CAPITOLO VIII

L'ENERGIA DI DEFORMAZIONE

1. Il lavoro delle forze esterne.

Le *forze esterne* (cap. II, § 1) sono le forze *applicate* al corpo (di massa e superficiali) e le *reazioni* (superficiali).

Nel seguito di questo capitolo le forze esterne si suppongono concentrate; come già fatto osservare (Cap. II), le forze concentrate non sono che una astrazione, ma il considerarle tali importa spesso notevoli semplificazioni, altro non fosse di ordine simbolico e grafico.

Si passa dalla forza distribuita $X\,dV$ (o $p_x\,dS$) alla forza concentrata F_x facendo tendere dV (o dS) a zero ed X (o p_x) ad ∞ in modo che il prodotto $X\,dV$ (o $p_x\,dS$) resti costante e pari ad F_x; dV (o dS) sono intorni del punto P di applicazione di F_x. Si avverte fin d'ora che in tale passaggio al limite i valori di alcuni enti possono tendere all'∞, per esempio ciò accade senz'altro per le tensioni; quindi può risultare fallace una dimostrazione basata sull'astrazione delle forze concentrate, e che implicitamente si basi sul presupposto che i valori di tali enti si conservino limitati. Nel seguito di questo capitolo però l'ipotesi di forze concentrate, salvo esplicito avviso, si adotta al solo scopo di semplificare le definizioni e le notazioni, che restano in sostanza inalterate nel caso reale, e cioè in presenza di forze distribuite; basta, infatti, sostituire alle F_x le $X\,dV$ (o le $p_x\,dS$), ed alle sommatorie delle forze gli integrali in V (o in S).

Siano F_i le forze esterne, agenti nei punti P_i e definite attraverso le tre componenti $F_{ix}\,F_{iy}\,F_{iz}$ secondo gli assi coordinati; siano inoltre $u_i = s_{ix}$, $v_i = s_{iy}$, $w_i = s_{iz}$ le componenti dello spostamento s_i di P_i, valutate a partire dalla configurazione corrispondente alle forze F_i nulle. I valori F_{ij} ed s_{ij} sono quelli finali; ad essi si arriva in un certo lasso di tempo, nel quale le forze hanno i valori $F'_{ix}(t)$, $F'_{iy}(t)$, $F'_{iz}(t)$ e gli spostamenti i valori $s'_{ix}(t)$, $s'_{iy}(t)$, $s'_{iz}(t)$, ambedue funzioni del parametro t (tempo) (*).

Si fa l'ipotesi — salvo esplicito avviso in caso contrario — che le forze variino molto lentamente nel tempo, e cioè che le derivate $\dfrac{\partial F'}{\partial t}$ siano praticamente nulle. Tale ipotesi (cosiddetta di *applicazione statica delle*

(*) Si precisa che le s_{ij} devono essere soluzioni di equilibrio sotto le forze F_{ij}. Inoltre, le $F'_{ij}(t)$ possono essere qualsiasi; tra esse possono anche intervenire forze, che alla fine assumono ovviamente valori nulli, diverse dalle F_{ij}.

forze) permette di trascurare i termini temporali e quindi rende possibili, sotto determinate forze F_i (congelate, per così dire, nel tempo) soluzioni u' v' w' indipendenti dal tempo. Ciò si ottiene perchè è accettabile l'ipotesi che le oscillazioni determinate dagli incrementi dF_i negli intervalli dt successivi non siano tra loro in fase.

Per garentire che sotto determinate forze F' siano possibili soluzioni s' indipendenti dal tempo, occorre inoltre — e basta — fare anche l'ipotesi, di carattere del tutto operativo, che nel passaggio da uno stadio a quello immediatamente vicino i punti di applicazione delle forze siano bloccati da vincoli fittizi che lentamente cedano fino a staccarsi dalla struttura stessa; e inoltre che opportuni vincoli impediscano il passaggio da un ramo di equilibrio ad un altro.

E' questa l'ipotesi di *deformazione guidata*, cui si è già accennato al § 5-6.

Assegnate le funzioni $F'_{ij}(t)$ (o assegnata, come si usa dire, la *trasformazione* Σ' che porta le forze dal valore zero al valore finale F_{ij}) le $s'_{ij}(t)$ non sono in genere definite in modo univoco, se non sono validi i presupposti del teorema di Kirchhoff (*). Noto però un possibile insieme $s'_{ij}(t)$, i cui valori finali siano s_{ij}, si può, in relazione a questo, calcolare in modo univoco il lavoro svolto dalle $F'_{ij}(t)$. Esso è fornito da

$$L'_e = \Sigma_i \int^{s_i} F'_i \, ds'_i \; ; \tag{1}$$

si indica da ora in poi con F'_i la generica componente della forza e con s'_i la corrispondente componente dello spostamento, con F_i ed s_i i loro valori finali.

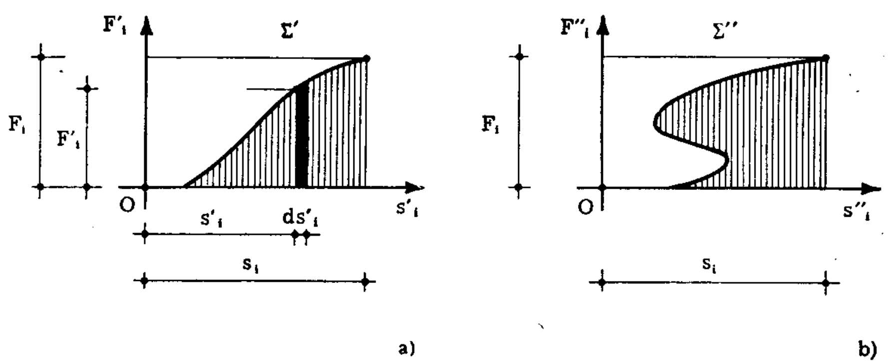


FIG. 8-1

Infatti (fig. 8-1 a) nello stadio generico della trasformazione Σ', caratterizzato (**) da un valore t del parametro e dai valori F'_i ed s'_i delle

(*) La trasformazione si definisce con riferimento alle sole forze; assegnate quindi le $F'(t)$, ove t non ha dopo l'ipotesi di applicazione statica altra funzione che quella di parametro sempre crescente, la trasformazione è fissata, quali che siano gli $s'(t)$.

(**) E' interessante osservare che il diagramma $s'_i(F'_i)$ non parte di necessità forze e degli spostamenti, alla variazione dt del parametro t corrisponde una variazione dF'_i della F'_i e ds'_i della s'_i. La F'_i compie il lavoro

$$F'_i \; ds'_i \; ; \tag{a}$$

la dF'_i compie lavoro non definibile, ma comunque trascurabile rispetto al valore (a); ciò non perchè le forze sono applicate staticamente (infatti dF'_i è fornito da $\frac{\partial F'_i}{\partial t}$ dt, e può essere fissato indipendentemente dal valore di $\partial F'_i/\partial t$) ma perchè tendendo ds'_i a zero i due termini del lavoro $F'_i \; ds'_i$ e $dF'_i \; ds'_i$ tendono a zero con velocità differenti.

L'espressione (8-1) è valida in qualsiasi caso, anche cioè se i vincoli non sono lisci, se il materiale non è elastico, se gli spostamenti non sono piccoli.

Per un'altra trasformazione Σ'', che porti agli stessi valori finali F_i ed s_i della Σ' (fig. 8-1 b) attraverso le funzioni $F''_i(t)$ ed $s''_i(t)$, il lavoro L''_e è in genere diverso da L'_e, ed è fornito da

$$L''_e = \Sigma_i \int_0^{s_i} F''_i \; ds''_i \; . \tag{b}$$

Si noti esplicitamente che quanto detto sopra vale anche se le forze F_i agiscono sulla struttura già soggetta ad altre forze o distorsioni. In tale caso gli spostamenti s che compaiono nelle formule precedenti sono da valutare a partire dalla configurazione relativa alle forze e distorsioni preesistenti.

2. La trasformazione inversa.

Si faccia l'ipotesi che il materiale sia elastico — anche se non linearmente — e che i vincoli siano lisci. Sotto tali limitazioni, il corpo si può scaricare — e cioè si possono portare a zero le F_i e quindi le s_i — percorrendo gli stessi stadi $F'_i \; s'_i$ della fase di andata. Ciò ovviamente è sempre valido per le F'_i; le ipotesi fatte consentono però di dire che ad un insieme di F'_i identico a quello della fase di andata, possono corrispondere nella fase di ritorno (e nell'ipotesi di deformazione guidata) le stesse s'_i della fase di andata. Infatti nello stadio generico $F'_i \; s'_i$ della Σ' è

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon'_{ij} \; (\sigma'_{hk}) \; . \tag{c}$$

dall'origine; può darsi per esempio che nella Σ' le altre forze appaiano prima della F'_i, e che quindi ci siano valori di s'_i diversi da zero per F'_i ancora nullo.

Nel porre la (8-1) si è implicitamente ammessa la continuità delle funzioni $F'(t)$ ed $s'(t)$, conseguenza delle due ipotesi di applicazione statica e deformazione guidata.

Dalle (c) si ha

$$d\varepsilon'_{ij} = \Sigma \frac{\partial \varepsilon'_{ij}}{\partial \sigma'_{hk}} d\sigma'_{hk} + \Sigma \frac{\partial^2 \varepsilon'_{ij}}{\partial \sigma'_{hk} \partial \sigma'_{mn}} d\sigma'_{hk} d\sigma'_{mn} + \dots \qquad \text{(d)}$$

Poichè si è supposto che il materiale sia elastico, le relazioni (c) devono fornire le ε_{ij} come funzioni ad un sol valore delle σ_{hk}.

Si esige poi che anche le inverse delle (c)

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}\ (\varepsilon_{hk})$$

siano funzioni ad un sol valore; quindi le $d\sigma_{ij}$ considerate infinitesimi sono funzioni univocamente determinate delle $d\varepsilon_{hk}$, e cioè il sistema nelle incognite $d\sigma_{hk}$

$$d\varepsilon_{ij} = \Sigma \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{hk}} d\sigma_{hk} \qquad \text{(e)}$$

è a soluzione unica (si ha riprova così che i materiali elastici rientrano negli ipoelastici). Ciò traduce la suddetta condizione nell'altra: che le derivate $\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{hk}}$ siano funzioni ovunque ad un sol valore delle ε_{ij} e indipendenti dal segno di $d\sigma$, e che il loro determinante (jacobiano delle ε_{ij}) sia diverso da zero. Le stesse condizioni devono essere rispettate per le derivate $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{hk}}$; queste poi devono ancora soddisfare altre relazioni, che saranno riportate al § 8-8.

Nella (d) le derivate sono da calcolare per i valori delle σ'_{hk} dello stadio generico, e da intendersi quindi come costanti.

Poichè le $d\sigma'_{kh}$ sono piccole, sono valide le (e):

$$d\varepsilon'_{ij} = \Sigma \frac{\partial \varepsilon'_{ij}}{\partial \sigma'_{hk}} d\sigma'_{hk},$$

relazioni analoghe alle elastiche lineari.

Le variazioni ds'_i dovute alle variazioni dF'_i sono le soluzioni delle equazioni dell'equilibrio elastico nelle dF'_i, ancora lineari (perchè gli spostamenti ds'_i sono piccoli, per l'ipotesi di deformazione guidata) ed espresse attraverso le costanti della (e) invece che attraverso quelle della (4-1).

Le equazioni nelle dF'_i e ds'_i sono lineari, ma non del tipo (5-1), perchè le tensioni vanno in genere calcolate sulla struttura già deformata dalle dF'_i; la soluzione ds'_i può quindi non essere unica. Se però i vincoli sono lisci, e le condizioni ai limiti sono quindi invariabili con le forze, le equazioni e le condizioni ai limiti sono lineari ed identiche a se stesse, e perciò se sono soddisfatte per dF'_i e ds'_i lo sono pure per $-dF'_i$ e $-ds'_i$.

Ciò significa che il segmento di componenti ds'_i nello spazio degli s_i può essere percorso nei due sensi se le forze variano da F'_i ad $F'_i + dF'_i$, o da $F'_i + dF'_i$ ad F'_i; e cioè la *trasformazione elementare,* per materiali elastici e vincoli lisci, è *reversibile.* La dimostrazione è valida anche se sotto le forze F'_i gli spostamenti non sono piccoli, e se le forze F'_i agiscono in presenza di altre forze costanti già applicate precedentemente alla loro azione, o di distorsioni; la reversibilità, dimostrata per la trasformazione elementare, vale anche per una trasformazione finita.

Se nella fase di ritorno sia le F'_i che le s'_i vanno dai valori F_i ed s_i a zero conservando gli stessi legami della fase di andata — e ciò come si è visto è possibile se il materiale è elastico ed i vincoli sono lisci — si indica con il simbolo $\Sigma'_{0 \to F}$ (trasformazione di andata o *trasformazione diretta*) quella che porta le forze e gli spostamenti dai valori zero ai valori F_i ed s_i e con $\Sigma'_{F \to 0}$ (trasformazione di ritorno o *trasformazione inversa*) quella che porta le forze e gli spostamenti dai valori F_i ed s_i ai valori zero. Il lavoro delle forze esterne nella trasformazione inversa è uguale e contrario a quello svolto nella trasformazione diretta:

$$\begin{aligned} L'_{ea} &= L'_e \quad \text{(andata)} \\ L'_{er} &= - L'_e \quad \text{(ritorno)} . \end{aligned} \tag{2}$$

3. La trasformazione chiusa.

Tra le infinite trasformazioni secondo cui si può arrivare alle F_i finali, se ne considerino due qualsiasi, Σ' e Σ''. Il materiale sia elastico, ed i vincoli lisci.

Si percorra la Σ' in andata e la Σ'' in ritorno; la trasformazione

$$\Sigma'_{0 \to F} + \Sigma''_{F \to 0}$$

è una *trasformazione chiusa.* Il lavoro $\mathcal{L}_e$ (*) è fornito da

$$\mathcal{L}_e = L'_{ea} + L''_{er} ;$$

ove è

$$\begin{aligned} L'_{ea} &= L'_e \\ L''_{er} &= - L''_{ea} = - L''_e ; \end{aligned}$$

risulta quindi

$$\mathcal{L}_e = L'_e - L''_e . \tag{f}$$

(*) Si indicano in genere con il simbolo $\mathcal{L}$ gli enti lavoro relativi ad una trasformazione chiusa.

4. Energia elastica o energia di deformazione; lavoro perduto.

Si faccia ora l'ipotesi che le F_i agiscano sul corpo in assenza di altre forze applicate (possono essere presenti, però, distorsioni).

Una parte del lavoro L'_e definito al § 8-1 si trasforma in energia termica, non più recuperabile, per vincere l'attrito nei vincoli. Un'altra parte, se il materiale non è elastico, si spende per la creazione di deformazioni permanenti; neppure essa è recuperabile, ed in definitiva si degrada in calore, come la prima. La somma di queste due parti, e solo questa, è il lavoro perduto nella fase di andata, e si indica con L'_p.

Se il materiale è elastico e i vincoli sono lisci, $L'_p = 0$; in tal caso facendo diminuire le forze secondo la $\Sigma'_{F \to 0}$ fino ad annullarle (staticamente, beninteso, e con deformazione guidata) il lavoro compiuto dalle forze stesse risulta negativo, e pari proprio in valore, come si è visto (8-2), ad L'_e.

Si ricordi che ad un lavoro positivo svolto dalle forze deve corrispondere una produzione di energia, ed ogni lavoro negativo è compiuto invece a spese di una certa parte di energia.

Si può anzi correttamente definire come *energia* un ente cui è connessa la possibilità di far compiere lavoro negativo ad un gruppo di forze (per esempio, la possibilità di sollevare dei pesi), a spese ovviamente dello stesso ente definito come energia, che diminuisce. Esiste quindi una energia, che si definisce come *energia elastica* o *energia di deformazione*; il suo simbolo è L. Nel caso dei vincoli lisci e del materiale elastico la differenza $\Delta L'$ tra i valori di L in presenza ed in assenza delle F_i coincide con L'_e; ciò, si ripete, se le F_i sono tutte le forze agenti.

Esempi evidenti della presenza di una energia nei corpi deformati sono quelli della balestra, della fionda ad elastico, dell'orologio o del giocattolo con caricamento a molla, del trampolino di tuffo; come tale l'energia elastica è stata tra le prime ad essere sfruttata dall'uomo.

Se il materiale non è elastico, o se i vincoli non sono lisci, non tutta l'energia $\Delta L'$ è restituibile allo scarico; come si è perduta una parte del lavoro L'_e nella fase di andata, si perde una parte di $\Delta L'$ nella fase di ritorno.

In genere è

$$L'_e = L'_p + \Delta L' \; ; \tag{3}$$

se il materiale è elastico, e i vincoli sono lisci, può porsi

$$L'_e = \Delta L' \; . \tag{4}$$

5. I sistemi conservativi.

Si consideri un corpo costituito da materiale elastico, ed a vincoli lisci.

Si precisa che l'elasticità può essere anche del tipo non lineare e che gli spostamenti possono essere non piccoli; si suppone poi che siano valide le solite ipotesi di applicazione statica delle forze, e di deformazione guidata. In tal caso si è in presenza di un *sistema conservativo,* nel quale cioè non si ha dissipazione di lavoro o di energia in calore.

Tali sistemi godono di una peculiare proprietà. Siano Σ' e Σ'' due trasformazioni diverse che portino le forze applicate da zero agli stessi valori finali F_i. Le F_i agiscono sul corpo in assenza di altre forze; possono essere presenti, però, distorsioni.

Sia s_i una delle possibili soluzioni sotto le forze F_i (*). Alle $F'_i(t)$ corrisponda un insieme di funzioni $s'_i(t)$, che, come già precisato, può essere più di uno, alle $F''_i(t)$ un insieme $s''_i(t)$; si scelga un qualsiasi $s'_i(t)$ ed un qualsiasi $s''_i(t)$, che abbiano però ambedue come valori finali s_i. Nella trasformazione $\Sigma'_{0\rightarrow F} + \Sigma''_{F\rightarrow 0}$, che è *chiusa,* risulta (f)

$$\mathfrak{L}_e = L'_e - L''_e \,.$$

Ma è pure (8-4)

$$\mathfrak{L}_e = \Delta\mathfrak{L} \;;$$

infatti il sistema è conservativo, e perciò $\mathfrak{L}_p = 0$.

D'altro canto è

$$\Delta\mathfrak{L} = 0$$

perchè il sistema ritorna nella posizione naturale.

Quindi può scriversi

$$L'_e = L''_e = L_e \,, \tag{5}$$

e l'altra, per essere il sistema conservativo (8-4)

$$\Delta L' = \Delta L'' = \Delta L \,. \tag{6}$$

(*) Si ricordi (§ 8-1) che le s_i sono valutate a partire dalla configurazione $F_i = 0$, e cioè, se F_i sono tutte le forze, dalla cosiddetta *configurazione naturale*; questa differisce dalla *configurazione iniziale* (corrispondente a forze e distorsioni nulle) per gli spostamenti dovuti alle distorsioni presenti per $F_i = 0$.

Le (8-5) ed (8-6) si enunciano: «il lavoro compiuto da tutte le forze esterne agenti su un corpo di materiale elastico ed a vincoli lisci, e la differenza di energia di deformazione che è uguale al suddetto lavoro, dipendono soltanto dai valori finali delle forze e degli spostamenti corrispondenti, e non dai valori assunti dalle forze e dagli spostamenti nel corso della trasformazione; essi sono cioè indipendenti dalla trasformazione».

Seguendo quindi Σ' invece che Σ'', le singole aree tratteggiate dei diagrammi $F's'$ (fig. 8-1) variano, ma la loro somma rimane costante. Questa proprietà è caratteristica dei sistemi conservativi.

Il lavoro L_e e la differenza di energia ΔL sono quindi funzioni ad un sol valore di F_i ed s_i.

Si può dire pure che L_e e ΔL dipendono in modo univoco dalla sola configurazione del corpo. Questa sia assegnata infatti attraverso le tre funzioni u v w, che possono anche non soddisfare alla nota condizione di piccolezza; da esse si passa univocamente (§ 1-12) alle componenti di deformazione, e da queste ancora univocamente alle componenti di tensione, attraverso le inverse delle (c), pur esse uniformi.

Dalle equazioni ai limiti (2-6) e indefinite (2-8) si traggono così univocamente le forze esterne F_i associate alle u v w, ed univocamente perciò si calcolano L_e e ΔL.

Se nella configurazione naturale esistono delle distorsioni ε_{ij}^*, L_e e ΔL dipendono sempre soltanto dalla configurazione u v w del corpo. Infatti assegnate le u v w dovute alle forze, si determinano univocamente le u v w totali dovute alle ε_{ij}^* ed alle forze (come somma di quelle $\overline{u}^*\ \overline{v}^*\ \overline{w}^*$ dovute alle distorsioni, che si suppongono note, e di quelle u v w dovute alle forze) le ε_{ij} totali, le ε_{ij} elastiche fornite dalla differenza tra queste e le ε_{ij}^*, le σ_{ij} e quindi le forze. Tutto ciò vale anche se gli spostamenti dovuti alle ε_{ij}^* non sono piccoli nel senso noto.

Se si è nel campo di validità del principio di Kirchhoff, può dirsi che L_e e ΔL sono funzioni ad un sol valore delle sole forze F_i, poichè alle F_i corrisponde una sola soluzione u v w; se non si è nel suddetto campo, L_e e ΔL sono invece funzioni a più valori delle F_i, a tanti valori quante sono le soluzioni u v w sotto le forze F_i.

6. I sistemi non conservativi.

Se il sistema non è conservativo, ed è sottoposto ad una trasformazione chiusa $\Sigma'_{0\to F} + \Sigma''_{F\to 0}$, si ha

$$L'_{ea} = \Delta L'_a + L'_p$$

$$\mathfrak{L}_e = L'_{ca} + L''_{er} = \Delta\mathfrak{L} + L'_p + L''_p = \Delta\mathfrak{L} + \mathfrak{L}_p \qquad (7)$$

dove $\Delta\mathfrak{L}$ è un caso particolare della cosiddetta *energia elastica vincolata* che si definirà in generale più avanti; il nome è dovuto al fatto che $\Delta\mathfrak{L}$ non può essere restituita in lavoro che a patto di speciali accorgimenti. La $L'_p + L''_p$ invece si disperde in calore, e non è quindi recuperabile; essa è il *lavoro perduto.*

Si precisa che nella fase di ritorno il lavoro L''_{er} delle forze esterne è negativo, e compiuto a spese di una parte dell'energia elastica $\Delta L'_a$; l'altra quota di $\Delta L'_a$ è spesa in una parte L''_p (positiva) per vincere gli attriti e creare le deformazioni permanenti nella fase di ritorno, mentre l'aliquota $\Delta\mathfrak{L}$ rimane vincolata:

$$\Delta L'_a = - L''_{er} + L''_p + \Delta\mathfrak{L} \ . \tag{8}$$

L'esempio elementare che segue può servire a meglio comprendere il significato fisico degli enti introdotti in questo paragrafo. Si prenda in esame una trave di materiale elastico, soggetta ad una forza **F**; l'appog-

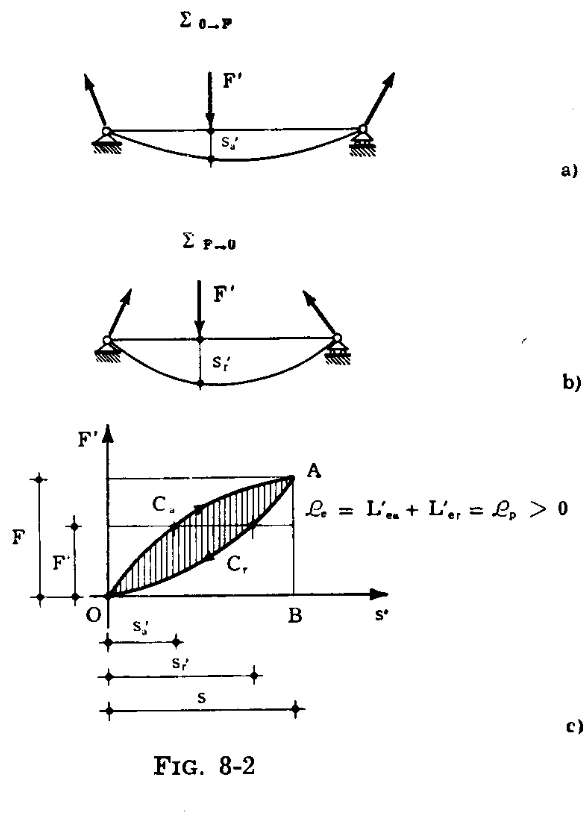


FIG. 8-2

gio sia scabro, e il suo attrito sia caratterizzato da un angolo di una certa apertura (fig. 8-2). Nella fase di andata (trasformazione $\Sigma_{0\rightarrow F}$) il carrello si sposta verso sinistra, e quindi la reazione è diretta secondo il lato destro dell'angolo di attrito (fig. 8-2 a); il contrario accade (fig. 8-2 b) in quasi tutta la fase di ritorno $\Sigma_{F \to 0}$ (*).

Nella $\Sigma_{0 \to F}$ la trave perciò è tesa, e nella $\Sigma_{F \to 0}$ è compressa; dunque allo stesso valore della forza corrisponde nella $\Sigma_{0 \to F}$ uno spostamento s'_a inferiore a quello s'_r della $\Sigma_{F \to 0}$.

Il diagramma $F' s'$ nella trasformazione chiusa si presenta quindi come nella figura 8-2 c.

Si ha:

$$L_{ea} = \quad OC_a\ AB$$

$$L_{er} = - \ OC_r\ AB$$

$$\mathcal{L}_p = \quad OC_a\ AC_r\ O = L_{ea} + L_{er} > 0\ .$$

Se i vincoli sono lisci, ma il materiale non è elastico, risulta ancora

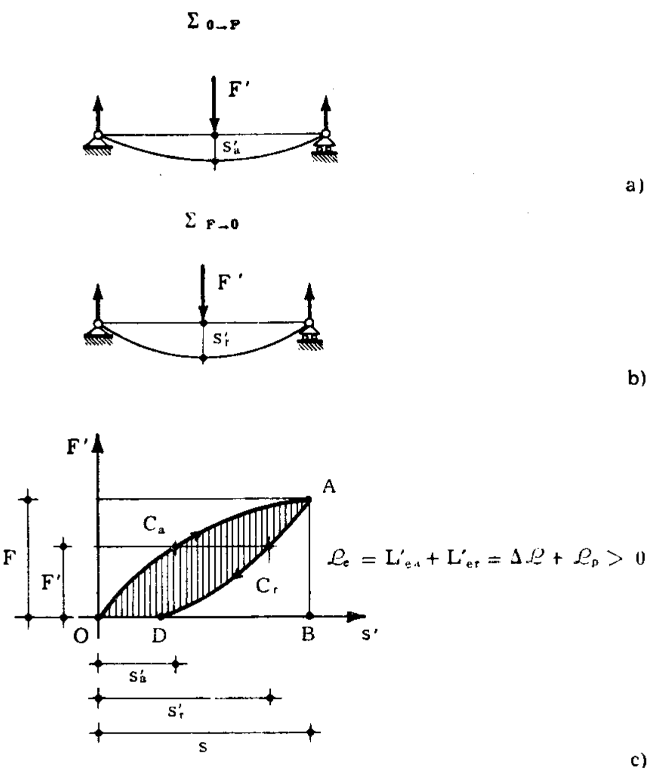


FIG. 8-3

(fig. 8-3 a, b) $s'_r > s'_a$, per la presenza delle deformazioni permanenti; quindi il diagramma $F' s'$ della trasformazione chiusa $\Sigma_{0 \to F} + \Sigma_{F \to 0}$ si pre-

(*) La trasformazione Σ è unica, trattandosi di un'unica forza sempre crescente o sempre decrescente.

senta come nella fig. 8-3 c; rimane un valore finito di s_r per $F' = 0$, per la presenza delle deformazioni permanenti. Si ha nel caso in esame

$$\begin{aligned} L_{ea} &= OC_a\ AB \\ L_{er} &= -\ DC_r\ AB \\ \mathcal{L}_p + \Delta\mathcal{L} &= OC_a\ AC_r\ D = L_{ea} + L_{er} > 0\ . \end{aligned}$$

7. La funzione potenziale elastica.

Si consideri un sistema conservativo. Poichè la variazione di energia di deformazione dalla configurazione naturale a quella deformata dipende in tali sistemi univocamente dalla configurazione, esiste una espressione Φ (u, v, w) della configurazione (*) tale che la differenza dei valori da essa assunti per due configurazioni C_1 $(u_1 v_1 w_1)$ e C_2 $(u_2 v_2 w_2)$ fornisce la variazione di energia di deformazione nel passaggio dalla configurazione C_1 alla configurazione C_2:

$$(\Delta L)_{C_1 \to C_2} = \Phi\ (u_2 v_2 w_2) - \Phi\ (u_1 v_1 w_1)\ . \tag{9}$$

La Φ è chiamata *funzione potenziale elastica* connessa con il sistema (*Green* 1837, *Kelvin* 1855); essa è definita a meno di una costante.

Si ponga, per fissare questa costante,

$$L_{C=0} = \Phi\ (0)\ ; \tag{10}$$

essa è l'energia elastica connessa con le distorsioni preesistenti alle forze.

E' quindi

$$(\Delta L)_{0 \to C} = \Phi\ (u_1 v_1 w_1) - L_{C=0}\ , \tag{11}$$

dove $(\Delta L)_{0 \to C}$ è l'aumento di energia di deformazione dovuta alle forze; quindi Φ (u, v, w) è l'energia di deformazione L presente nel corpo sotto le forze F e gli spostamenti u v w a questi connessi. Si ha cioè

$$L = \Phi\ (u v w) = (\Delta L)_{0 \to C} + L_{C=0}\ . \tag{12}$$

Dalla (8-12) appare che l'energia elastica $L_{C=0}$ presente nel corpo prima dell'applicazione delle forze si somma semplicemente all'energia elastica $(\Delta L)_{0 \to C}$ generata dalle forze.

(*) Le u v w sono prese a partire dalla configurazione naturale.

Il passaggio da una configurazione C_1 corrispondente alle forze F_{1h} ad un'altra C_2 sia dovuto all'applicazione di un gruppo di forze F_{2i}; il lavoro compiuto dalle F_{2i} è fornito sempre dalla (8-1):

$$L_{ei} = \Sigma_i \int_{s_{1i}}^{s_{2i}} F'_{2i} \, ds'_{2i} \tag{g}$$

dove le s'_{2i} variano da s_{1i} ad s_{2i}. La (g) però non coincide con $\Phi_2 - \Phi_1$, e cioè con la variazione di energia di deformazione tra C_1 e C_2; infatti la $(\Delta L)_{C_1 \to C_2}$ è pari al lavoro di tutte le forze esterne compiuto nel passaggio da C_1 a C_2, e in queste forze devono essere comprese anche le F_{1h} connesse con la configurazione C_1.

Poichè le F_{1h} non variano nel passaggio da C_1 a C_2, si può porre

$$(\Delta L)_{C_1 \to C_2} = \Sigma_i \int_{s_{1i}}^{s_{2i}} F'_{2i} \, ds'_{2i} + \Sigma_h F_{1h} \, (s_{2h} - s_{1h}) \, . \tag{h}$$

Se si chiama P_h l'energia potenziale delle forze esterne F_{1h}, è

$$\Sigma_h \, F_{1h} \, (s_{2h} - s_{1h}) = - \, (\Delta P_h)_{C_1 \to C_2}$$

e la (h) può scriversi

$$(\Delta L)_{C_1 \to C_2} + (\Delta P_h)_{C_1 \to C_2} = \Sigma_i \int_{s_{1i}}^{s_{2i}} F'_{2i} \, ds'_{2i} \; ; \tag{13}$$

e cioè il lavoro compiuto da un sistema di forze F_2 è pari alla somma dell'aumento (o diminuzione) dell'energia elastica e dell'aumento (o diminuzione) dell'energia potenziale delle forze F_1 presenti durante l'applicazione delle F_2. La (8-13) è la traduzione del principio di conservazione dell'energia.

La somma $E = P + L$ dell'energia potenziale P delle forze esterne F_i totali agenti sulla struttura (definita a meno di una costante) e dell'energia di deformazione L connessa con le stesse forze (anch'essa definita a meno di una costante) si chiama *energia potenziale totale* connessa con le forze F_i. Si mostrerà in seguito che in corrispondenza di una configurazione di equilibrio l'energia potenziale totale è stazionaria rispetto a tutte le possibili variazioni della configurazione stessa; condizione necessaria e sufficiente perchè la configurazione sia stabile è che l'energia potenziale totale sia un minimo rispetto a tutte le suddette variazioni. La condizione è dimostrabile in rigore come sufficiente (*Dirichlet*), non altrettanto come necessaria (*Ljapunov*).

L'applicazione, a partire dalle F_1, di un sistema di forze elementari dF_2, se la configurazione relativa alle F_1 è stabile, induce degli spostamenti ds_2 piccoli, considerabili perciò come variazione della configurazione di equilibrio relativa alle forze preesistenti F_1; perciò il lavoro compiuto dalle dF_2, pari per la (8-13) alla variazione dell'energia potenziale totale connessa con le forze F_1, è positivo perchè la configurazione relativa alle F_1 è stabile. Si osservi che mentre δL e δP sono del primo ordine, la loro somma è del secondo.

Se in presenza delle F_1 agiscono le forze finite F_2, il lavoro da esse compiuto è indipendente dalla trasformazione seguita, come appare dalla (8-13). Facendo crescere le F_2 in modo che conservino inalterati i mutui rapporti (*carico proporzionale,* § 5-6) si ha

$$F'_{2i} = k\ F_{2i} \qquad\qquad 0 \leqslant k \leqslant 1$$

$$dF'_{2i} = dk\ F_{2i}$$

$$s'_{2i} = s'_{2i}\ (k)$$

$$ds'_{2i} = \frac{ds'_{2i}}{dk}\ dk$$

e quindi

$$L_{2e} = \Sigma_i \int_{s_{1i}}^{s_{2i}} F'_{2i}\, ds'_{2i} = \Sigma_i F_{2i} \int_0^1 k \frac{ds'_{2i}}{dk}\ dk = \int_0^1 \left(\Sigma_i F_{2i} \frac{ds'_{2i}}{dk} \right) k\, dk\ .$$

Poichè per quanto detto sopra è

$$\Sigma_i\ dF'_{2i}\ ds'_{2i} = \Sigma_i\ F_{2i}\ dk\ \frac{ds'_{2i}}{dk}\ dk = \left(\Sigma_i\ F_{2i}\ \frac{ds'_{2i}}{dk} \right) dk^2 > 0$$

risulta pure

$$L_{2e} > 0\ .$$

Può dirsi perciò che il lavoro svolto da un gruppo di forze finite F_2, agenti in presenza di altre forze F_1, è sempre positivo se per carico proporzionale si passa attraverso configurazioni tutte di equilibrio stabile.

Se le forze F_1 sono nulle, dalla (8-13) risulta $\delta L > 0$; e cioè, sotto le condizioni già dette, la variazione di energia elastica a partire dalla configurazione naturale è sempre maggiore di zero.

8. Il potenziale elastico.

Si prenda in esame un volume elementare dV costituente l'intorno di un punto P (x y z) ubicato nell'interno del corpo; si isoli tale elemento dal corpo, facendo agire sulla superficie dell'elemento le forze elementari $\overline{t_n}$ dS. Il sistema che ne risulta è sicuramente conservativo sotto la sola ipotesi che il materiale sia elastico, poichè la seconda condizione di conservatività (vincoli lisci, § 8-5) è implicitamente verificata. La variazione di energia di deformazione dell'intorno preso in esame è uguale al lavoro dL_e compiuto dalle forze elementari $\overline{t_n}$ dS nel passaggio dai valori nulli ai valori finali, secondo una qualsiasi trasformazione.

Il rapporto tra il valore dL dell'energia elastica contenuta nel volume dV ed il volume dV è l'energia elastica riferita all'unità di volume; esiste, in analogia alla funzione potenziale elastica Φ, una funzione φ della configurazione dell'elemento (e cioè delle componenti di deformazione ε_{ij} in P) che con la differenza tra i valori assunti in corrispondenza delle deformazioni ε_1 ed ε_2 fornisce l'aumento o la diminuzione del rapporto dL/dV nel passaggio da ε_1 ad ε_2 :

$$\left(\Delta \frac{dL}{dV}\right)_{\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2} = \varphi(\varepsilon_2) - \varphi(\varepsilon_1) \ . \tag{14}$$

Le ε_{ij} della (8-14) sono quelle *elastiche,* e cioè quelle derivanti dalle tensioni $\overline{t_n}$ e ad esse legate dalle relazioni elastiche; solo tali ε_{ij} infatti si riducono a zero per $\overline{t_n} \rightarrow 0$, e per esse quindi le $\overline{t_n}$ compiono nella fase di ritorno $\overline{t_n} \rightarrow 0$ un lavoro negativo, a spese di un'energia che è l'energia di deformazione dL immagazzinata nell'elemento dV. Se nell'elemento già soggetto alle tensioni $\overline{t_n}$ si verificano delle deformazioni $\varepsilon_{ij}{}^*$ derivanti da cause che non siano tensioni e che possono essere caratterizzate da valori qualsiasi, le $\overline{t_n}$ compiono un lavoro, che non è però recuperabile; infatti se le $\overline{t_n}$ vanno a zero, le $\varepsilon_{ij}{}^*$ restano inalterate. Quindi se le ε_{ij} elastiche sono nulle, e quindi le tensioni $\overline{t_n}$ anche esse nulle, l'energia elastica dL è nulla anch'essa, poichè non c'è niente che possa restituirsi in lavoro negativo, essendo nulle le $\overline{t_n}$. Ne deriva che

$$\varphi(0) = 0 \ . \tag{15}$$

Se si suppone che la configurazione dell'elemento è sempre stabile, la φ è sempre, in presenza di tensioni, positiva, per quanto detto alla fine del paragrafo precedente.

La funzione φ si chiama *potenziale elastico*; per la (8-15) può porsi

$$\varphi = \frac{dL}{dV} . \tag{16}$$

Dalla (8-16) deriva pure

$$L = \int_V \varphi \, dV ; \tag{17}$$

la conoscenza di φ quindi permette di conoscere il vero valore di L, superando l'incertezza relativa al valore iniziale Φ (0), relativo a forze esterne nulle. Si ha così

$$L = \int_V \varphi \, dV = (\Delta L)_{0 \to C} + L_{C=0} . \tag{18}$$

Il potenziale elastico φ può essere espresso, per quanto detto al § 8-5, come funzione univoca delle sole deformazioni ε_{ij}, delle sole tensioni $\overline{t_n}$, o di ambedue; poichè φ è in rigore il limite del rapporto dL/dV per $dV \to 0$ nel punto P, il suo valore non dipende dalla forma dell'intorno di P. Per comodità di calcolo, e per far intervenire le tensioni $\overline{t_n}$ sotto la forma delle componenti speciali, si assume per intorno il parallelepipedo retto di lati dx dy dz paralleli agli assi coordinati (fig. 8-4); l'energia dL si calcola come lavoro dL_e delle forze esterne $\sigma_{ij}\,dS$ applicate alle facce dell'elemento.

I valori finali delle deformazioni e delle tensioni siano $\varepsilon_{ij}\,\sigma_{ij}$; alle σ_{ij} si può arrivare attraverso una qualsiasi trasformazione σ'_{ij} (t), senza che

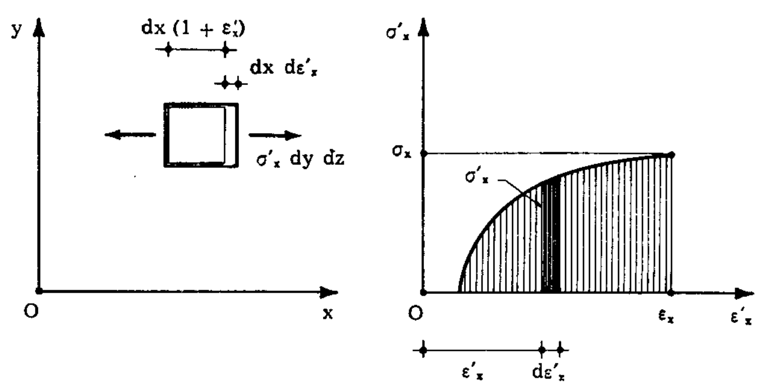


FIG. 8-4

varii il valore di dL_e; alle σ'_{ij} (t) si associano le ε'_{ij} (t) fornite dalle relazioni (c) di elasticità. I diagrammi $\sigma'_{ij}\,\varepsilon'_{ij}$ sono sei, tre del tipo riportato nella fig. 8-4 e relativi alle ε', tre del tipo riportato nella fig. 8-5 e relativi alle γ'. Anche nel caso in esame può darsi che qualcuno di tali diagrammi non parta dall'origine, se le σ'_{ij} non sono tutte presenti all'inizio della trasformazione. Si consideri il generico tempo t e le relative ε'_{ij} (t)

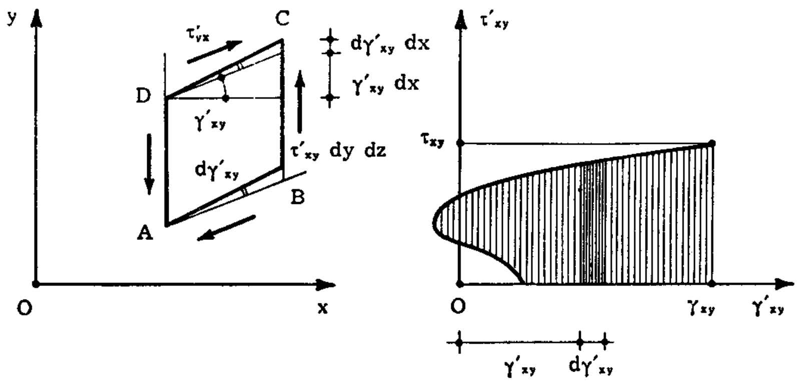


FIG. 8-5

σ'_{ij} (t), e si calcoli il lavoro ddL_e nel tempo dt successivo a t; esso è compiuto dalle σ'_{ij} (t) dS per effetto delle $d\varepsilon'_{ij}$.

Ogni σ'_{ij} dS compie lavoro soltanto per la corrispondente $d\varepsilon'_{ij}$, poichè è ortogonale alle altre $d\varepsilon'_{ij}$; il lavoro ddL_e si compone quindi di sei termini.

Per quanto riguarda la σ'_x il contributo a ddL_e è fornito (fig. 8-4) da

$$\sigma'_x \, dy \, dz \cdot d\varepsilon'_x \, dx = \sigma'_x \, d\varepsilon'_x \, dV \,. \tag{i}$$

Per quanto riguarda la τ'_{xy} (fig. 8-5) il contributo è pari a

$$\tau'_{xy} \, dy \, dz \cdot d\gamma'_{xy} \, dx = \tau'_{xy} \, d\gamma'_{xy} \, dV \,; \tag{ℓ}$$

infatti se si tiene fissa la faccia AD le due forze τ'_{yx} dx dz agenti sulle facce AB e DC non compiono lavoro perchè gli spostamenti di ogni punto delle due facce sono ortogonali alle suddette forze, e la forza τ'_{xy} dy dz agente sulla faccia BC compie lavoro per tutto lo spostamento $d\gamma'_{xy}$ dx, che avviene nella stessa direzione della forza.

Dalle (i) ed (ℓ) si trae

$$ddL_e = dV \, \Sigma \, \sigma'_{ij} \, d\varepsilon'_{ij}$$

e quindi

$$dL_e = dL = dV \, \Sigma \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma'_{ij} \, d\varepsilon'_{ij}$$

$$\varphi = \frac{dL}{dV} = \Sigma \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma'_{ij} \, d\varepsilon'_{ij} \,.$$

Si può perciò scrivere

$$\varphi = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma'_x \, d\varepsilon'_x + \int_0^{\varepsilon_y} \sigma'_y \, d\varepsilon'_y + \int_0^{\varepsilon_z} \sigma'_z \, d\varepsilon'_z + \\ + \int_0^{\gamma_{yz}} \tau'_{yz} \, d\gamma'_{yz} + \int_0^{\gamma_{zx}} \tau'_{zx} \, d\gamma'_{zx} + \int_0^{\gamma_{xy}} \tau'_{xy} \, d\gamma'_{xy} . \tag{19}$$

Il primo termine della (8-19) è l'area tratteggiata del diagramma della fig. 8-4, il sesto termine è l'area tratteggiata del diagramma della fig. 8-5; φ coincide quindi con la somma delle sei aree di questo tipo relative ai sei diagrammi $\sigma'_{ij} \, \varepsilon'_{ij}$. Se si perviene alle σ_{ij} ed ε_{ij} attraverso un'altra trasformazione $\sigma''_{ij}(t)$, i sei diagrammi suddetti variano, ma la somma delle sei aree resta la stessa.

Dalla (8-19) risulta che se il materiale è elastico e si accetta il principio di conservazione dell'energia la forma differenziale lineare

$$\Sigma \, \sigma'_{ij} \, d\varepsilon'_{ij} \tag{20}$$

è un differenziale esatto. Infatti il suo integrale curvilineo tra due punti qualsiasi dell'S_6 delle ε_{ji}, $A(\overset{A}{\varepsilon_{ij}})$ e $B(\overset{B}{\varepsilon_{ij}})$, non dipende dalla curva c' dell'S_6 congiungente A e B e definita dalle sei equazioni parametriche $(a \leqslant t \leqslant b)$

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon'_{ij}(t)$$

ma soltanto dai due punti A e B; tale integrale è proprio la funzione di cui la (8-20) è il differenziale esatto, ed è per altro, per A fisso e coincidente con A (0), il potenziale elastico.

Il dominio di variabilità delle ε'_{ij} è limitato soltanto dalla condizione stessa di elasticità; le ε'_{ij} infatti possono assumere qualsiasi valore, non essendo legate tra loro da nessuna relazione, poichè si fa riferimento ad un elemento del corpo. Tale dominio di variabilità è perciò semplicemente connesso; in esso le funzioni $\sigma'_{ij}(\varepsilon'_{hk})$ devono essere, come già detto (cap. IV), ad un sol valore; se esse sono pure continue con le loro derivate prime, le condizioni necessarie (e sufficienti) di integrabilità sono le ben note

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{hk}} = \frac{\partial \sigma_{hk}}{\partial \varepsilon_{ij}} . \tag{21}$$

Le (8-21), condizioni necessarie e sufficienti di integrabilità della (8-20), sono però solo *necessarie* perchè il materiale sia elastico. Esse non sono sufficienti; esplicitamente si avverte che esistono particolari trasformazioni elasto-plastiche (*Iliouchine*) per le quali la (8-20) è ancora integrabile.

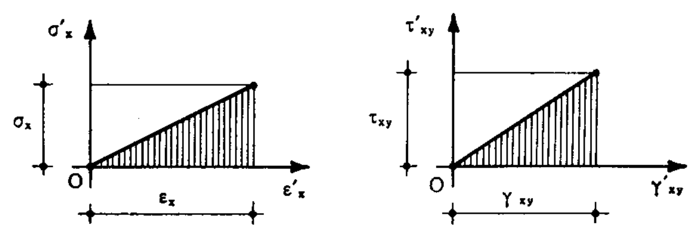
Poichè la (8-20) è il differenziale esatto della funzione $\varphi(\varepsilon_{ij})$ ottenibile per integrazione curvilinea, è pure

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}} \; ; \tag{22}$$

e cioè la generica componente di tensione è pari alla derivata del potenziale rispetto alla corrispondente componente di deformazione. Perchè la (8-22) sia valida, basta che il materiale sia elastico, anche se non linearmente. Nel caso del materiale ad elasticità lineare, le (8-21) impongono che il coefficiente a fattore della σ_{hk} nell'espressione della ε_{ij} sia uguale al coefficiente a fattore della σ_{ij} nell'espressione della ε_{hk}; e cioè la matrice delle relazioni elastiche lineari deve essere simmetrica rispetto alla diagonale principale, e le 36 costanti di elasticità si riducono a 21.

9. Il potenziale elastico nei materiali ad elasticità lineare.

La (8-19) fornisce implicitamente il potenziale φ in funzione dei valori finali delle $\varepsilon_{ij}\,\sigma_{ij}$, delle sole ε_{ij}, o delle sole σ_{ij}. Nei materiali ad ela-



$$\varphi = \frac{1}{2} \Sigma \, \sigma_{ij} \, \varepsilon_{ij}$$

FIG. 8-6

sticità lineare è possibile esplicitare tale dipendenza in forma molto semplice.

Per essi infatti, se si pone

$$\sigma'_{ij} = k\,\sigma_{ij} \qquad (0 \leqslant k \leqslant 1)$$

è pure

$$\varepsilon'_{ij} = k\,\varepsilon_{ij} \; ; \qquad (0 \leqslant k \leqslant 1)$$

i diagrammi delle fig. 8-4 e 8-5 si possono presentare cioè sotto forma lineare (fig. 8-6).

Calcolando la (8-19) per questa trasformazione — ed il risultato è, come già detto, indipendente dalla trasformazione — si ottiene

$$\varphi = \sigma_x \varepsilon_x \int_0^1 k\,dk + \ldots + \tau_{xy} \gamma_{xy} \int_0^1 k\,dk + \ldots$$

da cui

$$\varphi = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{xy} \gamma_{xy}) . \tag{23}$$

La φ risulta essere perciò una forma bilineare nelle $\sigma_{ij}\,\varepsilon_{hk}$; attraverso le relazioni di elasticità, la (8-23) si trasforma immediatamente in una forma quadratica omogenea completa delle componenti di tensione, in cui entrano in gioco le 21 costanti di elasticità. Analogamente la (8-23) si può trasformare in una forma quadratica omogenea completa delle componenti di deformazione, retta dalle stesse costanti.

Se il materiale è anche isotropo, le 21 costanti si riducono, come noto, alle due E ed 1/m; dalla (8-23) si ottiene, attraverso le (4-4) e (4-6),

$$\varphi = \frac{1}{2E} \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{2}{m} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) \right] + \\ + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) , \tag{24}$$

ed attraverso le (4-9) e (4-10)

$$\varphi = G\, (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \lambda \frac{\vartheta^2}{2} + \frac{G}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) . \tag{25}$$

Dalla (8-25) si ha

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x} = 2\,G\,\varepsilon_x + \lambda \vartheta = \sigma_x$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} = G\,\gamma_{xy} = \tau_{xy}$$

e cioè si riottengono le (8-22); dalla (8-24) si ha invece

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{E} \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \right) = \varepsilon_x$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{xy}} = \frac{1}{G}\, \tau_{xy} = \gamma_{xy} .$$

Per i materiali isotropi, cioè, oltre alle (8-22) valgono le inverse

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij} \; . \tag{26}$$

Le (8-26) sono valide, però, più in generale, per materiali ad elasticità lineare, anche se non isotropi. Poichè infatti in tal caso φ è una forma quadratica omogenea nelle σ_{ij}, può scriversi (*)

$$2\,\varphi = \Sigma \, \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \, \sigma_{ij} \tag{27}$$

relazione che, paragonata con la (8-23), fornisce le (8-26).

Le (8-22) e (8-26) possono ricavarsi, per i materiali isotropi, direttamente dalla (8-23). Si ha infatti

$$\begin{aligned} 2\,\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x} &= \sigma_x + \varepsilon_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} + \varepsilon_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial \varepsilon_x} + \varepsilon_z \frac{\partial \sigma_z}{\partial \varepsilon_x} = \\ &= \sigma_x + \varepsilon_x (2\,G + \lambda) + \varepsilon_y \lambda + \varepsilon_z \lambda = \\ &= \sigma_x + 2\,G\,\varepsilon_x + \lambda\,\theta = 2\,\sigma_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\,\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_x} &= \varepsilon_x + \sigma_x \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \sigma_x} + \sigma_y \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial \sigma_x} + \sigma_z \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial \sigma_x} = \\ &= \varepsilon_x + \frac{\sigma_x}{E} - \frac{1}{Em} (\sigma_y + \sigma_z) = 2\,\varepsilon_x \end{aligned}$$

e analoghe per le γ e τ.

Si è già detto che φ è positivo; questo può anche verificarsi analiti-

---

(*) Per una forma quadratica omogenea

$$f\,(x_1 \; x_2 \; ... \; x_n)$$

si ha

$$\Sigma \, \frac{\partial f}{\partial x_i} \, x_i = 2\,f\,(x_1 \; x_2 \; ... \; x_n) \tag{m}$$

$$\frac{1}{2} \, \Sigma \, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \, x'^2_i + \Sigma \, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_h} \, x'_i \; x'_h = f\,(x'_1 \; x'_2 \; ... \; x'_n) \tag{n}$$

camente dalla (8-17).

Perchè la (8-17) sia positiva, deve potersi ridurre a forma canonica, e cioè ad una somma di soli termini quadratici. Deve cioè potersi scrivere, riferendosi alla terna principale

$$\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{\lambda}{2G}\,\theta^2 = (\varepsilon_x - a\,\theta)^2 + (\varepsilon_y - a\,\theta)^2 + (\varepsilon_z - a\,\theta)^2 \ ,$$

con a reale. Sviluppando i quadrati si ha:

$$3\,a^2\,\theta^2 - 2\,a\,\theta^2 - \frac{\lambda}{2G}\,\theta^2 = 0$$

$$3\,a^2 - 2\,a - \frac{\lambda}{2G} = 0$$

da cui

$$a = \frac{1}{3}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{3}{2}\,\frac{\lambda}{G}}\right) = \frac{1}{3}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{3}{m-2}}\right) .$$

Sul piano mf la funzione $f(m) = 1 + \dfrac{3}{m-2}$ è una iperbole equilatera, i cui asintoti (fig. 8-7) sono le rette parallele ad m e ad f, e poste alle distanze $+1$ e $+2$

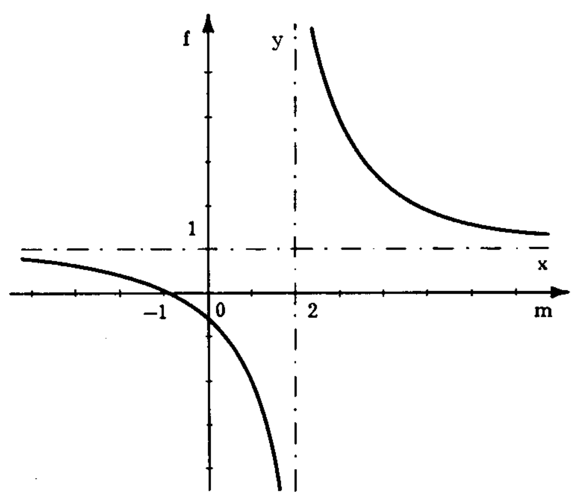


FIG. 8-7

rispettivamente dagli stessi assi; infatti le sostituzioni $f - 1 = y$, $m - 2 = x$ consentono di scrivere $xy = 3 = \text{cost.}$ L'asse m è intersecato nel punto $(-1, 0)$, quindi f è negativo nel segmento $-1 < m < 2$, positivo all'esterno di esso (e cioè per $m < -1$, ed $m > 2$). Tale limitazione coincide con quella $-1 < \dfrac{1}{m} < \dfrac{1}{2}$ già ritrovata; quindi la quantità $1 + \dfrac{3}{m-2}$ è sempre positiva, ed a è reale. Ne discende che φ è positiva. Viceversa, dalla condizione $\varphi > 0$ si risale alla disuguaglianza che limita il modulo di Poisson tra i noti estremi -1 ed $1/2$.

Si osservi inoltre (8-24) che φ è combinazione lineare dell'invariante quadratico T_2 di tensione e del quadrato dell'invariante lineare T_1:

$$\varphi = \frac{T_1^2}{2E} - \frac{T_2}{2G} \; ;$$

così pure può verificarsi (8-25) che φ è combinazione lineare dell'invariante quadratico e del quadrato dell'invariante lineare di deformazione. Si trova conferma in tal modo dell'invarianza di φ rispetto ad una qualsiasi trasformazione delle coordinate; questa proprietà, di per se evidente per ragioni fisiche, è valida anche per corpi non isotropi.

10. L'energia vincolata.

Si è detto che se le uniche cause deformanti sono le forze, l'energia elastica in assenza di forze, fornita dal valore della funzione potenziale elastica per $u = v = w = 0$, è nulla.

In realtà esistono cause deformanti che non sono forze, come variazioni termiche, cedimenti vincolari, deformazioni plastiche verificatesi per superamento dei limiti di elasticità nella vita precedente della struttura (che peraltro può trovarsi in regime elastico nell'intero campo di applicazione delle forze di esercizio), scorrimenti di ordine viscoso, deformazioni non congruenti prodottesi nel processo di lavorazione o nei trattamenti correttivi a caldo e a freddo. Tutte le suddette cause deformanti possono esprimersi attraverso le relative componenti di deformazione ε_{ij}^*, e si chiamano in genere *distorsioni* (§§ 1-1 e 5-5). Non sempre le ε_{ij}^* generano uno stato di tensione; se infatti esse rispettano le equazioni di congruenza (1-33), e le $u^*\, v^*\, w^*$ che da esse in tale ipotesi si traggono rispettano, a meno di spostamenti rigidi, le equazioni di vincolo (5-2), nulla si oppone al loro esplicarsi, e quindi nessuna reazione esterna e nessun sistema di tensioni sorge nel corpo. Sono queste le cosiddette *distorsioni atensionali.*

Se le ε_{ij}^* rispettano le equazioni di congruenza interna, nelle strutture isostatiche non generano mai stati di tensione; in quelle iperstatiche ne generano se e solo se le $u^*\, v^*\, w^*$ non rispettano le condizioni di vincolo. Esempi di tali distorsioni sono le variazioni termiche costanti o variabili linearmente lungo le sezioni rette di una struttura monodimensionale, e, più in generale, nello stesso tipo di struttura, le ε_{ij}^* che conservano la planeità delle sezioni rette (*distorsioni di Volterra*).

Se le ε_{ij}^* non rispettano le condizioni di congruenza, da esse non possono trarsi delle $u^*\, v^*\, w^*$; tali distorsioni generano stati di tensione sia nelle strutture isostatiche che in quelle iperstatiche. Siano $\overline{\sigma}_{ij}$ le tensioni generate dalle ε_{ij}^* (*stato di coazione* derivante dalle distorsioni) ed $\bar{\varepsilon}_{ij}$ le deformazioni elastiche che ad esse si accompagnano; le $\bar{\sigma}_{ij}$ sono tali che le $\bar{\varepsilon}_{ij}$ da esse generate sommate alle ε_{ij}^* soddisfano sia le condizioni di congruenza che quelle di vincolo; alle $\varepsilon_{ij}^* + \bar{\varepsilon}_{ij}$ si associano quindi delle componenti di spostamento $\bar{u}^* \bar{v}^* \bar{w}^*$ (*).

L'energia elastica $\bar{L}$ derivante dalle $\bar{\sigma}_{ij}$ si calcola in genere attraverso la (8-19)

$$\bar{L} = \int_V \varphi \, dV = \int_V dV \, \Sigma \int_0^{\bar{\varepsilon}_{ij}} \bar{\sigma}'_{ij} \, d\bar{\varepsilon}'_{ij} \tag{28}$$

ed è funzione univoca delle $\bar{\varepsilon}_{ij}$, o delle $\bar{\sigma}_{ij}$.

Se il materiale è ad elasticità lineare, la $\bar{L}$ può calcolarsi invece attraverso la (8-23):

$$\bar{L} = \frac{1}{2} \int_V dV \, \Sigma \, \bar{\sigma}_{ij} \, \bar{\varepsilon}_{ij} \, . \tag{29}$$

L'energia $\bar{L}$ può essere restituita in lavoro solo se si sconnette il solido in volumi elementari; in tal caso infatti, e in genere solo in tal caso, le $\bar{\varepsilon}_{ij}$ possono annullarsi, e le forze $\bar{\sigma}_{ij}$ dS compiono un lavoro negativo pari in valore ad $\bar{L}$. L'energia elastica $\bar{L}$ prende nome perciò di *energia vincolata*. Un esempio di energia vincolata è quello incontrato al § 6 di questo capitolo; essa in tal caso sorge dopo una trasformazione chiusa, se il corpo in questa trasformazione ha valicato le soglie del dominio elastico, per la formazione di deformazioni ε_{ij}^* di carattere plastico, e cioè permanenti.

Dall'esame della (8-12), appare che il valore $L_{C=0}$, energia elastica allo stato naturale, è un caso particolare di energia vincolata $\bar{L}$; chiamando L_F l'energia di deformazione connessa con le forze esterne, la (8-12) si scrive

$$L = L_F + L_{C=0} \, . \tag{30}$$

La (8-30) assicura che le due energie L_F e $L_{C=0}$ si sommano senza che intervengano termini di scambio, e ciò nella sola ipotesi di materiale elastico, anche se non linearmente. Si può dire, in sintesi, che gli stati tensionali derivanti da forze sono ortogonali con lo stato di deformazione iniziale. E' bene precisare che mentre nell'ipotesi di elasticità lineare e

(*) Si indicheranno con $u^* v^* w^*$ gli spostamenti dovuti ad ε_{ij}^* che rispettano le condizioni di congruenza interna ed esterna, con $\bar{u}^* \bar{v}^* \bar{w}^*$ gli spostamenti connessi con ε_{ij}^* che non rispettano la seconda condizione, o nessuna delle due.

di piccoli spostamenti L_F è indipendente da $L_{C=0}$, e cioè dallo stato preesistente di coazione, nel caso più generale le soluzioni s_i dovute alle forze F_i variano al variare dello stato di coazione, e così varia pure L_F; questa però è sempre pari al lavoro svolto dalle forze applicate.

Della (8-30) si ha pure conferma attraverso il principio dei lavori virtuali di cui si tratterà nel seguito. Infatti l'energia di deformazione di scambio sarebbe fornita dal lavoro eseguito dalle $\overline{\sigma}_{ij}$ preesistenti per effetto delle $\varepsilon_{ij\,F}$ dovute alle forze:

$$L_{oF} = \int_V dV \; \Sigma \; \overline{\sigma}_{ij} \; \varepsilon_{ij\,F} \; ; \tag{o}$$

nella (o) non compare il termine $\frac{1}{2}$ perchè le $\overline{\sigma}_{ij}$ sono presenti nella loro integrità fin dal primo apparire delle $\varepsilon_{ij\,F}$.

Per lo stesso motivo la (o) è valida anche per materiali ad elasticità non lineare.

Le $\overline{\sigma}_{ij}$ sono in equilibrio con forze applicate nulle, ed eventualmente quindi con un sistema di reazioni vincolari in equilibrio. Il principio dei lavori virtuali assicura che se un insieme di tensioni $\overline{\sigma}_{ij}$ è in equilibrio con un insieme di forze esterne $\overline{R}$ (nel senso che tali insiemi soddisfano le equazioni di equilibrio indefinite ed ai limiti), e con riferimento ad una determinata configurazione del corpo, il lavoro delle forze esterne per effetto di una qualsiasi variazione virtuale di configurazione $u_F\, v_F\, w_F$ è uguale al lavoro delle forze interne:

$$\int_V dV \; \Sigma \; \overline{\sigma}_{ij} \; \varepsilon_{ij\,F} = \Sigma \; \overline{R} \; s_{RF} \; . \tag{p}$$

In corrispondenza dei vincoli gli spostamenti s_{RF} dovuti alle forze sono nulli. E infatti, se i vincoli cedono anelasticamente questi cedimenti sono da intendersi come distorsioni, e quindi i loro effetti si risentono nel quadro delle $\overline{\sigma}_{ij}$; se invece i vincoli cedono elasticamente, si può far rientrare la loro elasticità in quella della struttura, e cioè inglobare nella struttura il vincolo elastico, fino al suolo rigido. Perciò il secondo membro della (p) è nullo, e si ritrova, per la (o),

$$L_{oF} = 0 \; .$$

La dimostrazione è valida anche se le distorsioni hanno provocato forti spostamenti, e se il materiale è elastico non linearmente. E' necessario però per la sua validità che le $u_F\, v_F\, w_F$ siano piccole nel senso noto; in tal senso la dimostrazione ora eseguita ha un campo di validità più ristretto di quella eseguita al § 8-7.

Se il materiale è a vincoli lisci e linearmente elastico, e se gli spostamenti sono piccoli, vale il principio di sovrapposizione degli effetti; un sistema di distorsioni ε_{ij}^* ed un sistema di forze F generano le stesse $\overline{\varepsilon}_{ij}\, \overline{\sigma}_{ij}$ e le stesse $\varepsilon_{ijF}\, \sigma_{ijF}$, quale che sia il loro ordine di applicazione; poichè poi il sistema è conservativo, l'energia elastica finale L è la stessa. Se agisce prima il sistema di distorsioni e poi quello di forze, si può dire che

$$L = L_F + \overline{L} \tag{31}$$

poichè vale la dimostrazione già fatta. Se agiscono prima le forze, L non varia, e la (8-31) continua a valere. Può perciò nelle suddette ipotesi generalizzarsi la (8-30), e dire che comunque, nel campo di validità del principio di sovrapposizione degli effetti, l'energia dovuta alle forze e quella dovuta alle distorsioni si sommano senza che compaiano termini di scambio; forze e distorsioni costituiscono cioè due sistemi ortogonali. Nella $\overline{L}$ va compresa ovviamente anche la $L_{C=0}$.

La (8-31) è l'espressione analitica del *secondo principio di reciprocità* o di *Colonnetti.*

Come L_F si ha a spese del lavoro L_e delle forze esterne, così pure $\overline{L}$ deve ottenersi a spese di un lavoro positivo, o di una diminuzione di altra forma di energia. Se le $\varepsilon_{ij}{}^*$ sono di carattere plastico, o viscoso, $\overline{L}$ è ottenuto, come si è visto, a spese di una parte del lavoro delle forze esterne che hanno prodotto le $\varepsilon_{ij}{}^*$ stesse. Se le ε_{ij} sono di carattere termico, $\overline{L}$ corrisponde ad un aumento apparente del calore specifico, nel senso che alla quantità di calore necessaria per l'incremento termico occorre che se ne aggiunga un'altra equivalente ad $\overline{L}$. Se le $\varepsilon_{ij}{}^*$ sono impresse, $\overline{L}$ è ottenuto a spese del sistema distorcente (es. distorsioni di disarmo applicate mediante martinetti, o correzioni di difetti di montaggio).

Se le $\varepsilon_{ij}{}^*$ sono cedimenti vincolari, $\overline{L}$ equivale al lavoro svolto dalle reazioni durante il cedimento stesso.

11. Il lavoro complementare.

Si definisce *lavoro complementare* l'espressione

$$L^* = \int_V dV\, \Sigma\, \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}{}^* \tag{32}$$

dove le σ_{ij} sono dovute alle distorsioni $\varepsilon_{ij}{}^*$ ed alle forze esterne. Nell'ipotesi di vincoli lisci, di materiale ad elasticità lineare, e di spostamenti piccoli, — ipotesi che resta valida in tutto questo paragrafo — può porsi

$$\sigma_{ij} = \overline{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij\,F}$$

dove $\overline{\sigma}_{ij}$ e $\sigma_{ij\,F}$ sono dovute alle distorsioni $\varepsilon_{ij}{}^*$ ed alle forze, e sono calcolabili ambedue sulla struttura indeformata; può scriversi perciò

$$L^* = L_F^* + \overline{L}^* \tag{33}$$

dove è

$$L_F^* = \int_V dV \, \Sigma \, \sigma_{ij\,F} \, \varepsilon_{ij}^* \tag{34}$$

$$\overline{L}^* = \int_V dV \, \Sigma \, \overline{\sigma}_{ij} \, \varepsilon_{ij}^* \, . \tag{35}$$

La L_F^* è il *lavoro complementare relativo alle forze,* la $\overline{L}^*$ il *lavoro complementare relativo alle distorsioni* stesse.

Se le ε_{ij}^* agiscono quando già le forze sono presenti, le $\sigma_{ij\,F}$ compiono realmente il lavoro L_F^*. Esso si ritrova come lavoro compiuto dalle forze F. Infatti, chiamando $\overline{s}^*$ gli spostamenti connessi con le $\varepsilon_{ij}^* + \overline{\varepsilon}_{ij}$, il principio dei lavori virtuali (valido per le ipotesi già fatte) permette di scrivere

$$\Sigma \, F_i \, \overline{s}_i^* = \int_V dV \, \Sigma \, \sigma_{ij\,F} \, \varepsilon_{ij}^* + \int_V dV \, \Sigma \, \sigma_{ij\,F} \, \overline{\varepsilon}_{ij} \, .$$

Il secondo integrale è nullo, sempre per le suddette ipotesi, poichè rappresenta l'energia elastica mutua di un sistema di forze e distorsioni; è perciò

$$\Sigma \, F_i \, \overline{s}_i^* = L_F^* \, . \tag{36}$$

Se invece le ε_{ij}^* agiscono prima delle forze, L_F^* non è compiuto, è perciò soltanto una espressione analitica.

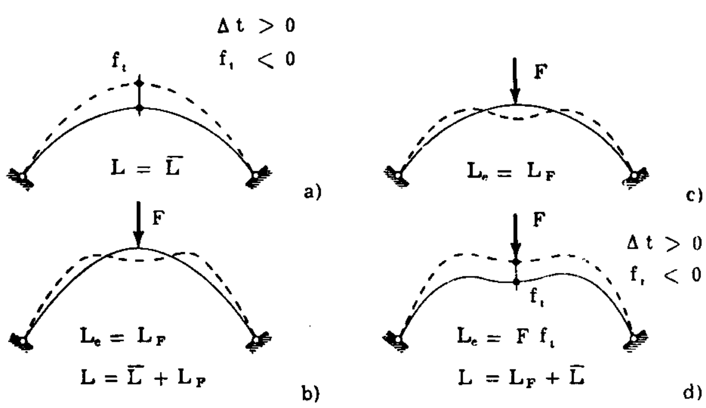


FIG. 8-8

Si consideri per esempio il caso delle distorsioni termiche. Una variazione termica uniforme Δt agisca sulla struttura priva di forze esterne (fig. 8 a); se la struttura è isostatica, in essa non si generano coazioni

$\overline{\sigma}_{ij}$, e la quantità di calore Q che la struttura deve assorbire è pari al prodotto massa $\times$ calore specifico $\times$ variazione termica. Se la struttura è iperstatica, si generano in essa delle $\overline{\sigma}_{ij}$, e quindi un'energia elastica $\overline{L}$; la quantità di calore che la struttura assorbe è pari a $Q + \overline{L}$.

Successivamente all'azione di Δt, venga applicata la F (fig. 8 b); essa induce nella struttura l'energia $\overline{L}_F$, che si somma ad $\overline{L}$; il lavoro L_e della F è pari ad L_F, e si ha

$$L_e = L_F$$

$$L = L_F + \overline{L} .$$

Se invece è applicata prima la forza F, e poi la variazione termica Δt (fig. 8 c, d) il lavoro finale della F è

$$L_e = L_F + F f_t$$

dove f_t è lo spostamento dovuto a Δt. La Δt provoca sempre l'energia $\overline{L}$ che si somma ad L_F; ma la quantità di calore che la struttura assorbe è pari a (*)

$$Q + \overline{L} - F f_t .$$

Il lavoro

$$L_F^* = \int_V dV \, \Sigma \, \sigma_{ij\,F} \, \varepsilon_{ij}^*$$

nel primo caso non è svolto, nel secondo è pari ad Ff_t, conformemente alla (8-36), ed è svolto a spese dell'energia termica $-Ff_t$.

Se le ε_{ij}^* sono di carattere plastico, e sono provocate dalle F_i, non si può asserire quale parte di L_F^* sia realmente svolto, poichè le ε_{ij}^* sorgono contemporaneamente all'azione delle F, in stadii intermedi della trasformazione $\Sigma_{0 \to F}$.

Se però nella $\Sigma_{0 \to F}$ non si hanno ritorni in fase elastica, e se il diagramma $\sigma\varepsilon$ del materiale è ideale (fig. 9-11), se cioè la componente σ_{ij} dal momento in cui appare la corrispondente ε_{ij}^* plastica si mantiene costante fino alla fine della trasformazione, il lavoro $\sigma_{ij\,F} \, \varepsilon_{ij}^* \, dV$ è realmente eseguito.

Per quel che riguarda il lavoro complementare relativo alle distorsioni $\overline{L}^*$, si può scrivere

$$\overline{L}^* = -2\,\overline{L} , \tag{37}$$

(*) Si ricordi che f_t è positiva se diretta nel verso positivo di F.

sempre nell'ipotesi di vincoli lisci, elasticità lineare e piccoli spostamenti. Infatti, applicando il principio dei lavori virtuali al sistema delle $\bar{\sigma}$ in equilibrio con forze applicate nulle, e cioè, con un insieme di reazioni vincolari tra loro in equilibrio, ed al sistema delle $\varepsilon_{ij}^* + \bar{\varepsilon}_{ij}$ congruente, si ha

$$\int_V dV \, \Sigma \, \bar{\sigma}_{ij} \, \bar{\varepsilon}_{ij} + \int_V dV \, \Sigma \, \bar{\sigma}_{ij} \, \varepsilon_{ij}^* = \Sigma \, R_j \bar{s}_j^* = 0 \ ; \qquad \text{(q)}$$

ed infatti la sommatoria è comunque nulla, perchè, come già detto innanzi, se il vincolo cede anelasticamente, il termine corrispondente del lavoro si ritrova nel secondo integrale; se cede elasticamente, tale elasticità può inglobarsi nella struttura. Dalla (q), valida per vincoli lisci e piccoli spostamenti, e dalla (8-29), valida per elasticità lineare, si trae la (8-37).

Si noti che se la struttura è monodimensionale, e le ε_{ij}^* sono delle distorsioni di Volterra concentrate D_h, cui corrispondono delle caratteristiche C_h della sollecitazione, la (8-35) porge, tenuto conto delle convenzioni circa i segni delle D_h,

$$\bar{L}^* = - \, \Sigma_h \, C_h \, D_h$$

e quindi dalla (8-37) si ha

$$\bar{L} = \frac{1}{2} \, \Sigma_h \, C_h \, D_h \ . \qquad (38)$$

La (8-38) è il cosiddetto *teorema di Clapeyron relativo alle distorsioni.*

Se sulla struttura monodimensionale agiscono forze e distorsioni concentrate, dalla (8-36) si ha

$$\Sigma \, F_i \, \bar{s}_i^* + \Sigma \, C_{hF} \, D_h = 0 \ ; \qquad (39)$$

la (8-39) è un'altra formulazione del *secondo principio di reciprocità* (§ 8-10) e sta a base della costruzione delle *linee d'influenza delle caratteristiche della sollecitazione interna per forze viaggianti, e degli spostamenti per distorsioni viaggianti.*

12. Il teorema di Clapeyron.

Se si tratta con un sistema conservativo, per il calcolo del lavoro delle forze può scegliersi qualsiasi trasformazione, in particolare quella per cui si conservino inalterati i mutui rapporti (carico proporzionale).

Se, in più, sono valide le ipotesi a fondamento del principio di sovrapposizione, alla trasformazione

$$F'_i = k \, F_i$$

corrispondono gli spostamenti (fig. 8-9)

$$s'_i = k\, s_i \; .$$

Dalla (8-1) si ha così

$$L_e = \Sigma_i\, F_i\, s_i \int_o^1 k\, dk$$

e cioè

$$L_e = \frac{1}{2}\, \Sigma_i\, F_i\, s_i \; . \qquad (40)$$

La (8-40) assicura che il lavoro compiuto dalle forze esterne è la metà di quello che esse compirebbero se fossero presenti in tutto il loro

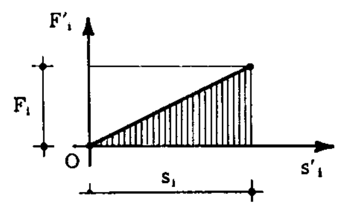


Fig. 8-9

valore fin dall'inizio della trasformazione; è questo il *teorema di Clapeyron.*

La (8-40) può anche scriversi, in presenza di forze di massa e superficiali,

$$L_e = \frac{1}{2} \left[\int_V (Xu + Yv + Zw)\, dV + \int_S (p_x u + p_y v + p_z w)\, dS \right] . \qquad (41)$$

Se il corpo è una struttura monodimensionale, caricato dalle distorsioni di Volterra concentrate D_h, l'espressione di L_e (lavoro esterno compiuto dalle distorsioni per effetto delle caratteristiche da esse stesse provocate) è del tutto analoga alla (8-1):

$$L'_e = \Sigma_h \int_o^{D_i} C'_h\, dD'_h \; . \qquad (42)$$

Dalla (8-42) si trae, nel caso che valgano le ipotesi a base del principio di sovrapposizione, e con ragionamento identico a quello fatto per ricavare la (8-40),

$$L_e = \frac{1}{2}\, \Sigma_h\, D_h\, C_h$$

e cioè la (8-38), esprimente il *teorema di Clapeyron relativo alle distorsioni.* La (8-38) è valida anche per distorsioni di Volterra distribuite.

13. Il teorema di Betti.

Siano valide le premesse del principio di sovrapposizione. Alle forze F_1 corrispondano gli spostamenti s_1, alle forze F_2 gli spostamenti s_2. Le F_2 provocano gli s_2 anche se agiscono sulla struttura già sottoposta alle F_1; lo stesso vale per le F_1.

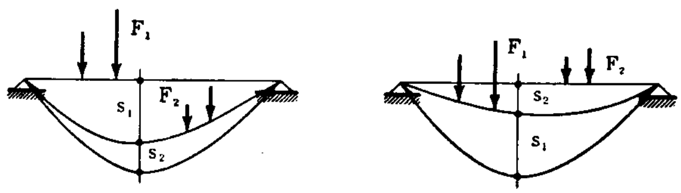


FIG. 8-10

Si facciano agire (fig. 8-10) prime le F_1 e poi le F_2; il lavoro L_e, pari all'energia di deformazione L, è fornito da

$$L_e = \frac{1}{2} \Sigma F_1 s_1 + \frac{1}{2} \Sigma F_2 s_2 + \Sigma F_1 s_2 \; ; \qquad \text{(r)}$$

infatti le F_1 ed F_2 compiono, per effetto degli spostamenti da esse stesse provocati, i lavori forniti dalla (8-40), mentre le F_1, agenti in tutto il loro valore durante l'applicazione delle F_2, compiono il lavoro $\Sigma F_1 s_2$.

Se agiscono prima le F_2 e poi le F_1, il lavoro è invece dato da

$$L_e = \frac{1}{2} \Sigma F_2 s_2 + \frac{1}{2} \Sigma F_1 s_1 + \Sigma F_2 s_1 \; . \qquad \text{(s)}$$

Le due espressioni (r) ed (s) sono uguali perchè il sistema è conservativo; quindi risulta

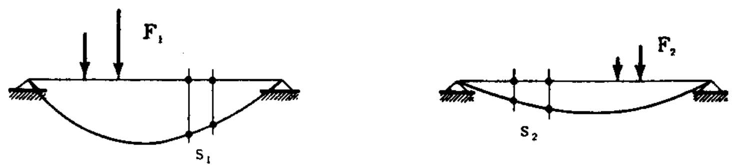
$$\Sigma F_1 s_2 = \Sigma F_2 s_1 \; . \qquad (43)$$

La $\Sigma F_1 s_2$ si chiama *lavoro mutuo* L_{12} delle forze F_1 per gli spostamenti prodotti dalle forze F_2; la $\Sigma F_2 s_1$ si chiama lavoro mutuo L_{21} delle forze F_2 per gli spostamenti prodotti dalle forze F_1. La (8-43) stabilisce l'uguaglianza dei due lavori mutui, e può anche scriversi

$$L_{12} = L_{21} \; . \qquad (44)$$

E' questo il *teorema di Betti*, noto pure come *primo principio di reciprocità*.

E' ovvio che l'uguaglianza (8-43) vale anche se i due sistemi di forze



$\Sigma F_1 s_2 = \Sigma F_2 s_1$

FIG. 8-11

F_1 ed F_2 non agiscono assieme sulla stessa struttura ma separatamente su due strutture identiche (fig. 8-11).

14. Il teorema di Volterra.

Si sia in presenza di due sistemi di distorsioni di Volterra concentrate D_1 e D_2 agenti su una struttura monodimensionale (fig. 8-12).

$\Sigma C_1 D_2 = \Sigma C_2 D_1$

FIG. 8-12

Se agisce prima D_1 e poi D_2 si ha il lavoro esterno L_e, coincidente con l'energia di deformazione $\overline{L}$,

$$\frac{1}{2} \Sigma C_1 D_1 + \frac{1}{2} \Sigma C_2 D_2 + \Sigma C_1 D_2 \; ; \tag{t}$$

e infatti nelle sezioni ove agiscono le D_2 sono già presenti in tutto il loro valore le caratteristiche C_1, che compiono il lavoro $\Sigma C_1 D_2$ per effetto delle D_2.

Se agisce prima D_2 e poi D_1 si ha invece il lavoro L_e fornito da

$$\frac{1}{2} \Sigma C_2 D_2 + \frac{1}{2} \Sigma C_1 D_1 + \Sigma C_2 D_1 \; . \tag{u}$$

Dall'uguaglianza tra (t) ed (u) si ha

$$\Sigma C_1 D_2 = \Sigma C_2 D_1 \; . \tag{45}$$

Definito lavoro mutuo L_{12} delle caratteristiche connesse con le distorsioni D_1 per le distorsioni D_2 la quantità $\Sigma C_1 D_2$, la (8-45) esprime l'uguaglianza dei lavori mutui L_{12} ed L_{21}; essa è l'espressione analitica del *teorema di Volterra,* o *terzo principio di reciprocità.*

15. La derivazione sintetica dei teoremi energetici.

Si riportano in questo paragrafo le deduzioni sintetiche dei teoremi energetici, la cui trattazione si rimanda ad un capitolo seguente; esse sono l'estensione alle strutture dei ragionamenti già fatti in tema di potenziale.

Dalla (8-1) si trae che, per sistemi conservativi, la forma

$$\Sigma F'_i \, ds'_i$$

è un differenziale esatto; il suo integrale curvilineo dal punto fisso di coordinate s_{io} al punto variabile di coordinate s_i è una funzione L delle s_i, e si ha

$$\frac{\partial L}{\partial s_i} = F_i \; . \tag{46}$$

La (8-46) è la traduzione analitica del *secondo teorema di Castigliano*: in un sistema costituito da materiale elastico, anche se non lineare, ed a vincoli lisci, ed in presenza di spostamenti anche non piccoli, la derivata dell'energia di deformazione, espressa in funzione degli spostamenti corrispondenti alle forze, rispetto ad una componente dello spostamento nel punto di applicazione di una forza, fornisce il valore della corrispondente componente della forza.

Con tutta legittimità si rigetta — sul piano del rigore — la formulazione (8-46) del secondo teorema di Castigliano. Mentre infatti l'introduzione del concetto di forza concentrata è stato finora un mezzo per scrivere delle formule più semplici, ma pienamente valide se si sostituiscono alle forze concentrate quelle superficiali e di massa, nella (8-46) questa sostituzione non è possibile per la natura stessa del teorema. Il *Frola* ha dimostrato che l'espressione corretta della (8-46) è, per le forze di massa,

$$\lim_{V \to 0} \frac{\delta L}{\delta u (P) \displaystyle\int_V dV} = X (P_o) \; ,$$

e per le forze superficiali

$$\lim_{S \to 0} \frac{\delta L}{\delta u (P) \displaystyle\int_S dS} = p_x (P_o) \; .$$

In rigore, infatti, non si può parlare di L come di un integrale curvilineo di una forma differenziale nelle s_i, come invece è lecito dire per il potenziale; infatti non è possibile caratterizzare la configurazione con un numero finito di parametri s_i, e cioè, sotto determinate forze concentrate $\mathbf{F}_i$, attraverso i valori degli spostamenti s_i corrispondenti a tali forze, poichè le forze concentrate sono un'astrazione. Nè, si noti, è possibile scrivere le equazioni ai limiti in presenza di forze concentrate.

Sul piano tecnico si accetta però il postulato del De Saint-Venant, per cui gli effetti di una forza superficiale p agente su una superficie S coincidono in tutti i punti della struttura con gli effetti della risultante **F** delle p dS agenti su S, purchè tali punti siano a conveniente distanza da S.

L'energia di deformazione L può quindi anch'essa intendersi come funzione di **F**, con una approssimazione tanto più elevata quanto più piccole sono le dimensioni di S in confronto alle dimensioni della struttura.

Se agiscono perciò delle forze molto elevate su zone molto ristrette, come accade spessissimo in corrispondenza di carichi accidentali, o di pesi propri trasmessi da pilastri, archi o altre strutture monodimensionali, è lecito sul piano tecnico considerare tali carichi concentrati; d'altronde non sarebbe possibile determinare la vera legge di variazione delle forze superficiali costituenti tali carichi.

Lo spostamento s corrispondente ad **F** dipende anch'esso dalle deformazioni di tutta la struttura, e quindi si può trascurare la variazione che in esso si induce sostituendo alla p dS la **F**.

Assegnati i punti di applicazione e le direzioni delle forze $\mathbf{F}_i$ (intese, come già precisato, come risultanti di forze superficiali agenti su aree limitate) queste ultime risultano funzioni monodrome dei corrispondenti spostamenti s_i. Si supponga infatti che ad un insieme di s_i corrispondano due insiemi di forze $\mathbf{F}_{1i}$ ed $\mathbf{F}_{2i}$. Si passa dalle $\mathbf{F}_{1i}$ alle $\mathbf{F}_{2i}$ ($\Sigma_{1\to 2}$) applicando le forze $\Delta\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{2i} - \mathbf{F}_{1i}$, e dalle $\mathbf{F}_{2i}$ alle $\mathbf{F}_{1i}$ ($\Sigma_{2\to 1}$) applicando le forze $-\Delta\mathbf{F}_i$. Poichè il sistema è conservativo, e gli s_i hanno gli stessi valori iniziale e finale, nella $\Sigma_{1\to 2}$ le $\Delta\mathbf{F}_i$ compiono (8-13) un lavoro L_e uguale e contrario a quello compiuto dalle $-\Delta\mathbf{F}_i$ nella $\Sigma_{2\to 1}$, pari alle variazioni dell'energia di deformazione $\pm\Delta L$.

Ma poichè il lavoro compiuto da un gruppo di forze deve essere positivo (§ 8-7), si giunge ad un assurdo, e tale è anche l'ipotesi fatta in partenza. Quindi all'insieme s_i non può corrispondere che un solo insieme di forze $\mathbf{F}_i$. E' questo un altro aspetto del *secondo principio di Kirchhoff*, enunciato già in questo capitolo sotto altra forma.

L'espressione

$$\Sigma\,\mathbf{F}_i\,ds_i$$

che compare sotto integrale nella (8-1) può essere considerata perciò come una forma differenziale nelle variabili indipendenti (in numero finito) s_i, e, se tale forma è integrabile, L_e (e ΔL) può essere considerata funzione uniforme delle s_i.

Per le proprietà dei differenziali esatti deve essere

$$\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial s_h} = \frac{\partial \mathbf{F}_h}{\partial s_i}\,. \tag{47}$$

La (8-47), valida sotto la sola ipotesi di elasticità, anche non lineare, e di vincoli lisci, assicura che se, con riferimento alla configurazione finale, una variazione ds del solo spostamento in *h* (fermi restando gli altri spostamenti s_i) è connessa con una variazione dF_i della forza in i (variano ovviamente anche le altre forze) un'identica variazione ds del solo spostamento in i è connessa con una variazione dF_h della forza in h pari a dF_i.

E' questo il *secondo teorema di Maxwell*, che acquista particolare rilievo se le F sono reazioni vincolari e le s i relativi cedimenti anelastici.

Si faccia l'ipotesi di elasticità lineare e di piccoli spostamenti, oltre quella di vincoli lisci. La (8-40) assicura che L è funzione quadratica delle forze F_i, e funzione quadratica degli spostamenti s_i.

E' perciò (8-m)

$$\Sigma \frac{\partial L}{\partial F_i} F_i = \Sigma F_i s_i$$

da cui si trae

$$\frac{\partial L}{\partial F_i} = s_i \ . \tag{48}$$

E' questo il *primo teorema di Castigliano*: nella ipotesi di validità del principio di sovrapposizione, la derivata della energia di deformazione rispetto ad una forza concentrata è lo spostamento corrispondente a tale forza.

Nella stessa ipotesi di validità del principio di sovrapposizione, si ha

$$\begin{aligned} F_i &= \Sigma_h b_{ih} s_h \\ s_i &= \Sigma_h a_{ih} F_h \ . \end{aligned} \tag{49}$$

Per la (8-47) risulta

$$b_{ih} = b_{hi} \tag{50}$$

e cioè la matrice delle b_{ih} è simmetrica rispetto alla diagonale principale. E' pure perciò simmetrica la matrice inversa, e cioè

$$a_{ih} = a_{hi} \tag{51}$$

La (8-51) è il *primo teorema di Maxwell*: se è valido il principio di sovrapposizione, lo spostamento in i corrispondente ad una forza F_i e provocato da una forza F_h unitaria in h, è uguale allo spostamento in h corrispondente ad F_h e provocato da una forza F_i unitaria in i. Questo teorema, che è anche conseguenza diretta di quello di Betti, è alla base del tracciamento delle linee d'influenza degli spostamenti per forze viaggianti.

Dalle (8-49) si ha

$$L = \frac{1}{2} \Sigma F_i s_i = \frac{1}{2} \Sigma b_{ih} s_i s_h = \frac{1}{2} \Sigma a_{ih} F_i F_h \qquad (v)$$

da cui

$$\frac{\partial^2 L}{\partial F_i \partial F_h} = \frac{1}{2} (a_{ih} + a_{hi}) = a_{ih}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial s_i \partial s_h} = \frac{1}{2} (b_{ih} + b_{hi}) = b_{ih} \ . \qquad (52)$$

Gli a_{ih} sono i *coefficienti di influenza degli spostamenti,* i b_{ih} i *coefficienti di influenza delle forze.*

Una struttura monodimensionale sia soggetta a distorsioni D_h concentrate; la (8-42) permette di asserire che, per sistemi conservativi, la

$$\Sigma C'_h dD'_h \qquad (z)$$

è un differenziale esatto; il suo integrale curvilineo esteso da un punto fisso al punto variabile di coordinate D_h è una funzione L delle D_h, e può scriversi

$$\frac{\partial L}{\partial D_h} = C_h \ . \qquad (53)$$

La (8-53), *secondo teorema di Castigliano relativo alle distorsioni,* si enuncia: in un sistema costituito da materiale elastico, anche se non linearmente, ed a vincoli lisci, ed in presenza di spostamenti anche non piccoli, la derivata dell'energia di deformazione, espressa in funzione delle distorsioni, rispetto ad una distorsione, fornisce il valore della corrispondente caratteristica nella sezione dove la distorsione è applicata.

Perchè la (z) possa definirsi forma differenziale occorre che le C_h siano funzioni ad un sol valore delle D_h. Ciò si verifica. Infatti si faccia l'ipotesi che alle stesse distorsioni D_h corrispondano due sistemi di caratteristiche C_{1h} e C_{2h} nelle sezioni di applicazione delle distorsioni stesse. Esiste una trasformazione $\Sigma_{1\to 2}$ che porta le D_h agli stessi valori D_h, e le C_{1h} alle C_{2h}; ed esiste l'analoga $\Sigma_{2\to 1}$ che porta le C_{2h} alle C_{1h}. Il lavoro L_e nella $\Sigma_{1\to 2}$ è uguale e contrario al lavoro svolto nella $\Sigma_{2\to 1}$, poichè il sistema è conservativo, e pari alla variazione di energia elastica $\pm \Delta L$, poichè le D_h hanno gli stessi valori iniziale e finale.

Il lavoro L_e nella $\Sigma_{1\to 2}$ è compiuto dalle sole $\Delta C = C_2 - C_1$, e nella $\Sigma_{2\to 1}$ dalle sole $-\Delta C$, perchè alla fine le D_h riattingono gli stessi valori. Poichè, per gli stessi motivi invocati al § 8-7, il lavoro compiuto dalle caratteristiche dovute ad un gruppo di distorsioni per effetto delle distorsioni stesse, sia pure in presenza di altre distorsioni, deve essere comunque positivo, si perviene ad un assurdo. Quindi alle D_h non può corrispondere che un solo insieme di caratteristiche C_h. E' questo il *secondo principio di Kirchhoff relativo alle distorsioni.*

Per le proprietà dei differenziali esatti deve essere

$$\frac{\partial C_i}{\partial D_h} = \frac{\partial C_h}{\partial D_i} \, . \tag{54}$$

La (8-54), *secondo teorema di Maxwell relativo alle distorsioni,* si enuncia:

sotto la sola ipotesi di elasticità anche non lineare, e di vincoli lisci, e con riferimento alla configurazione finale, se una variazione dD della distorsione D_h in h provoca una variazione dC_i della caratteristica C_i in i corrispondente a D_i, la stessa variazione dD in i della distorsione D_i provoca in h una variazione dC_h, della caratteristica C_h corrispondente a D_h, pari a dC_i.

Si faccia ora l'ipotesi di elasticità lineare e di piccoli spostamenti, oltre quella di vincoli lisci. La (8-38) assicura che L è funzione quadratica delle D_i, e delle C_i.

Perciò risulta

$$\Sigma \frac{\partial L}{\partial C_h} C_h = \Sigma \, C_h \, D_h$$

da cui si trae

$$\frac{\partial L}{\partial C_h} = D_h \, . \tag{55}$$

La (8-55), *primo teorema di Castigliano relativo alle distorsioni,* assicura che, nella ipotesi di validità del principio di sovrapposizione, la derivata dell'energia di deformazione rispetto alla caratteristica corrispondente ad una distorsione è la distorsione stessa.

Nella stessa ipotesi di validità del principio di sovrapposizione si ha

$$\begin{aligned} C_i &= \Sigma_h \, d_{ih} \, D_h \\ D_i &= \Sigma_h \, c_{ih} \, C_h \, . \end{aligned} \tag{56}$$

Per la (8-54) risulta

$$d_{ih} = d_{hi} \tag{57}$$

da cui

$$c_{ih} = c_{hi} \, . \tag{58}$$

La (8-58) è il *primo teorema di Maxwell relativo alle distorsioni*: se è valido il principio di sovrapposizione, la distorsione D_i in i che provoca in h una caratteristica C_h unitaria è uguale alla distorsione D_h in h corrispondente a C_h che provoca in i una caratteristica C_i unitaria corrispondente alla distorsione D_i.

Nella stessa ipotesi di validità del principio di sovrapposizione il secondo teorema di Maxwell per le distorsioni assume l'aspetto particolare espresso dalla (8-57): la caratteristica C_i provocata in i dalla distorsione D_h unitaria agente in h è uguale alla caratteristica C_h corrispondente a D_h e provocata in h dalla distorsione D_i unitaria corrispondente a C_i e agente in i.

Questo teorema, che è pure conseguenza diretta di quello di Volterra, è alla base del tracciamento delle linee d'influenza delle caratteristiche per distorsioni viaggianti.

Dalle (8-56) si ha

$$L = \frac{1}{2} \Sigma C_i D_i = \frac{1}{2} \Sigma d_{ih} D_i D_h = \frac{1}{2} \Sigma c_{ih} C_i C_h$$

da cui si trae

$$\frac{\partial^2 L}{\partial C_i \partial C_h} = c_{ih}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial D_i \partial D_h} = d_{ih} \; ; \tag{59}$$

i c_{ih} sono i *coefficienti di influenza relativi alle distorsioni,* i d_{ih} i *coefficienti di influenza relativi alle caratteristiche.*

16. Variazione dell'energia di deformazione.

Si vuole l'espressione della variazione della funzione L quando il corpo passa dalla configurazione di equilibrio u v w ad una configurazione *variata* prossima alla prima e definita dalle componenti dello spostamento $u + \delta u$, $v + \delta v$, $w + \delta w$.

Si parte dall'espressione di L in funzione delle componenti di deformazione attraverso il potenziale elastico

$$L = \int_V \varphi\,(\varepsilon_x \dots \gamma_{yz} \dots)\, dV \; .$$

Può porsi così, limitandosi ai termini del 2° ordine nelle derivate prime di $\delta u\, \delta v\, \delta w$.

$$L + dL = \int_V \varphi\, dV + \int_V \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x} \delta\varepsilon_x + \dots \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}} \delta\gamma_{yz} + \dots \right) dV +$$

$$+ \int_V \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_x^2} \delta\varepsilon_x^2 + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma_{yz}^2} \delta\gamma_{yz}^2 + \dots + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_y} \delta\varepsilon_x\, \delta\varepsilon_y + \dots \right) dV \,. \tag{a'}$$

L'ultimo integrale della (a') non è altro (n) che l'$\int_V \varphi\, dV$ calcolato per i valori $\delta\varepsilon_x \dots\ \delta\gamma_{yz} \dots$ invece che per i valori $\varepsilon_x \dots\ \gamma_{yz} \dots$; esso si indica con il simbolo W:

$$W = \int_V \left[G\, (\delta\varepsilon_x^2 + \delta\varepsilon_y^2 + \delta\varepsilon_z^2) + \lambda\, \frac{(\delta\varepsilon_x + \delta\varepsilon_y + \delta\varepsilon_z)^2}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{G}{2}\, (\delta\gamma_{xy}^2 + \delta\gamma_{yz}^2 + \delta\gamma_{zx}^2) \right] dV \,. \tag{b'}$$

Può perciò scriversi

$$L + \delta_1 L + \delta_2 L = \int_V \varphi\, dV + \int_V (\sigma_x\, \delta\varepsilon_x^{(1)} + \dots + \tau_{yz}\, \delta\gamma_{yz}^{(1)} + \dots)\, dV +$$

$$+ \int_V (\sigma_x\, \delta\varepsilon_x^{(2)} + \dots + \tau_{yz}\, \delta\gamma_{yz}^{(2)} + \dots)\, dV + W \,,$$

da cui

$$\delta_1 L = \int_V (\sigma_x\, \delta\varepsilon_x^{(1)} + \dots + \tau_{yz}\, \delta\gamma_{yz}^{(1)} + \dots)\, dV$$

$$\delta_2 L = \int_V (\sigma_x\, \delta\varepsilon_x^{(2)} + \dots + \tau_{yz}\, \delta\gamma_{yz}^{(2)} + \dots)\, dV + W \,. \tag{60}$$

La (a') è valida anche per materiali ad elasticità non lineare. La (8-60) è condizionata all'essere φ una forma quadratica omogenea, e cioè all'elasticità lineare; se il corpo è anche isotropo, la W si scrive come nella (b'). Inoltre le (a'), (b') e (8-60) sono valide anche se le u v w non sono piccole nel senso noto.

La W è essenzialmente positiva, poichè è l'energia di deformazione inerente agli spostamenti $\delta u\, \delta v\, \delta w$; perciò, se si trascurano le componenti del secondo ordine della deformazione, è $\delta_2 L > 0$.