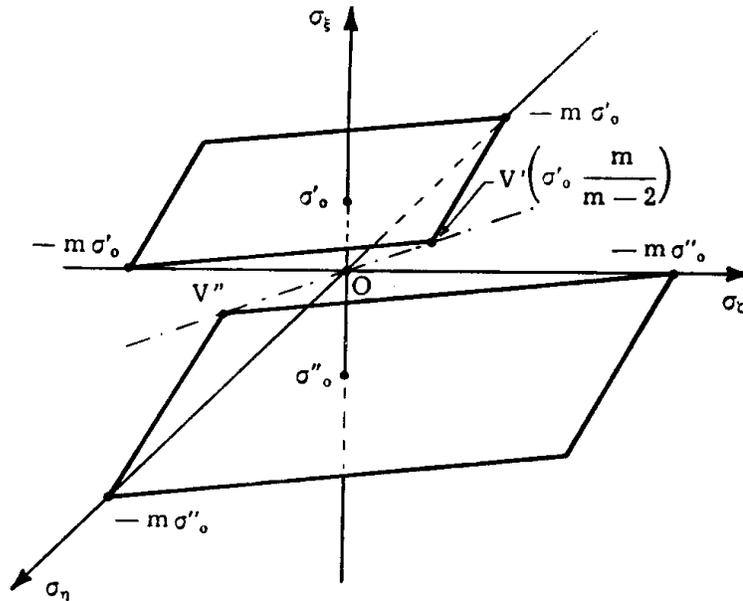


FIG. 9-45

e precisamente quella corrispondente alla relazione che offre il minimo s , è la tensione equivalente. Il dominio (9-44) deve sempre godere della proprietà di sovrapporsi a se stesso per rotazione di 120° intorno alla trisettrice dell'ottante positivo.

Il piano

$$\sigma_{\xi} - \frac{\sigma_{\eta} + \sigma_{\zeta}}{m} = \sigma'_{\circ} \quad (e')$$

interseca l'asse delle σ_{ξ} all'ascissa σ'_{\circ} (fig. 9-45), i due altri assi alle

ascisse $-m\sigma'_0$; inoltre esso incontra la trisettrice dell'ottante positivo nel punto V' avente le tre coordinate pari a $\sigma'_0 \frac{m}{m-2}$.

Il piano

$$\sigma_\xi - \frac{\sigma_\eta + \sigma_\zeta}{m} = \sigma''_0 \quad (f')$$

è parallelo al piano (e'), interseca l'asse delle σ_ξ all'ascissa σ''_0 , i due altri assi alle ascisse $-m\sigma''_0$, e la trisettrice nel punto V'' avente le tre coordinate $\sigma''_0 \frac{m}{m-2}$.

I tre piani definiti dalle prime tre delle equazioni (9-44) costituiscono un triedro con vertice in V' (fig. 9-46), gli altri tre piani un triedro con vertice in V'' ; lo spazio racchiuso tra questi due triedri è un parallele-

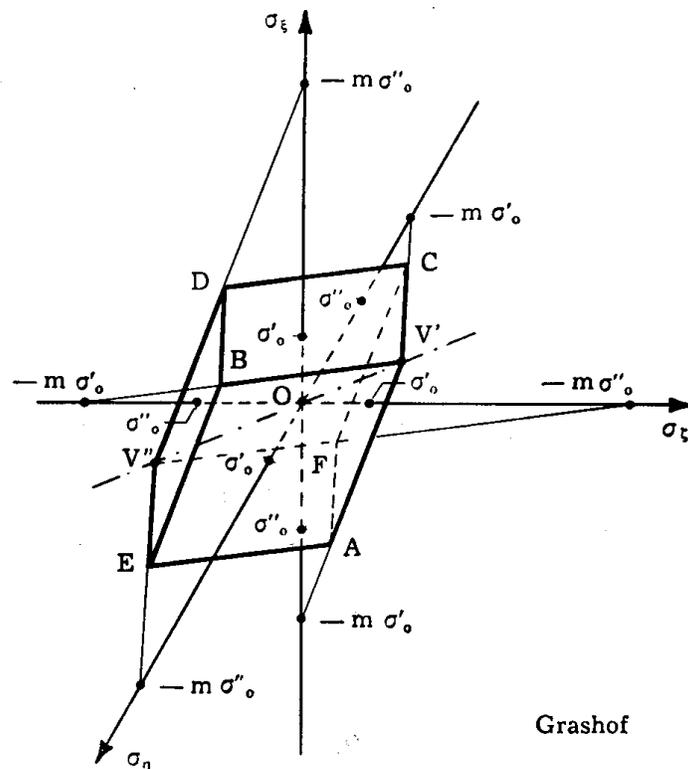


FIG. 9-46

pipedo, in cui ogni faccia è a lati uguali, e cioè un rombo; infatti ruotando la figura di 120° intorno all'asse $V'V''$ il punto A (fig. 9-46) deve portarsi in B. Il dominio di compatibilità è pertanto un romboide. Poiché la superficie limite non è di rotazione, può risultare interessante la

rappresentazione del Meldahl (fig. 9-47); le sezioni normali all'asse $V'V''$ sono triangoli equilateri. Nella fig. 9-47 sono riportate le sezioni relative alla piramide di vertice V' e base ABC , ed alla piramide di vertice V''

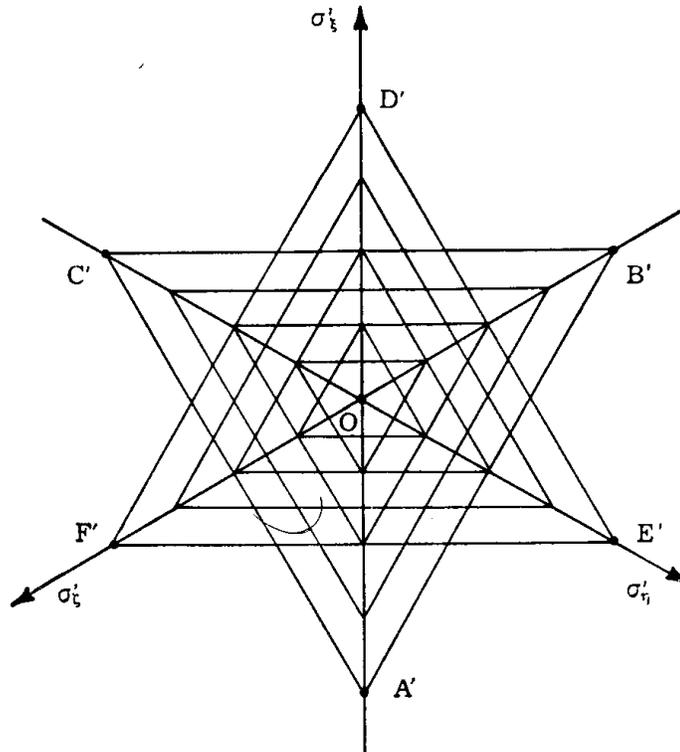


FIG. 9-47

e base EFD ; la parte compresa tra le due piramidi dà per sezioni degli esagoni regolari.

L'intersezione della superficie limite con il piano $\sigma_\xi \sigma_\eta$ ($\sigma_z = 0$) è la parte di piano compresa tra le sei rette di equazioni

$$\sigma_\xi - \frac{\sigma_\eta}{m} = \sigma'_0$$

$$\sigma_\eta - \frac{\sigma_\xi}{m} = \sigma'_0$$

$$-\frac{\sigma_\xi + \sigma_\eta}{m} = \sigma'_0$$

$$\sigma_\xi - \frac{\sigma_\eta}{m} = \sigma''_0$$

(45)

$$\sigma_{\eta} - \frac{\sigma_{\xi}}{m} = \sigma''_o$$

$$-\frac{\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta}}{m} = \sigma''_o .$$

La prima e la quarta delle (9-45) sono parallele, e così pure la seconda e la quinta, la terza e la sesta; la superficie tra esse comprese è un parallelogramma sfettato (fig. 9-48), in particolare anzi un rombo

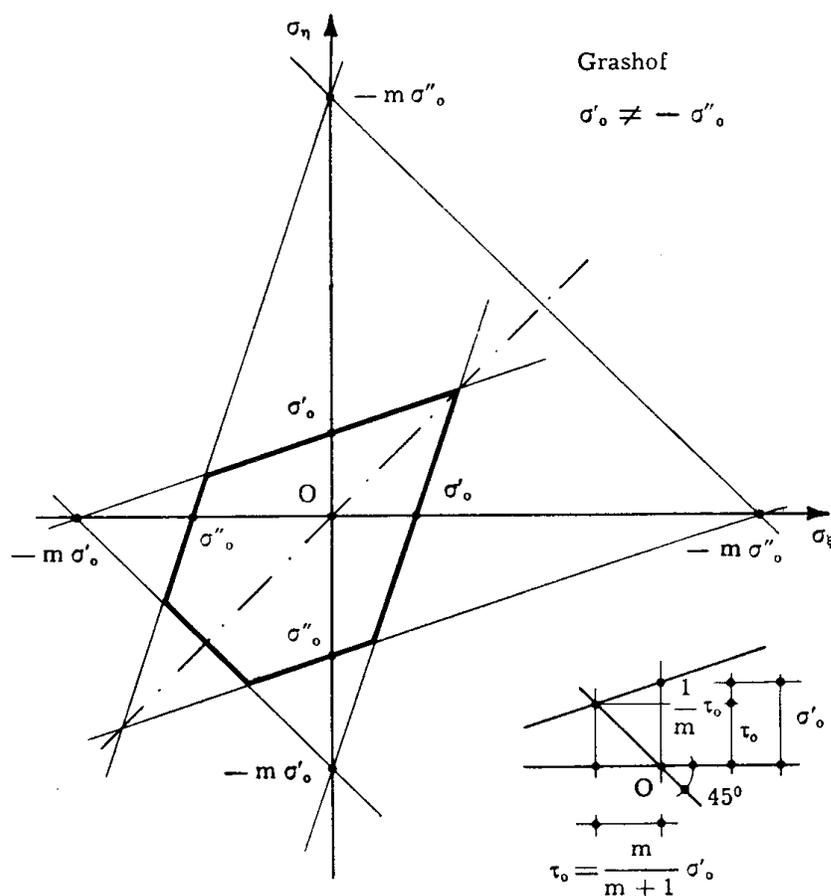


FIG. 9-48

sfettato, attesa la necessità di simmetria di qualsiasi curva limite nel piano $\sigma_{\xi} = 0$ rispetto alla bisettrice del quadrante positivo del piano $\sigma_{\xi} \sigma_{\eta}$.

Dalla fig. 9-48 si nota che, per $\sigma'_o \leq -\sigma''_o$, è

$$\tau_0 = \frac{m}{m+1} \sigma'_o . \quad (46)$$

Per $\sigma'_o = -\sigma''_o$, e $0 \leq 1/m \leq 1/3$, la figura 9-48 è un rombo, e il coef-

ficiente di sicurezza è il più piccolo valore ricavabile dalle relazioni

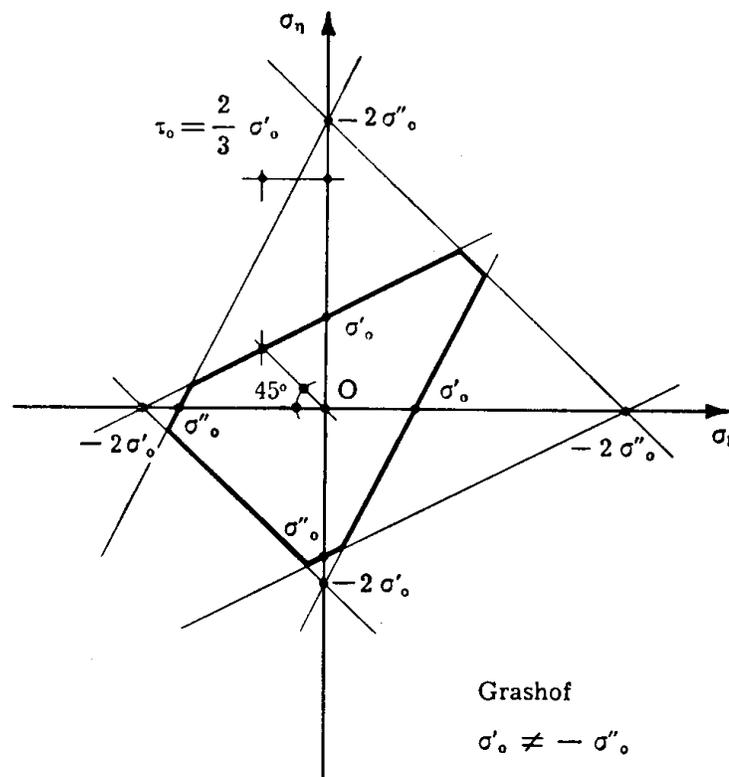
$$s \left(\sigma_{\xi} - \frac{\sigma_{\eta}}{m} \right) = \pm \sigma_0$$

$$s \left(\sigma_{\eta} - \frac{\sigma_{\xi}}{m} \right) = \pm \sigma_0 .$$

Se lo stato piano è dato attraverso σ_x , σ_y e τ_{xy} , tali relazioni si scrivono pure nel modo seguente

$$s \left[\frac{m-1}{2m} (\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right] = \pm \sigma_0 . \quad (47)$$

Si noti che per $1/m=0$ i piani (9-43) diventano paralleli ai piani coordinati, il romboide della fig. 9-46 un cubo, il rombo della fig. 9-48 un quadrato; si ricade cioè nella teoria del *Lamè* (1833) o di *Rankine* o della *massima e minima tensione*. Per $1/m=1/2$ i due vertici V' e V''



Grashof

$\sigma'_0 \neq -\sigma''_0$

$m=2$

Grashof modificato

FIG. 9-49

(fig. 9-45) coincidono con il punto improprio della trisettrice dell'ottante positivo, e il romboide diviene un cilindro indefinito con generatrici parallele alla suddetta trisettrice, ed avente per sezione sul piano $\sigma_{\xi} \sigma_{\eta}$ quella riportata nella fig. 9-49. Risulta così $\sigma'_{03} = \infty$, $\sigma''_{03} = -\infty$. Per

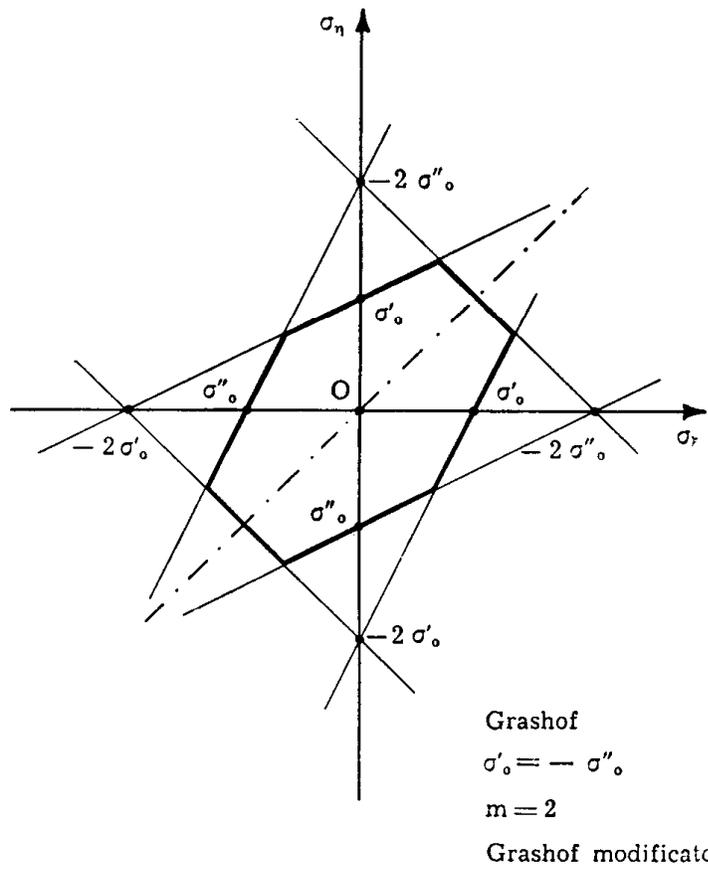


FIG. 9-50

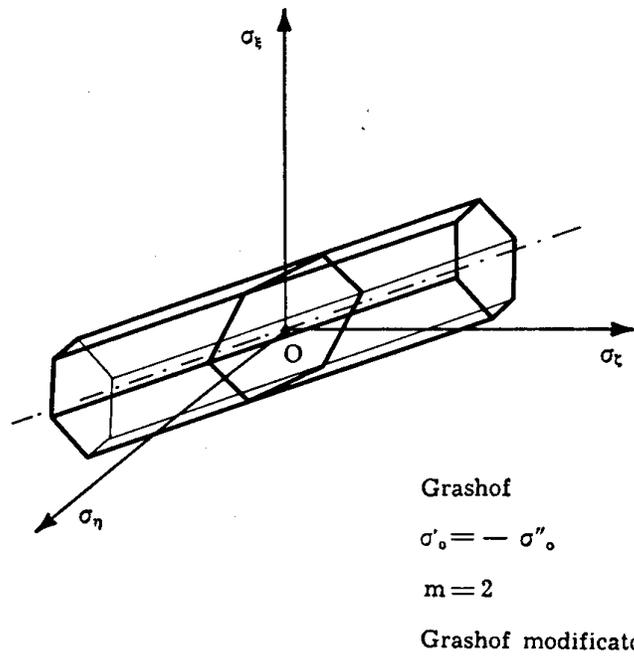


FIG. 9-51

$\sigma'_o = -\sigma''_o$ e per $m=2$ la sezione della superficie limite con il piano $\sigma'_\xi \sigma'_\eta$ è l'esagono della fig. 9-50, simmetrico rispetto alla bisettrice del quadrante positivo. La superficie limite è in questo caso un cilindro indefinito avente per sezione retta un esagono regolare (fig. 9-51); infatti la superficie limite deve essere simmetrica rispetto al piano passante per l'asse delle σ'_ξ e per la bisettrice del quadrante positivo $\sigma'_\eta \sigma'_\zeta$, ed inoltre deve ricoprirsi per una rotazione di 120° intorno all'asse.

Il criterio del Grashof presenta, rispetto a tutti i precedenti, il vantaggio di non offrire discontinuità del primo ordine della superficie limite per materiali con $\sigma'_o \neq -\sigma''_o$; le discontinuità del secondo ordine, derivanti dal fatto che la superficie limite è formata da piani, non ingenerano certo la stessa diffidenza di quelle del primo ordine.

La critica che in genere si rivolge alle teorie che non forniscono una superficie limite di rotazione è la seguente.

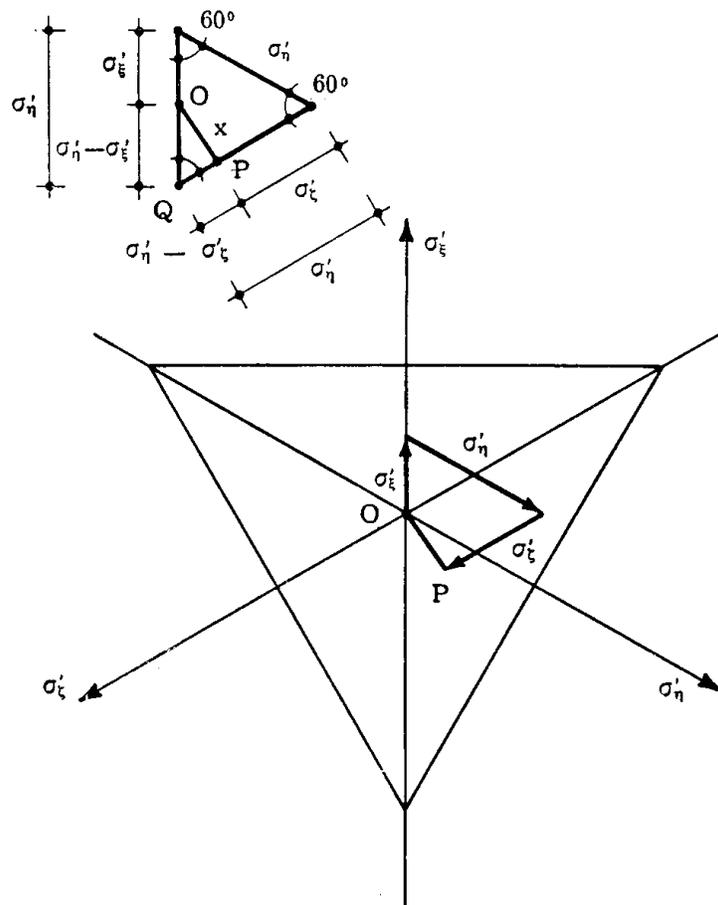


FIG. 9-52

Nella rappresentazione di Meldahl i tre assi si proiettano, normalmente sul piano ortogonale alla trisettrice dell'ottante positivo, in tre assi $\sigma'_\xi \sigma'_\eta \sigma'_\zeta$ (fig. 9-52) a 120°

l'uno con l'altro; le tensioni principali $\sigma_\xi \sigma_\eta \sigma_\zeta$ si proiettano normalmente su questi assi in tre vettori forniti da

$$\begin{aligned}\sigma'_\xi &= \frac{\sigma_\xi}{\sqrt{3}} \\ \sigma'_\eta &= \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}} \\ \sigma'_\zeta &= \frac{\sigma_\zeta}{\sqrt{3}},\end{aligned}$$

la cui risultante è un vettore OP di lunghezza

$$\overline{OP} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\zeta^2 - \sigma_\xi \sigma_\eta - \sigma_\eta \sigma_\zeta - \sigma_\zeta \sigma_\xi}; \quad (g')$$

infatti dal triangolo OPQ della fig. 9-52 si ha

$$\begin{aligned}x^2 &= (\sigma'_\eta - \sigma'_\xi)^2 + (\sigma'_\eta - \sigma'_\zeta)^2 - 2(\sigma'_\eta - \sigma'_\xi)(\sigma'_\eta - \sigma'_\zeta) \cos 60^\circ = \\ &= \sigma'_\xi^2 + \sigma'_\eta^2 + \sigma'_\zeta^2 - \sigma'_\xi \sigma'_\eta - \sigma'_\eta \sigma'_\zeta - \sigma'_\zeta \sigma'_\xi.\end{aligned}$$

Dalla (g') e dalla (9-36) risulta

$$\overline{OP} = \sqrt{\frac{3}{2}} \tau_{ott}, \quad (h')$$

e dalle (g') e (9-24)

$$\overline{OP} = \sqrt{2 G \varphi_f}. \quad (i')$$

Se quindi le sezioni di Meldahl (ottenute ognuna per $T = \text{cost}$) non sono cerchi, la crisi si avrebbe, sotto lo stesso T , per diversi valori della tensione tangenziale ottaedrale, o del potenziale di distorsione. Tutto ciò, in verità, non sembra poi una critica molto severa; equivale infatti a postulare che la crisi avvenga sotto φ_f funzione della sola T , e ciò può apparire gratuito.

Al criterio di Grashof inoltre può appuntarsi, sotto le stesse riserve, la stessa critica esposta trattando del criterio di Beltrami, e cioè non essere esatto supporre valide le (9-43), tratte nel campo elastico, fino alla rottura.

E' certo però che non può accettarsi un valore finito di σ''_{03} , come si ottiene dal criterio di Grashof. A questo inconveniente però si può mettere riparo operando alla Hencky, e cioè facendo riferimento non a tutte le deformazioni, ma solo a quelle *devianti*, e cioè a quelle (9-23) connesse con il deviatore delle tensioni.

10. Criterio di Grashof modificato alla Hencky.

Assumendo come parametro di crisi le deformazioni devianti, il coefficiente di sicurezza è il più piccolo dei valori calcolabili con le sei relazioni

$$\begin{aligned}
 s \frac{m+1}{3Em} (2\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta} - \sigma_{\zeta}) &= \varepsilon'_{fo} \\
 s \frac{m+1}{3Em} (2\sigma_{\eta} - \sigma_{\xi} - \sigma_{\zeta}) &= \varepsilon'_{fo} \\
 s \frac{m+1}{3Em} (2\sigma_{\zeta} - \sigma_{\xi} - \sigma_{\eta}) &= \varepsilon'_{fo} \\
 s \frac{m+1}{3Em} (2\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta} - \sigma_{\zeta}) &= \varepsilon''_{fo} \\
 s \frac{m+1}{3Em} (2\sigma_{\eta} - \sigma_{\xi} - \sigma_{\zeta}) &= \varepsilon''_{fo} \\
 s \frac{m+1}{3Em} (2\sigma_{\zeta} - \sigma_{\xi} - \sigma_{\eta}) &= \varepsilon''_{fo} .
 \end{aligned}
 \tag{1'}$$

In regime monoassiale le (1') forniscono

$$\begin{aligned}
 \varepsilon'_{fo} &= \frac{m+1}{3Em} 2\sigma'_{o} \\
 \varepsilon''_{fo} &= \frac{m+1}{3Em} 2\sigma''_{o} ;
 \end{aligned}$$

il dominio di compatibilità risulta perciò delimitato dai sei piani

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\xi} - \frac{\sigma_{\eta} + \sigma_{\zeta}}{2} &= \sigma'_{o} \\
 \sigma_{\eta} - \frac{\sigma_{\xi} + \sigma_{\zeta}}{2} &= \sigma'_{o} \\
 \sigma_{\zeta} - \frac{\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta}}{2} &= \sigma'_{o}
 \end{aligned}$$

$$\sigma_{\xi} - \frac{\sigma_{\eta} + \sigma_{\zeta}}{2} = \sigma''_o \quad (48)$$

$$\sigma_{\eta} - \frac{\sigma_{\xi} + \sigma_{\zeta}}{2} = \sigma''_o$$

$$\sigma_{\zeta} - \frac{\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta}}{2} = \sigma''_o .$$

Dal confronto tra le (9-44) e (9-48) si osserva che la superficie limite è quella di Grashof per $m=2$, cosa che ci si poteva attendere, poichè per $m=2$ le deformazioni devianti coincidono con quelle effettive. La superficie limite è perciò, per $\sigma'_o = -\sigma''_o$, quella della fig. 9-51, e la sua intersezione col piano $\sigma_{\zeta}=0$ quella della fig. 9-50.

Nel caso di taglio puro risulta per $\sigma'_o \leq -\sigma''_o$ (fig. 9-49)

$$\tau_o = \frac{2}{3} \sigma'_o . \quad (49)$$

Rispetto al criterio di Hencky, quello di Grashof modificato ha lo svantaggio delle discontinuità del secondo ordine; esso però è utilizzabile anche per $\sigma'_o \neq -\sigma''_o$, e fornisce, pure in tal caso, $\sigma''_{o3} = -\infty$. Il criterio però trova la sua limitazione nel fatto che, come quello di Hencky, importa $\sigma'_{o3} = \infty$, e quindi è consigliabile solo per materiali duttili, per cui σ'_{o3} è molto elevato.

Per i materiali fragili, invece, occorrerebbe adottare per $T > 0$ il criterio di Grashof nella forma originale, e per $T < 0$ quello modificato; ciò comporta, però, discontinuità del primo ordine in $T=0$, inaccettabili come nel criterio di Huber.

11. Criterio di Tresca-De Saint Venant.

Secondo il *De Saint Venant* (1870) ed il *Tresca* (1871) il parametro da cui dipende la crisi è la massima tensione tangenziale. Il coefficiente di sicurezza è così il più piccolo dei valori positivi ricavabili dalle sei relazioni

$$\frac{s}{2} (\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta}) = \tau_{mo}$$

$$\frac{s}{2} (\sigma_{\eta} - \sigma_{\xi}) = \tau_{mo}$$

$$\frac{s}{2} (\sigma_{\xi} - \sigma_{\zeta}) = \tau_{mo} \quad (m')$$

$$\frac{s}{2} (\sigma_{\zeta} - \sigma_{\xi}) = \tau_{mo}$$

$$\frac{s}{2} (\sigma_{\eta} - \sigma_{\zeta}) = \tau_{mo}$$

$$\frac{s}{2} (\sigma_{\zeta} - \sigma_{\eta}) = \tau_{mo} .$$

In regime monoassiale, per $\sigma'_o = -\sigma''_o = \sigma_o$, si ha

$$\frac{\sigma_o}{2} = \tau_{mo} ;$$

perciò il dominio di elasticità (fig. 9-53) è la parte di spazio compresa

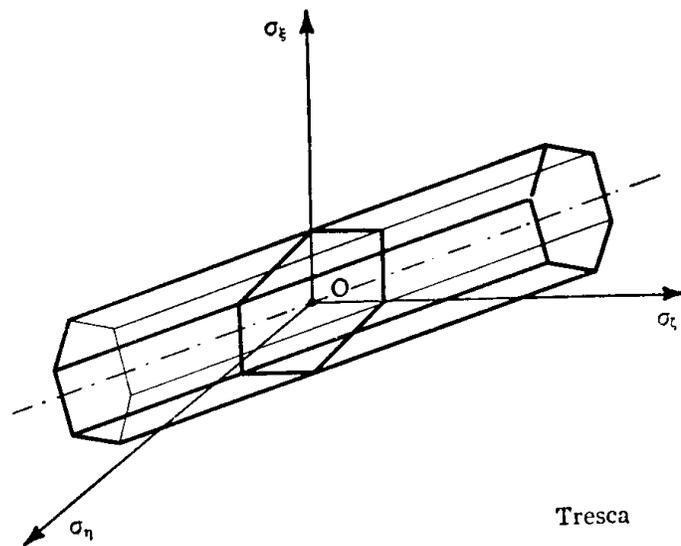


FIG. 9-53

tra i sei piani

$$\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta} = \sigma_o$$

$$\sigma_{\eta} - \sigma_{\xi} = \sigma_o$$

$$\sigma_{\xi} - \sigma_{\zeta} = \sigma_o$$

$$\sigma_{\zeta} - \sigma_{\xi} = \sigma_o$$

$$\sigma_{\eta} - \sigma_{\zeta} = \sigma_o$$

$$\sigma_{\zeta} - \sigma_{\eta} = \sigma_o .$$

(50)

Il coefficiente di sicurezza è il più piccolo s positivo ricavabile dalle sei relazioni

$$\begin{aligned} s (\sigma_\xi - \sigma_\eta) &= \pm \sigma_o \\ s (\sigma_\eta - \sigma_\zeta) &= \pm \sigma_o \\ s (\sigma_\zeta - \sigma_\xi) &= \pm \sigma_o ; \end{aligned}$$

la tensione in parentesi nella relazione cui corrisponde il più basso valore di s è la tensione equivalente.

I sei piani (9-50) sono paralleli alla trisettrice dell'ottante positivo; il primo di essi infatti è parallelo all'asse delle σ_ζ , e taglia il piano $\sigma_\xi \sigma_\eta$

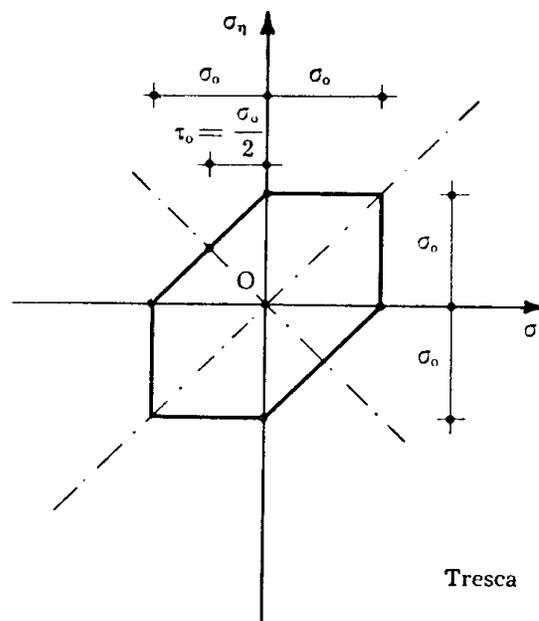


FIG. 9-54

secondo una retta parallela alla bisettrice del quadrante positivo; analogamente per gli altri. La sezione della superficie limite con il piano $\sigma_\xi \sigma_\eta$ è la parte di piano delimitata dalle sei rette

$$\begin{aligned} \sigma_\xi - \sigma_\eta &= \sigma_o \\ \sigma_\eta - \sigma_\xi &= \sigma_o \\ \sigma_\xi &= \sigma_o \\ -\sigma_\xi &= \sigma_o \\ \sigma_\eta &= \sigma_o \\ -\sigma_\eta &= \sigma_o ; \end{aligned} \tag{51}$$

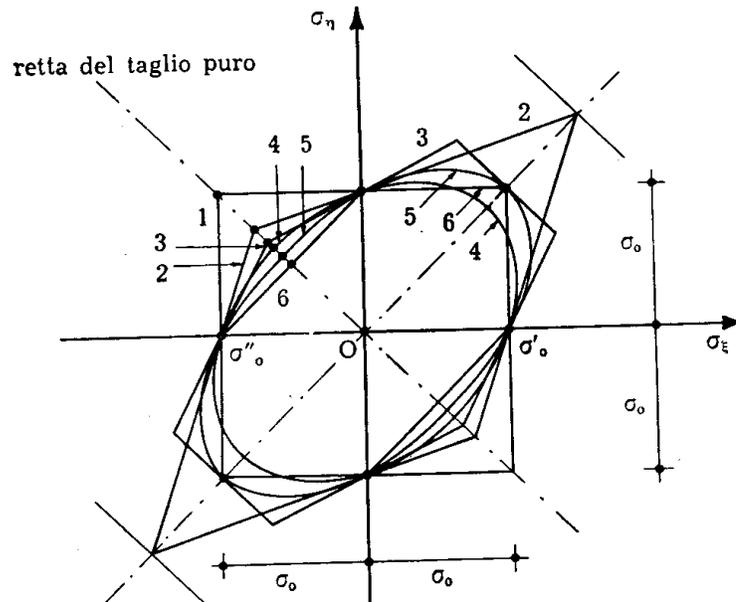
essa è l'esagono irregolare della fig. 9-54.

Nel caso di taglio puro si ha

$$\tau_o = \frac{\sigma_o}{2} . \quad (52)$$

La superficie limite è il prisma indefinito che si appoggia a tale esagono ed ha generatrici parallele alla trisettrice dell'ottante positivo (fig. 9-53); la sua sezione retta è un esagono regolare, per gli stessi motivi esposti nel caso del criterio di Grashof per $m = 2$.

Anche nel criterio di Tresca risulta $\sigma'_{o3} = \infty$, $\sigma''_{o3} = -\infty$; esso inoltre, come il criterio di Hencky, è applicabile solo ai materiali duttili, per cui è $\sigma'_o = -\sigma''_o$, per le solite ragioni di discontinuità. E' da notare che implicitamente il criterio di Tresca tiene conto del solo deviatore delle tensioni; infatti, aggiungendo o sottraendo una quantità co-



- 1 Rankine
- 2 Grashof
- 3 Grashof modificato
- 4 Beltrami
- 5 Hencky
- 6 Tresca

Stati tensionali piani

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{3}$$

$$\sigma'_o = -\sigma''_o$$

FIG. 9-55

stante alle tre tensioni principali, il massimo cerchio di Mohr si sposta, ma non varia di diametro. E' questo il motivo intrinseco per cui il cri-

terio di Tresca prescinde dal valore del modulo m , e porta a $\sigma'_{03} = \infty$, $\sigma''_{03} = -\infty$.

Il criterio di Tresca chiama in gioco solo due delle tensioni principali; questa proprietà, comune al criterio della curva intrinseca, che appresso si esporrà, è per alcuni motivi di diffidenza. E' da mettere però in evidenza, contro ogni critica, la grande semplicità applicativa, che ancora fa usare il criterio di Tresca in molteplici casi. Nella fig. 9-55 sono riportati in unico disegno i domini di elasticità per gli stati tensionali piani, per $\sigma'_0 = -\sigma''_0$, e per $1/m = 1/3$ (acciaio), già forniti caso per caso; si vede così come, nella particolarizzazione piana, la differenza tra i vari criteri sia meno sentita, e si osserva che l'esagono di Tresca è interno a tutti i domini, fatta eccezione per quello di Beltrami, e quindi fra tutti i criteri fa operare in maggiore sicurezza.

12. Criterio della curva intrinseca o di Mohr-Cauchot.

La teoria che si passa ad esporre, enunciata nel 1882 dal *Mohr*, e perfezionata ultimamente dal *Caquot*, presenta il vantaggio, rispetto a tutte le precedenti, di operare direttamente sullo stato tensionale, definito attraverso i cerchi principali di Mohr, e non su una qualsiasi funzione dello stato stesso, che oltre tutto non può non essere espressa attraverso le formule valide per il regime elastico, sia essa un termine energetico o un termine di deformazione.

A tale proposito si fa notare che anche nella teoria di Tresca le tensioni si introducono nella condizione di plasticizzazione (m') in una forma valida in qualsiasi campo; tale teoria però si può considerare appunto come un caso particolare della teoria di Mohr. Lo stesso accade nella teoria della tensione tangenziale ottaedrale; però l'espressione finale della condizione di plasticizzazione coincide con quella di Hencky, ricavata in fase elastica.

La teoria di Mohr permette poi di conoscere le linee di frattura, cosa impossibile con gli altri criteri. I suddetti vantaggi si scontano con la necessità di eseguire più prove sperimentali in regime triassiale; limitandosi alle due sole classiche prove in regime monoassiale (cosa non sempre possibile, come nel caso delle terre) si rinuncia alla buona aderenza al vero, caratteristica del criterio in esame.

Nell'intorno di un punto A , su un elemento piano di dS di normale n (fig. 9-56 a) agiscono una σ_n , ed una τ_n secondo una direzione m .

Si supponga tutto il corpo a comportamento indefinitamente elastico, fatta eccezione per la fetta di base dS e altezza piccolissima rispetto alle dimensioni di dS .

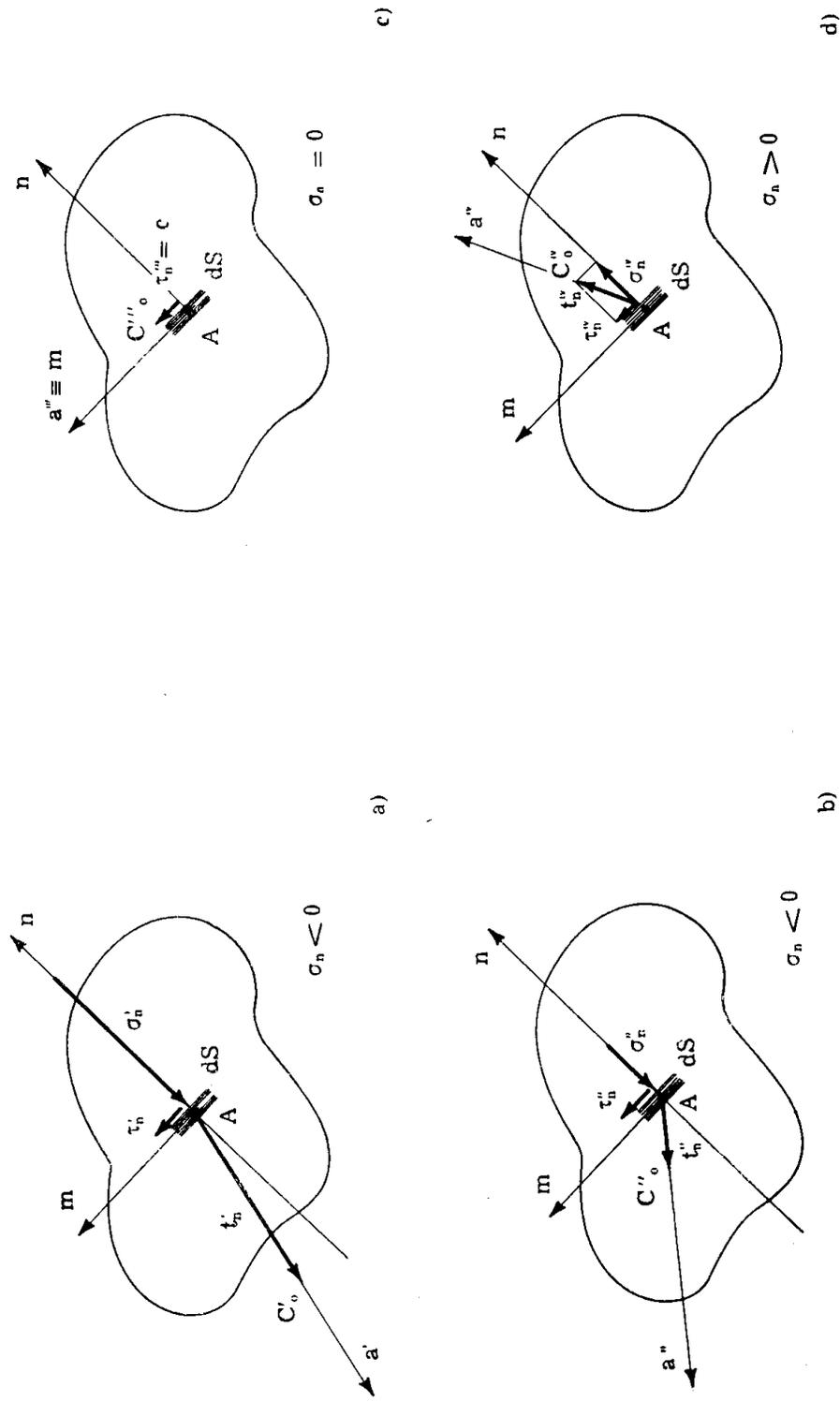


FIG. 9-56 a, b, c, d

Se, per σ_n costante, e pari a σ'_n , τ_n aumenta, si raggiunge un valore τ'_n di τ_n per cui tra gli elementi piani dell'intorno paralleli a dS si genera uno slittamento irreversibile.

La risultante di σ'_n e τ'_n è la tensione t'_n , che agisce secondo una retta a' ; sia C'_o l'estremo di t'_n .

Per un altro valore di σ_n , σ''_n , la τ_n di crisi ha un altro valore τ''_n (fig. 9-56 b); la risultante di σ''_n e τ''_n è una tensione t''_n di retta d'azio-

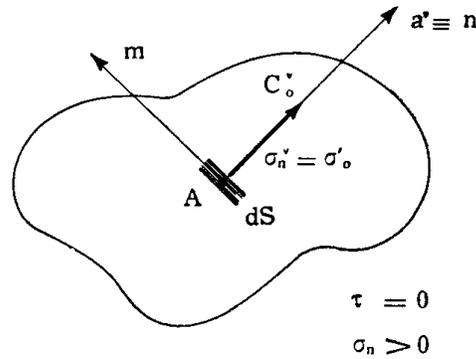


FIG. 9-56 e

e)

ne a'' e di estremo C''_o . Il valore τ_n^* della τ_n di crisi è in genere funzione del valore della σ_n , e della orientazione della retta m nel piano dS :

$$\tau_n^* = \tau_n^*(\sigma_n, m); \tag{n'}$$

la (n') non è altro che una legge di attrito di primo distacco, legge in genere non lineare, e variabile con l'orientazione di m . Il luogo degli

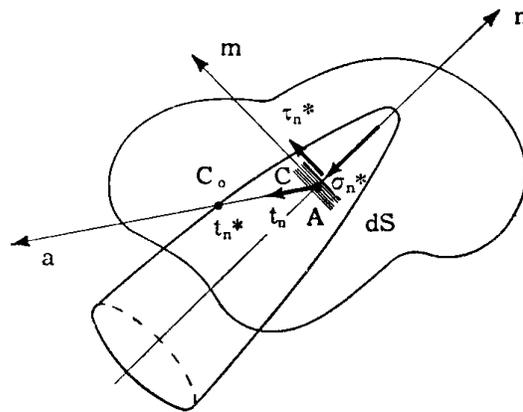


FIG. 9-57

estremi C_o dei vettori t_n^* di crisi si chiama *superficie intrinseca* del materiale, relativa al punto A, ed all'elemento di normale n (fig. 9-57).

La conoscenza di questa superficie permette, data la tensione di esercizio t_n agente sull'elemento dS di normale n , di ottenere il coefficiente di sicurezza relativo agli slittamenti secondo dS :

$$s_n = \frac{AC_0}{AC} \quad (\sigma')$$

In relazione all'intorno di A esistono ∞^2 superfici intrinseche, tante quante sono le rette n per A . Dato lo stato tensionale in A , per ogni n è fissata la retta a e il valore di t_n , e quindi il valore di s_n ; il più piccolo degli ∞^2 valori di s_n , calcolabili ciascuno attraverso la propria curva intrinseca, è il coefficiente di sicurezza s in A ; la giacitura corrispondente a tale valore è il piano di slittamento. Per ciò dire occorre accettare che ogni giacitura si comporti nei riguardi della crisi come se lungo le altre la crisi non fosse possibile, e cioè appunto che la crisi avvenga secondo un unico piano, e quindi per slittamento; è perciò che la teoria prende anche il nome di *criterio dell'attrito interno non proporzionale*.

Se il materiale è isotropo, le ∞^2 superfici intrinseche in A sono identiche; ed inoltre ognuna di esse è una superficie di rotazione di asse n , e quindi rappresentabile attraverso la sua sezione meridiana che prende nome di *curva intrinseca*. In tal caso la ricerca di s secondo il procedimento poco fa esposto diviene praticamente attuabile, una volta conosciuta la curva intrinseca; tracciata infatti questa curva in un riferimento $\sigma \tau$, si dispone il generico elemento dS_1 di normale n_1 in modo che i due vettori σ_{n_1} e τ_{n_1} giacciono sugli assi σ e $-\tau$, nello stesso verso

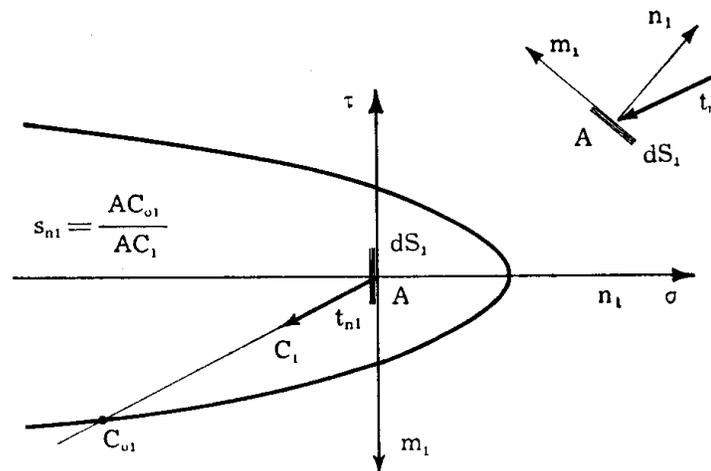


FIG. 9-58

di questi assi se il loro segno è positivo, in verso contrario se negativo. Con ciò la n_1 si porta sull'asse delle σ , e la traccia dell'elemento sull'asse delle τ (fig. 9-58); inoltre il vettore t_n , si porta sul piano $\sigma \tau$. Sia AC_1

questo vettore; il rapporto AC_{o1}/AC_1 fornisce s_{n1} . Per avere il minimo s_n occorre ripetere tale costruzione per tutte le normali n per A ; ciò si esegue con immediatezza attraverso il tracciamento dei cerchi di Mohr. Date le tre tensioni principali $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \sigma_z$, si tracciano i tre cerchi principali di Mohr. Tutte le tensioni t_n sono fornite (fig. 9-59) dai vettori con-

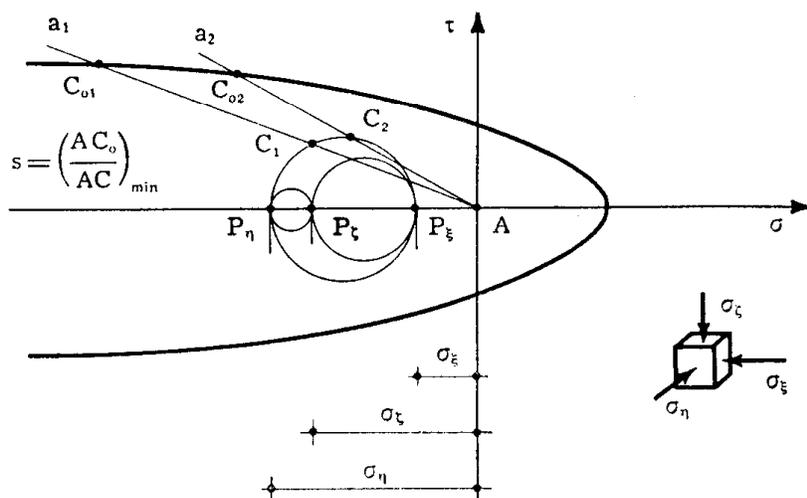


FIG. 9-59

giungenti l'origine A con un punto qualsiasi C dell'area compresa tra il cerchio massimo e gli altri due. Considerata una generica retta a_1 passante per A , delle tensioni inclinate dell'angolo $\hat{a}_1 \tau$ sul proprio elemento interessa la più elevata, fornita in valore dal vettore AC_1 ; con riferimento ad essa è

$$s_{n1} = \frac{AC_{o1}}{AC_1} \quad (p')$$

Il più piccolo tra i valori (p') sia quello relativo alla retta AC (fig. 9-60); risulta

$$s = \frac{AC_o}{AC}.$$

Incrementando le tre σ principali nel rapporto s , il cerchio massimo di Mohr si trasforma in quello omotetico al cerchio delle tensioni di esercizio, nel rapporto s e con centro A ; tale cerchio è il *cerchio di crisi*, e risulta tangente alla curva intrinseca in C_o , intersezione della curva con la retta AC .

Orientando il cubetto elementare con le direzioni principali estreme ξ ed η secondo gli assi σ e τ , il polo P del cerchio è l'estremo P_{η_0} o P_{ξ_0} , secondo che η o ξ sia parallelo all'asse σ .

Le tracce dei piani di crisi si hanno congiungendo C_o con il polo, e cioè con l'estremo della tensione principale orientata secondo l'asse delle σ , per esempio nel caso in esame (fig. 9-60) con l'estremo P_{η_0} della σ_{η} . I piani di crisi hanno per direzione comune tale retta sul piano delle

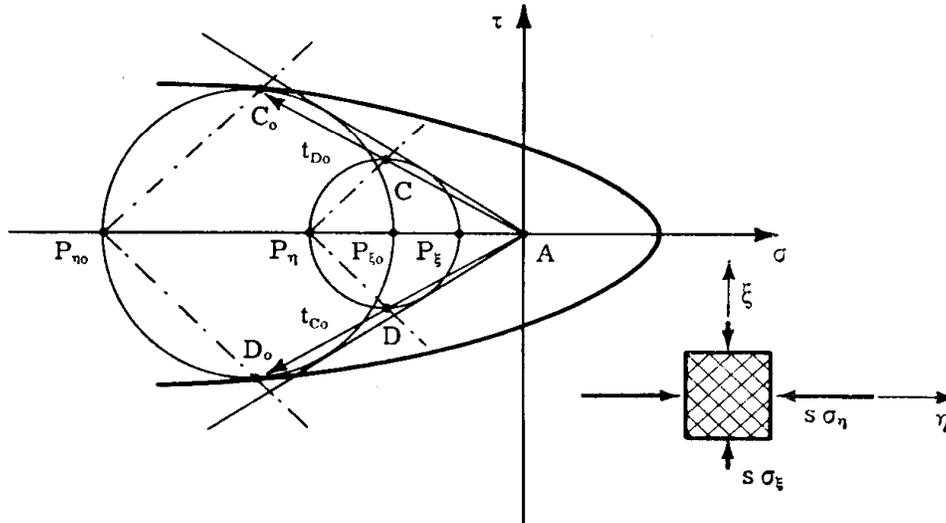


FIG. 9-60

tensioni principali estreme orientato con le direzioni principali secondo gli assi σ e τ del riferimento di Mohr, e si appoggiano alla tensione principale intermedia. La costruzione del piano di crisi si effettua in genere sul cerchio di esercizio, poichè $P_{\eta}C$ è parallelo a $P_{\eta_0}C_o$ (fig. 9-60). Si noti che il cerchio di crisi è tangente alla curva intrinseca anche nel

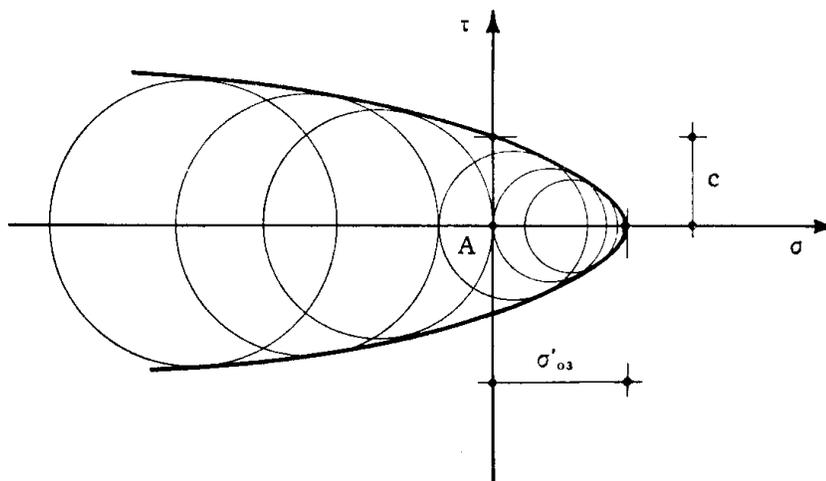


FIG. 9-61

punto D_o , simmetrico di C_o rispetto all'asse delle σ , e quindi le direzioni dei piani di crisi sono due, la $P_{\eta_0}C_o$ e la $P_{\eta_0}D_o$, equinclinate rispetto alle

due direzioni principali corrispondenti alle tensioni estreme. Le due tensioni di crisi sono i vettori AC_0 e AD_0 , relativi alle due direzioni di crisi, e riferiti al piano la cui traccia coincide con l'asse τ . Si osserva subito che nel criterio della curva intrinseca non interviene la tensione principale intermedia.

La costruzione della curva intrinseca si esegue effettuando prove in regime triassiale su più provini, e tracciando i relativi cerchi massimi di crisi. L'involuppo dei cerchi massimi è la curva intrinseca (fig. 9-61).

Le prove triassiali più comuni vengono eseguite tenendo uguali due delle tensioni principali. L'apparecchio del *Brice* (fig. 9-62), con cui furono

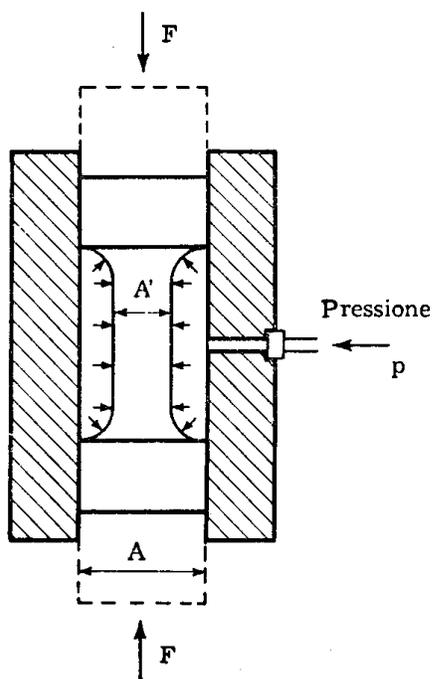


FIG. 9-62 (da *L'Hermite*)

eseguite notevoli prove sui conglomerati nel 1933 (*), fornisce su un provino cilindrico con espansioni terminali una tensione σ_z di trazione o compressione secondo l'asse e due tensioni di compressioni radiali σ_r e σ_θ uguali, utilizzando una sola sorgente di pressione. Se A è l'area della sezione del cilindro, ed A' quella del provino, è $\sigma_z = p \frac{A - A'}{A'}$
 $\sigma_r = \sigma_\theta = -p$. Applicando due forze esterne F assiali di com-

(*) *L. P. Brice*, Determination expérimentale et tracé de la courbe de résistance intrinsèque du béton. Science et Industrie - gennaio 1934.

pressione, è $\sigma_{\xi} = -\frac{F}{A'} + p \frac{A - A'}{A'}$. Il provino è rivestito da una membrana di gomma.

Nell'apparecchio usato da *Richart, Brandtzaeg e Brown* (fig. 9-63) per il conglomerato, il provino è cilindrico, e quindi può aversi solo una σ_{ξ} di compressione.

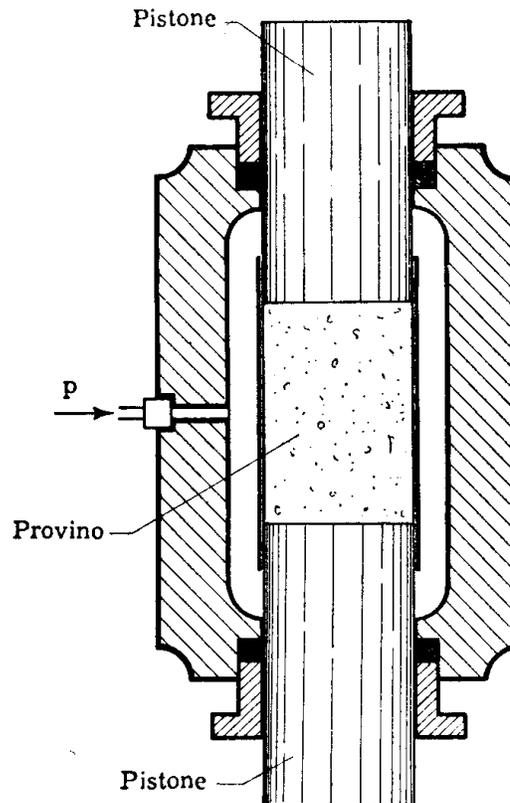


FIG. 9-63 (da *L'Hermite*)

L'apparecchio di *L'Hermite* (*), usato anch'esso per i conglomerati (1946), adopera ancora provini cilindrici, e permette di raggiungere pressioni di 2000 Kg/cm² (fig. 9-64).

Per i metalli *L'Hermite* ha usato invece (1945) l'apparecchio della fig. 9-65; in una prima camera un pistone esercita sull'olio la pressione $p = F/S$. Il provino ha una prima espansione A che si appoggia su un risalto dell'apparecchio, bloccandosi; delle scanellature alla periferia dell'espansione A permettono all'olio in pressione di scendere nella camera inferiore. La parte inferiore del provino ha un'altra espansione B ,

(*) *R. L'Hermite, Méthodes générales d'essai et de contrôle en laboratoire. Eyrolles, Paris 1959, vol. I, pagg. 558-565.*

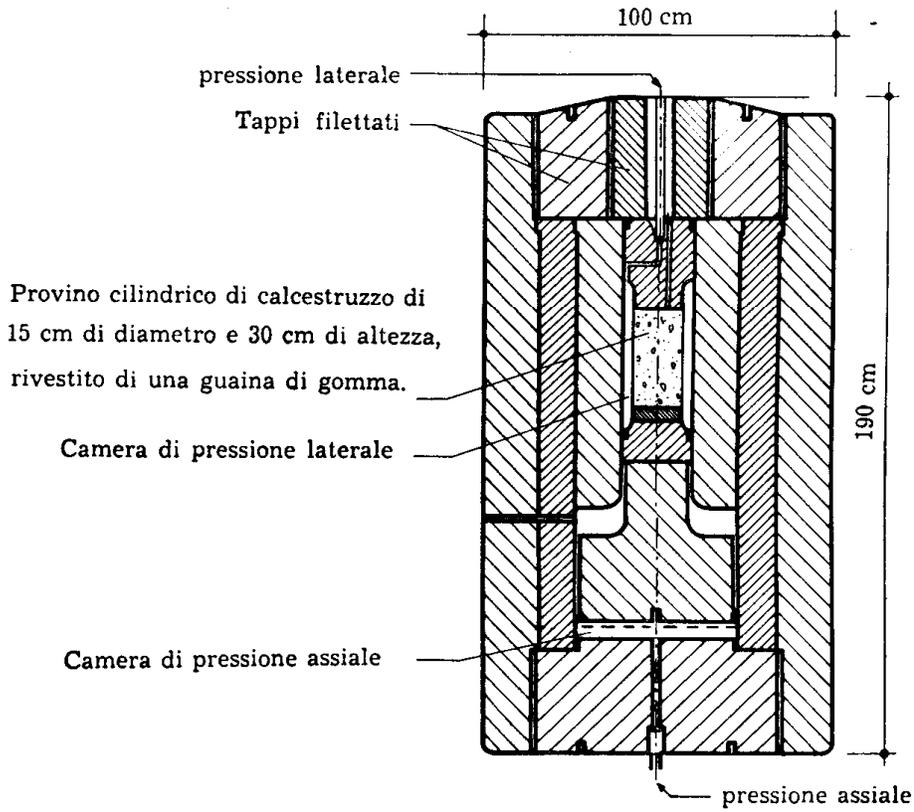


FIG. 9-64 (da L'Hermite)

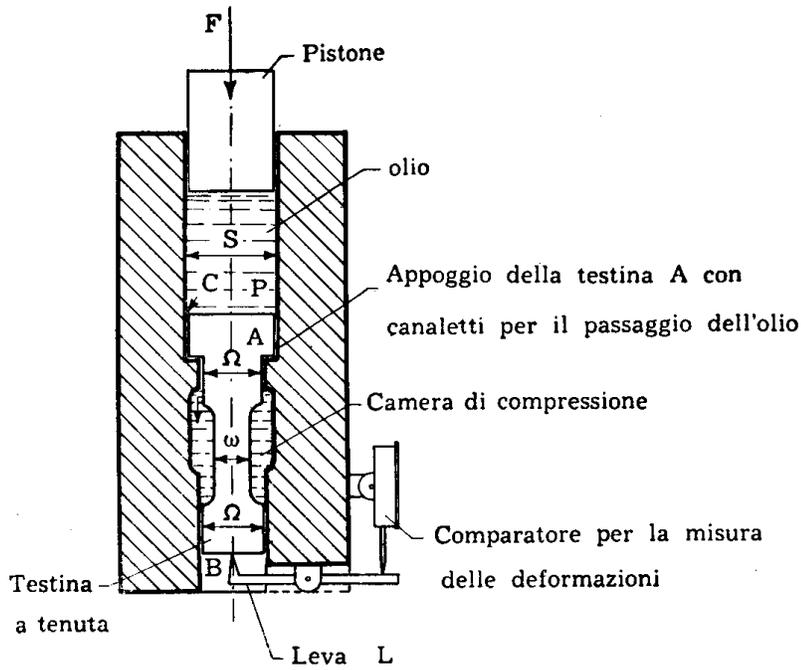


FIG. 9-65 (da L'Hermite)

tornita, che può scorrere a tenuta sulla superficie interna dell'apparecchio. Sia ω la sezione della parte del provino interessata dalla prova, Ω l'area dell'espansione B inferiore. Tutto l'apparecchio si piazza tra i piatti di una pressa che esercita la forza F ; la parte centrale è soggetta

ad una trazione assiale $\sigma_{\xi} = \frac{F}{S} \frac{\Omega - \omega}{\omega}$, e a due compressioni radiali $\sigma_{\eta} = \sigma_{\zeta} = -F/S$.

Facendo variare ω su una serie di provini si varia a volontà il rapporto $\sigma_{\xi}/\sigma_{\eta}$. Nella parte inferiore una leva collegata con un comparatore misura gli allungamenti e quindi il limite di elasticità.

Nella fig. 9-66 è riportato l'apparecchio di L'Hermite per prove trias-

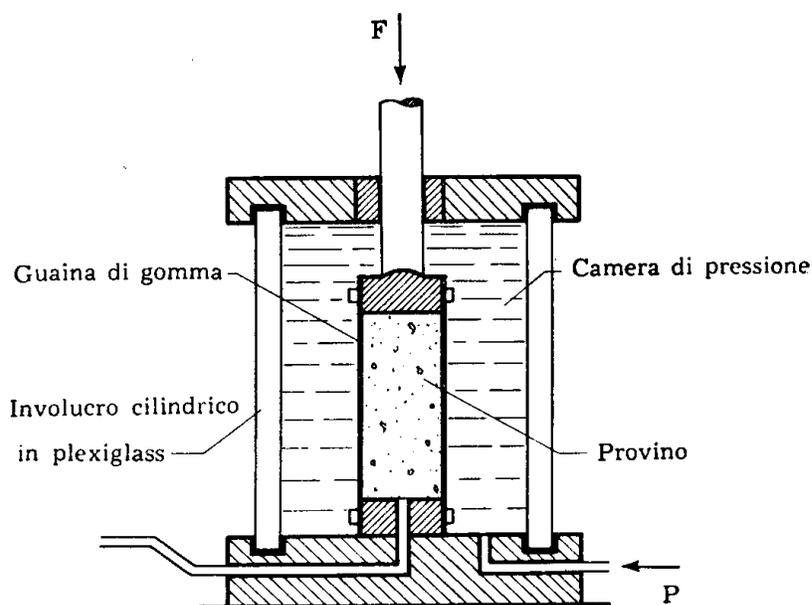


FIG. 9-66 (da L'Hermite)

siali su terre sciolte; il provino, circondato da una membrana di gomma, è piazzato tra due pistoni sui quali la guaina è fissata a tenuta, il tutto dentro un recipiente di vetro o plexiglas, trasparente, nel quale agisce un liquido sotto pressione. Se è necessario conoscere durante la prova la pressione del liquido interstiziale, dei canali nel pistone inferiore collegano il provino ad un manometro. Il momento della crisi si avverte ad occhio con lo sfaldamento del provino. Molto più difficili sono le prove triassiali con tre tensioni principali tutte diverse, di trazione o compressione; il Prot, operando su provini cavi (fig. 9-67), ottiene (da L'Hermite)

$$\text{tensione longitudinale} \quad \sigma_{\xi} = \frac{D^2 - d^2}{d^2 - \delta^2} p$$

$$\begin{aligned} \text{tensione tangenziale} \quad \sigma_{\eta} &= - \frac{2 d^2}{d^2 - \delta^2} p \\ \text{tensione radiale} \quad \sigma_{\zeta} &= - p \end{aligned}$$

Prove sistematiche sotto tensioni elevatissime sono state effettuate dal *Bridgman* nel 1943.

La coordinata dell'intersezione della curva intrinseca (fig. 9-61) con l'asse delle τ è la cosiddetta *coesione* c ; la coordinata dell'intersezione

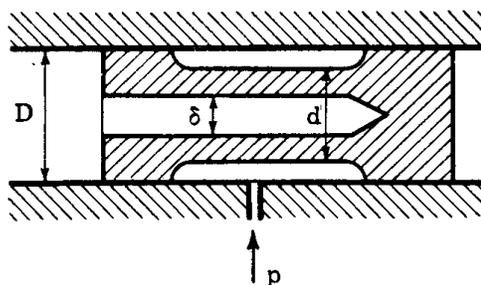


FIG. 9-67 (da *L'Hermite*)

con l'asse delle σ dalla parte delle σ positive è la *tensione idrostatica di crisi a trazione* σ'_{03} .

La curva intrinseca ha sempre l'aspetto della fig. 9-61. L'intersezione con l'asse delle σ dalla parte delle σ negative è sperimentalmente irrilevante, quindi in pratica è $\sigma''_{03} = -\infty$; inoltre è sempre $\sigma'_0 < -\sigma''_0$.

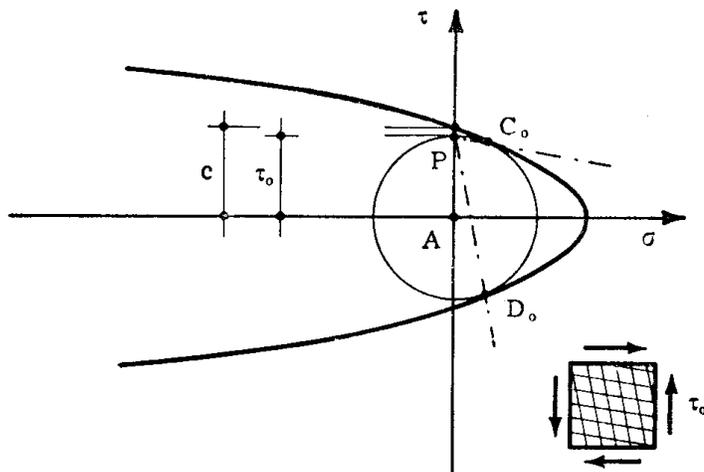


FIG. 9-68

La curva intrinseca volge in ogni caso la sua concavità verso l'asse delle σ , cui i due bracci tendono a divenire paralleli.

La *tensione di crisi a taglio puro* τ_0 è fornita dal raggio del cerchio di centro A e tangente alla curva (fig. 9-68). Orientando il cubetto ele-

mentare come nella fig. 9-68, il polo P del cerchio di Mohr è l'estremo superiore del raggio disteso sull'asse delle τ ; le direzioni di crisi sono perciò le PC_0 e PD_0 .

Le tensioni di crisi in regime monoassiale σ'_0 e σ''_0 sono i raggi dei due cerchi tangenti all'asse delle τ ed alla curva intrinseca (fig. 9-69).

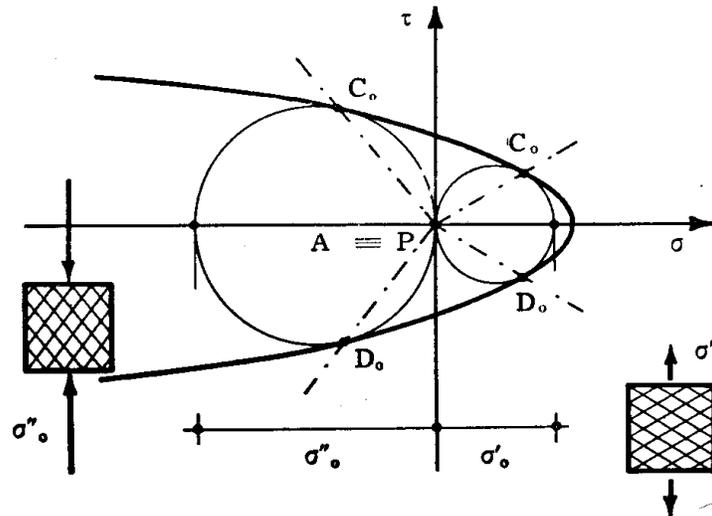


FIG. 9-69

Orientando i cubetti come nella fig. 9-69, il polo dei due cerchi di Mohr coincide con l'origine; le direzioni di crisi sono perciò le AC_0 e AD_0 .

Risulta in ogni caso

$$\frac{\sigma'_0}{2} < \tau_0 < \sigma'_0 \quad (53)$$

e ancora

$$\sigma'_0 < -\sigma''_0 \quad (54)$$

$$\tau_0 < c.$$

Nella fig. 9-70 sono riportate le curve intrinseche per alcuni materiali metallici.

Per il conglomerato, è molto interessante il procedimento di *Brice*.

Si parte in questo dalla considerazione del *Caquot* secondo cui per ogni conglomerato può scriversi

$$\sigma + \sigma'_{03} = \pm \tau^{3/2}; \quad (55)$$

nel piano $\sigma\tau$ la curva (9-55) è immediatamente costruibile in una scala

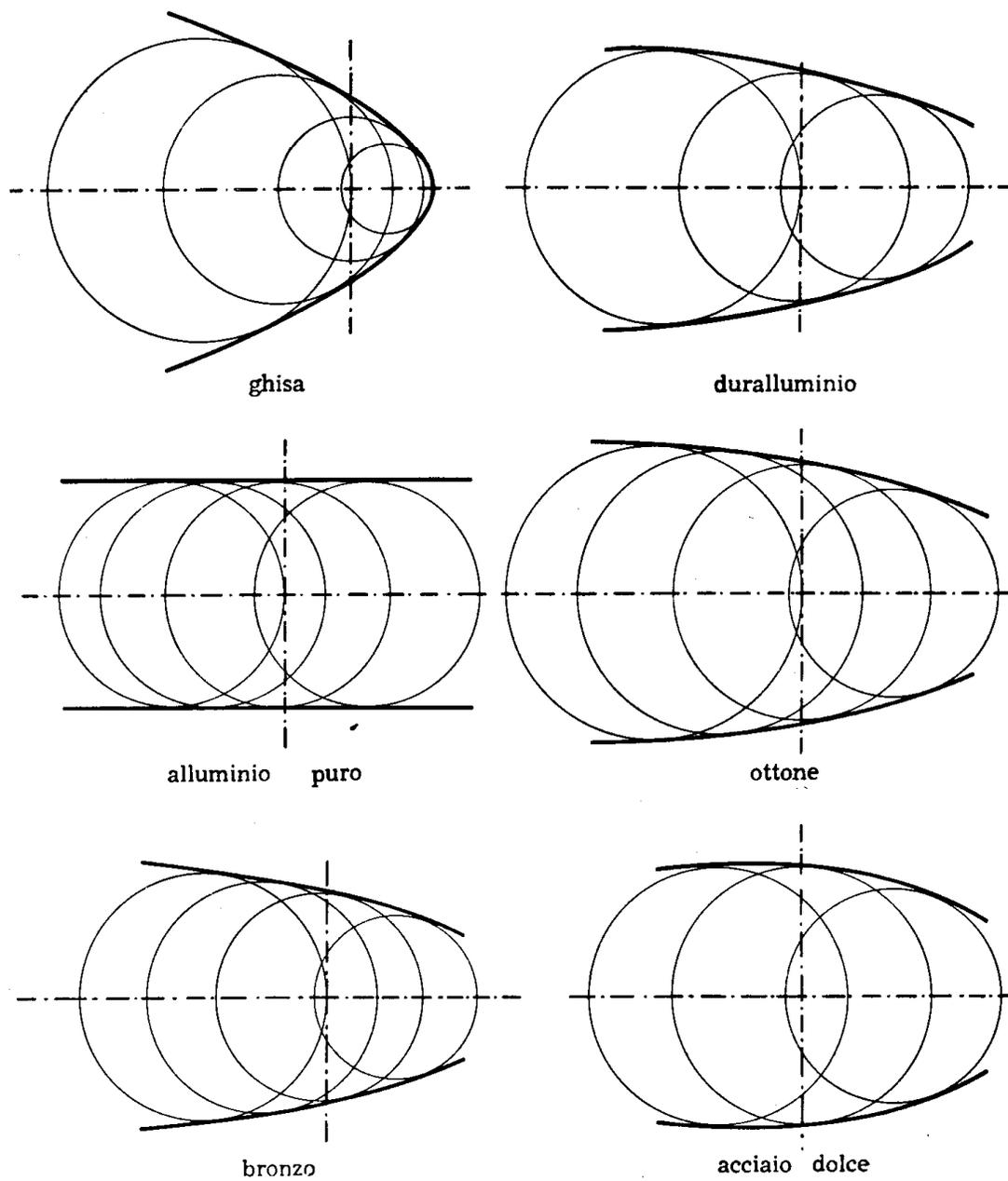


FIG. 9-70 (da Courbon)

qualsiasi (fig. 9-71). Occorre poi per ogni tipo di conglomerato fissare l'origine, e cioè il valore di σ'_{o3} . A ciò fare, per ogni punto A considerato come origine si riporta sulla verticale il valore del rapporto ρ tra i diametri dei due cerchi tangenti alla verticale in A, e tangenti alla curva (9-55), ottenendo così la curva ρ .

Dati poi per un conglomerato i valori σ''_o e σ'_o , il rapporto $-\sigma''_o/\sigma'_o$ fissa immediatamente il punto origine per quel conglomerato. La scala

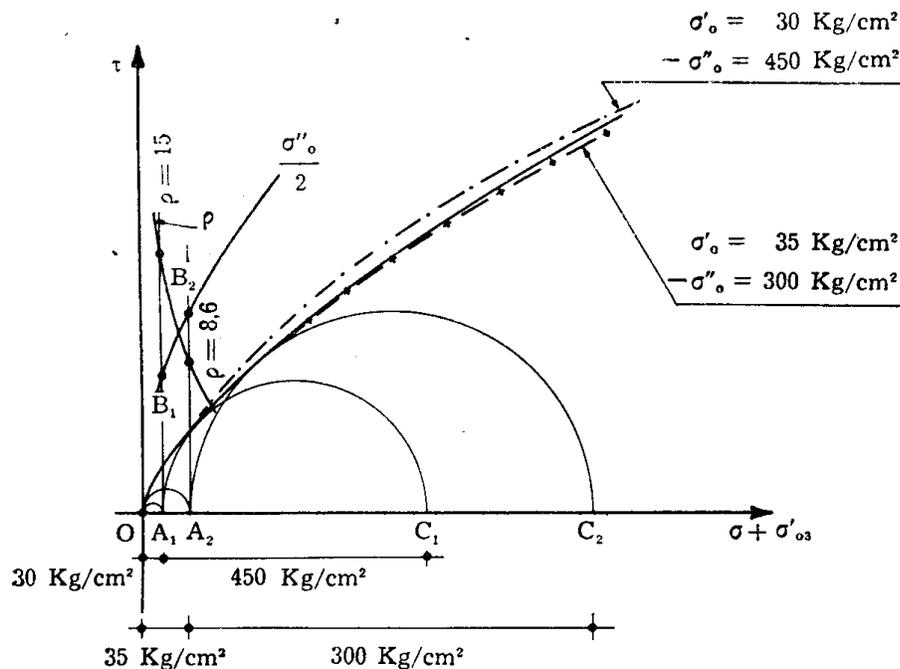


FIG. 9-71

del diagramma varia anch'essa per ogni tipo di conglomerato; essa è quella per cui il cerchio maggiore tangente in A alla verticale ha diametro $AC = -\sigma''_o$ (o, il minore, σ'_o).

Nella fig. 9-71 sono riportati nella curva $\sigma''_o/2$ i segmenti AB pari ad $AC/2$; la scala grafica è quella per cui $AB = \sigma''_o/2$. Nella stessa figura sono riportati i diagrammi per un conglomerato caratterizzato da $\sigma'_o = 30 \text{ Kg/cm}^2$, $\sigma''_o = -450 \text{ Kg/cm}^2$ ($\rho = 15$, origine A_1 , $A_1 B_1 = 225 \text{ Kg/cm}^2$) e per un conglomerato caratterizzato da $\sigma'_o = 35 \text{ Kg/cm}^2$, $\sigma''_o = -300 \text{ Kg/cm}^2$ ($\rho = 8,6$, origine A_2 , $A_2 B_2 = 150 \text{ Kg/cm}^2$).

La curva (9-55) è a tratto intero; sono pure riportate a tratti e punti ed a tratti e croci le curve sperimentali per i due tipi di conglomerato.

Nel capitolo che segue si daranno alcuni esempi relativi alle terre sciolte.

Nei materiali duttili (fig. 9-70) la curva intrinseca si presenta di forma allungata, con σ'_o e σ''_o prossimi in valore assoluto, e σ'_{o3} molto elevato (fig. 9-72). Le tracce dei piani di frattura in regime monoassiale sono

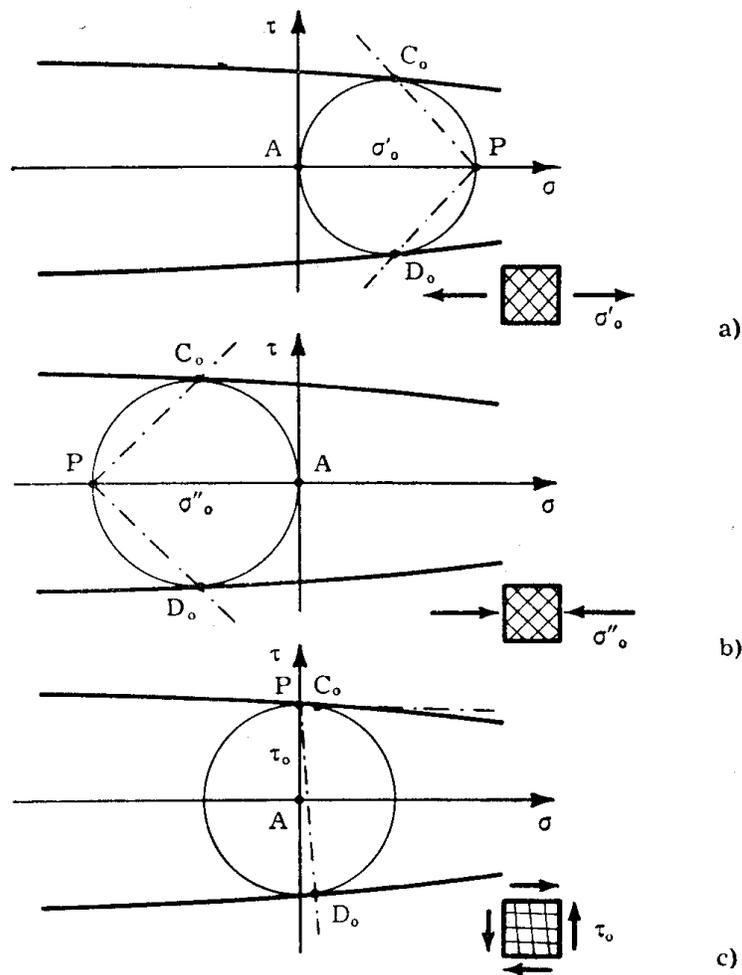


FIG. 9-72

disposte pressochè a 45° con la direzione della forza; i piani stessi si appoggiano ad una qualsiasi delle rette del piano normale alla direzione della forza.

Nel taglio puro si ha

$$\tau_o \leq c$$

$$\tau_o \leq \frac{\sigma'_o}{2} \quad (56)$$

$$\tau_o \leq \frac{\sigma''_o}{2} ;$$

i piani di frattura risultano ortogonali al piano delle τ e le loro tracce su questo piano pressochè parallele alle direzioni delle tensioni tangenziali.

Al limite, la curva intrinseca può per i materiali molto duttili assimilarsi a due rette parallele all'asse delle σ e da questo equidistanti

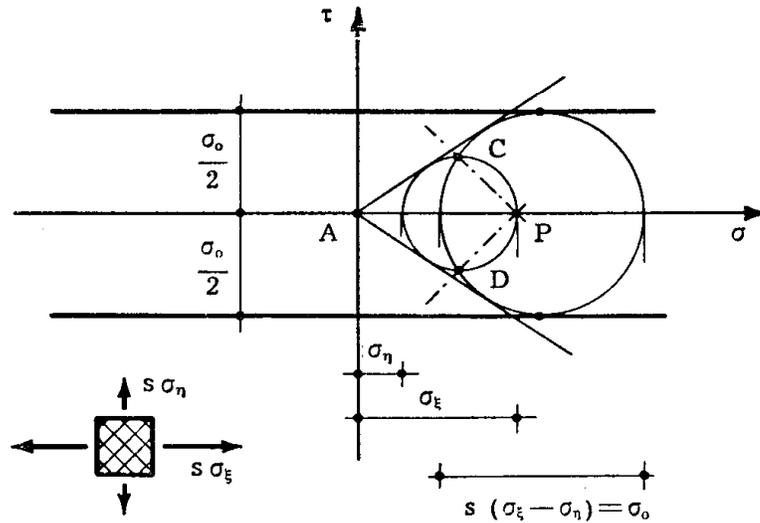


FIG. 9-73

(fig. 9-73). Le (9-56) sono in tal caso valide in rigore, e la condizione di resistenza può esprimersi analiticamente come segue:

$$s (\sigma_s - \sigma_n) = \sigma_0 .$$

Si ritrova così la condizione di Tresca (9-50); si ha conferma quindi del fatto che il criterio di Tresca è bene aderente al vero per materiali molto duttili. Le tracce dei piani di frattura nel piano delle tensioni principali estreme sono inclinate sempre a 45° sulle direzioni principali estreme, e i piani stessi si appoggiano alla tensione principale intermedia; i piani di frattura sono cioè quelli relativi alle più elevate tensioni tangenziali, ed anche ciò è in accordo con il criterio di Tresca.

Nei materiali fragili (fig. 9-71) la curva intrinseca si presenta invece aperta (fig. 9-74).

Si ha in tal caso

$$\begin{aligned} -\sigma''_0 &\gg \sigma'_0 \\ \sigma'_{0.3} &\approx \sigma'_0 . \end{aligned} \tag{57}$$

Nella sollecitazione monoassiale di trazione (fig. 9-74 a) i piani di

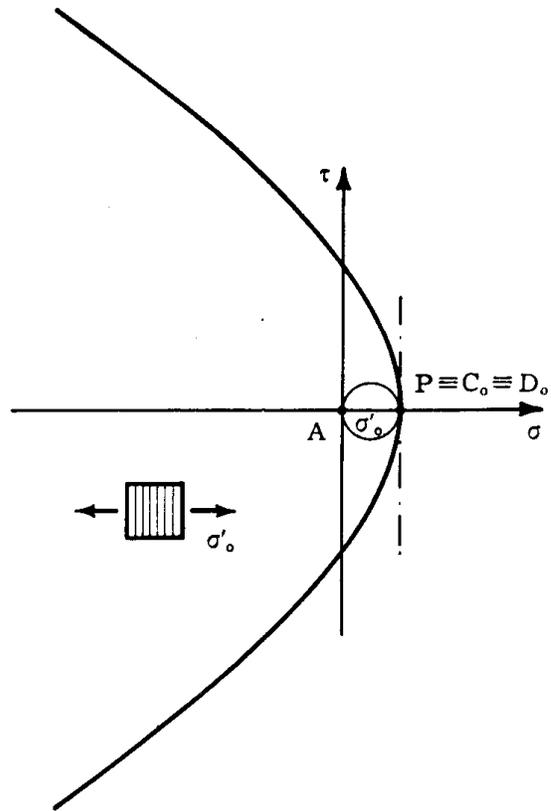


FIG. 9-74 a

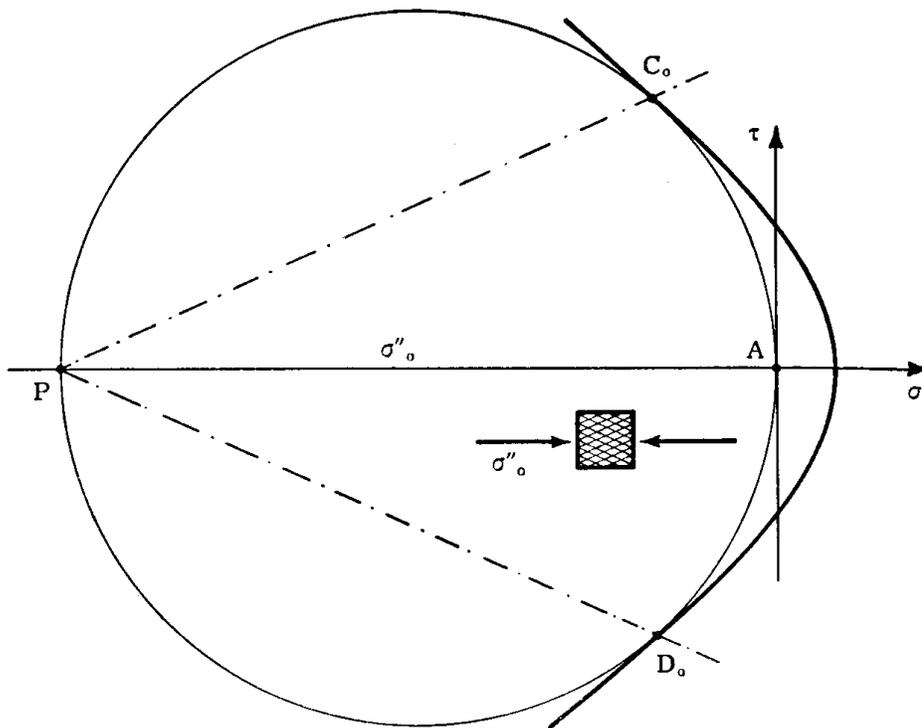


FIG. 9-74 b

crisi hanno una sola direzione, e risultano ortogonali alla direzione della forza. Nella sollecitazione monoassiale di compressione (fig. 9-74 b) le tracce dei piani di frattura sono invece solo di poco inclinate rispetto alla direzione della forza; i piani di crisi, come in ogni sollecitazione monoassiale, si appoggiano ad una qualsiasi delle rette del piano normale alla direzione della forza, poichè qualsiasi retta è direzione principale.

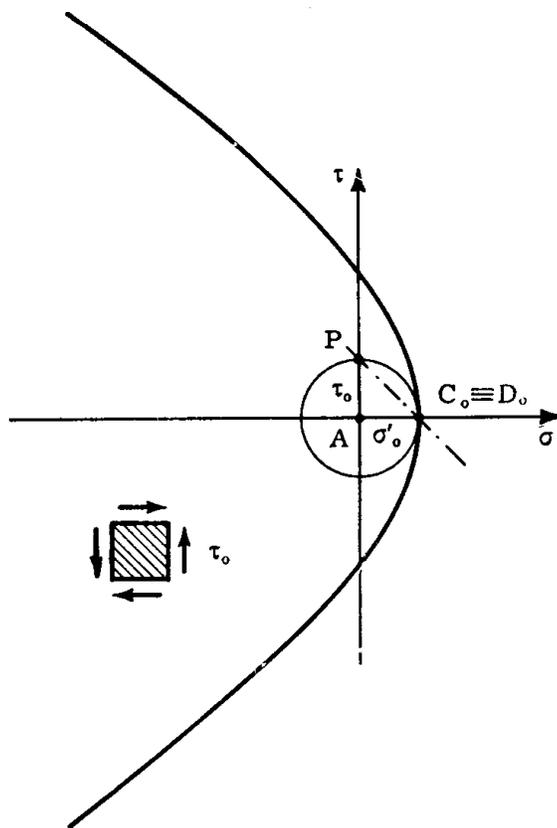


FIG. 9-74 c

Nella sollecitazione di taglio puro (fig. 9-74 c) risulta:

$$c \gg \tau_0 \quad (58)$$

$$\tau_0 = \sigma'_0 ;$$

i piani di frattura hanno una sola direzione, sono ortogonali al piano delle τ , e le loro tracce su questo piano sono inclinate a 45° sulla direzione delle τ ; tali piani risultano normali alla direzione principale di trazione. Le tensioni di crisi $A C_0$ ed $A D_0$, pari in valore a τ_0 , sono inclinate a 45° rispetto alla direzione delle τ , e risultano di trazione.

E' interessante osservare come la presenza di una compressione migliore nei materiali fragili la resistenza al taglio rispetto a quella relativa al taglio puro. Se infatti una sollecitazione di taglio puro raggiunge il valore di crisi τ_0 (fig. 9-75), la presenza di una compressione in stato tensionale piano esalta il raggio del cerchio principale di Mohr, ma nel-

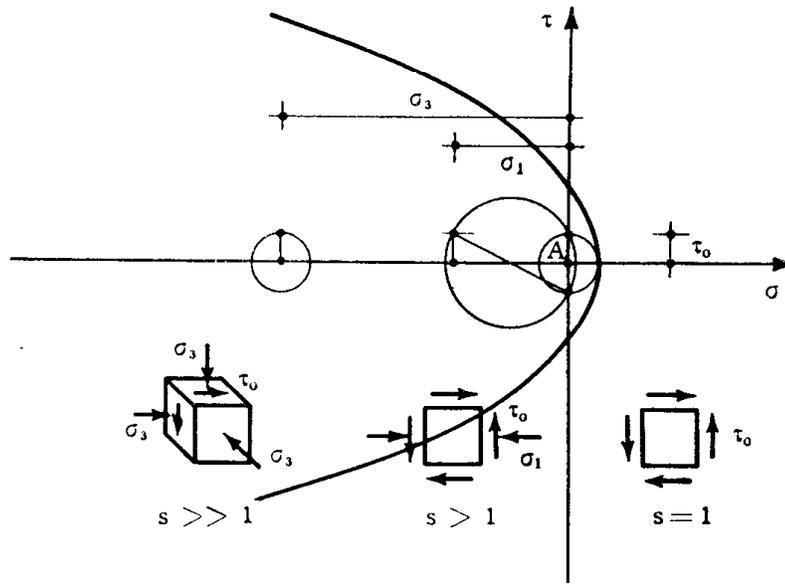


FIG. 9-75

lo stesso tempo ne sposta il centro verso sinistra, cosicchè il coefficiente di sicurezza aumenta. Se poi alla τ_0 si accoppia una compressione triassiale, il coefficiente di sicurezza aumenta in maniera molto più decisiva. Tutto ciò è di grande importanza nella calcolazione delle strutture in conglomerato precompresso.

Secondo *Caquot* l'equazione della curva intrinseca può porsi nella maggior parte dei casi nella forma

$$a\sigma + b = \pm \tau^{3/2} \quad (59)$$

con

$$b = c^{3/2}$$

$$a = -\frac{b}{\sigma'_{o3}} ;$$

c è la già incontrata coesione.

Nel caso degli stati piani di tensione, in particolare delle travi, il cerchio massimo è sempre secante o al massimo tangente l'asse delle τ ;

perciò il tratto di curva intrinseca che interessa è quello compreso tra i due cerchi di crisi in regime monoassiale. Nel caso del conglomerato,

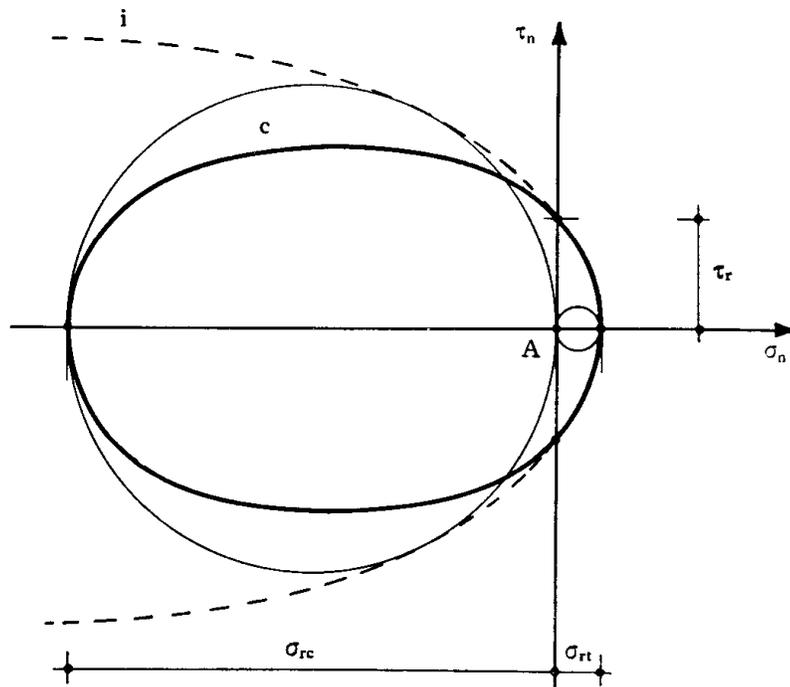


FIG. 9-76

Chalos e Beteille chiamano tale tratto *curva caratteristica*, e la assimilano (fig. 9-76) all'ellisse di equazione

$$\tau^2 = \frac{c^2}{\sigma'_0 \sigma''_0} (\sigma - \sigma''_0) (\sigma - \sigma'_0) . \quad (60)$$

Per $\sigma = 0$, $\tau^2 = c^2$; per $\tau = 0$, $\sigma = \sigma'_0$ oppure $\sigma = \sigma''_0$. Il coefficiente di sicurezza è fornito dalla relazione

$$s^2 \tau^2 = \frac{c^2}{\sigma'_0 \sigma''_0} (s \sigma - \sigma'_0) (s \sigma - \sigma''_0) . \quad (61)$$

Nella fig. 9-77 è riportato un primo esempio di calcolo del coefficiente di sicurezza attraverso la curva intrinseca. Lo stato tensionale nel punto, con riferimento a tre assi ortogonali $Oxyz$, è definito dalle componenti speciali di tensione

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -110 \text{ Kg/cm}^2 \\ \sigma_y &= -20 \quad \text{»} \\ \sigma_z &= -90 \quad \text{»} \\ \tau_{xz} &= -20 \quad \text{»} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= 0 \\ \tau_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

L'asse y coincide con una direzione principale, poichè $\tau_y = 0$; una

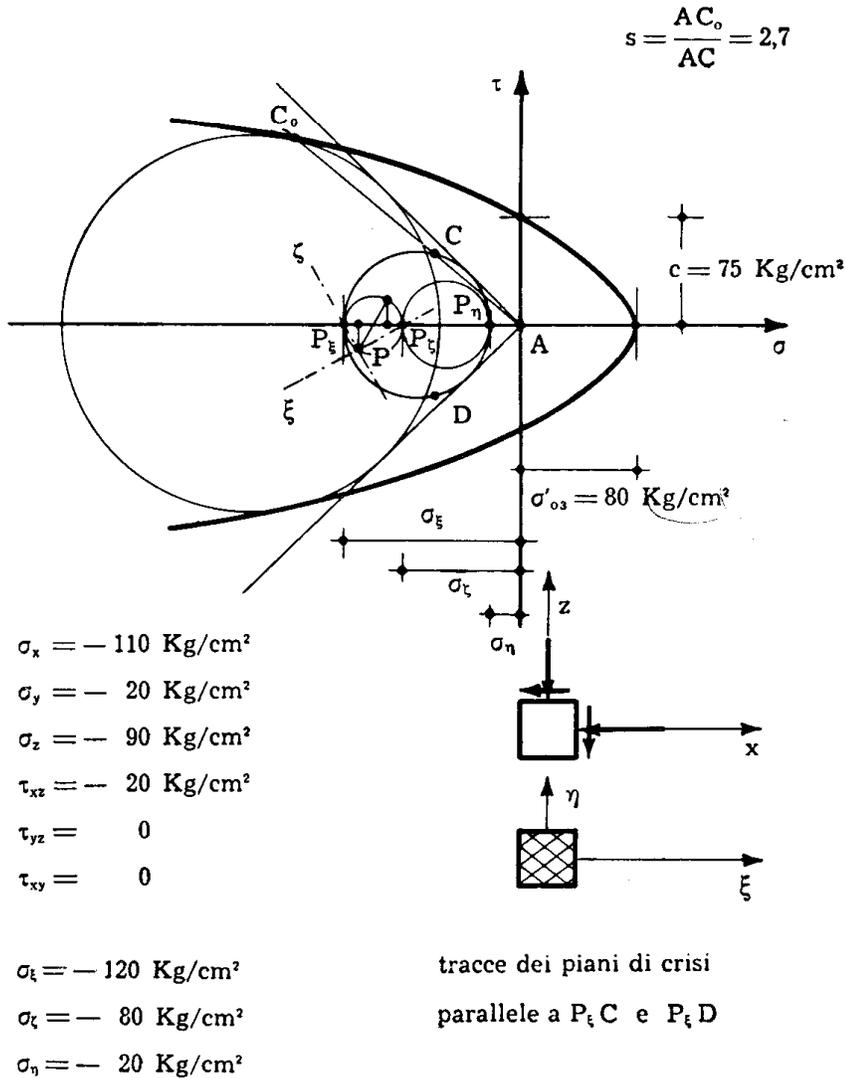


FIG. 9-77

tensione principale è perciò pari a σ_y :

$$\sigma_\eta = -20 \text{ Kg/cm}^2$$

La ricerca delle altre due direzioni principali e relative tensioni si esegue perciò graficamente attraverso il cerchio di Mohr. Risulta così

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= -120 \text{ Kg/cm}^2 \\ \sigma_\zeta &= -80 \text{ » } \end{aligned}$$

le direzioni principali nel piano xz sono le parallele alle rette PP_ξ e PP_ζ . Il cerchio massimo di Mohr è quello di diametro $P_\xi P_\eta$; in relazione ad esso si calcola

$$s = \frac{AC_0}{AC} = 2,7 .$$

Il cerchio di crisi, omotetico al cerchio massimo di Mohr con centro di omotetia A e rapporto 2,7, è tangente alla curva intrinseca in C_0 e D_0 ; i due cerchi hanno le due tangenti per A comuni. I piani di crisi si ap-

Trave

$$\sigma_z = 1000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\tau_{xz} = 400 \text{ Kg/cm}^2$$

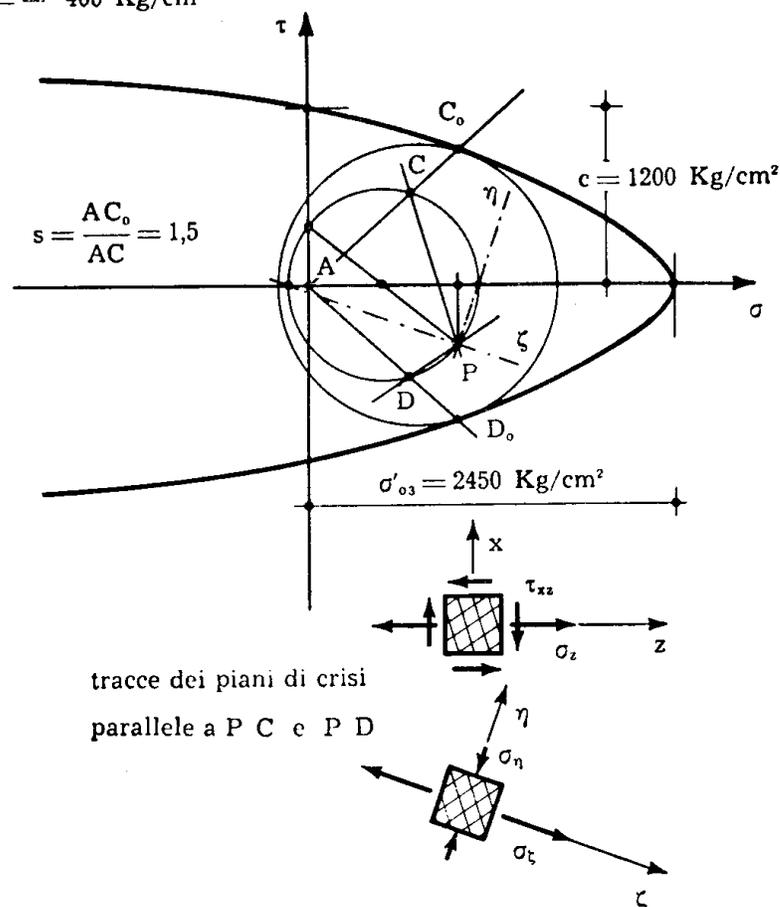


FIG. 9-78

poggiano alla retta ζ , essendo σ_ζ la tensione principale intermedia; le tracce di tali piani sul piano $\xi\eta$ sono, orientando ξ secondo l'asse delle σ , le parallele alle rette $P_\xi C$ e $P_\xi D$.

Un secondo esempio è riportato nella fig. 9-78; esso è relativo ad una trave, e sono quindi presenti σ_z e τ_{zx}

$$\sigma_z = 1000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\tau_{zx} = 400 \quad \text{»}$$

Nel piano xz giacciono due delle direzioni principali, ξ e ζ ; la terza, η , è ad esso normale. La ricerca di ξ e ζ e delle relative tensioni può eseguirsi perciò col cerchio di Mohr relativo all'asse η , che è pure il massimo dei tre cerchi principali, perchè $\sigma_\eta = 0$, e σ_ξ e σ_ζ sono di segno opposto. In relazione al suddetto cerchio si calcola

$$s = \frac{AC_0}{AC} = 1,5 .$$

Le tracce dei piani di crisi sul piano xy , orientando l'asse x secondo l'asse delle σ , sono le parallele alle rette PC e PD .

Il suddetto procedimento è comune a tutte le travi.

Un terzo esempio è quello della fig. 9-79, relativa ad uno stato tensionale piano. Questo è definito dalle tre componenti

$$\sigma_x = -100 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_y = -50 \quad \text{»}$$

$$\tau_{xy} = 30 \quad \text{»}$$

Una delle tensioni principali, σ_ζ , è nulla; le altre due tensioni principali giacciono nel piano xy , e si determinano costruendo il cerchio di Mohr. Quest'ultimo fornisce

$$\sigma_\xi = -115 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_\eta = -35 \quad \text{»}$$

Le direzioni ξ ed η sul piano xy , nell'ipotesi che x sia diretto secondo l'asse delle σ , sono le parallele alle rette PP_η e PP_ξ .

Il cerchio massimo, poichè σ_ξ e σ_η sono dello stesso segno, è quello relativo alla retta η , ed ha per estremi P_ξ e l'origine. Con riferimento a tale cerchio si ha

$$s = \frac{AC_0}{AC} = 1,86 .$$

tensione principale di trazione, o della minima di compressione (fig. 9-80 a, b).

Le lesioni che si appalesano all'atto della crisi seguono l'andamento delle suddette tracce; perciò dal loro rilievo può trarsi qualche indica-

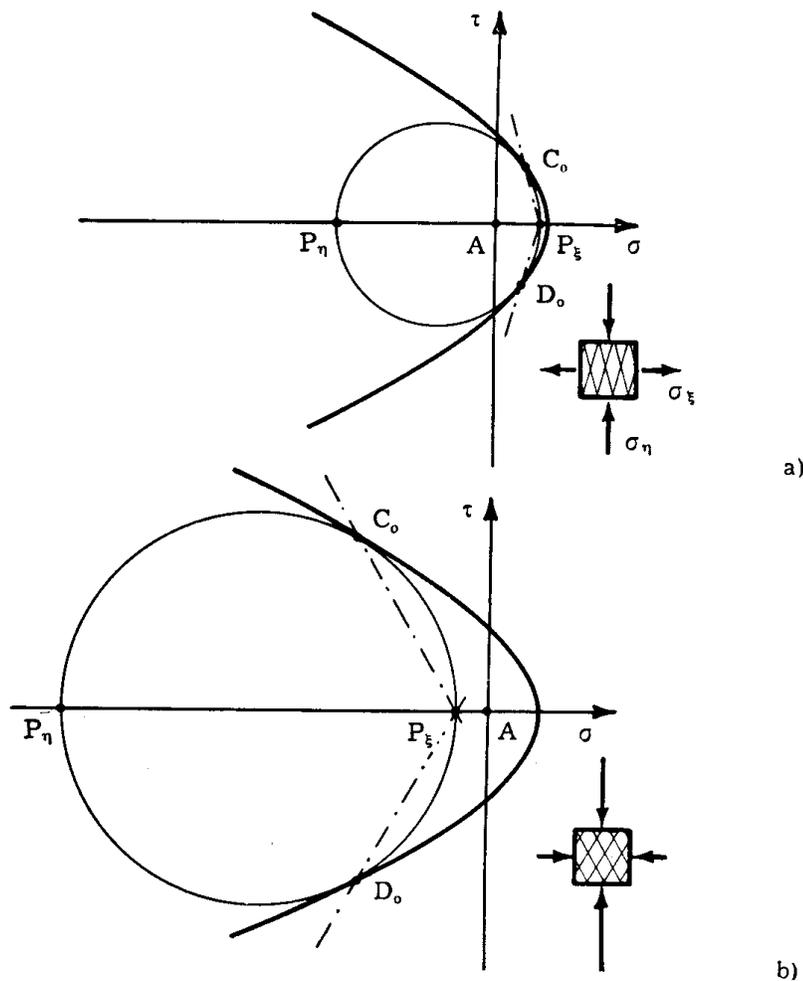


FIG. 9-80

zione relativa alle direzioni principali della sollecitazione di crisi, e quindi delle indicazioni sulle cause della crisi stessa.

Se una parte di un fabbricato presenta un cedimento di traslazione verticale (fig. 9-81), un elemento parallelepipedo con i piani orizzontali e verticali, situato sulla zona di separazione tra la parte che cede e l'altra, è sollecitato grosso modo a taglio puro; le lesioni si presentano quindi pressochè a 45° sulla verticale, lungo la zona di distacco, e le normali ad esse sono dirette verso la fondazione che cede. Se la parte del piano di posa che cede è limitata, rispetto a tutto il perimetro della

fondazione ed all'altezza dell'opera, i pesi relativi alla verticale di cedi-

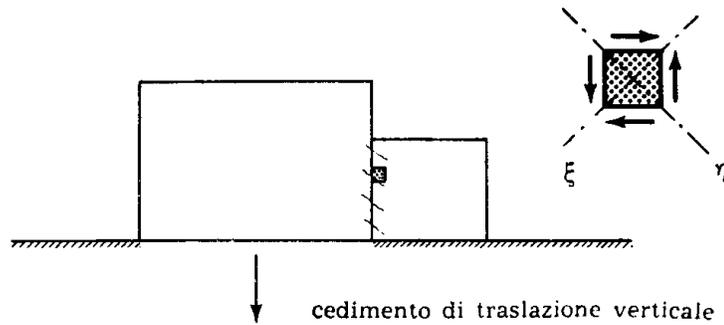


FIG. 9-81

mento si scaricano, a partire da una certa quota, sulla fondazione effi-

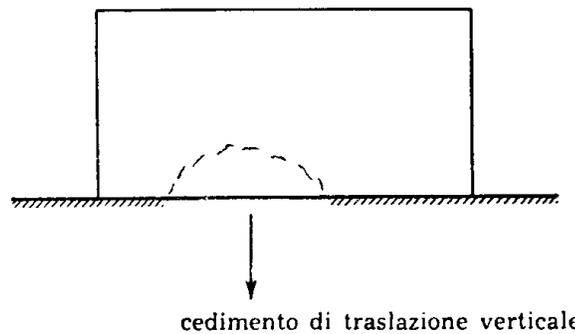


FIG. 9-82

ciente; la parte del fabbricato interessata alla crisi è perciò limitata alla

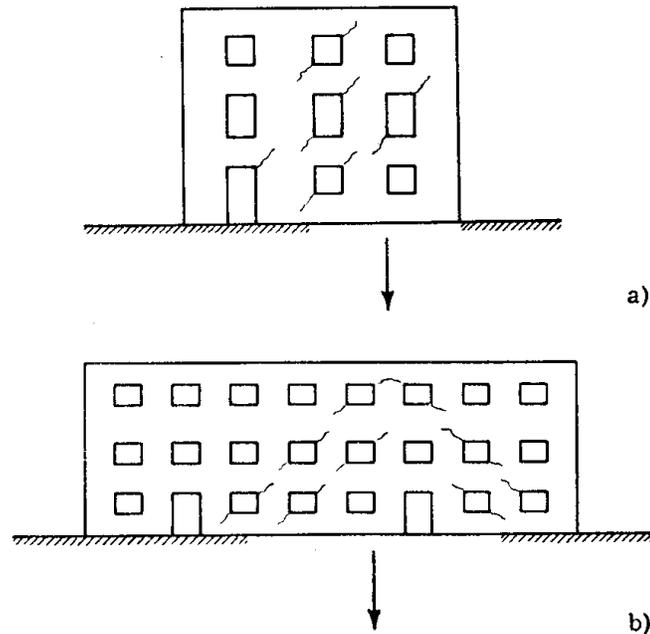


FIG. 9-83

larghezza della fondazione che cede, e ad un'altezza dello stesso ordine

di grandezza. Lungo la curva di separazione tra la parte interessata e l'altra la direzione principale di trazione varia dalla verticale in mezzeria alla retta a 45° agli estremi; si hanno perciò le lesioni della fig. 9-82, raccordabili con un arco di parabola di ribassamento $1/4$. Se la muratura presenta delle aperture, le lesioni si innescano agli angoli dei vani (fig. 9-83).

Un cedimento di rotazione di una parte del fabbricato, dovuto per esempio ad eccessiva sollecitazione ad un lembo della fondazione per la

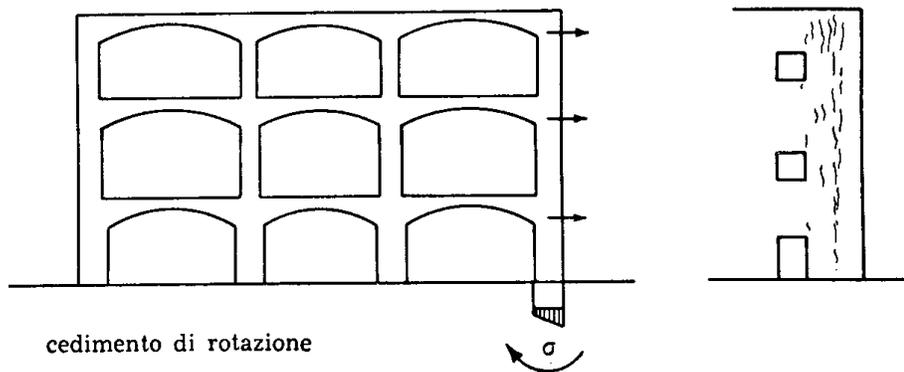
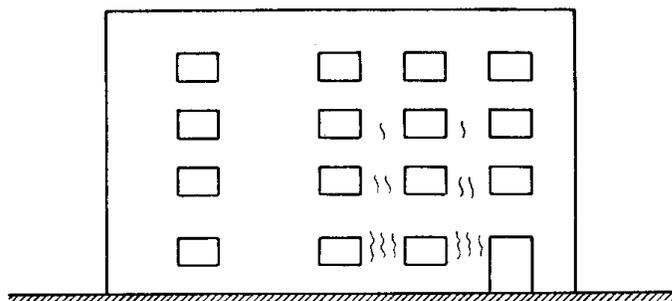


FIG. 9-84

presenza di strutture orizzontali spingenti (volta o archi), comporta lungo la linea di crisi una trazione orizzontale; le lesioni appaiono così verticali, e più ampie nei piani superiori (fig. 9-84).

Lesioni pur esse verticali appaiono nei fenomeni di schiacciamento,



lesioni di schiacciamento

FIG. 9-85

dovuti a fatiscenza della costruzione, degradazione delle malte, sovraccarichi conseguenti a sopraelevazione (fig. 9-85). Ed infatti in tal caso

la tensione massima di compressione è verticale, e la minima di compressione, in genere nulla, orizzontale. Le lesioni di schiacciamento si distinguono da quella di rotazione per essere più evidenti ai piani infe-



FIG. 9-86 a

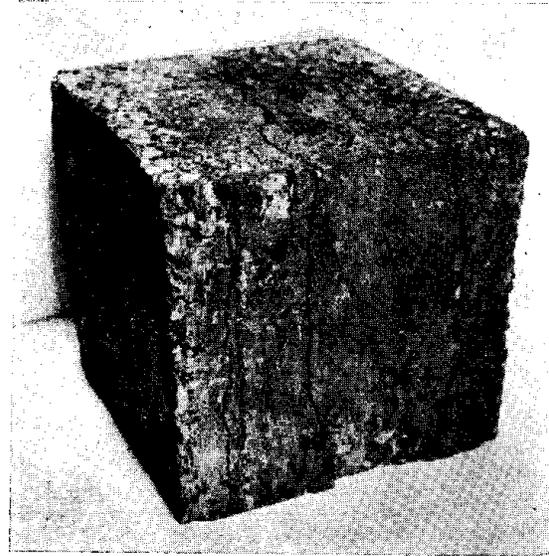


FIG. 9-86 b

riori; inoltre esse sono più fitte, ed accompagnate in genere da espulsione di conchi negli angoli. Molto spesso si ha anche rottura di singoli conchi, nella forma caratteristica delle prove a compressione (fig. 9-86).

Sottoponendo un cubetto di materiale lapideo o conglomerato ad una prova di compressione tra i piatti di una pressa senza altro materiale interposto, la rottura si ha con formazione di lesioni a forma di iperboloidi (fig. 9-86); in tal caso infatti

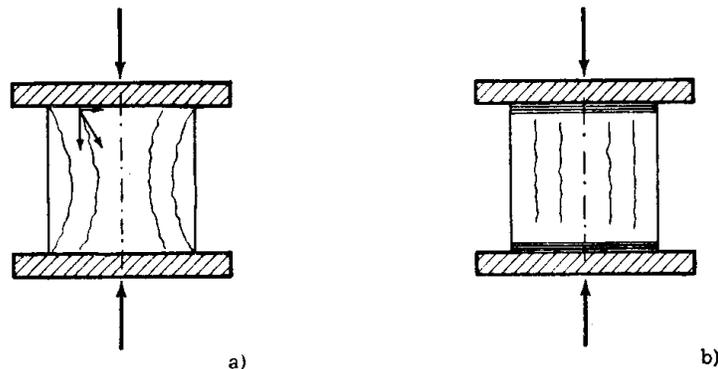


FIG. 9-86

la contrastata dilatazione laterale in corrispondenza dei piatti genera delle tensioni tangenziali dirette verso l'asse, e quindi le direzioni principali di compressione sono anch'esse dirette verso l'asse. Se invece si interpone uno strato di cartone, che permetta la dilatazione laterale, le lesioni sono pressochè verticali.



FIG. 9-87 a (da Mörsch)

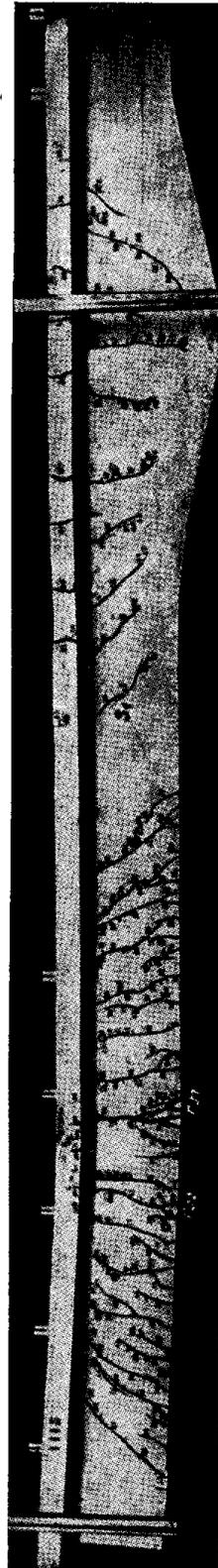


FIG. 9-87 b (da Mörsch)

Nelle strutture in cemento armato, si possono avere lesioni in mezzeria o alle estremità delle travi per raggiungimento della trazione di rottura del conglomerato; queste si presentano verticali, inferiormente

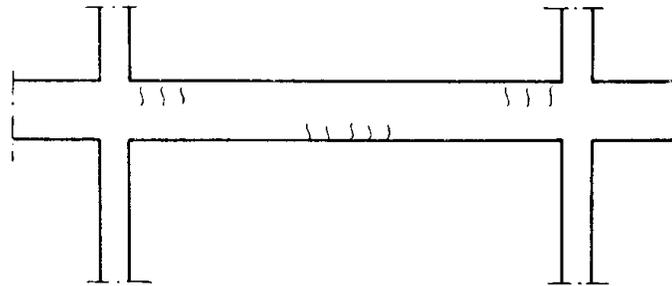


FIG. 9-87 c

nella mezzeria per momento positivo, superiormente alle estremità per momento negativo (fig. 9-87).

Frequenti sono pure le lesioni per insufficienza di armature da taglio o da torsione (staffe, ferri piegati, o ferri longitudinali distribuiti

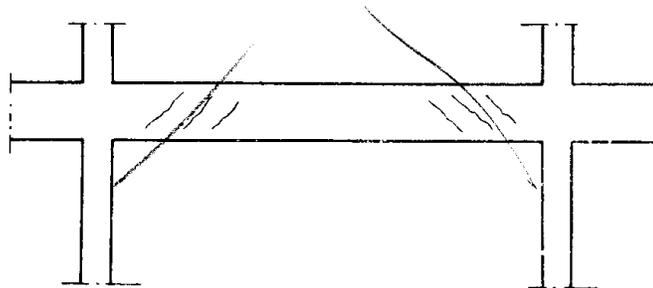


FIG. 9-88 a

lungo l'altezza); quelle da taglio si presentano nei due tratti estremi della trave, e sono orientate a 45°, con le normali discendenti verso la mezzeria (fig. 9-88).

I pilastri in cemento armato possono entrare in crisi per schiaccia-



FIG. 9-88 b

(lesioni da taglio; da *Mörsch*)

mento, e ciò si palesa con lesioni verticali, e con espulsione degli spigoli con fuoriuscita dei ferri dalla loro sede (fig. 9-89). Capita anche di os-

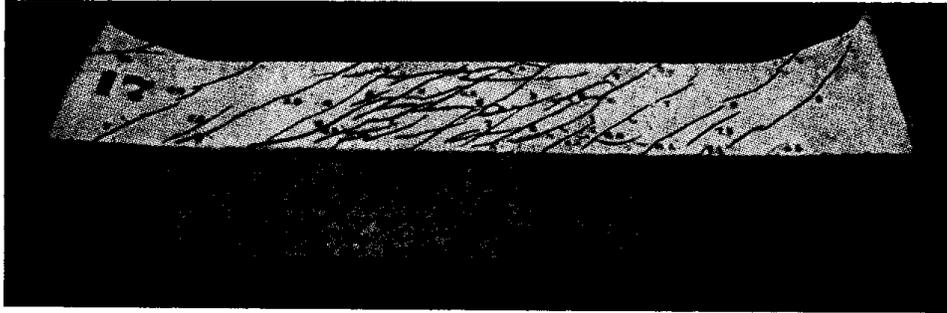


FIG. 9-88 c
(lesioni da torsione; da Mörsch)

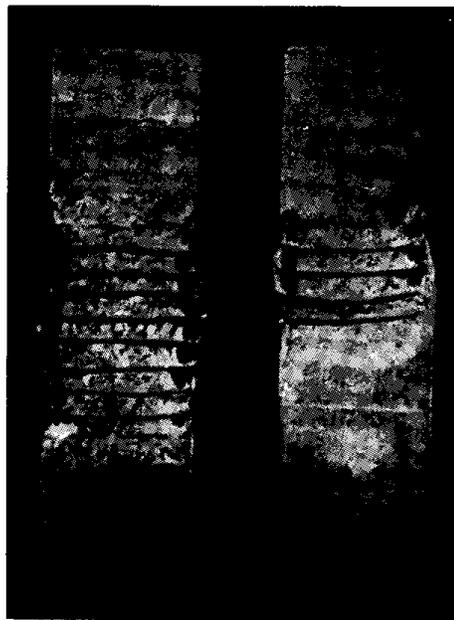


FIG. 9-89 (da Mörsch)

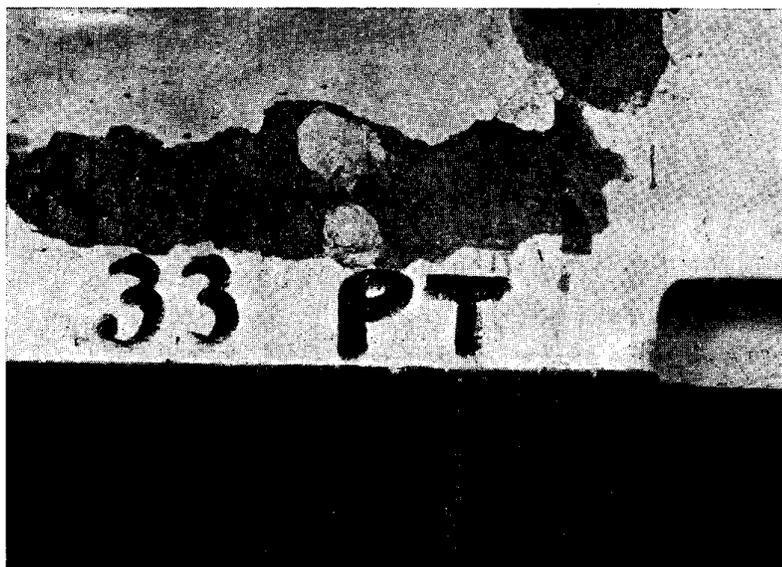


FIG. 9-90

servare, in seguito a cedimenti della loro fondazione, pilastri con lesioni orizzontali impegnanti tutta l'area (fig. 9-90); a volte tali cedimenti com-



FIG. 9-91

portano sforzi di trazione nelle travi, e quindi lesioni verticali all'attacco fra trave e pilastri (fig. 9-91). Anche verticali, molto sottili e diffuse, e

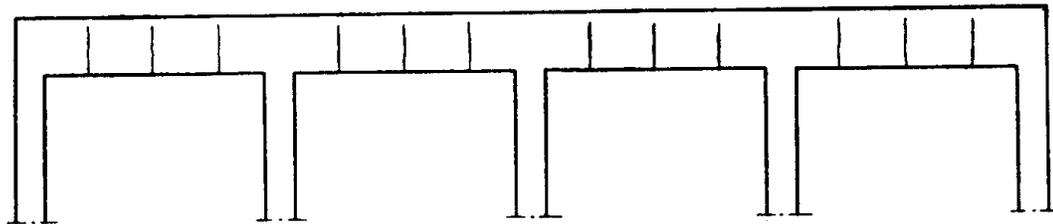


FIG. 9-92

uniformemente distribuite, le lesioni da ritiro nelle travi (fig. 9-92), dovute a sforzi di trazione per ritiro impedito dai vincoli o dalle armature.

14. Considerazioni sui criteri di resistenza.

I criteri di Beltrami, Hencky, Stassi, Tresca e Grashof, e quello della curva intrinseca, si differenziano profondamente, per essere i primi basati su ipotesi più o meno confermate dall'esperienza, l'ultimo invece di genesi completamente sperimentale. Tra i primi, poi, il criterio di Beltrami è di interesse più che altro storico, mentre quelli di Hencky e Tresca

sono limitati ai materiali duttili. Applicabile a tutti i materiali è invece il criterio di Grashof, e così pure quello di Stassi; questo, rispetto al criterio di Grashof, presenta il grosso vantaggio di dare $\sigma''_{03} = -\infty$. Anche il criterio di Grashof, opportunamente modificato, fornisce $\sigma''_{03} = -\infty$, ma contemporaneamente offre anche $\sigma'_{03} = \infty$, e inoltre è caratterizzato da discontinuità, sia pure del secondo ordine. Preferibile fra tutti pertanto è il criterio di Stassi.

Assumendo il criterio della curva intrinseca come pietra d'assaggio degli altri criteri, almeno limitatamente ai casi in cui $\sigma_\eta = \sigma_\zeta$, si dovrà, nelle espressioni di questi ultimi, porre $\sigma_\eta = \sigma_\zeta$, ricavare per ogni valore di σ_ξ i due corrispondenti σ_η di crisi, e tracciare nel piano i relativi cerchi di crisi; l'inviluppo di questi cerchi deve essere una possibile curva intrinseca, cosa che sperimentalmente coincide proprio con il tracciamento della curva stessa. Già per ogni criterio si sono tracciate le curve $\sigma_\xi k$, essendo $\sigma_\eta = \sigma_\zeta = k/\sqrt{2}$; da queste può risalirsi immediatamente, per costruzione grafica, ai cerchi di crisi. Dall'esame della curva della fig. 9-26, si osserva che l'inviluppo, nel caso del *Beltrami*, risulta simmetrico rispetto all'asse delle τ , con σ''_{03} finita e pari a $-\sigma'_{03}$; ciò porta a scartare il criterio di Beltrami in ogni caso.

Dall'equazione (9-32) di Hencky e Mises si ha, ponendo $\sigma_\eta = \sigma_\zeta$,

$$\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 - 2\sigma_\xi \sigma_\eta = \sigma_0^2$$

e cioè

$$\begin{aligned} (\sigma_\xi - \sigma_\eta)^2 &= \sigma_0^2 \\ \sigma_\xi - \sigma_\eta &= \pm \sigma_0, \end{aligned} \quad (q')$$

Nel criterio di *Tresca* le (9-50) si riducono anch'esse alle (q'); e quindi per $\sigma_\eta = \sigma_\zeta$ i criteri di Hencky e Tresca coincidono; gli inviluppi sono le due rette parallele all'asse delle σ e distanti da questo $\pm \sigma_0$. I due suddetti criteri sono quindi usabili con buona approssimazione per i materiali duttili, che presentano una curva intrinseca che non si scosta molto dalle due rette parallele all'asse delle σ . Dall'esame della fig. 9-46 si osserva che nel criterio di *Grashof* la curva intrinseca risulta chiusa dalla parte delle σ negative, e ciò fa scartare il criterio stesso; nel criterio di *Grashof modificato* invece le (9-48) si riducono alle quattro relazioni

$$\begin{aligned} \sigma_\xi - \sigma_\eta &= \sigma'_0 \\ \sigma_\eta - \sigma_\xi &= 2\sigma'_0 \\ \sigma_\xi - \sigma_\eta &= \sigma''_0 \\ \sigma_\eta - \sigma_\xi &= 2\sigma''_0 \end{aligned} \quad (r')$$

di cui sono da scegliere la prima e la terza. Per materiali duttili, le (r') si riducono all'unica

$$\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta} = \pm \sigma_0, \quad (s')$$

che coincide con la (q').

Dalle (r') derivano (fig. 9-93) due curve intrinseche del tipo di Tre-

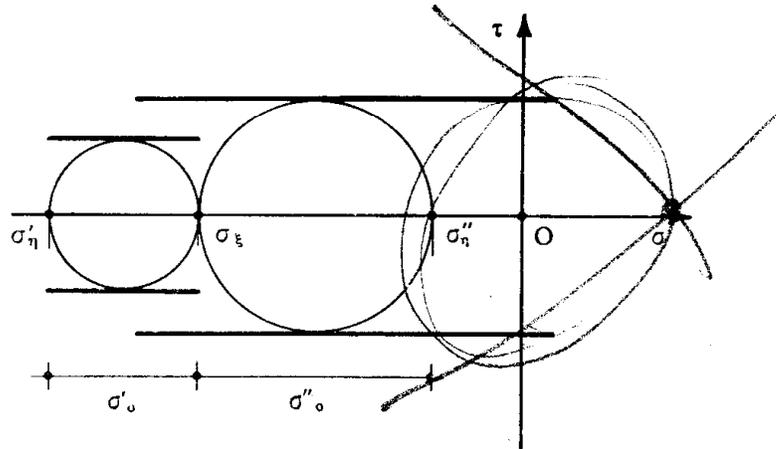


FIG. 9-93

sca, una per $\sigma_{\xi} > \sigma_{\eta}$, più stretta, per cui vale la prima delle (r'), e una per $\sigma_{\eta} > \sigma_{\xi}$, più larga, per cui vale la terza delle (r'). Dalla (s') invece si ricade nella curva intrinseca unica del tipo di Tresca. Ciò prova che

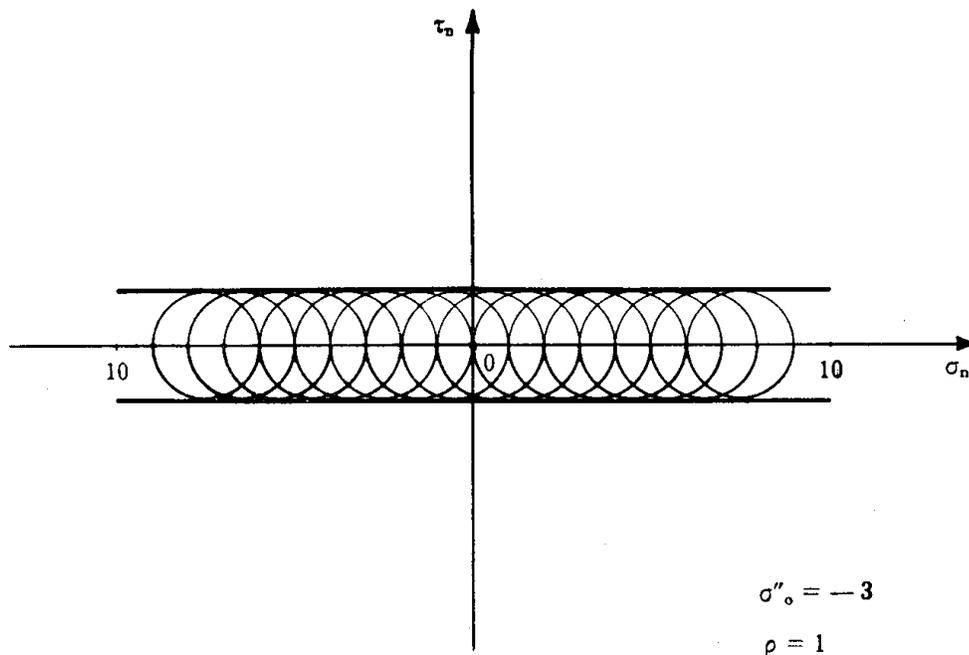


FIG. 9-94 a

il criterio di Grashof, come già detto a suo tempo, è consigliabile solo per materiali duttili.

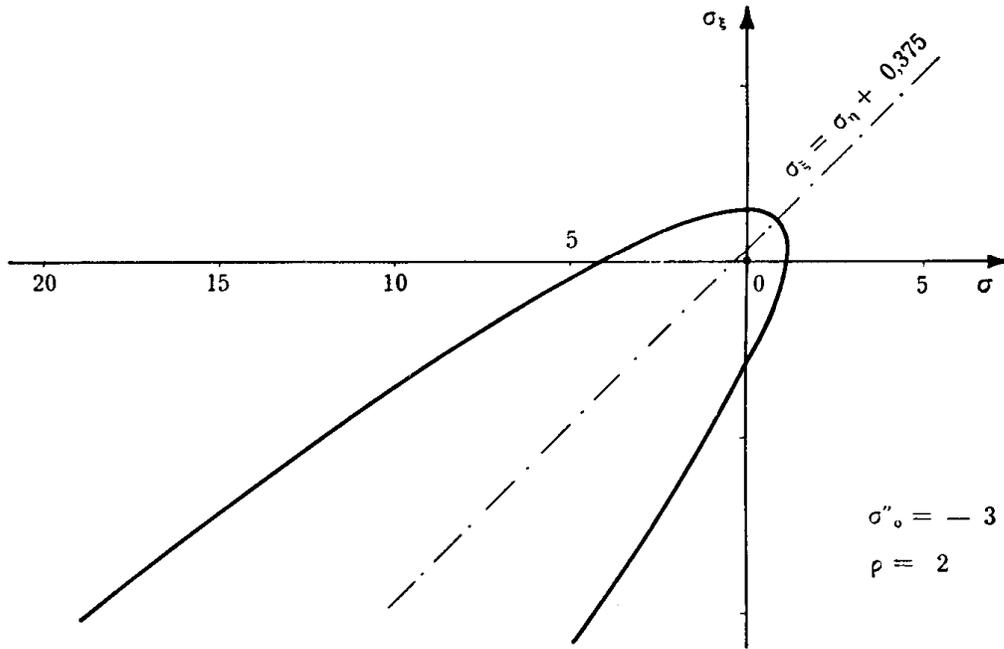


FIG. 9-94 b

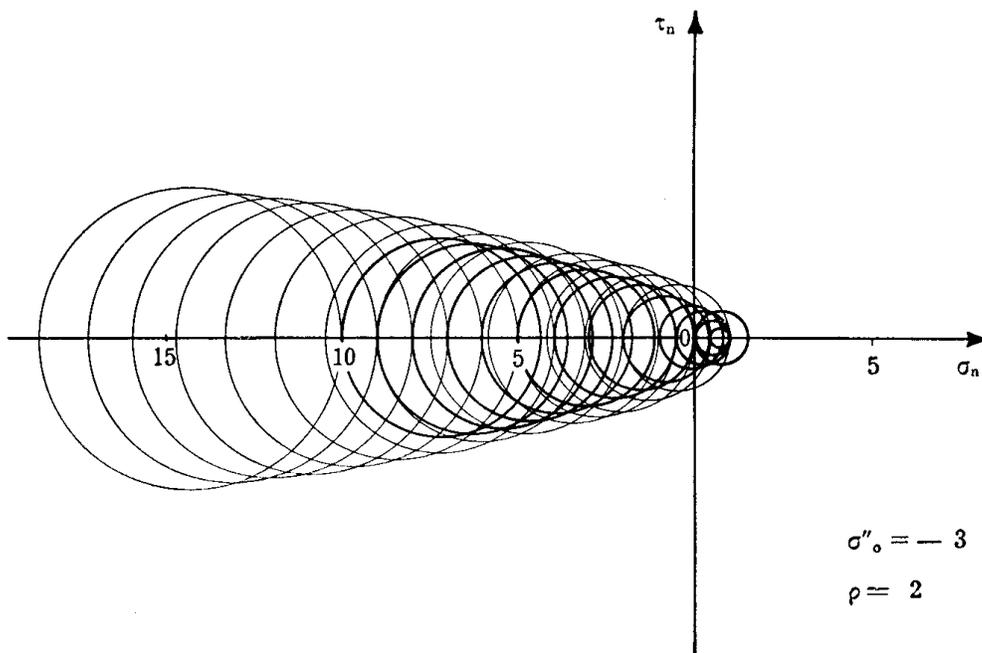


FIG. 9-94 c

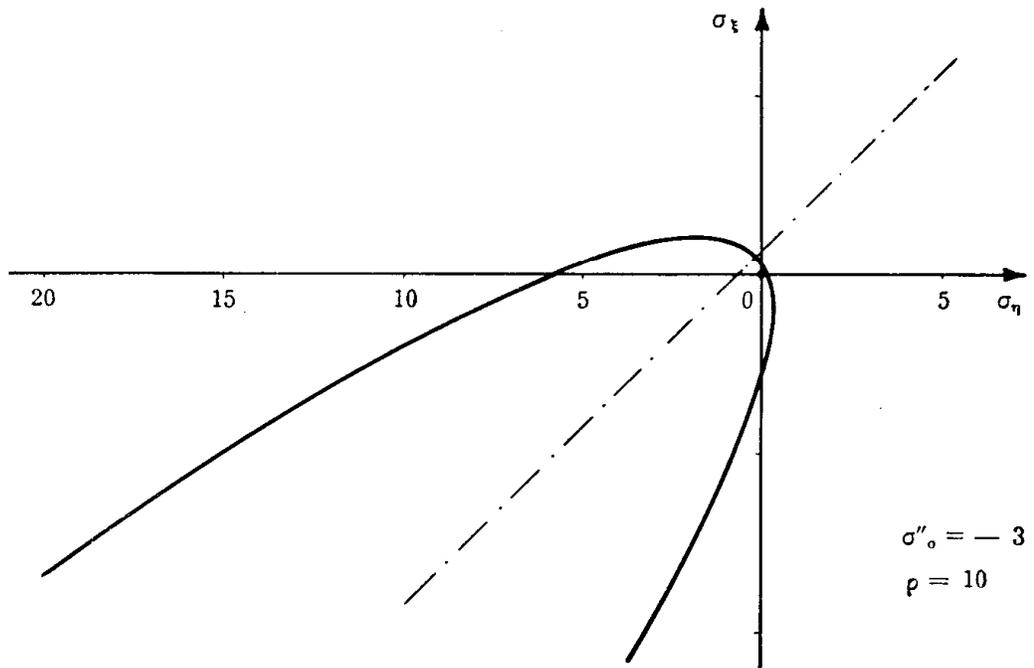


FIG. 9-94 d

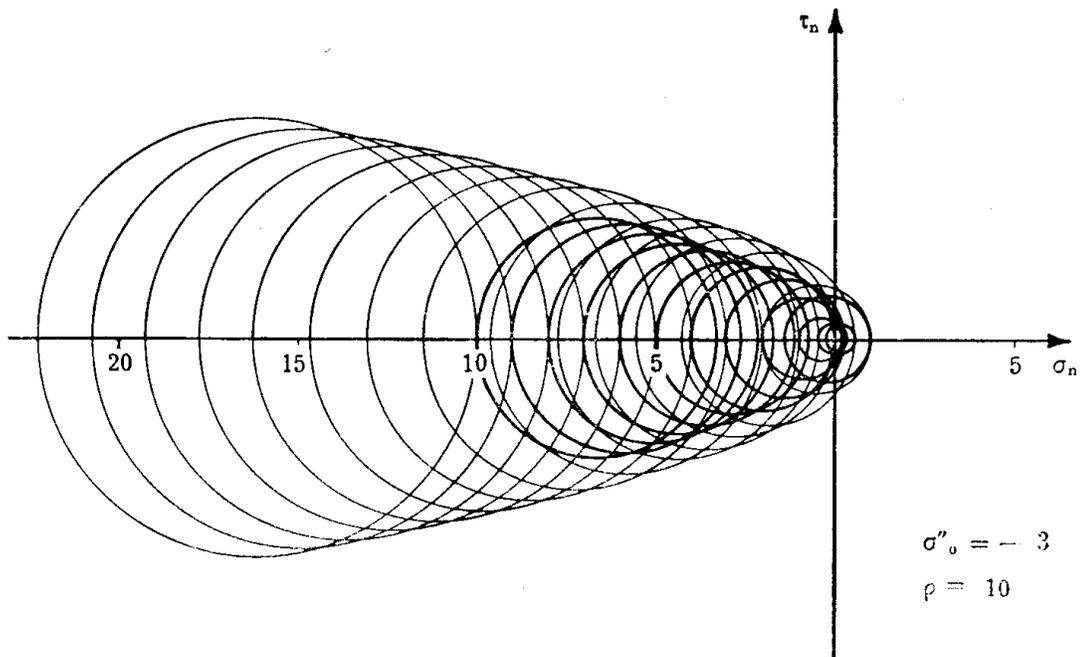


FIG. 9-94 e

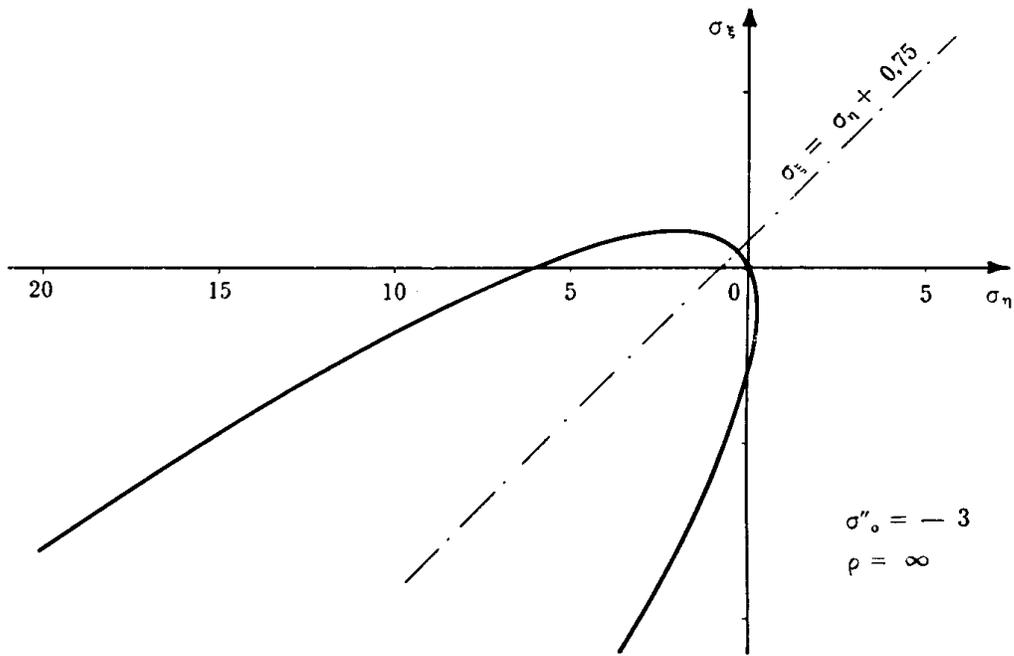


FIG. 9-94 f

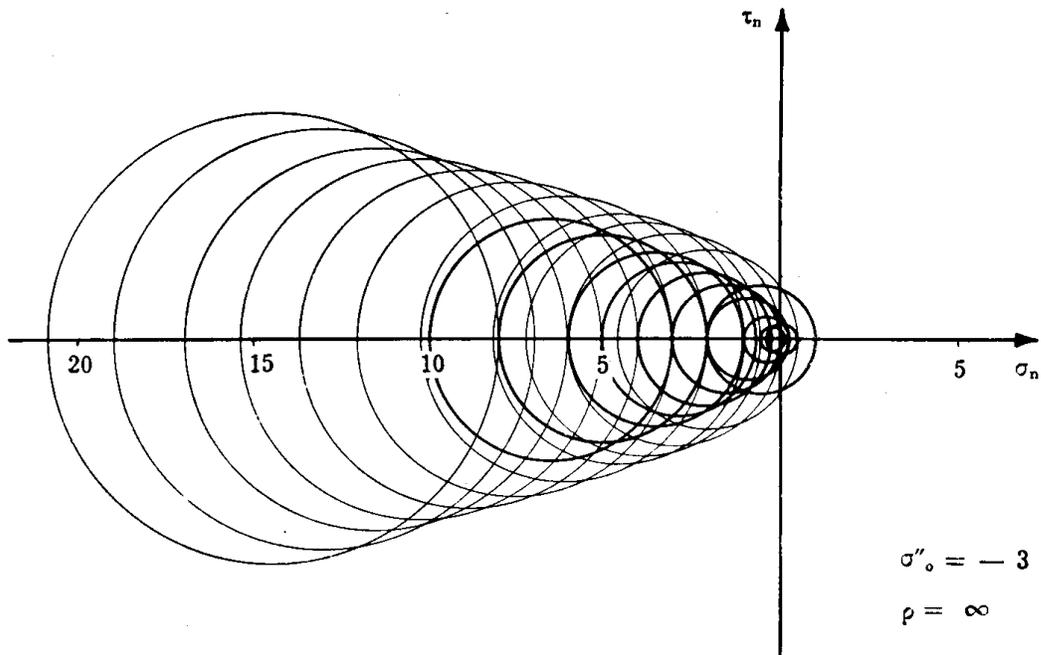


FIG. 9-94 g

Con riferimento al criterio di Stassi, si verifica (fig. 9-94) che i cerchi di crisi presentano due involuipi distinti, uno per le σ_η minime e l'altro per le σ_η massime, e ciò per qualsiasi valore di ρ . I due involuipi tendono a confondersi per valori molto elevati della σ_ξ negativa. L'esistenza dei due involuipi distinti attende ancora una verifica sperimentale.

15. La legge dello scorrimento plastico.

Nello spazio $\sigma_\xi \sigma_\eta \sigma_\zeta$ il vettore $v_\sigma = OP$ di componenti $\sigma_\xi \sigma_\eta \sigma_\zeta$ rappresenta lo stato tensionale, il vettore v_ϵ di coordinate $k\epsilon_\xi k\epsilon_\eta k\epsilon_\zeta$ (dove k è una qualsiasi costante di dimensioni Ft^{-2}) rappresenta lo stato di deformazione. Se il punto P giace sulla superficie limite $f=0$, una variazione di stato tensionale $d\sigma_\xi d\sigma_\eta d\sigma_\zeta$ di carattere plastico (cui non si associa cioè ritorno in fase elastica) è rappresentata da un vettore dv_σ tangente in P alla $f=0$ (il caso in cui dv_σ è diretto verso l'esterno della $f=0$, detto della variazione con *incrudimento*, è di studio più difficile). Si ha perciò

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_\xi} d\sigma_\xi + \frac{\partial f}{\partial \sigma_\eta} d\sigma_\eta + \frac{\partial f}{\partial \sigma_\zeta} d\sigma_\zeta = 0$$

dove le derivate sono calcolate in P .

Si postula che una variazione di deformazione di carattere plastico dv_{pe} di componenti $d\epsilon_{p\xi} d\epsilon_{p\eta} d\epsilon_{p\zeta}$ non compia lavoro per tutte le possibili variazioni di tensione di carattere plastico; quindi dv_{pe} è diretto secondo la normale in P alla $f=0$. Può quindi scriversi

$$d\epsilon_{p\xi} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_\xi}$$

$$d\epsilon_{p\eta} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_\eta}$$

$$d\epsilon_{p\zeta} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_\zeta}$$

con λ arbitrario.

Il lavoro compiuto dalle $\sigma_\xi \sigma_\eta \sigma_\zeta$ per dv_{pe} (lavoro dissipato) deve essere positivo, e cioè

$$\sigma_\xi d\epsilon_{p\xi} + \sigma_\eta d\epsilon_{p\eta} + \sigma_\zeta d\epsilon_{p\zeta} = \lambda \left(\sigma_\xi \frac{\partial f}{\partial \sigma_\xi} + \sigma_\eta \frac{\partial f}{\partial \sigma_\eta} + \sigma_\zeta \frac{\partial f}{\partial \sigma_\zeta} \right) > 0 ;$$

poichè la $f=0$ è *convessa* l'espressione in parentesi è positiva, e quindi $\lambda > 0$. Quanto detto è noto sotto il nome di *legge dello scorrimento plastico* o *teoria del potenziale plastico di V. Mises*, e costituisce la base degli studi dei continui elasto-plastici.