

CAPITOLO II

ANALISI DELLO STATO TENSIONALE

1. Definizione di tensione. Componenti cartesiane e speciali della tensione.

Le forze agenti su un corpo si distinguono in *esterne* ed *interne*; le prime a loro volta sono forze di *massa*, dipendenti dalla massa del corpo (per es. il peso proprio, la forza centrifuga, le forze di accelerazione in genere) e forze *superficiali*, derivanti dal contatto con altri corpi. Le forze di massa si riferiscono di solito all'unità di volume; se è ΔV il volume dell'intorno di un generico punto A del corpo e $\Delta \bar{F}$ la forza di massa ad esso relativa, si definisce *forza di massa \bar{M} relativa all'unità di volume* nel punto A il limite

$$\bar{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{F}}{\Delta V} . \quad (1)$$

Il riferimento è cartesiano, in genere ortogonale, ed unico per tutto il corpo. Le componenti del vettore \bar{M} si indicano con le lettere X Y Z.

Le forze superficiali si riferiscono all'unità di superficie; se è ΔS l'area di un elemento di superficie appartenente all'intorno di un punto A della superficie del corpo, e $\Delta \bar{F}$ la forza che su esso agisce, si definisce *forza superficiale \bar{p} relativa all'unità di superficie* nel punto A il limite

$$\bar{p} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{F}}{\Delta S} . \quad (2)$$

Le componenti di \bar{p} si indicano con $p_x p_y p_z$. Le dimensioni fisiche di X Y Z sono $[Ft^{-3}]$, quelle di $p_x p_y p_z$ sono $[Ft^{-2}]$.

Si è a volte in presenza di forze superficiali distribuite lungo una linea s ; in questo caso si riferiscono le forze all'unità di lunghezza, e si definisce *forza superficiale \bar{q} relativa all'unità di lunghezza* il limite

$$\bar{q} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{F}}{\Delta s} . \quad (3)$$

Le componenti cartesiane di \bar{q} sono q_x, q_y, q_z , e le loro dimensioni sono $[F\ell^{-1}]$.

Le componenti di \bar{M} , di \bar{p} e di \bar{q} sono funzioni delle coordinate x, y, z del punto; con riferimento ad un volume finito V , ad una superficie finita S , o ad un segmento di curva finito s , si hanno le seguenti espressioni delle componenti cartesiane delle forze esterne su essi agenti e dei momenti delle stesse rispetto ai tre assi coordinati:

$$\begin{aligned}
 F_x &= \int_V X \, dV & F_y &= \int_V Y \, dV & F_z &= \int_V Z \, dV \\
 F_x &= \int_S p_x \, dS & F_y &= \int_S p_y \, dS & F_z &= \int_S p_z \, dS \\
 F_x &= \int_s q_x \, ds & F_y &= \int_s q_y \, ds & F_z &= \int_s q_z \, ds ; \\
 M_x &= \int_V (-Yz + Zy) \, dV & M_y &= \int_V (-Zx + Xz) \, dV & M_z &= \int_V (-Xy + Yx) \, dV \\
 M_x &= \int_S (-p_y z + p_z y) \, dS & M_y &= \int_S (-p_z x + p_x z) \, dS & M_z &= \int_S (-p_x y + p_y x) \, dS \\
 M_x &= \int_s (-q_y z + q_z y) \, ds & M_y &= \int_s (-q_z x + q_x z) \, ds & M_z &= \int_s (-q_x y + q_y x) \, ds ;
 \end{aligned} \tag{4}$$

i momenti sono considerati positivi se nei versi $x \rightarrow y$, $y \rightarrow z$, $z \rightarrow x$.

Si perviene alle forze concentrate se, come si osserva dalle (2-4), le p_x, p_y, p_z tendono all' ∞ e dS a zero, mantenendosi finito il loro prodotto. Tale caso però non si verifica in realtà, perchè una forza superficiale nasce dal contatto tra due corpi, e, per quanto piccola sia la superficie del contatto, essa non potrà mai ridursi ad un punto, altro non fosse per la deformabilità dei materiali. In tal senso sono una astrazione anche le forze q .

Salvo esplicito avviso, si tratterà sempre con forze esterne continue, derivabili, e con derivata prima continua.

Le forze interne si esercitano tra le particelle in cui può comunque idealmente scomporsi il corpo, e ad esse è affidata la conservazione della continuità del corpo stesso; la conoscenza delle forze interne, o in altre parole dello stato tensionale della struttura, permette di giudicare della sicurezza più o meno elevata con cui la struttura sopporta le forze esterne ad essa applicate.

Si consideri un corpo privo di vincoli soggetto ad un insieme di forze

esterne F_i necessariamente in equilibrio (fig. 2-1) e si effettui una sezione m-m ideale che divida il corpo in due parti 1 e 2. La parte 2 si rimuova;

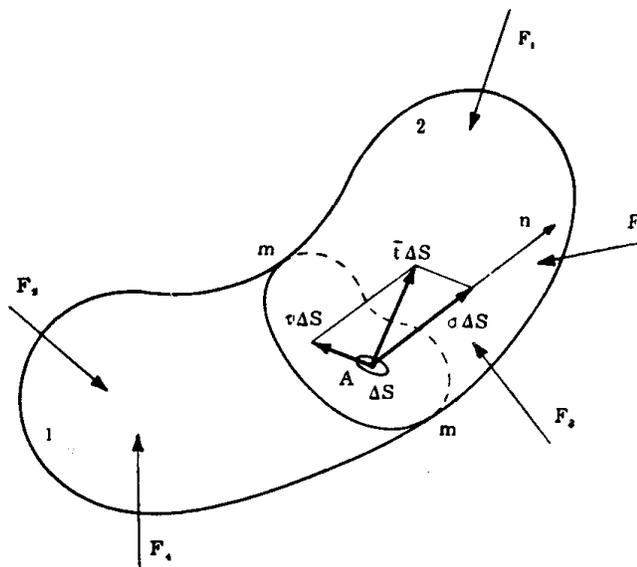


FIG. 2-1

la parte 1 rimane in equilibrio, e il suo stato di deformazione e di sollecitazione non varia rispetto a quello che in essa si verificava prima di aver effettuato il taglio, se sulla superficie S del taglio m-m si fanno agire le sollecitazioni che, nel corpo integro, la parte 2 esercitava sulla parte 1. In particolare, un elemento di area ΔS nell'intorno di un generico punto A è soggetto ad una forza elementare $\overline{\Delta F}$; il limite

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta F}}{\Delta S} = \overline{t} \quad (5)$$

è un vettore detto *tensione*, di dimensioni fisiche $[Fl^{-2}]$. Sia n la normale all'elemento ΔS , orientata verso l'esterno, cioè *positiva* dalla parte del corpo rimosso; le componenti di \overline{t} secondo la normale n e l'intersezione del piano tn con il piano di ΔS prendono il nome di *componente normale* σ e *tangenziale* τ della tensione \overline{t} . La σ è di *trazione* se diretta secondo il verso positivo di n , di *compressione* nel caso contrario. La \overline{t} è funzione non solo delle coordinate del punto A intorno al quale è scelto l'elemento ΔS , ma anche della giacitura di ΔS , e cioè dei coseni direttori della normale n alla superficie S nel punto A . Effettuando infatti la separazione in due parti con una superficie diversa da m-m, che passi sempre per A , ma presentando in esso una normale diversa da n , il valore e l'orientazione di \overline{t} cambiano. Per questa circostanza al vettore \overline{t} ed alle relative σ e τ si associa l'indice n , indicante la normale all'elemento di area su cui \overline{t}_n agisce; il vettore \overline{t}_n è definito attraverso tre funzioni (sca-

lari) di $x y z$, $t_{nx} t_{ny} t_{nz}$, componenti cartesiane di \bar{t}_n rispetto al riferimento triortogonale $O x y z$ (fig. 2-2).

Si consideri la retta n passante per il generico punto A (fig. 2-3) orientata secondo l'asse x ; l'elemento ΔS risulta parallelo al piano yz , e le componenti cartesiane della tensione \bar{t}_x coincidono con la componente normale σ_x e con le due componenti τ_{xy} e τ_{xz} , secondo gli assi y e z , della componente tangenziale τ_x . Analogamente si definiscono, considerando la n orientata secondo gli assi y e z , le componenti $\sigma_y \tau_{yx} \tau_{yz}$ e $\sigma_z \tau_{zx} \tau_{zy}$. Le $\sigma_i \tau_{jk}$ sono le cosiddette *componenti speciali di tensione* (scalari); esse sono nove funzioni delle coordinate $x y z$ del punto.

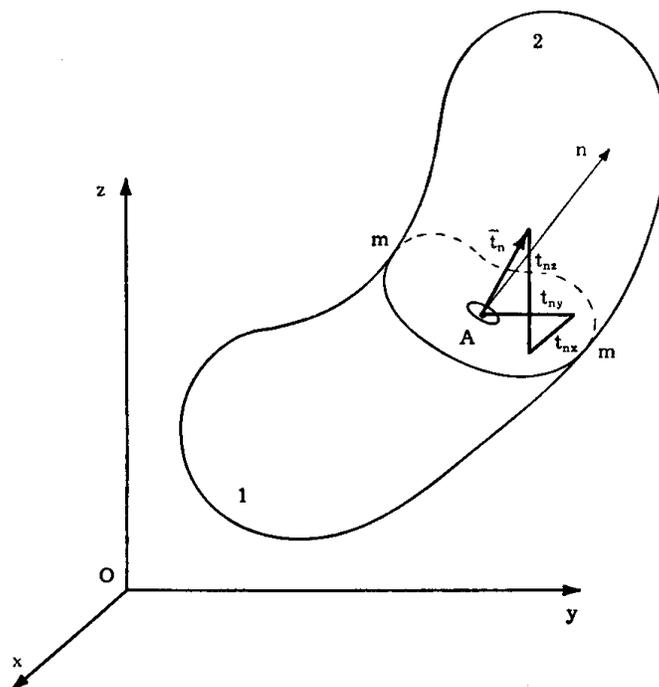


FIG. 2-2

Si prenderanno in considerazione soltanto insiemi di funzioni $\sigma_i \tau_{jk}$ in equilibrio con le forze esterne; un insieme $\sigma_i \tau_{jk}$ definito in tutta la regione occupata dal mezzo continuo si dice in equilibrio con le forze esterne solo se, data la configurazione del mezzo (comunque connesso) e le forze esterne su esso agenti, qualsiasi volume parziale estratto dal mezzo e considerato come rigido è in equilibrio; solo se, cioè, le forze di massa e superficiali (forze esterne e tensioni) agenti su tale volume parziale verificano le sei condizioni della statica

$$\begin{aligned} \Sigma F_i &= 0 \\ \Sigma M_i &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

dette di equilibrio alla traslazione ed alla rotazione secondo i tre assi coordinati.

Le tensioni rispettano il principio di azione e reazione; se infatti (fig. 2-1) si rimuove la parte 1, la distribuzione di tensioni che si deve applicare sulla superficie S del taglio perchè il regime di deformazione

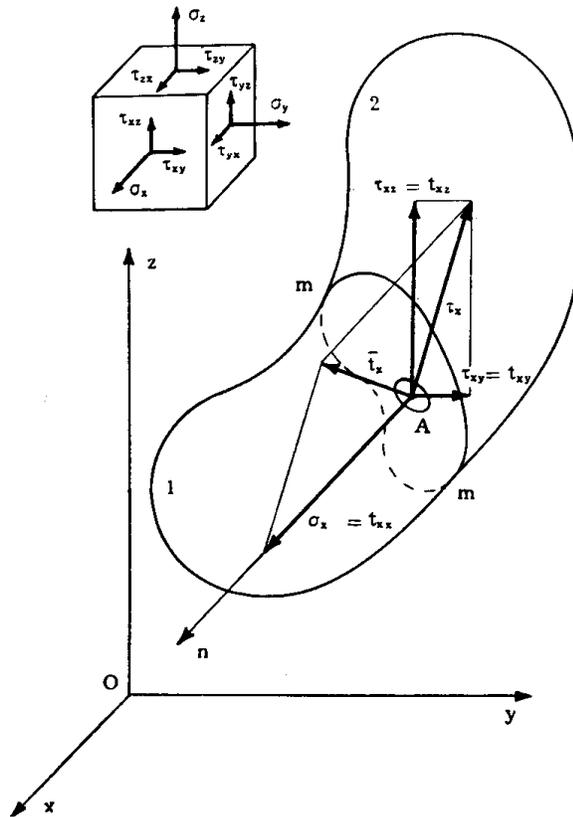


FIG. 2-3

e di sollecitazione della parte 2 non vari, è punto per punto uguale e contraria a quella prima ottenuta. Basti per assicurarsi di ciò considerare le condizioni di equilibrio di un cilindro elementare nell'intorno

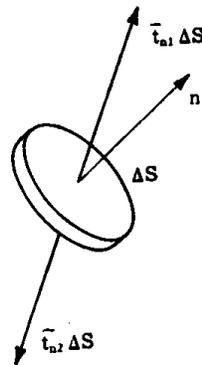


FIG. 2-4

di A, di base ΔS e di altezza trascurabile rispetto alle dimensioni della base (fig. 2-4). Le forze agenti sulla superficie laterale, che è trascurabile

rispetto a ΔS , sono per lo stesso motivo trascurabili rispetto alle forze $\bar{t}_{n1} \Delta S$ e $\bar{t}_{n2} \Delta S$ agenti sulle due basi, avendo chiamato \bar{t}_{n1} la tensione che 2 esercita su 1, e \bar{t}_{n2} la tensione che 1 esercita su 2; può perciò scriversi

$$\bar{t}_{n1} \Delta S + \bar{t}_{n2} \Delta S = 0$$

da cui

$$\bar{t}_{n2} = - \bar{t}_{n1} .$$

Convieni, in relazione ai segni da assegnare alle componenti speciali di tensione, adottare una convenzione che prescindia dalla scelta della parte rimossa; ciò si ottiene definendo $\sigma_i \tau_{ij} \tau_{ik}$ positive se, agenti sull'elemento la cui normale n (orientata positiva verso la parte rimossa) ha lo stesso verso dell'asse i , hanno il verso degli assi i, j, k (fig. 2-3).

Si avverte che tutto quanto esposto nel presente capitolo è relativo, in rigore, alla geometria del corpo già deformato dalle forze, o dalle altre cause deformanti ad esso applicate. Nello stesso spirito di approssimazione in cui si trascurano le derivate prime delle componenti dello spostamento rispetto all'unità, si possono trascurare le variazioni indotte dagli spostamenti nella posizione reciproca delle forze e del corpo, e quindi è lecito riferire l'analisi dello stato tensionale al corpo indeformato.

2. Equazioni ai limiti; equazioni di Cauchy.

Sia A un punto della superficie laterale, e π il piano tangente; si

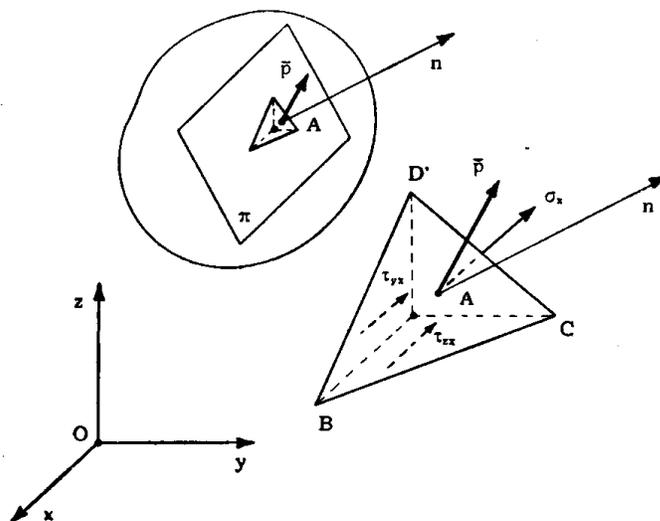


FIG. 2-5

consideri un intorno di A avente forma di tetraedro (fig. 2-5), in cui

una faccia BCD appartenga alla superficie laterale e quindi in prima approssimazione al piano π , e le altre tre facce siano parallele ai piani coordinati. La normale n alla superficie laterale in A sia orientata verso l'esterno, e siano $\alpha_x \alpha_y \alpha_z$ i suoi coseni direttori; siano inoltre $p_x p_y p_z$ le componenti della forza superficiale in A, $X Y Z$ le componenti della forza di massa in A, e $\sigma_i \tau_{jk}$ le componenti speciali di tensione in A.

Perchè le $\sigma_i \tau_{jk}$ siano in equilibrio con le forze esterne è necessario che tale tetraedro sia in equilibrio; quindi è necessario che le somme delle proiezioni secondo i tre assi delle forze su esso agenti siano nulle.

Con riferimento all'asse x , le forze che entrano in gioco sono soltanto quelle derivanti da $\sigma_x, \tau_{yx}, \tau_{zx}, p_x$ ed X . Il contributo della forza di massa è $(X + e_x) \frac{1}{3} h dS$, se dS è l'area della faccia BCD ed h la sua altezza; per la continuità della X , e_x è un infinitesimo, nel senso che tende a zero quando il tetraedro tende a confondersi con il punto A. Il contributo della forza superficiale è $(p + e_p) dS \cos \widehat{p x} = (p_x + e_{px}) dS$, dove, per la continuità della p , e_{px} è un infinitesimo. Il contributo delle tensioni è

$$\begin{aligned} & - (\sigma_x + e_1) dS \alpha_x \\ & - (\tau_{yx} + e_2) dS \alpha_y \\ & - (\tau_{zx} + e_3) dS \alpha_z ; \end{aligned} \tag{b}$$

infatti le aree delle facce normali agli assi $x y z$ sono fornite rispettivamente da $dS \alpha_x, dS \alpha_y, dS \alpha_z$.

Le (b) sono scritte nella sola ipotesi di continuità delle $\sigma_i \tau_{jk}$, e in tale ipotesi le $e_1 e_2 e_3$ sono anch'essi infinitesimi. Circa il segno delle (b) si osservi che se n positiva è ubicata nel triedro $+x + y + z$, come nella fig. 2-5, i tre coseni sono positivi, e le forze (per $\sigma_i \tau_{jk}$ positive) sono dirette contro gli assi $x y z$; se la n invece è, per es., ubicata nel triedro $-x + y + z$, risulta $\alpha_x < 0$, mentre la prima delle (b) risulta diretta secondo x , e quindi è ancora da adottarsi nella formula il segno negativo.

Si ha perciò in definitiva

$$\begin{aligned} & (X + e_x) \frac{1}{3} h dS + (p_x + e_{px}) dS - \\ & - (\sigma_x + e_1) dS \alpha_x - (\tau_{yx} + e_2) dS \alpha_y - (\tau_{zx} + e_3) dS \alpha_z = 0 . \end{aligned}$$

Dividendo per dS e facendo il limite per $dx dy dz$ tendenti a zero, si ottiene

$$p_x - \sigma_x \alpha_x - \tau_{yx} \alpha_y - \tau_{zx} \alpha_z = 0 .$$

In definitiva perciò è necessario — nella sola ipotesi di continuità delle forze superficiali e delle tensioni — che siano verificate in ogni punto della superficie laterale le tre relazioni finite

$$\begin{aligned}\sigma_x \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y + \tau_{zx} \alpha_z &= p_x \\ \tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y + \tau_{zy} \alpha_z &= p_y \\ \tau_{xz} \alpha_x + \tau_{yz} \alpha_y + \sigma_z \alpha_z &= p_z .\end{aligned}\tag{6}$$

Sono queste le *equazioni ai limiti* in termini di tensione. Se il ragionamento suddetto si esegue, senza alcuna variante, per un tetraedro elementare nell'interno del corpo, si hanno le tre relazioni

$$\begin{aligned}t_{nx} &= \sigma_x \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y + \tau_{zx} \alpha_z \\ t_{ny} &= \tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y + \tau_{zy} \alpha_z \\ t_{nz} &= \tau_{xz} \alpha_x + \tau_{yz} \alpha_y + \sigma_z \alpha_z ,\end{aligned}\tag{7}$$

che, nell'ipotesi di continuità, legano le componenti cartesiane a quelle speciali di tensione; data la linearità delle relazioni (2-7), da esse si ricavano in modo univoco le componenti cartesiane da quelle speciali. Si giustifica così il nome delle $\sigma_i \tau_{jk}$, che definiscono completamente lo stato tensionale nel punto. Le (2-7) sono dovute ad *A. L. Cauchy* (1822); da esse si ha conferma che, contrariamente a quanto accade per le componenti speciali, le componenti cartesiane cambiano di segno se cambia il verso della normale all'elemento.

3. Equazioni indefinite dell'equilibrio e proprietà di simmetria delle tensioni tangenziali.

Si è detto al § 2-1 che si prendono in considerazione solo insiemi di $\sigma_i \tau_{jk}$ in equilibrio con le forze esterne, e cioè rispettosi delle (a).

Ne derivano (§ 2-2) come condizioni necessarie le (2-6), che legano in ogni punto della superficie esterna le componenti speciali di tensione alle forze superficiali, e le (2-7), che fissano in modo univoco la tensione su un qualsiasi elemento piano nell'interno del corpo in funzione dei valori che le componenti speciali di tensione assumono in corrispondenza del centro dell'elemento. Le (2-6) e (2-7) si sono trattate nella sola ipotesi di continuità della $\sigma_i \tau_{jk}$. Se poi in tutta la regione occupata dal mezzo le $\sigma_i \tau_{jk}$ sono ad un sol valore e continue, ed alcune delle loro derivate prime — che saranno presto precisate — esistono e sono continue, dalle (a)

derivano altre condizioni necessarie che, con le (2-6) e (2-7), sono nel complesso anche sufficienti per il rispetto delle (a) stesse.

Sia V una qualsiasi parte del mezzo, comunque connessa, limitata da una o più superfici chiuse e finite, indicate complessivamente con S ; S può pure parzialmente o totalmente appartenere alla superficie laterale.

Se un insieme $\sigma_i \tau_{jk}$ è in equilibrio con le forze esterne, le (a) sono valide; la prima di esse si traduce nell'altra

$$\int_V X dV + \int_S t_{nx} dS = 0 ; \quad (c)$$

alla t_{nx} va sostituita p_x in quelle zone di S che appartengono alla superficie laterale. Per le (2-6) e (2-7) la (c) si scrive

$$\int_V X dV + \int_S (\sigma_x \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y + \tau_{zx} \alpha_z) dS = 0 .$$

Nelle ipotesi fatte circa le $\sigma_i \tau_{jk}$, la formula di Gauss generalizzata permette di scrivere la (c) come segue

$$\int_V \left(X + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dV = 0 ; \quad (d)$$

le derivate prime che devono esistere ed essere continue sono quelle che compaiono nella (d) ed analoghe.

Poichè per ogni regione V appartenente al mezzo deve essere valida la (c), e quindi la (d), deve essere anche in ogni punto del mezzo

$$X + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 ; \quad (e)$$

infatti, per la continuità delle $\sigma_i \tau_{jk}$, se in un punto il primo termine della (e) fosse diverso da zero, per esempio positivo, sarebbe positivo certamente in tutta una regione, per piccola che sia, vicina al punto, e per quella regione la (d) e quindi la (c) non sarebbero più valide.

Quindi il verificarsi in ogni punto delle tre equazioni differenziali

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 , \end{aligned} \quad (8)$$

dette *equazioni indefinite dell'equilibrio*, è condizione necessaria di equilibrio.

Deve anche essere valida la quarta delle (a), relativa ai momenti intorno all'asse x ; essa si scrive:

$$\int_V (-Yz + Zy) dV + \int_S (-t_{ny}z + t_{nz}y) = 0 ; \quad (f)$$

nella scrittura delle (f) si sono considerati positivi i versi $x \rightarrow y$, $y \rightarrow z$, $z \rightarrow x$.

Per le (2-6) e (2-7) la (f) si scrive

$$\int_V (-Yz + Zy) dV + \int_S [(-\tau_{xy}z + \tau_{xz}y)\alpha_x + (-\sigma_yz + \tau_{yz}y)\alpha_y + (-\tau_{zy}z + \sigma_z y)\alpha_z] dS = 0 . \quad (g)$$

La (g) si scrive, per la formula di Gauss,

$$\int_V \left[(-Yz + Zy) + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) y - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) z + \tau_{yz} - \tau_{zy} \right] dV = 0 . \quad (h)$$

Dalla (h) per le (2-8) si ha

$$\int_V (\tau_{yz} - \tau_{zy}) dV = 0 ; \quad (i)$$

se per ogni regione V appartenente al mezzo deve essere valida la (f), e cioè la (i), deve essere in ogni punto

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} . \quad (l)$$

Quindi anche il verificarsi in ogni punto delle tre relazioni seguenti

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} \end{aligned} \quad (9)$$

è condizione necessaria di equilibrio.

La proprietà (2-9) si chiama di *simmetria delle tensioni tangenziali*; per essa le nove componenti speciali di tensione

$$\begin{array}{ccc}
 \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\
 \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\
 \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z
 \end{array} \quad (10)$$

si riducono a sei, e nel quadro (1-10) c'è simmetria rispetto alla diagonale principale.

Poichè la terna $Oxyz$ è generica, può dirsi in genere che dati due qualsiasi elementi piani ortogonali le componenti della tensione tangenziale sui due piani prese secondo la normale allo spigolo comune devono essere uguali in valore assoluto e dirette ambedue verso lo spigolo, o in senso opposto.

Viceversa un insieme di $\sigma_i \tau_{jk}$ verifichi in ogni punto della frontiera del mezzo le (2-6), ed in ogni punto interno le (2-7), (2-8) e (2-9); per ogni regione estratta dal mezzo vale la (d) ed analoghe, e cioè la (c) ed analoghe; vale inoltre la (i) ed analoghe, e cioè la (f) ed analoghe. Quindi valgono le (a) per ogni regione estratta dal mezzo, e cioè le $\sigma_i \tau_{jk}$ sono in equilibrio con le forze esterne.

Riassumendo: data una configurazione del mezzo continuo comunque connesso, e, con riferimento a tale configurazione, le forze di massa e superficiali continue, un insieme di componenti di tensione $\sigma_i \tau_{jk}$ definite in ogni punto del mezzo è in equilibrio con le forze esterne se, e solo se, nell'ipotesi di continuità ed uniformità delle $\sigma_i \tau_{jk}$ e di esistenza e continuità delle derivate prime delle $\sigma_i \tau_{jk}$ che compaiono nelle (2-8), sono rispettate le equazioni ai limiti (2-6), le (2-7), le equazioni indefinite (2-8) e le (2-9). E cioè le (2-6), (2-7), (2-8) e (2-9) sono condizioni necessarie e, prese assieme, sufficienti per l'equilibrio.

Delle suddette relazioni in seguito si utilizzeranno però solo le (2-6) e (2-8); infatti le (2-7) non esprimono un legame nè tra le $\sigma_i \tau_{jk}$ nè tra queste e le forze esterne, e quindi operando solo sulle $\sigma_i \tau_{jk}$, come si farà, e non sulle componenti cartesiane, le (2-7) non entrano in gioco che in un secondo momento, se si vogliono conoscere le suddette componenti; d'altro canto le $\sigma_i \tau_{jk}$ sulle quali si opererà saranno sempre soddisfacenti le (2-9), ed assegnandole od ottenendole come sestuple di funzioni le (2-9) saranno implicitamente soddisfatte.

Si mostrerà subito che, come le (2-6) e (2-7), anche le (2-9) sono condizioni necessarie di equilibrio sotto la sola ipotesi di continuità delle forze esterne e delle $\sigma_i \tau_{jk}$.

La necessità delle (2-8) e (2-9) può essere dimostrata anche scrivendo le (a)

per il generico parallelepipedo elementare con gli spigoli paralleli agli assi coordinati.

Con riferimento all'equilibrio alla traslazione lungo l'asse x (fig. 2-6), le uniche

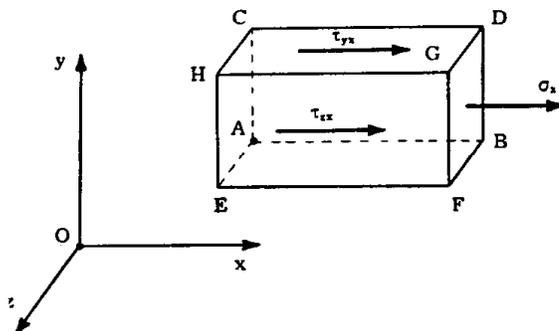


FIG. 2-6

forze che entrano in gioco sono quelle derivanti dalla X e dalle $\sigma_x \tau_{yx} \tau_{zx}$. Per la continuità si può supporre che sulla faccia ACEH agisca la forza

$$-(\sigma_x + e_1) dy dz$$

dove σ_x è il valore della σ_x in A ed e_1 un infinitesimo nel senso noto; sulla faccia BDFG agisce la forza

$$(\sigma_x + e_1 + e'_1) dy dz ;$$

sulle altre quattro facce agiscono le forze

$$\begin{aligned} & -(\tau_{yx} + e_2) dx dz \\ & (\tau_{yx} + e_2 + e'_2) dx dz \\ & -(\tau_{zx} + e_3) dx dy \\ & (\tau_{zx} + e_3 + e'_3) dx dy , \end{aligned}$$

e sulla massa la forza

$$(X + e_x) dx dy dz ;$$

i valori delle tensioni e delle forze di massa sono sempre quelli del punto A.

Se le $\sigma_i \tau_{jk}$ sono in equilibrio con le forze esterne, la somma delle forze adesso precisate deve essere nulla, e cioè deve essere

$$e'_1 dy dz + e'_2 dx dz + e'_3 dx dy + (X + e_x) dx dy dz = 0 ,$$

e dividendo per $dx dy dz$

$$\frac{e'_1}{dx} + \frac{e'_2}{dy} + \frac{e'_3}{dz} + X + e_x = 0 .$$

Facendo il limite per $dx dy dz$ tendenti a zero, si ha un'espressione indeterminata. Se però oltre all'ipotesi della continuità delle $\sigma_i \tau_{jk}$ si fa quella della esistenza e continuità delle derivate

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

le forze suddette possono scriversi

$$ACEH - (\sigma_x + e_1) dy dz$$

$$BDFG \left(\sigma_x + e_1 + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \frac{\partial e_1}{\partial x} dx \right) dy dz$$

$$CHDG - (\tau_{yx} + e_2) dx dz$$

$$AEBF \left(\tau_{yx} + e_2 + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy + \frac{\partial e_2}{\partial y} dy \right) dx dz$$

$$ABCD - (\tau_{zx} + e_3) dx dy$$

$$EHFG \left(\tau_{zx} + e_3 + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz + \frac{\partial e_3}{\partial z} dz \right) dx dy$$

dove anche le derivate sono quelle nel punto A.

L'equazione di equilibrio si scrive quindi

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial e_1}{\partial x} \right) dx dy dz + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial e_2}{\partial y} \right) dx dy dz + \\ & + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial e_3}{\partial z} \right) dx dy dz + (X + e_x) dx dy dz = 0 \end{aligned}$$

da cui, dividendo per $dx dy dz$ e facendo il limite per $dx dy dz$ tendenti a zero, si ottiene

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 . \quad (e)$$

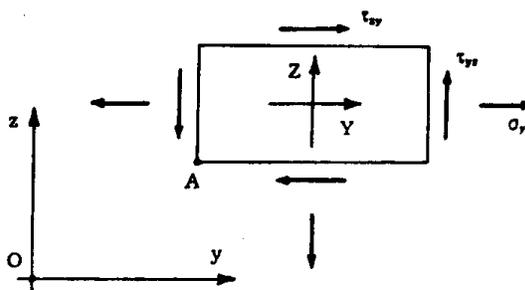


FIG. 2-7

Con riferimento all'equilibrio alla rotazione intorno all'asse x entrano in gioco (fig. 2-7) le forze relative alle $\sigma_y \sigma_z \tau_{yz} \tau_{zy}$ ed alle YZ .

Se le $\sigma_i \tau_{jk}$ sono in equilibrio con le forze esterne, la equazione di equilibrio alla rotazione si può scrivere rispetto a qualsiasi parallela all'asse x, poichè la risultante delle forze è nulla; scegliendo la parallela per A si ottiene, nella sola ipotesi di continuità delle componenti di tensione e delle forze di massa,

$$\begin{aligned} & - (e'_1 - e_1) dx dz \frac{dz}{2} + (e'_2 - e_2) dx dy \frac{dy}{2} + \\ & + (\tau_{yz} + e_3 + e'_3) dx dz dy - (\tau_{zy} + e_4 + e'_4) dx dy dz - \\ & - (Y + e_y) dx dy dz \frac{dz}{2} + (Z + e_z) dx dy dz \frac{dy}{2} = 0 \end{aligned}$$

da cui dividendo per $dx dy dz$ e facendo il limite per $dx dy dz$ tendenti a zero si ottiene

$$\tau_{yz} - \tau_{zy} = 0. \quad (l)$$

4. Espressione della componente normale in funzione delle componenti speciali.

La proiezione normale t_{nt} della \bar{t}_n su una generica retta l di coseni

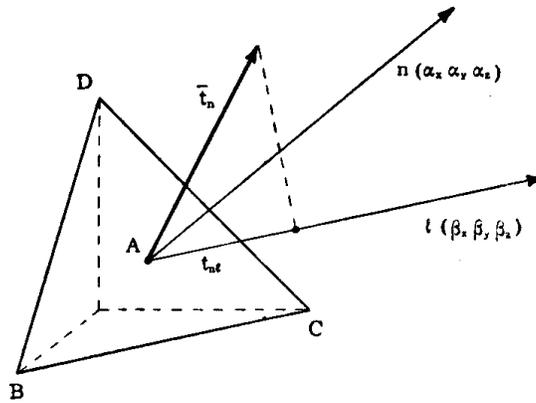


FIG. 2-8

direttori $\beta_x \beta_y \beta_z$ (fig. 2-8) è fornita da

$$t_{nt} = t_{nx} \beta_x + t_{ny} \beta_y + t_{nz} \beta_z$$

e, per le (2-7), nell'ipotesi quindi di continuità delle $\sigma_i \tau_{jk}$,

$$\begin{aligned} t_{nt} = & \sigma_x \alpha_x \beta_x + \sigma_y \alpha_y \beta_y + \sigma_z \alpha_z \beta_z + \\ & + \tau_{yz} (\alpha_y \beta_z + \alpha_z \beta_y) + \tau_{zx} (\alpha_z \beta_x + \alpha_x \beta_z) + \tau_{xy} (\alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x). \end{aligned} \quad (11)$$

Dalle (2-11) si trae

$$t_{nl} = t_{ln} \quad (12)$$

e cioè: la proiezione normale t_{nl} su una retta l della tensione \bar{t}_n agente su un elemento piano di normale n è uguale alla proiezione normale t_{ln} sulla retta n della tensione \bar{t}_l agente sull'elemento piano di normale l .

Le (2-9) sono un caso particolare della (2-12).

Dalle (2-11) si ottiene, per $l \equiv n$,

$$\sigma_n = \sigma_x \alpha_x^2 + \sigma_y \alpha_y^2 + \sigma_z \alpha_z^2 + 2\tau_{yz} \alpha_y \alpha_z + 2\tau_{zx} \alpha_z \alpha_x + 2\tau_{xy} \alpha_x \alpha_y ; \quad (13)$$

si può perciò dire che la componente normale di tensione su un qualsiasi elemento piano passante per un punto è funzione lineare omogenea delle componenti speciali di tensione nel punto, e funzione quadratica omogenea dei coseni direttori della normale all'elemento piano stesso.

5. Quadriche delle tensioni.

Si riporti su ogni semiretta n avente origine nel generico punto A un segmento AQ pari a

$$AQ = \frac{1}{\sqrt{|\sigma_n|}} \quad (m)$$

ove σ_n è la tensione normale sull'elemento piano passante per A e di normale n ; siano $\alpha_x \alpha_y \alpha_z$ i coseni direttori di questa; se il riferimento cartesiano ha origine nel punto A , le coordinate di Q sono

$$x = \alpha_x \cdot AQ \quad y = \alpha_y \cdot AQ \quad z = \alpha_z \cdot AQ ,$$

e sostituendo i valori di $\alpha_x \alpha_y \alpha_z$ nella (2-13) si ottiene l'equazione $f(x, y, z) = 0$ del luogo dei punti Q

$$\Psi = \sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tau_{yz} yz + 2\tau_{zx} zx + 2\tau_{xy} xy = \begin{cases} +1 & (\sigma_n > 0) \\ -1 & (\sigma_n < 0) \end{cases} \quad (14)$$

La (2-14) rappresenta due quadriche a centro, con centro in A ; il generico semidiametro AQ di queste quadriche fornisce, con l'inverso del suo quadrato, il valore assoluto della componente normale di tensione sull'elemento piano passante per A , e la cui normale contiene AQ . La quadrica $\Psi = +1$ è relativa alle componenti normali di trazione

($\sigma_n > 0$), la quadrica $\Psi = -1$ alle componenti normali di compressione ($\sigma_n < 0$).

I coseni direttori della normale n' alla (2-14) in Q sono proporzionali a

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 2\sigma_x x + 2\tau_{yx}y + 2\tau_{zx}z = 2AQ \left(\sigma_x \frac{x}{AQ} + \tau_{yx} \frac{y}{AQ} + \tau_{zx} \frac{z}{AQ} \right) = 2AQ t_{nx}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 2\tau_{xy}x + 2\sigma_y y + 2\tau_{zy}z = 2AQ \left(\tau_{xy} \frac{x}{AQ} + \sigma_y \frac{y}{AQ} + \tau_{zy} \frac{z}{AQ} \right) = 2AQ t_{ny}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 2\tau_{xz}x + 2\tau_{yz}y + 2\sigma_z z = 2AQ \left(\tau_{xz} \frac{x}{AQ} + \tau_{yz} \frac{y}{AQ} + \sigma_z \frac{z}{AQ} \right) = 2AQ t_{nz}$$

I coseni direttori della normale n' alla quadrica in Q sono perciò proporzionali alle componenti cartesiane della tensione \bar{t}_n sull'elemento piano di normale AQ ; ne deriva che la \bar{t}_n è diretta parallelamente alla n' .

La conoscenza delle due quadriche (2-14), dette *quadriche delle tensioni*, permette per quanto sopra di ottenere la tensione \bar{t}_n su un qualsiasi elemento piano per A : è sufficiente (fig. 2-9) condurre per A la

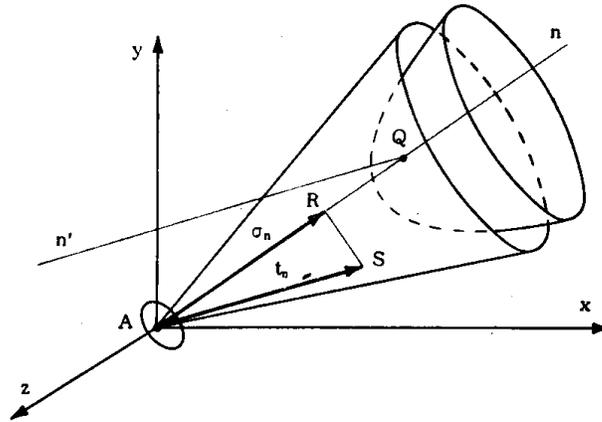


FIG. 2-9

normale n all'elemento, fino ad incontrare in Q la quadrica, e da Q la normale n' alla quadrica. L'inverso di AQ^2 fornisce σ_n , positiva se la quadrica è quella relativa all'equazione $\Psi = +1$, negativa in caso contrario. Poichè la \bar{t}_n è diretta secondo la parallela ad n' per A , è sufficiente riportare $AR = \sigma_n$, e da R il piano normale ad AR fino ad incontrare in S la parallela ad n' per A ; AS fornisce il vettore \bar{t}_n .

Gli assi delle quadriche $\Psi = \pm 1$ sono le normali $\xi \eta \zeta$ a tre elementi piani su cui la tensione \bar{t}_n è tutta normale; le tensioni $\sigma_\xi \sigma_\eta \sigma_\zeta$ corrispondenti sono le cosiddette *tensioni principali*, e gli assi $\xi \eta \zeta$ le dire-

zioni principali di tensione in A. Se le quadriche (2-14) non sono di rivoluzione, la terna $\xi \eta \zeta$ (triortogonale) è unica; essa varia da punto a punto. Con riferimento alla terna $\xi \eta \zeta$ la (2-14) si scrive

$$\Psi = \sigma_{\xi} \xi^2 + \sigma_{\eta} \eta^2 + \sigma_{\zeta} \zeta^2 = \pm 1 ; \quad (15)$$

se $\sigma_{\xi} \sigma_{\eta} \sigma_{\zeta}$ sono tutte positive, l'equazione $\Psi = +1$ rappresenta un ellissoide a punti reali, l'equazione $\Psi = -1$ un ellissoide a punti immaginari; se $\sigma_{\xi} \sigma_{\eta} \sigma_{\zeta}$ sono tutte negative, l'ellissoide reale corrisponde invece alla $\Psi = -1$. Se $\sigma_{\xi} \sigma_{\eta} \sigma_{\zeta}$ non sono tutte dello stesso segno, le (2-15) rappresentano un iperboloide ad una falda e un iperboloide a due falde.

L'equazione $\Psi = 0$ definisce il cono asintotico alle due quadriche (2-15); esso è reale se le quadriche sono tutte e due reali, immaginario nel caso contrario. Poichè in corrispondenza di questo cono (fig. 2-9) è $AQ = \infty$ e $\sigma_n = 0$, il cono asintotico è l'insieme delle normali agli elementi su cui la tensione è tutta tangenziale; esso prende nome di *cono delle componenti normali nulle*.

Se esso è reale divide lo spazio in due parti: tutte le rette per A giacenti in una di queste parti sono normali ad elementi compressi, tutte le rette giacenti nell'altra parte sono normali ad elementi tesi. Se esso è immaginario, tutti gli elementi piani per A sono tesi, o compressi.

E' immediato che le tre tensioni principali $\sigma_{\xi} \sigma_{\eta} \sigma_{\zeta}$ contengono la massima e la minima tra le componenti normali di tensione in A.

6. Ricerca delle direzioni principali di tensione e delle tensioni principali.

Sia p una delle tre direzioni principali per A; sull'elemento piano dS normale a p la t_p è diretta secondo p , e il suo valore coincide con

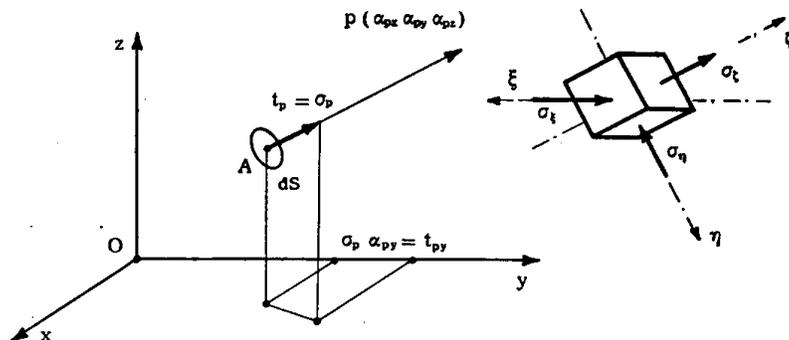


FIG. 2-10

quello della tensione principale σ_p corrispondente a p (fig. 2-10). Può scriversi perciò, per le (2-7),

$$\begin{aligned}
 \sigma_x \alpha_{px} + \tau_{yx} \alpha_{py} + \tau_{zx} \alpha_{pz} &= \sigma_p \alpha_{px} \\
 \tau_{xy} \alpha_{px} + \sigma_y \alpha_{py} + \tau_{zy} \alpha_{pz} &= \sigma_p \alpha_{py} \\
 \tau_{xz} \alpha_{px} + \tau_{yz} \alpha_{py} + \sigma_z \alpha_{pz} &= \sigma_p \alpha_{pz} .
 \end{aligned} \tag{n}$$

Il sistema (n) è di tre equazioni lineari algebriche omogenee nelle incognite $\alpha_{px} \alpha_{py} \alpha_{pz}$, e deve essere soddisfatto da valori non tutti nulli delle incognite; deve verificarsi quindi l'annullamento del determinante dei coefficienti

$$\begin{vmatrix}
 \sigma_x - \sigma_p & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\
 \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_p & \tau_{zy} \\
 \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_p
 \end{vmatrix} = 0 \tag{16}$$

La (2-16) è un'equazione del terzo grado in σ_p , del tipo secolare; le sue tre radici forniscono i valori di $\sigma_\xi \sigma_\eta \sigma_\zeta$. Sostituendo uno alla volta questi valori nelle (n), e tenendo conto della relazione

$$\alpha_{px}^2 + \alpha_{py}^2 + \alpha_{pz}^2 = 1 ,$$

si ottengono tre terne di soluzioni $\alpha_{px} \alpha_{py} \alpha_{pz}$, caratterizzanti le tre direzioni principali $\xi \eta \zeta$. Assumendo come assi di riferimento $\xi \eta \zeta$, la (2-16) diviene

$$\begin{vmatrix}
 \sigma_\xi - \sigma_p & 0 & 0 \\
 0 & \sigma_\eta - \sigma_p & 0 \\
 0 & 0 & \sigma_\zeta - \sigma_p
 \end{vmatrix} = 0 . \tag{o}$$

La (2-16) e la (o) devono fornire gli stessi valori per σ_p , e perciò i coefficienti dei termini omologhi delle due equazioni devono risultare proporzionali; poichè il coefficiente di σ_p^3 è in ambedue i casi uguale a -1 , i suddetti coefficienti devono risultare uguali. Si hanno così i tre *invarianti (lineare, quadratico e cubico) della tensione*

$$\begin{aligned}
 \sigma_\xi + \sigma_\eta + \sigma_\zeta &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\
 \sigma_\xi \sigma_\eta + \sigma_\eta \sigma_\zeta + \sigma_\zeta \sigma_\xi &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \\
 &\quad - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \\
 \sigma_\xi \sigma_\eta \sigma_\zeta &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + \\
 &\quad + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - (\sigma_x \tau_{yz}^2 + \sigma_y \tau_{zx}^2 + \sigma_z \tau_{xy}^2) .
 \end{aligned} \tag{17}$$

Si può anche scrivere

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_z & \tau_{zx} \\ \tau_{zx} & \sigma_x \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

L'invariante lineare si indica con la lettera T.

7. Stati piani di tensione.

Lo stato tensionale nell'intorno di un punto si definisce *piano* quando la tensione su qualsiasi elemento areale passante per il punto è contenuta in un piano, che prende nome di *piano delle tensioni*. Tale partico-

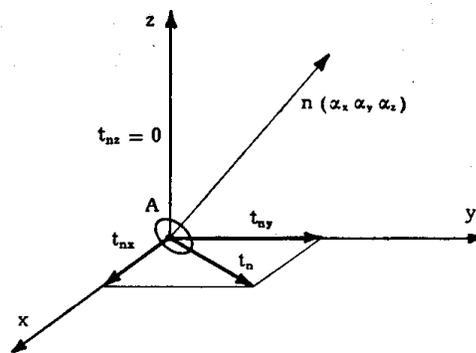


FIG. 2-11

larizzazione è molto importante, poichè molti problemi tecnici (problema di De Saint-Venant o della trave, problema delle lastre, etc.) si riconducono ad essa. Si è per esempio in presenza di uno stato tensionale piano quando delle sei componenti di tensione si annullano una σ , e le due τ nei cui indici è compreso l'indice della σ ; infatti se $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$, dalla terza delle (2-7) si ha

$$t_{nz} = \tau_{xz} \alpha_x + \tau_{yz} \alpha_y + \sigma_z \alpha_z = 0$$

per qualsiasi valore di $\alpha_x \alpha_y \alpha_z$; e cioè per qualsiasi elemento piano la \bar{t}_n è contenuta nel piano xy (fig. 2-11).

Se in corrispondenza di un punto A una tensione principale è nulla, per es. la σ_ζ (se cioè esiste una giacitura per A sulla quale non si esercitano tensioni nè normale nè tangenziale) lo stato tensionale in A è piano, e $\xi\eta$ è il piano delle tensioni. In fatti le (2-7), scritte in A con riferimento alla terna principale in A, porgono

$$\begin{aligned} t_{n\xi} &= \sigma_\xi \alpha_\xi \\ t_{n\eta} &= \sigma_\eta \alpha_\eta \\ t_{n\zeta} &= \sigma_\zeta \alpha_\zeta \end{aligned} \quad (18)$$

da cui risulta, per qualsiasi n , $t_{n\zeta} = 0$.

Si ha conferma di quanto sopra dalla (2-12), che porge, per qualsiasi n

$$\begin{aligned} t_{n\zeta} &= t_{\zeta n} \\ t_{\zeta n} &= 0. \end{aligned}$$

D'altro canto, se nell'intorno di A lo stato tensionale è piano, esiste un elemento areale contenente A sul quale non si esercita alcuna tensione. Questo elemento è proprio il piano delle tensioni π ; infatti su di esso per definizione, potrebbe tutto al più agire una tensione tangenziale, ma questa sarebbe accompagnata dalla simmetrica su un piano normale a π , e ciò è contrario alla definizione di stato tensionale piano. Anche della suddetta condizione si ha conferma dalla 2-12. Perciò l'esistenza di un piano su cui sia $\bar{t}_n = 0$ (o, altrimenti, la nullità di una delle tensioni principali in A) è condizione necessaria e sufficiente perchè lo stato tensionale in A sia piano. La suddetta condizione equivale all'altra

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = 0 \quad (19)$$

e cioè a che l'invariante cubico di tensione sia nullo; in tal caso, e solo in tal caso, infatti, il sistema (2-7) scritto per $t_{nx} = t_{ny} = t_{nz} = 0$ ammette una soluzione diversa da zero per le $\alpha_x \alpha_y \alpha_z$. Si noti che la condizione ora scritta coincide con la (2-16) ove si ponga in essa $\sigma_p = 0$; si osservi pure che la condizione in parola è invariante rispetto agli assi di riferimento, come deve essere perchè traduce un fatto fisico da essi indipendente.

Nelle lastre -- corpi a forma cilindrica con altezza in genere modesta rispetto alle dimensioni delle basi (fig. 2-12 e 2-13) e caricati sulla sola su-

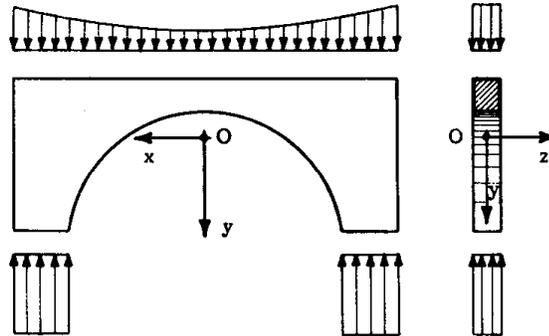


FIG. 2-12

perficie laterale con forze parallele alle basi — possono considerarsi stati tensionali in equilibrio con le forze esterne, che siano in ogni punto piani,

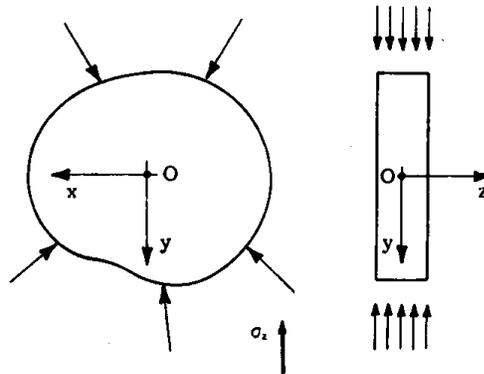


FIG. 2-13

con piano delle tensioni parallelo alle basi. Assunto infatti un riferimento con piano xy parallelo alle basi, e posto che le forze di massa siano dirette nel piano xy , un qualsiasi stato tensionale che ovunque rispetti le relazioni

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

e le equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0, \end{aligned} \tag{20}$$

e sulla superficie laterale del cilindro le equazioni

$$\begin{aligned}\sigma_x \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y &= p_x \\ \tau_{yx} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y &= p_y\end{aligned}\quad (21)$$

è in equilibrio con le forze esterne perchè rispetta le (2-6) e le (2-8).

Le condizioni (2-20) e (2-21) e la $Z=0$ sono anche necessarie perchè uno stato tensionale indipendente da z e soddisfacente alle relazioni $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$, sia in equilibrio, sulla lastra come prima definita, con le forze esterne.

Si vedrà che, in rigore, stati siffatti non sono in realtà possibili che in casi molto particolari, ma ad essi ci si avvicina per lastre di piccolo spessore.

Assunto un riferimento xy contenuto nel piano delle tensioni, l'equazione delle quadriche di tensione diviene

$$\Psi = \sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + 2 \tau_{xy} xy = \pm 1, \quad (22)$$

e rappresenta due cilindri quadrici, con generatrici normali al piano xy , le cui direttrici sono le coniche (22) nel piano xy .

Il cono asintotico si specializza in due piani, normali al piano xy , le cui intersezioni con questo ultimo sono fornite dall'equazione

$$\sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + 2 \tau_{xy} xy = 0 \quad (p)$$

e rappresentano gli asintoti delle coniche (2-22). Se

$$\Delta = \tau_{xy}^2 - \sigma_x \sigma_y > 0$$

gli asintoti sono reali (fig. 2-14), e le (2-22) rappresentano due cilindri

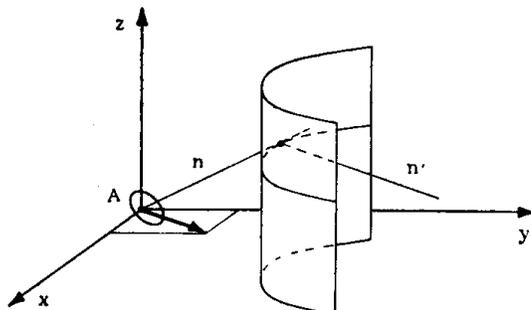


FIG. 2-14

a direttrice iperbolica; se $\Delta < 0$, le (2-22) rappresentano un cilindro a direttrice ellittica a punti reali, e un cilindro immaginario. Delle tre di-

reazioni principali due, ξ ed η , sono contenute in xy ; delle tre tensioni principali solo due sono diverse da zero, σ_ξ e σ_η , la terza è nulla. Con riferimento agli assi principali le (2-22) si scrivono

$$\sigma_\xi \xi^2 + \sigma_\eta \eta^2 = \pm 1 \quad (q)$$

e rappresentano una ellisse reale ed una immaginaria se σ_ξ e σ_η sono dello

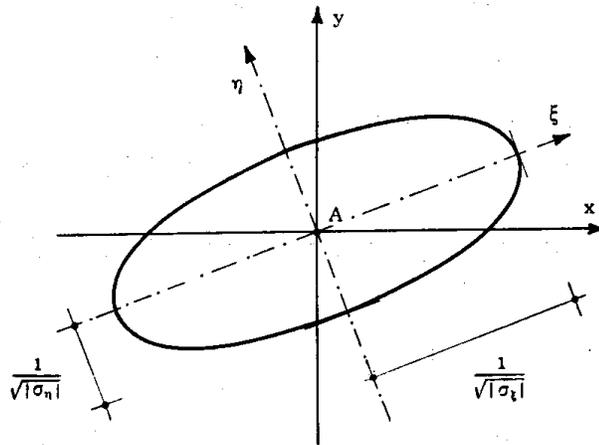


FIG. 2-15

stesso segno (fig. 2-15), due iperboli se di segno opposto (fig. 2-16).

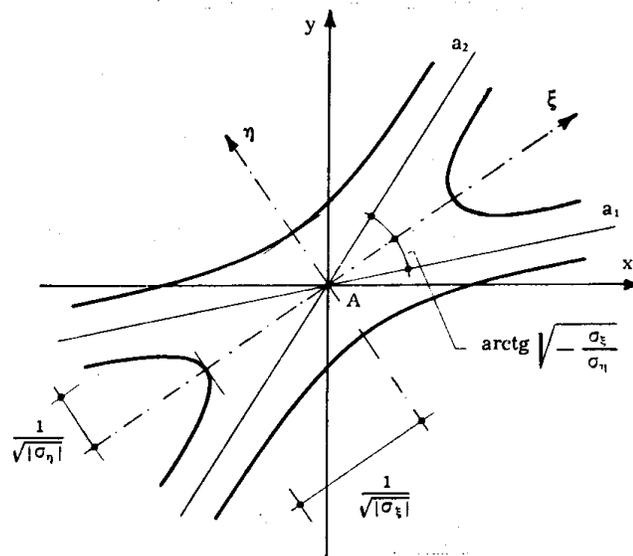


FIG. 2-16

La (q) porge

$$\frac{\eta}{\xi} = \pm \sqrt{-\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta}}, \quad (r)$$

e cioè i due asintoti sono simmetrici rispetto all'asse ξ , e inclinati su esso

$$\text{di } \arctg \sqrt{-\frac{\sigma_{\xi}}{\sigma_{\eta}}}$$

La (2-16) si scrive

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_p & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_p \end{vmatrix} = 0$$

che fornisce

$$\sigma_p = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (23)$$

I due valori σ_{ξ} e σ_{η} della (2-23) sono il massimo e il minimo tra i valori delle σ_n relativi al punto A.

ESEMPIO N. 1.

Siano assegnate le componenti speciali della tensione nel punto ge-

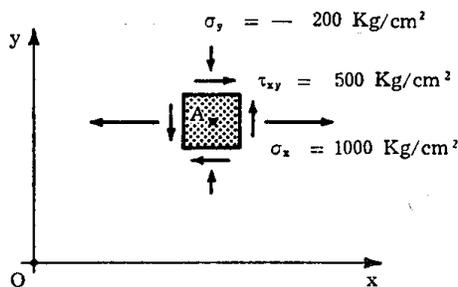


FIG. 2-17

nerico A di un corpo (fig. 2-17)

$$\sigma_x = + 1000 \text{ Kg/cm}^2 \quad \sigma_z = 0$$

$$\sigma_y = - 200 \text{ Kg/cm}^2 \quad \tau_{xz} = 0$$

$$\tau_{xy} = + 500 \text{ Kg/cm}^2 \quad \tau_{yz} = 0$$

Lo stato tensionale in A è piano, e xy è il piano delle tensioni. L'equazione delle quadriche di tensione coincide in questo caso con

l'equazione delle coniche, direttrici nel piano xy dei cilindri quadrici in cui le quadriche degenerano:

$$\Psi = 1000 x^2 - 200 y^2 + 1000 xy = \pm 1 . \quad (s)$$

L'equazione degli asintoti è

$$1000 x^2 - 200 y^2 + 1000 xy = 0 \quad (t)$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} - 0.2 = 0$$

$$\frac{x}{y} = \begin{cases} -1.17 \\ +0.17 . \end{cases}$$

Gli asintoti sono perciò reali, e inclinati sull'asse delle y di $\alpha_1 = -9^\circ 40'$ ed $\alpha_2 = 40^\circ 30'$ (fig. 2-18). Poichè gli assi ξ ed η sono le bisettrici degli angoli formati dagli asintoti, si trae che la coppia di assi principali è ruotata di $15^\circ 25'$ in senso antiorario rispetto alla coppia xy .

Le coniche (s) sono le due iperboli della figura; quella che interseca l'asse x corrisponde alle trazioni, ed è perciò la conica $\Psi = +1$, l'altra corrisponde alle compressioni. Dalla (2-23) si ricava

$$\sigma_\xi = + 1180 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_\eta = - 380 \text{ Kg/cm}^2 ;$$

i semidiametri AB e AC valgono perciò

$$AB = \frac{1}{\sqrt{1180}} = 2,9 \cdot 10^{-2} \text{ Kg}^{-1/2} \text{ cm}$$

$$AC = \frac{1}{\sqrt{380}} = 5,1 \cdot 10^{-2} \text{ Kg}^{-1/2} \text{ cm} .$$

Si consideri nell'intorno di A un parallelepipedo rettangolo elementare le cui facce siano normali agli assi ξ ed η ; esso è soggetto (fig. 2-18) solo a sforzi normali.

Si consideri un parallelepipedo rettangolo elementare di cui due facce opposte HK ed LM abbiano per normale l'asintoto a_1 ; sulle due facce HK e LM (fig. 2-19) la σ è nulla. Sulla faccia HL esiste una σ_{n_1} , che si ottiene conducendo da A la normale n_1 ad HL fino ad incontrare in Q_1

la conica; è $\sigma_{n1} = \frac{1}{AQ_1^2}$, di trazione perchè la conica corrisponde a

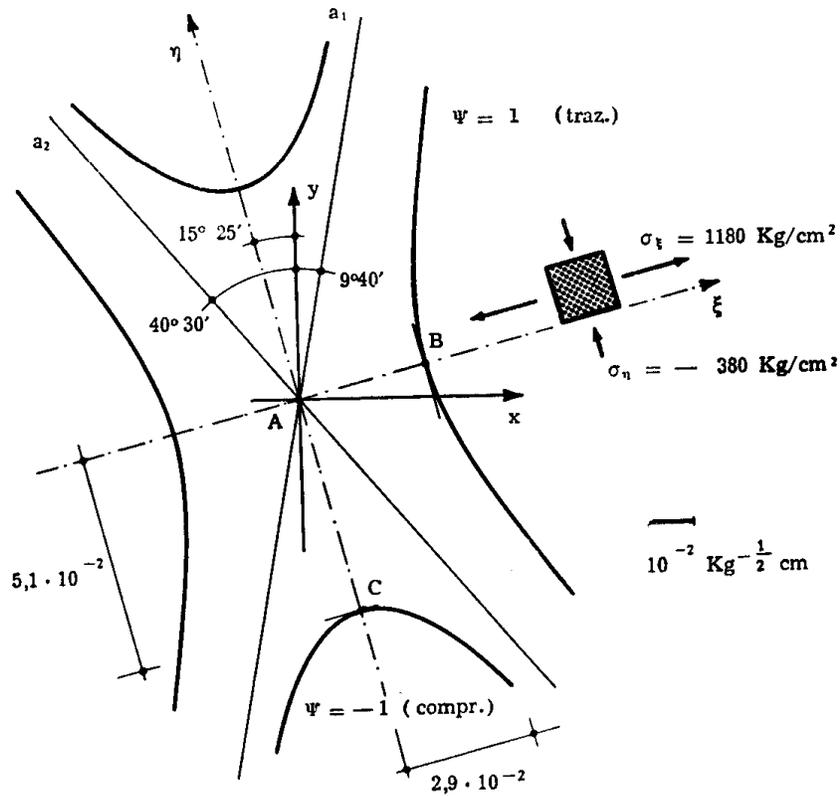


FIG. 2-18

$\Psi = +1$. La t_{n1} complessiva sulla faccia HL ha la direzione della normale alla conica in Q_1 ; è immediata perciò la determinazione di τ_{n1} in

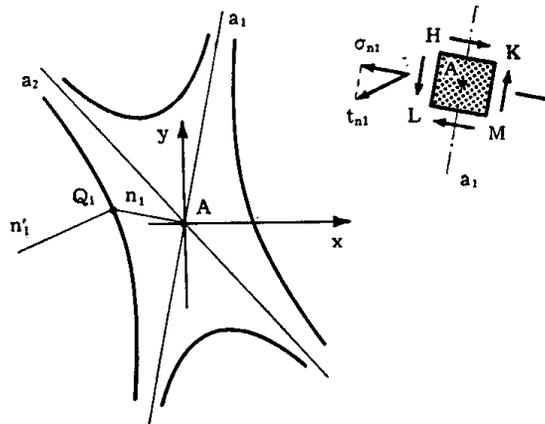


FIG. 2-19

intensità e verso; identico valore ha la tensione tangenziale sulle facce HK e LM.

Dall'espressione dell'invariante quadratico di tensione (2-17) si ha, nel nostro caso,

$$\sigma_{\xi} \sigma_{\eta} = -\tau_{n1}^2$$

$$\tau_{n1} = \sqrt{-\sigma_{\xi} \sigma_{\eta}} \quad (u)$$

da cui

$$\tau_{n1} = 670 \text{ Kg/cmq} .$$

Se il parallelepipedo HKLM è orientato con le due facce opposte HK ed LM ortogonali all'altro asintoto a_2 , si può ripetere identicamente la costruzione di cui sopra; risulta (fig. 2-20) $AQ_2 = AQ_1$, e quindi $\sigma_{n2} = \sigma_{n1}$.

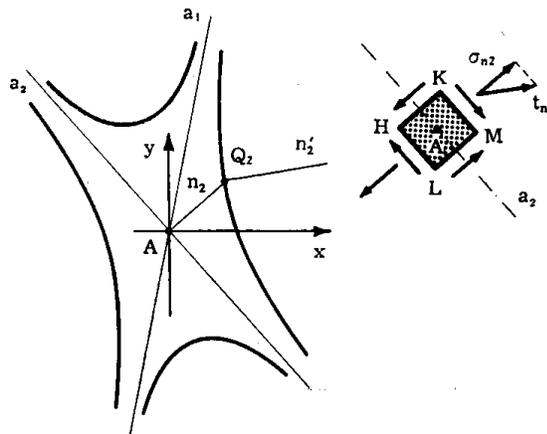


FIG. 2-20

Il valore di τ_{n2} è fornito sempre da $\sqrt{-\sigma_{\xi} \sigma_{\eta}}$, ma, come può osservarsi dalle figg. 2-19 e 2-20, cambia di segno.

8. Il cerchio di Mohr.

Con riferimento al generico punto A ed alla generica retta z (*) passante per A (fig. 2-21) una rappresentazione grafica dovuta al *Mohr* permette di conoscere, attraverso la costruzione di un cerchio, la tensione normale e la componente della tensione tangenziale secondo la normale

(*) La retta si è indicata con z per non introdurre altri simboli non strettamente necessari; si avverte esplicitamente che essa può benissimo non essere coincidente o parallela alla retta z del riferimento cartesiano unico per tutto il corpo rispetto al quale sono definite le $\sigma_i \tau_{jk}$ come funzioni del punto.

m a z , su uno qualsiasi degli elementi piani del fascio di sostegno z ; ciò una volta note le suddette tensioni su due qualsiasi elementi piani or-

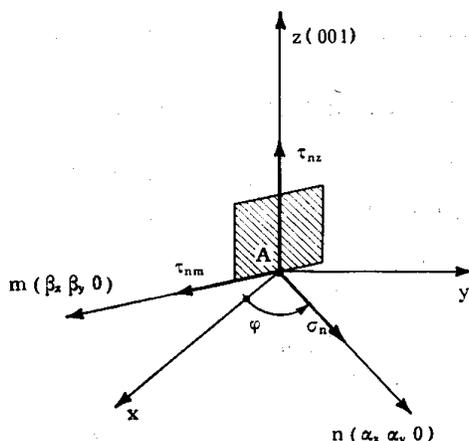


FIG. 2-21

togonali del fascio. Siano x ed y le normali a tali due elementi, e siano perciò note $\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}$; sia inoltre n la normale all'elemento piano generico, ed m la normale ad n e a z ; la coppia mn sia sovrapponibile alla coppia xy per rotazione intorno all'asse z . Il verso dell'asse z non interessa.

Se $\alpha_x \alpha_y 0$ e $\beta_x \beta_y 0$ sono i coseni direttori delle rette n ed m , dalle (2-11) e (2-13) si trae

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_x \alpha_x^2 + \sigma_y \alpha_y^2 + 2 \tau_{xy} \alpha_x \alpha_y \\ \tau_{nm} &= \sigma_x \alpha_x \beta_x + \sigma_y \alpha_y \beta_y + \tau_{xy} (\alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x).\end{aligned}\quad (v)$$

Si osserva dalle (v) che σ_n e τ_{nm} dipendono solo da $\sigma_x \sigma_y$ e τ_{xy} . Si osservi pure che, a completare la conoscenza dello stato tensionale sugli elementi piani del fascio di sostegno z , basta la conoscenza della τ_z , essendo

$$\tau_{nz} = \tau_{zn}.$$

Sia φ l'angolo \widehat{xn} (e cioè l'angolo che x descrive, ruotando nel piano orientato xy intorno all'origine, per portarsi su n); può scriversi

$$\begin{aligned}\alpha_x &= \cos(-\varphi) = \cos \varphi & \alpha_y &= \cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi \\ \beta_x &= \cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi & \beta_y &= \cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi.\end{aligned}$$

Le prime due delle (v) si scrivono perciò

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2 \tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\ \tau_{nm} &= (\sigma_x - \sigma_y) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi).\end{aligned}\quad (z)$$

Circa il verso della τ_{nm} è necessaria un'osservazione. Si consideri un parallelepipedo retto con gli spigoli orientati secondo le rette m , n , z (fig. 2-22); sulle due facce di normale n (HK ed LM) i vettori rappresentanti la tensione τ_{nm} positiva sono orientati, come generalmente si dice, in senso orario rispetto al centro del parallelepipedo. Se la coppia di assi mn ruota di $\frac{\pi}{2}$, le facce di normale n del parallelepipedo in esame sono la HL e la KM, e su di essi la τ_{nm} positiva è ancora quella oraria. E cioè la τ_{nm} fornita dalla (z) è positiva se diretta in verso orario rispetto al

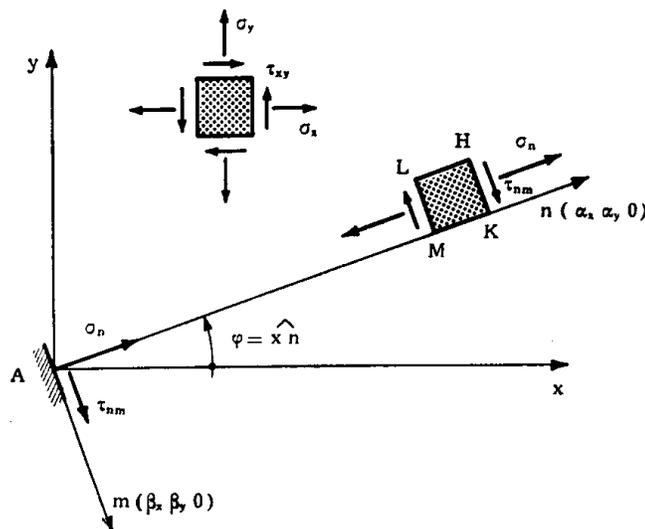


FIG. 2-22

centro del parallelepipedo su cui agisce (*convenzione di Mohr*). Questa convenzione è diversa da quella già adottata per le componenti di tensione; per $\varphi = \frac{\pi}{2}$ porta agli stessi risultati, essendo le τ_{nm} e τ_{yx} positive orientate nello stesso verso; per $\varphi = 0$ invece le τ_{nm} e τ_{xy} positive sono orientate in verso opposto. Ciò si spiega perchè, mentre gli assi x e y sono fissi, gli assi m ed n sono solidali al parallelepipedo elementare, e perciò mentre per $m \equiv x$ è $n \equiv y$, per $m \equiv y$ è $n \equiv -x$. Si osservi pure che, con la convenzione di *Mohr*, è $\tau_{ab} = -\tau_{ba}$.

Poichè è

$$2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi = \operatorname{sen} 2 \varphi$$

$$\operatorname{sen}^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 - \cos 2 \varphi)$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 + \cos 2 \varphi)$$

si può scrivere

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\tau_{nm} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi$$

da cui

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{nm}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2.$$

Questa è, nel piano $\sigma_n \tau_{nm}$, l'equazione di un cerchio, il cui centro (fig. 2-23) è ubicato sull'asse delle σ_n , a distanza $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ dall'origine, e il cui raggio CP è fornito da

$$\overline{CP}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2.$$

La costruzione di questo cerchio è immediata: si riportano σ_x in OA e σ_y in OB, ottenendo il centro del cerchio come punto medio di AB. Su

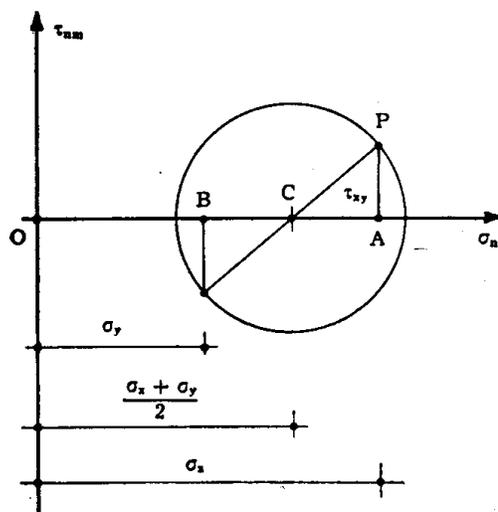


FIG. 2-23

A si riporta il segmento $AP = \tau_{xy}$, ottenendo in CP il raggio del cerchio; conviene, per quanto si dirà in seguito, riportare τ_{xy} dall'estremo A di σ_x , e nel verso che gli compete, precisamente verso l'alto se è positivo secondo la convenzione ordinaria (fig. 2-22), verso il basso se negativo. Ogni coppia di valori $\sigma_n \tau_{nm}$ relativa al generico elemento piano per z definisce pertanto un punto del cerchio della fig. 2-23.

Il valore dell'angolo \widehat{HTP} (fig. 2-24) che la parallela per T all'asse

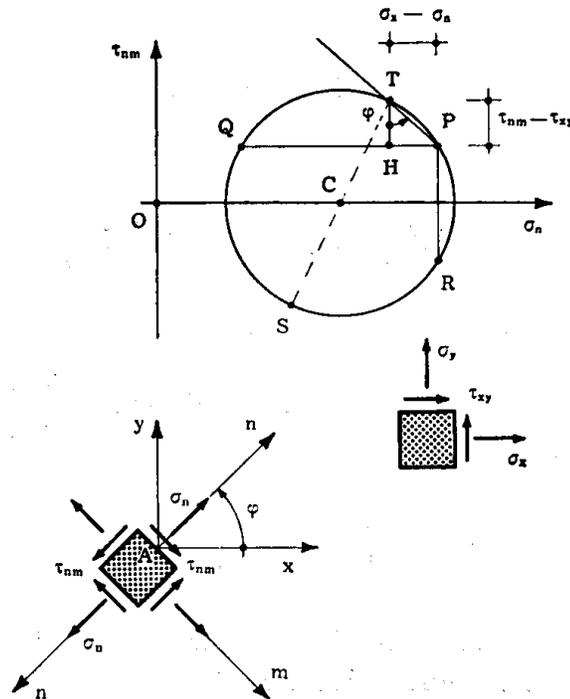


FIG. 2-24

delle τ_{nm} forma con la PT è fornito da

$$\operatorname{tg} \widehat{HTP} = \frac{HP}{HT}.$$

Il segno della $\operatorname{tg} \widehat{HTP}$ non dipende dai versi delle due rette suddette, ma solo dal loro ordine di successione; poichè il verso positivo è quello antiorario, per ottenere la $\operatorname{tg} \widehat{HTP}$ con il suo segno basta assumere il segmento HP positivo se P è a destra di H, il segmento HT positivo se H è a disotto di T.

E' perciò

$$HP = \sigma_x - \sigma_n$$

$$HT = \tau_{nm} - \tau_{xy}$$

da cui

$$\operatorname{tg} \widehat{HTP} = \frac{\sigma_n - \sigma_x}{\tau_{nm} - \tau_{xy}},$$

e per la (z)

$$\operatorname{tg} \widehat{\text{HTP}} = - \frac{(\sigma_y - \sigma_x) \operatorname{sen}^2 \varphi + 2 \tau_{xy} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{(\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi - 2 \tau_{xy} \cos^2 \varphi} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi \quad (\text{a}')$$

La relazione (a') permette di ottenere il punto rappresentativo dello stato tensionale sull'elemento piano di normale n generica. Se infatti si conduce da P la retta inclinata sulla parallela all'asse delle τ_{nm} dello stesso angolo φ di cui la retta n è inclinata sull'asse delle x , e si considera l'intersezione T di tale retta con il cerchio, le coordinate $\sigma_n \tau_{nm}$ di T (fig. 2-24), e soltanto quelle, soddisfano la (a') e sono quindi le $\sigma_n \tau_{nm}$ relative all'elemento piano la cui normale n è inclinata di φ sull'asse delle x . Si osservi che gli orientamenti della parallela per P all'asse delle τ_{nm} e della PT non hanno importanza; importa solo che l'angolo formato dalla prima con la seconda, e non viceversa, deve essere uguale all'angolo $\widehat{x n}$.

Se il riferimento xy e quello $\sigma_n \tau_{nm}$ sono sovrapposti (fig. 2-24), condurre da P la retta inclinata di φ sull'asse delle τ_{nm} equivale a condurre da P la parallela alla traccia dell'elemento sul piano xy ; dato φ , e quindi T, gli elementi corrispondenti sono in realtà due, dipendentemente dal verso della normale n .

Il punto P, le cui coordinate sono σ_x e τ_{xy} (ove questa è presa con il segno che ad essa compete secondo la convenzione ordinaria), si chiama polo del cerchio di Mohr.

Nella fig. 2-24 è riportata l'intersezione con il piano xy di un generico parallelepipedo retto avente quattro facce parallele all'asse z , nell'ipotesi che gli assi x ed y siano sovrapposti agli assi $\sigma_n \tau_{nm}$; le tensioni $\sigma_n \tau_{nm}$ sulle quattro facce suddette si ottengono conducendo da P le parallele PT e PS alle quattro tracce. I punti T ed S sono allineati con il centro del cerchio. Dato il punto T, la normale all'elemento piano su cui si esercitano σ_n e τ_{nm} pari alle coordinate di T è individuata, ed è la retta inclinata di $\varphi = \widehat{\text{HTP}}$ sull'asse delle x , ruotata rispetto ad x nel verso in cui TP è ruotata rispetto a TH; se i due riferimenti xy e $\sigma_n \tau_{nm}$ sono sovrapposti, la traccia di tale elemento piano è parallela alla retta PT.

Conducendo da P la parallela all'asse delle τ_{nm} ($\varphi = 0$, $n = x$, $m = -y$) si ha come intersezione il punto R (fig. 2-24) le cui coordinate sono σ_n pari a σ_x , e τ_{nm} pari alla τ_{xy} a meno del segno; conducendo invece da P la parallela all'asse delle σ_n ($\varphi = 90^\circ$, $n = y$, $m = x$) si ha come intersezione il punto Q di coordinate $\sigma_n = \sigma_y$, $\tau_{nm} = \tau_{yx}$.

Quanto sopra riguarda la costruzione del cerchio e la conoscenza delle $\sigma_n \tau_{nm}$ su qualsiasi elemento piano che si appoggia a z , una volta conosciuti σ_n e τ_{nm} su due elementi piani ortogonali che si appoggino a z ; la corrispondenza tra i punti T del cerchio e gli elementi piani passanti per z è biunivoca, e, noto il cerchio, può ottenersi l'uno dall'altro.

Il cerchio di Mohr dipende solo dal punto A e dalla retta z, e non certo dalla coppia di piani ortogonali dalle cui tensioni si parte per costruire il cerchio stesso. Se il cerchio è noto, si possono scegliere due qualsiasi piani ortogonali, corrispondenti a due punti qualsiasi R e Q diametralmente opposti (fig. 2-24), ponendo le normali a tali elementi parallele rispettivamente agli assi σ_n e τ_{nm} . Ripetendo il procedimento già esposto, si trae che il punto P, intersezione della parallela all'asse delle σ_n per Q e della parallela all'asse delle τ_{nm} per R, è il polo, tale che le tensioni definite dal generico punto T del cerchio sono relative all'elemento piano di traccia PT, e viceversa.

Se perciò, come spesso accade, il cerchio di Mohr relativo agli elementi piani che si appoggiano ad una retta z è dato, il polo P può su di esso scegliersi a piacere; la scelta non influenza la posizione relativa delle tracce degli elementi piani corrispondenti ai punti del cerchio, ma solo la loro posizione assoluta in riferimento alla coppia di assi σ_n e τ_{nm} (sempre che la retta di appoggio sia ortogonale al piano $\sigma_n \tau_{nm}$).

Gli estremi F e G del diametro verticale (fig. 2-25), intendendo come

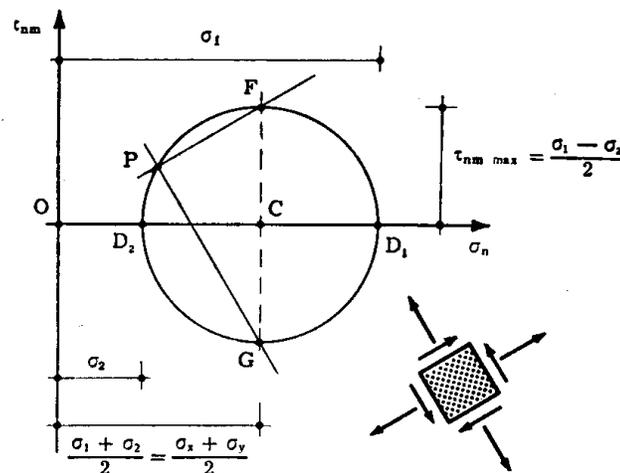


FIG. 2-25

tale quello parallelo all'asse delle τ_{nm} , corrispondono ai due elementi piani su cui la τ_{nm} è massima; essi sono ortogonali, e soggetti alla stessa tensione normale. Si ha su questi elementi

$$\tau_{nm \max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad (24)$$

pari al valore del raggio del cerchio; la tensione normale sugli stessi è uguale a

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad (25)$$

dove σ_1 e σ_2 sono i valori massimo e minimo della tensione normale sugli elementi di appoggio z .

Si verifica facilmente che su due qualsiasi elementi ortogonali la somma delle tensioni normali è costante, e pari a $\sigma_x + \sigma_y$ (fig. 2-26).

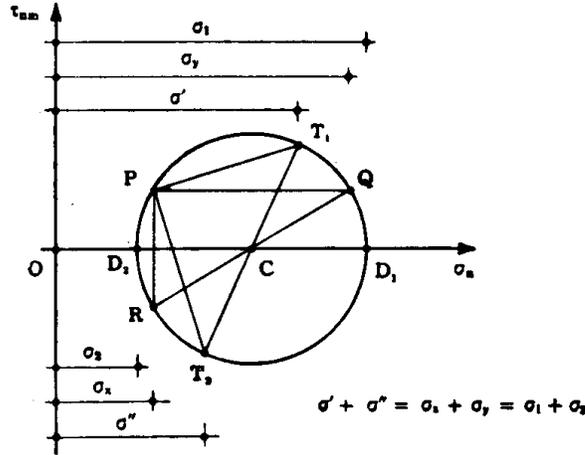


FIG. 2-26

Dato il cerchio di Mohr ed il polo P, e situate le normali x ed y agli elementi corrispondenti ad R e Q parallele agli assi σ_n e τ_{nm} , si può co-

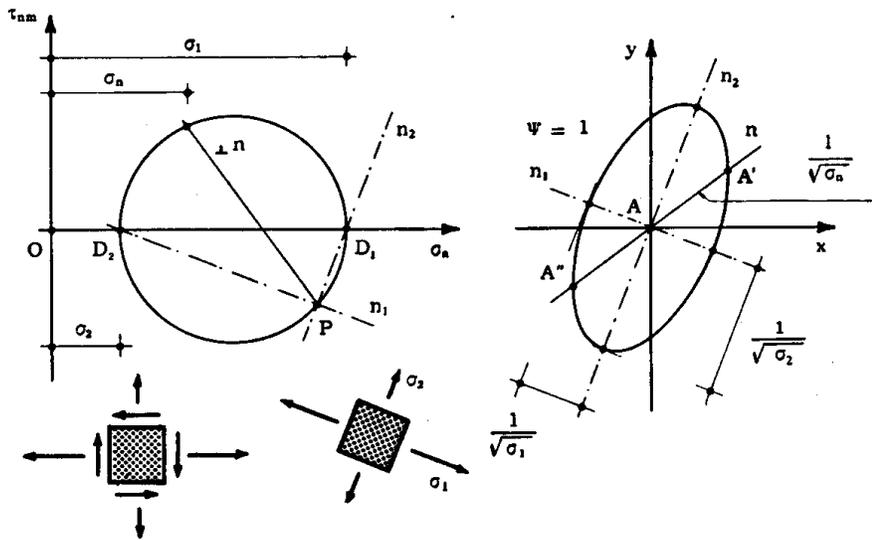


FIG. 2-27

struire la conica intersezione con il piano xy della quadrica delle tensioni; basta (fig. 2-27) per ogni retta n per A condurre due semidiametri AA' ed AA'' pari a $\frac{1}{\sqrt{|\sigma_n|}}$, dove il valore di σ_n si trae dal cerchio di Mohr.

Se il cerchio di Mohr non taglia l'asse delle τ_{nm} la conica è un'ellisse; se il cerchio è tutto a destra ($\sigma_n > 0$) dell'asse delle τ_{nm} , la conica è l'intersezione con la quadrica $\Psi = +1$, se è tutto a sinistra, con la quadrica $\Psi = -1$.

Se il cerchio di Mohr taglia l'asse delle τ_{nm} (fig. 2-28) esistono due ele-

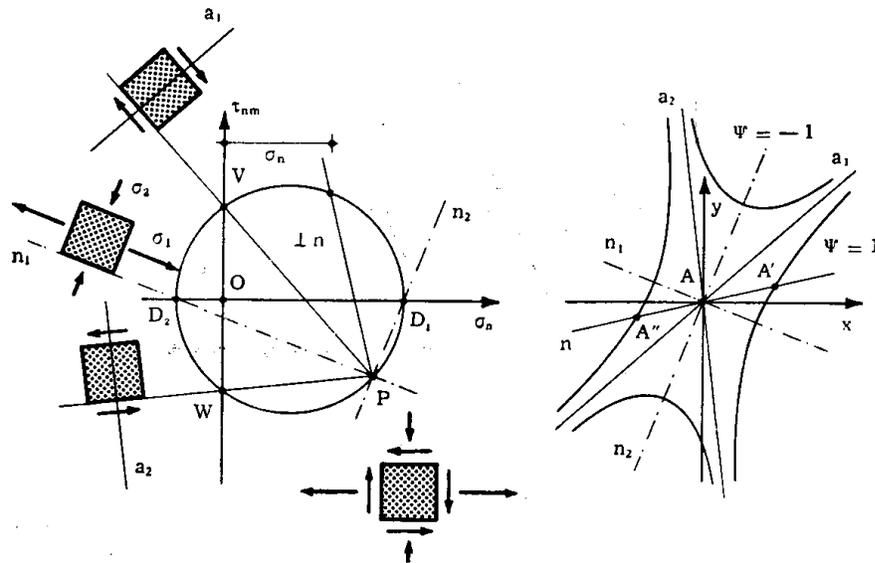


FIG. 2-28

menti piani, di tracce PV e PW, sui quali c'è solo tensione tangenziale; su questi elementi la τ_{nm} è fornito da

$$\tau_{nm} = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} ; \quad (26)$$

le rette normali a PV e PW sono parallele alle intersezioni del cono asintotico alle quadriche delle tensioni con il piano xy. Le coniche intersezioni delle quadriche delle tensioni con il piano xy sono due iperboli.

Le coniche intersezioni delle quadriche delle tensioni con il piano xy legano i valori σ_n e τ_{nm} come in uno stato piano di tensione. Del resto i legami (v) tra σ_n e τ_{nm} sono quelli che si avrebbero in uno stato piano definito dalle sole componenti $\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}$.

Gli assi n_1 e n_2 delle coniche intersezioni sono paralleli alle rette PD_2 e PD_1 (fig. 2-27 e 2-28); sulle facce di normali n_1 e n_2 si esercitano le tensioni normali $\sigma_1 = OD_1$ e $\sigma_2 = OD_2$, mentre la τ_{nm} è nulla. Diversa da zero è invece in genere la τ_{nz} , perciò le n_1 e n_2 non sono in genere direzioni principali.

9. I cerchi principali di Mohr.

Particolare importanza ha il cerchio di Mohr se la retta z è una direzione principale di tensione; in tal caso infatti risulta $\tau_{nz} = 0$, e la τ_{nm} è tutta la tensione tangenziale sull'elemento. Quindi il cerchio offre la rappresentazione completa dello stato tensionale sugli elementi che si appoggiano ad una direzione principale. Se z coincide con ζ , si usa chiamare C_ζ il centro del cerchio di Mohr relativo (fig. 2-29); inoltre sull'asse delle ascisse si pone la τ con il solo indice n , poichè $\tau_{nm} = \tau_n$.

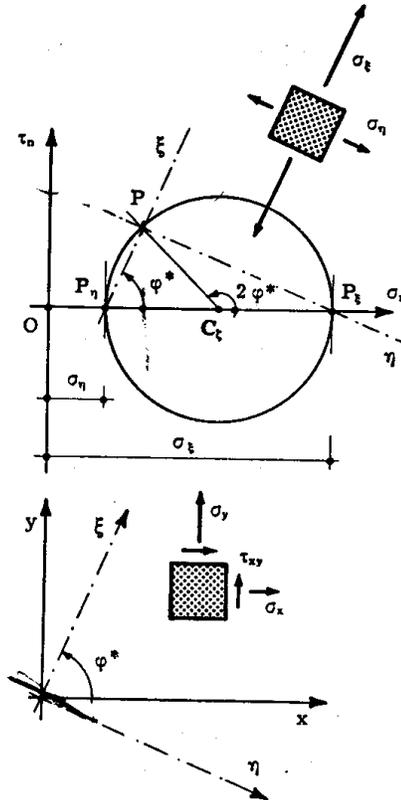


FIG. 2-29

I due punti P_ξ e P_η , cui si associano valori nulli delle tensioni tangenziali, definiscono i valori σ_ξ e σ_η delle tensioni principali relative alle altre due direzioni principali ξ ed η .

Se la costruzione del cerchio è stata fatta a partire dai valori $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ su due elementi piani ortogonali passanti per ζ , e P è il polo relativo, rispetto alle rette x ed y parallele rispettivamente all'asse delle σ_η e delle τ_n , le due direzioni principali ξ ed η sono le parallele a PP_η e PP_ξ ; infatti PP_ξ è la traccia del piano su cui si esercita la σ_ξ , e PP_η è la traccia del piano su cui si esercita la σ_η . Dalla fig. 2-29 risulta

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_\xi \\ \sigma_\eta \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (27)$$

che coincide con la (2-23); e infatti questa è relativa ad uno stato tensionale piano con piano delle tensioni xy , e gli elementi piani di normale x ed y si appoggiano ad una direzione principale (quella cui corrisponde tensione principale nulla).

Dalle fig. 2-29 risulta che l'angolo φ^* di cui la retta ξ è ruotata nel verso antiorario rispetto alla retta x è fornito da

$$\operatorname{tg} 2\varphi^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (28)$$

I tre cerchi di Mohr relativi alle tre direzioni principali si chiamano *cerchi principali di Mohr* (fig. 2-30); essi sono immediatamente costruibili

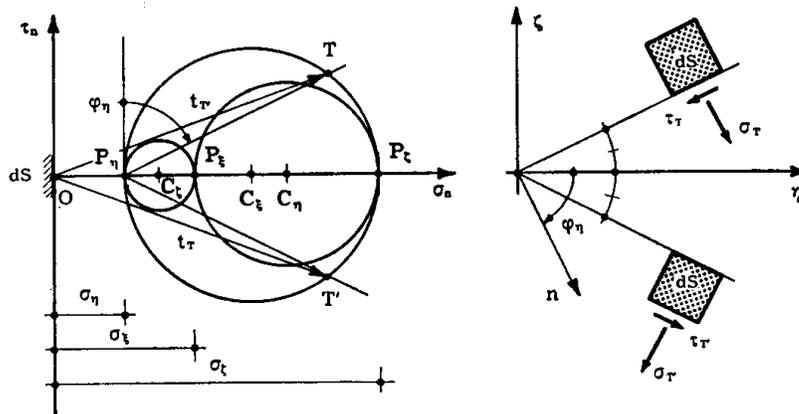


FIG. 2-30

una volta note le tre tensioni principali $\sigma_\xi \sigma_\eta \sigma_\zeta$ come i cerchi aventi per estremi dei diametri orizzontali i punti $P_\xi P_\eta P_\zeta$ di ascisse $\sigma_\xi \sigma_\eta \sigma_\zeta$.

Il più grande dei tre cerchi principali si chiama *cerchio massimo di Mohr*.

Sulla terna principale i versi di $\xi \eta \zeta$ possono essere scelti a piacere. Dato un punto T su uno dei cerchi principali, per esempio su quello di centro C_ξ relativo alla direzione principale ξ (fig. 2-30), l'elemento piano dS corrispondente, una volta orientata la terna principale in modo che η sia equiversa all'asse delle σ_n e ζ equiversa all'asse delle τ_n , ha traccia parallela alla retta $P_\eta T$. Gli stessi valori delle σ_n e τ_n si hanno sui due elementi piani (punti T e T') appoggiantisi a ξ e le cui normali sono inclinate di $+\varphi_\eta$ e $-\varphi_\eta$ sull'asse η ; la τ_n cambia di segno. Se, fermo restando l'asse ξ , il parallelepipedo elementare si dispone in modo che la normale di dS coincida con l'asse delle σ_n , il vettore t_T è fornito da OT' , il vettore $t_{T'}$ da OT .

Viceversa, dato l'angolo φ_η che la normale all'elemento piano appoggiantesi a ξ forma con l'asse η , per ottenere le tensioni su di esso agenti

basta condurre da P_η la retta inclinata di φ_η sulla verticale, e intersecare in T il cerchio di centro C_ξ (fig. 2-30).

Si osservi che se ζ cambia di verso, l'angolo φ_η cambia di segno; riportando ζ equiversa all'asse delle τ_n , l'elemento piano trasloca nel suo simmetrico rispetto all'asse η , e perciò la τ_n , che è cambiata di segno anch'essa, si trova rispetto al centro del parallelepipedo elementare con lo stesso verso che aveva prima.

Il procedimento esposto in questo paragrafo è utile quando, dato uno stato tensionale attraverso le sei componenti di tensione, si riconosce a priori che una di queste è principale, non essendo accompagnata da tensioni tangenziali; caso particolare, lo stato tensionale piano definito dalle $\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}$ e da $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$, in cui la retta z è una direzione principale. In tali casi la costruzione grafica del cerchio principale di Mohr relativo alla direzione principale ζ nota è immediata, e con essa la ricerca delle tensioni σ_ξ e σ_η ; è altrettanto immediata la costruzione degli altri due cerchi principali, essendo nota la σ_ζ .

ESEMPIO N. 2.

Sia dato lo stato tensionale

$$\begin{array}{ll} \sigma_x = 200 \text{ Kg/cm}^2 & \tau_{xy} = 0 \text{ Kg/cm}^2 \\ \sigma_y = 800 \quad \gg & \tau_{yz} = -400 \quad \gg \\ \sigma_z = 1000 \quad \gg & \tau_{zx} = 0 \quad \gg \end{array}$$

La retta x è direzione principale, poichè $\tau_x = 0$; posto perciò $x = \xi$, una delle tensioni principali è

$$\sigma_\xi = \sigma_x = 200 \text{ Kg/cm}^2 .$$

Si costruisce il cerchio di Mohr relativo alla retta ξ (fig. 2-31). Si riporta a ciò fare $OA = \sigma_y = 800 \text{ Kg/cm}^2$; $AP = \tau_{yz} = -400 \text{ Kg/cm}^2$, verso il basso perchè secondo la convenzione classica τ_{yz} è negativo; $OB = \sigma_z = 1000 \text{ Kg/cm}^2$. Il centro C_ξ è il punto medio del segmento AB , il raggio è $C_\xi P$. Il punto P è il polo del cerchio di Mohr. Se il riferimento yz è sovrapposto a quello $\sigma_n \tau_n$, le due direzioni principali sono, rispetto al riferimento yz , PP_η e PP_ζ ; la PP_η è la normale all'elemento su cui si esercita la tensione principale $\sigma_\zeta = 1310 \text{ Kg/cm}^2$, e quindi è l'asse ζ ; la PP_ζ è la normale all'elemento su cui si esercita la tensione principale $\sigma_\eta = 490 \text{ Kg/cm}^2$, e quindi è l'asse η .

Poichè è noto il valore PP_ξ della terza tensione principale σ_ξ , si costruiscono immediatamente gli altri due cerchi di Mohr.

Dato un punto T sul cerchio di estremi P_ξ P_ζ (relativo alla retta η), ed orientati gli assi ξ e ζ , l'elemento piano su cui agiscono le tensioni for-

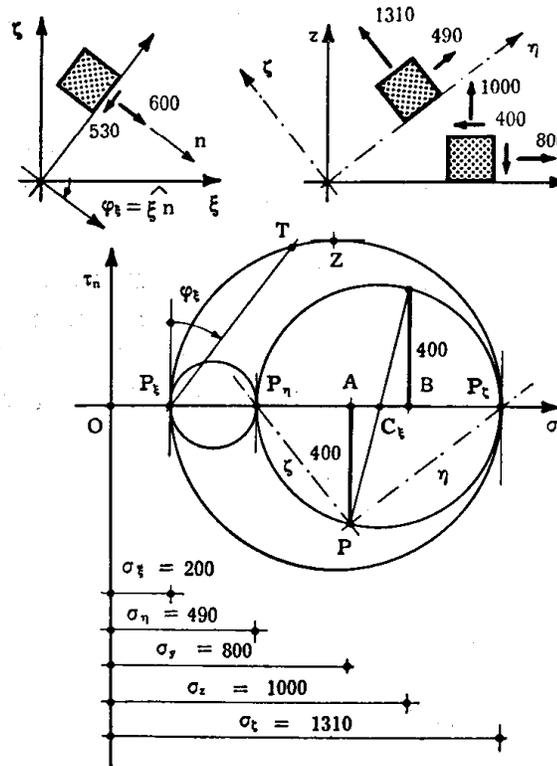


FIG. 2-31

nite dalle coordinate di T si appoggia all'asse η , e l'asse ξ forma con la sua normale un angolo $\varphi_\xi = \widehat{\xi n}$ pari all'angolo che la verticale per P_ξ forma con la retta $P_\xi T$, preso nel verso che porta la verticale sulla $P_\xi T$.

Il massimo valore, in senso assoluto, della tensione tangenziale è fornito dall'ordinata del punto Z , estremo superiore del diametro verticale del cerchio massimo; esso è pari a

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_\zeta - \sigma_\xi}{2} = 555 \text{ Kg/cm}^2 .$$

Gli elementi piani relativi corrispondono sia al punto Z che al suo simmetrico rispetto all'asse delle σ_n ; si appoggiano alla tensione principale intermedia σ_η , e le loro tracce sono inclinate di 45° sugli assi ξ e ζ .

ESEMPIO N. 3.

Si prenda in esame lo stesso stato tensionale piano considerato nell'esempio (2-1)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= +1000 \text{ Kg/cm}^2 & \sigma_z &= 0 \\ \sigma_y &= -200 \text{ Kg/cm}^2 & \tau_{xz} &= 0 \\ \tau_{xy} &= +500 \text{ Kg/cm}^2 & \tau_{yz} &= 0 \end{aligned}$$

Si riportano sull'asse delle σ_n (fig. 2-32) $OA = +1000 \text{ Kg/cm}^2$, e

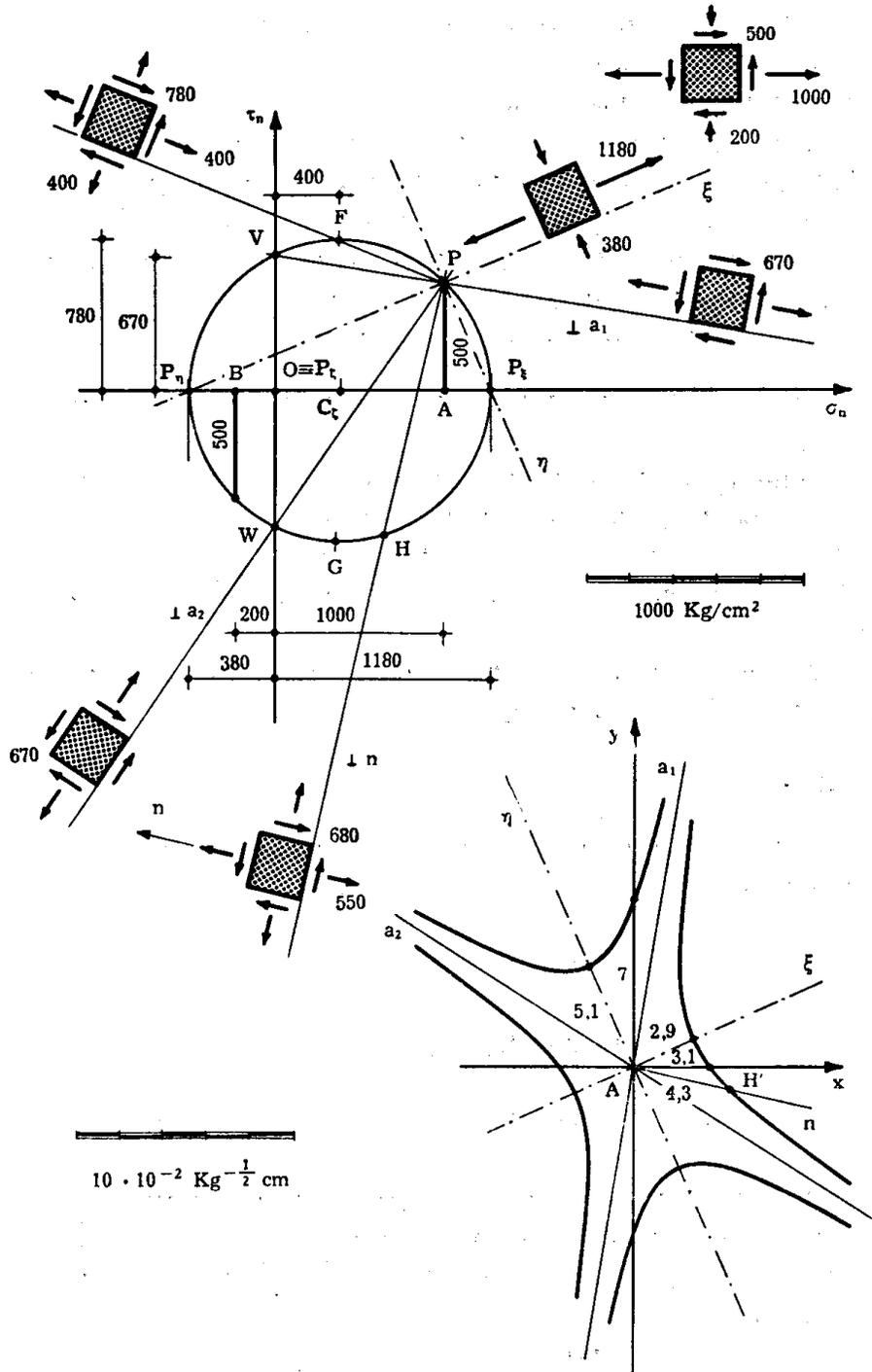


FIG. 2-32

$OB = -200 \text{ Kg/cm}^2$; a partire da A si riporta normalmente all'asse delle σ_n , e nel verso positivo delle τ_n , $AP = 500 \text{ Kg/cm}^2$.

E' determinato così il cerchio di Mohr relativo agli elementi piani del fascio di sostegno $z \equiv \zeta$, poichè è conosciuto il suo centro C_ζ , che biseca il segmento AB , ed il raggio $C_\zeta P$. Le intersezioni del cerchio con l'asse delle σ_n forniscono $\sigma_\xi = OP_\xi = +1180 \text{ Kg/cm}^2$, $\sigma_\eta = OP_\eta = -380 \text{ Kg/cm}^2$; l'elemento piano su cui agisce σ_ξ è quello di traccia PP_ξ , quindi ξ è la normale a PP_ξ . Sugli elementi piani di traccia PV e PW si esercita solo tensione tangenziale, pari a 670 Kg/cm^2 ; le normali a_1 ed a_2 a tali tracce sono gli asintoti delle coniche di tensione sul piano xy , intersezioni con tale piano dei piani asintotici ai cilindri quadrici di tensione.

Sull'elemento PF e su quello PG ad esso ortogonale agiscono le massime tensioni tangenziali, pari a 780 Kg/cm^2 ; ad esse si accompagnano le tensioni normali 400 Kg/cm^2 , uguali sulle due facce ortogonali. Il cerchio di Mohr permette la costruzione per punti della conica di tensione; infatti, su una qualunque retta n per A occorre riportare il segmento

$\frac{1}{\sqrt{|\sigma_n|}}$, e la σ_n è fornita dal cerchio di Mohr. Per la retta n della fi-

gura si ottiene σ_n conducendo da P la traccia PH del piano la cui normale è n ; la distanza di H dall'asse delle τ_n fornisce $\sigma_n = 550 \text{ Kg/cm}^2$, da cui $AH' = 4,3 \times 10^{-2} \text{ Kg}^{-1/2} \text{ cm}$. Poichè l'asse delle τ_n interseca il cerchio di Mohr, gli asintoti delle coniche sono reali, e le coniche risultano due iperboli.

Il cerchio tracciato è il cerchio esterno dei tre principali; gli altri due hanno per diametro OP_η ed OP_ξ .

ESEMPIO N. 4.

Si consideri lo stato tensionale piano definito dalle componenti speciali di tensione

$$\begin{aligned} \sigma_x &= +1600 \text{ Kg/cm}^2 & \sigma_z &= 0 \\ \sigma_y &= +800 \text{ Kg/cm}^2 & \tau_{xz} &= 0 \\ \tau_{xy} &= -400 \text{ Kg/cm}^2 & \tau_{yz} &= 0. \end{aligned}$$

Il cerchio di Mohr (fig. 2-33) è tutto a destra dell'asse delle τ_n , e il suo diametro $P_\eta P_\xi$; il segmento AP è stato riportato verso il basso, atteso il segno della τ_{xy} . La conica di tensione è una ellisse, poichè gli asintoti sono immaginari.

Il cerchio di Mohr relativo all'asse ξ è quello di diametro OP_η , il cerchio relativo all'asse η è quello di diametro OP_ξ , ed è il maggiore, poichè

σ_η è la tensione principale intermedia nel nostro caso. La massima tensione tangenziale fornita dal cerchio di diametro $P_\eta P_\xi$ è perciò la massima tra quelle relative agli elementi piani passanti per z , ma non la massima tra

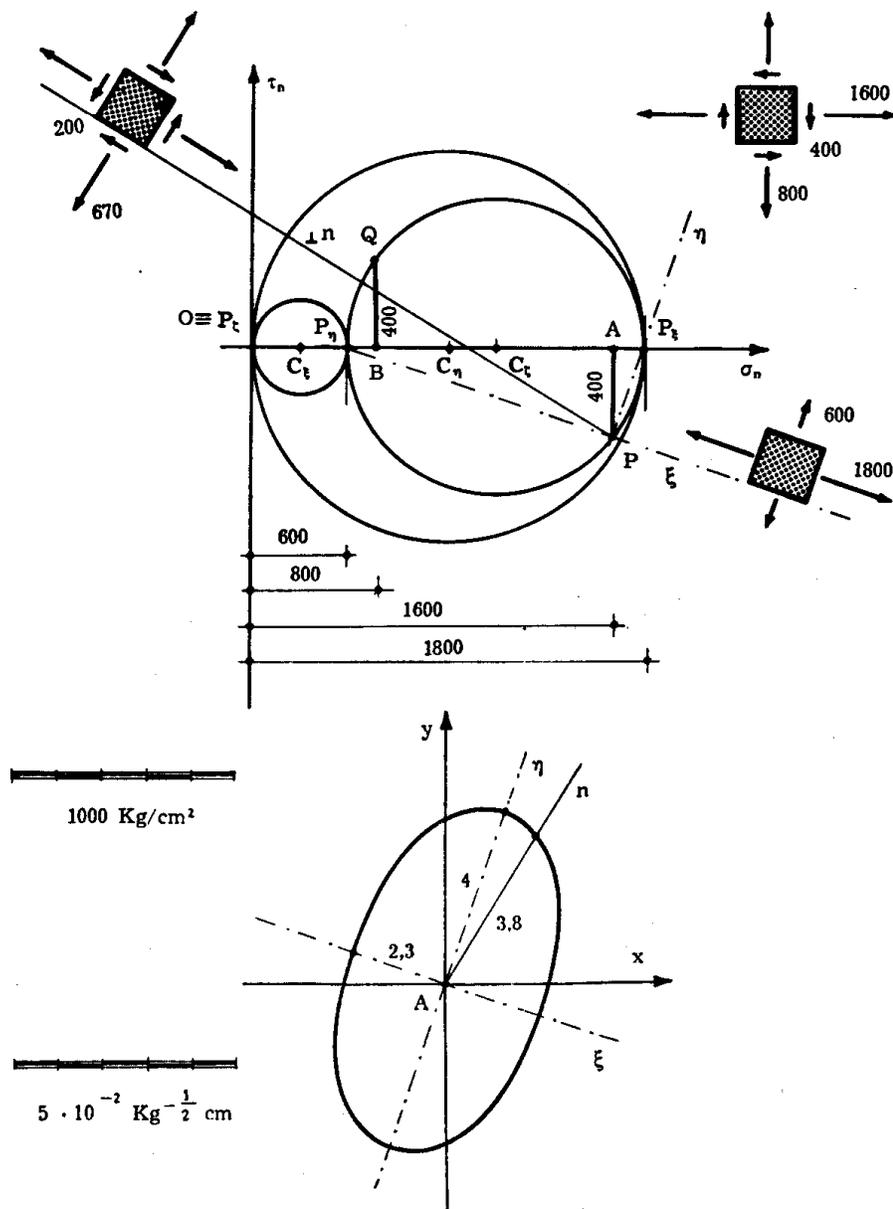


FIG. 2-33

quelle relative a tutti gli elementi piani passanti per A ; quest'ultima è fornita dal semidiametro $\frac{OP_\xi}{2}$, e cioè è pari a 900 Kg/cm^2 , mentre la

prima è pari a $\frac{1800 - 600}{2} = 600 \text{ Kg/cm}^2$.

10. L'utilizzazione dei cerchi principali di Mohr per la conoscenza dello stato tensionale su un elemento piano generico.

Si farà adesso vedere come la conoscenza dei tre cerchi principali di Mohr permette, nel caso più generale di sollecitazione triassiale, la conoscenza della tensione non solo sui piani dei tre fasci di sostegno $\xi \eta \zeta$, ma su un qualsiasi piano.

Si inizia con il dimostrare che le tensioni σ_n e τ_n (tensione normale e tensione tangenziale totale) relative agli elementi piani le cui normali n sono inclinate dello stesso angolo φ_n (in valore assoluto) rispetto alla generica direzione principale η , definiscono un cerchio nel piano $\sigma_n \tau_n$ (fig. 2-

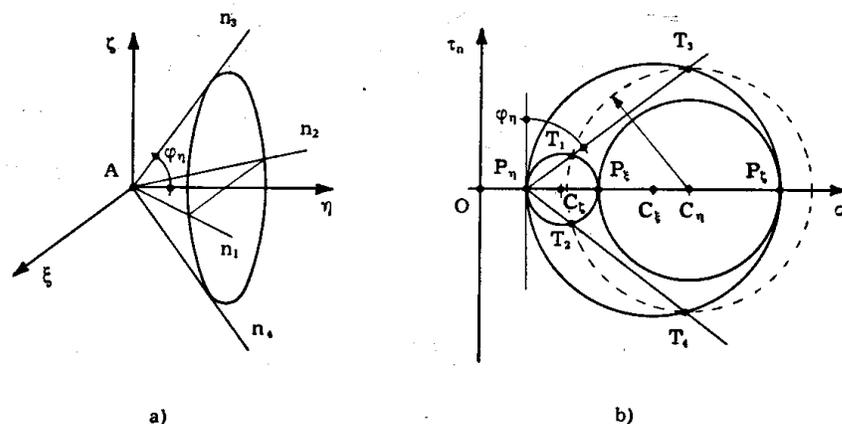


FIG. 2-34

34). Infatti dalle due relazioni (2-13) e (2-7) scritte con riferimento agli assi principali

$$\sigma_n = \sigma_\xi \alpha_\xi^2 + \sigma_\eta \alpha_\eta^2 + \sigma_\zeta \alpha_\zeta^2 \quad (b')$$

$$t_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_\xi^2 \alpha_\xi^2 + \sigma_\eta^2 \alpha_\eta^2 + \sigma_\zeta^2 \alpha_\zeta^2$$

si trae

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 + \tau_n^2 - (\sigma_\xi + \sigma_\zeta) \sigma_n &= \sigma_\xi^2 \alpha_\xi^2 + \sigma_\eta^2 \alpha_\eta^2 + \sigma_\zeta^2 \alpha_\zeta^2 - \\ &- \sigma_\xi^2 \alpha_\xi^2 - \sigma_\xi \sigma_\eta \alpha_\eta^2 - \sigma_\xi \sigma_\zeta \alpha_\zeta^2 - \sigma_\zeta \sigma_\xi \alpha_\xi^2 - \sigma_\zeta \sigma_\eta \alpha_\eta^2 - \sigma_\zeta^2 \alpha_\zeta^2 + \\ &+ \sigma_\xi \sigma_\zeta \alpha_\eta^2 - \sigma_\xi \sigma_\zeta \alpha_\eta^2 = \\ &= (\sigma_\eta^2 - \sigma_\xi \sigma_\eta - \sigma_\zeta \sigma_\eta + \sigma_\xi \sigma_\zeta) \alpha_\eta^2 - \sigma_\xi \sigma_\zeta = \\ &= (\sigma_\eta - \sigma_\xi) (\sigma_\eta - \sigma_\zeta) \alpha_\eta^2 - \sigma_\xi \sigma_\zeta . \end{aligned}$$

L'equazione

$$\sigma_n^2 + \tau_n^2 - (\sigma_\xi + \sigma_\zeta) \sigma_n = (\sigma_\eta - \sigma_\xi) (\sigma_\eta - \sigma_\zeta) \alpha_\eta^2 - \sigma_\xi \sigma_\zeta \quad (c')$$

rappresenta, per $\alpha_n = \cos \varphi_n = \text{cost.}$, un cerchio, il cui centro giace sull'asse delle σ_n a distanza $\frac{\sigma_\xi + \sigma_\zeta}{2}$ dall'origine, e il cui raggio è fornito da

$$R^2 = (\sigma_n - \sigma_\xi) (\sigma_n - \sigma_\zeta) \alpha_n^2 + \left(\frac{\sigma_\xi - \sigma_\zeta}{2} \right)^2. \quad (d')$$

Un cerchio di raggio R , con centro C situato sull'asse σ_n a distanza a dall'origine, è retto dall'equazione

$$(\sigma_n - a)^2 + \tau_n^2 = R^2$$

e cioè

$$\sigma_n^2 + \tau_n^2 - 2a \sigma_n = R^2 - a^2.$$

Confrontando con la (c') risulta $a = \frac{\sigma_\xi + \sigma_\zeta}{2}$, mentre il raggio R è fornito da

$$R^2 - \left(\frac{\sigma_\xi + \sigma_\zeta}{2} \right)^2 = (\sigma_n - \sigma_\xi) (\sigma_n - \sigma_\zeta) \alpha_n^2 - \sigma_\xi \sigma_\zeta$$

da cui si ricava la (d').

Si osservi che per $\alpha_n = 0$ ($\varphi_n = 90^\circ$) è $R = \frac{\sigma_\xi - \sigma_\zeta}{2}$; si ricade quindi nel cerchio di Mohr relativo all'asse η (la n giace nel piano $\xi\zeta$). Per $\alpha_n = 1$ ($\varphi_n = 0$, $n \equiv \eta$) è

$$R^2 = \sigma_n^2 - \sigma_n (\sigma_\xi - \sigma_\zeta) + \left(\frac{\sigma_\xi + \sigma_\zeta}{2} \right)^2 = (\sigma_n - a)^2$$

$$R = \pm (\sigma_n - a).$$

Il raggio R può quindi variare tra i valori (fig. 2-34) $C_n P_\xi$ e $C_n P_\eta$.

Il cerchio (c') ha lo stesso centro del cerchio di Mohr relativo all'asse η ; esso è definito una volta conosciuto il raggio R , ma la sua costruzione può condursi per via esclusivamente grafica in base alla seguente considerazione. Gli elementi piani di normale n_1 ed n_2 (fig. 2-34 a), essendo n_1 ed n_2 le intersezioni del cono di asse η ed apertura φ_n con il piano $\eta\xi$, appartengono al fascio di sostegno ζ , e perciò i punti T_1 e T_2 caratterizzanti il loro stato tensionale appartengono (fig. 2-34 b) al cerchio di Mohr relativo all'asse ζ . Precisamente T_1 e T_2 sono le intersezioni del cerchio di centro C_ζ con le rette passanti per P_η e inclinate di φ_n sulla verticale. Il cerchio (c') ha dunque raggio R fornito da $R = C_n T_1 = C_n T_2$ (fig. 2-34 b). E' evidente che lo stesso raggio si sarebbe ottenuto conducendo le rette passanti per P_η e inclinate di φ_n sulla verticale ad intersecare in T_3 e T_4 il cerchio relativo all'asse ξ ; in questo caso infatti vale

lo stesso ragionamento di cui sopra, con riferimento alle intersezioni n_3 ed n_4 del cono delle normali con il piano $\eta \zeta$. In genere si può dire (fig. 2-35) che conducendo dal punto P_1 le due rette inclinate di φ_1 rispetto alla

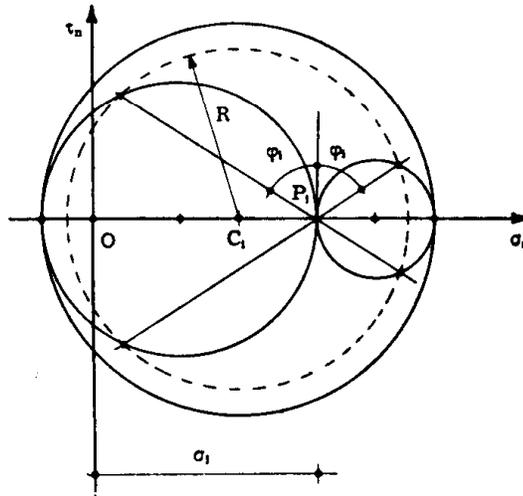


FIG. 2-35

verticale, le quattro intersezioni di queste due rette con i cerchi di centri C_j , C_k (che passano per P_1) appartengono al cerchio di centro C_1 rappresentativo degli stati tensionali sugli elementi piani le cui normali formano il cono di asse i ed apertura φ_1 .

Per ottenere le componenti normale e tangenziale di tensione su un elemento piano la cui normale forma gli angoli φ_ξ , φ_η , φ_ζ con gli assi principali, è sufficiente, per quanto sopra, la seguente costruzione (fig. 2-36). Si conduce per P_ξ la retta inclinata di φ_ξ sulla verticale, fino ad incontrare in $T_{\xi\eta}$ il cerchio di Mohr relativo all'asse η , e si costruisce il cerchio di centro C_ξ e raggio $C_\xi T_{\xi\eta}$ (si osserva che lo stesso cerchio si ottiene considerando l'intersezione $T_{\xi\zeta}$ della retta di cui sopra con il cerchio di Mohr relativo all'asse ζ).

Si conduce poi per P_η la retta inclinata di φ_η sulla verticale, fino ad incontrare in $T_{\eta\zeta}$ il cerchio di Mohr relativo all'asse ζ , e si costruisce il cerchio di centro C_η e raggio $C_\eta T_{\eta\zeta}$ (tale cerchio può anche ottenersi considerando l'intersezione $T_{\eta\xi}$ della stessa retta con il cerchio di Mohr relativo all'asse ξ). L'intersezione T dei due cerchi così costruiti fornisce con le sue coordinate i valori di σ_n e τ_n sull'elemento piano la cui normale n forma gli angoli φ_ξ e φ_η con gli assi ξ ed η ; infatti n appartiene al cono di apertura φ_ξ con asse ξ , ed al cono di apertura φ_η con asse η , e quindi il punto del piano σ_n , τ_n che definisce lo stato tensionale relativo all'elemento piano di normale n appartiene ad ambedue i cerchi relativi ai due coni. Fissati φ_ξ e φ_η , φ_ζ è definito univocamente; si verifica che, costruendo il cerchio relativo al cono di apertura φ_ζ ed asse ζ , esso pure passa per

T. Questo cerchio si ottiene conducendo da P_ζ la retta inclinata di φ_ζ rispetto alla verticale, fino ad intersecare in $T_{\zeta\xi}$ ($T_{\zeta\eta}$) il cerchio di Mohr relativo all'asse ξ (η), e costruendo il cerchio di centro C_ζ e raggio $C_\zeta T_{\zeta\xi}$ ($C_\zeta T_{\zeta\eta}$). Si noti che la costruzione della fig. 2-36 fornisce, fissati

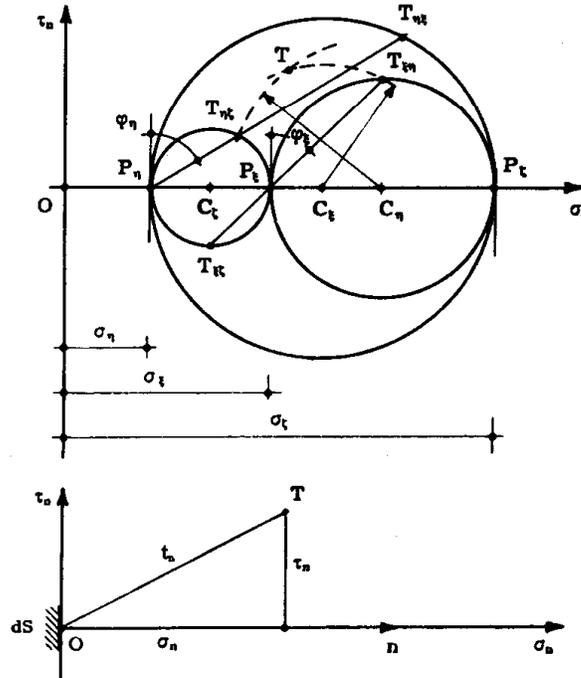


FIG. 2-36

φ_ξ e φ_η , due punti T simmetrici rispetto all'asse delle σ_n ; la σ_n è perciò definita in valore e segno, la τ_n solo in valore.

Si osservi pure che, fissati φ_ξ e φ_η , le rette intersezioni dei due coni di assi ξ ed η ed aperture φ_ξ e φ_η sono quattro; la costruzione della fig. 2-36 fornisce per le giaciture normali a queste quattro rette il punto T

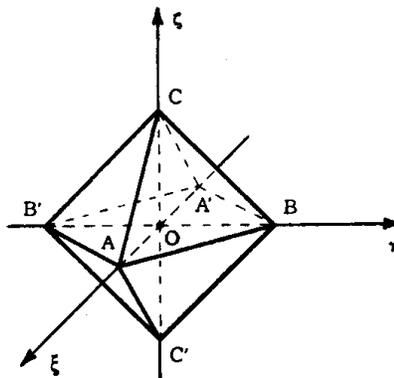


FIG. 2-37

e il suo simmetrico rispetto all'asse delle σ_n . Può dirsi perciò che sulle facce dell'ottaedro, con vertici su $\xi \eta \zeta$ (fig. 2-37) le cui normali sono incli-

nate dello stesso angolo φ_{ξ} rispetto a ξ , e dello stesso angolo φ_{η} rispetto ad η (e cioè i cui vertici opposti sono equidistanti da O : $OA = OA'$, $OB = OB'$, $OC = OC'$) le tensioni normali sono uguali in valore e segno, e le tensioni tangenziali sono uguali in valore. Si vedrà che particolare importanza hanno queste tensioni quando $\varphi_{\xi} = \varphi_{\eta} = \varphi_{\zeta}$.

Viceversa, dato un punto T di coordinate $\sigma_n \tau_n$ (punto che, si vedrà subito, deve essere compreso tra il cerchio massimo e gli altri due) si determinano con la costruzione della fig. 2-36 φ_{ξ} e φ_{η} , e quindi le quattro giaciture su cui si esercitano le tensioni $\sigma_n \tau_n$.

Dalla fig. 2-36 si deduce una proprietà di importanza fondamentale: il cerchio relativo ad un cono di qualsiasi apertura con asse ξ (ove σ_{ξ} è la tensione principale intermedia) è interno al cerchio di Mohr relativo all'asse ξ ; infatti si osserva che i punti $T_{\xi\eta}$ e $T_{\xi\zeta}$ determinano un raggio $C_{\xi} T_{\xi\eta} \leq C_{\xi} P_{\eta}$. Quindi tutti i punti che definiscono nel piano $\sigma_n \tau_n$ lo stato tensionale degli elementi piani passanti per il generico punto A del corpo sono contenuti nel cerchio massimo di Mohr.

Dalla costruzione grafica riportata nella fig. 2-36, si deduce pure che i raggi dei cerchi di centro C_{η} e C_{ζ} sono maggiori di $C_{\eta} P_{\xi}$ e $C_{\zeta} P_{\xi}$; perciò i punti T rappresentativi degli stati tensionali sono sempre ubicati nella zona compresa tra il cerchio principale maggiore e gli altri due (fig. 2-38),

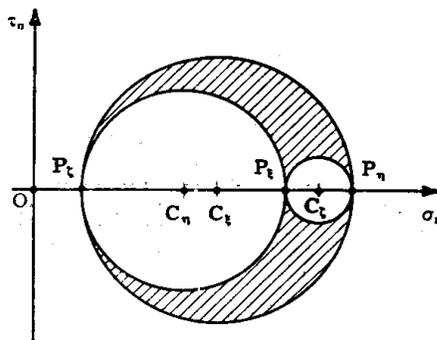


FIG. 2-38

denominata *arbelo di Mohr*. I cerchi relativi ai coni, tracciati come nella fig. 2-34, sono perciò reali soltanto nella parte compresa nell'arbelo.

11. Il caso particolare di due tensioni principali uguali; lo stato tensionale monoassiale.

Se due tensioni principali, per es. σ_{η} e σ_{ζ} , sono uguali (fig. 2-39), il cerchio relativo all'asse ξ si riduce al punto $P_{\eta} \equiv P_{\zeta}$; ed infatti su ogni elemento che si appoggia all'asse ξ la tensione è tutta normale, e pari a $\sigma_{\eta} = \sigma_{\zeta}$.

I due cerchi relativi agli assi η e ζ coincidono.

L'arbelo di Mohr coincide con questo cerchio; su tutti gli elementi le cui normali sono equiinclinate di φ_ξ sull'asse ξ le tensioni sono le stesse, e fornite dal punto T (fig. 2-39).

Uno dei casi in cui si hanno due tensioni principali uguali è quello dello *stato tensionale monoassiale*. Si definisce così uno stato tensionale in un punto se, comunque sia scelto l'elemento piano passante per quel punto, la tensione su di esso è diretta secondo una retta determinata, detta *retta delle tensioni*.

Se in A lo stato tensionale è monoassiale, su ogni piano passante per la retta delle tensioni non si ha tensione; infatti essa potrebbe essere solo tangenziale, e diretta secondo tale retta, ma in tal caso bisogna ammettere l'esistenza della stessa tensione sul piano ortogonale, e ciò è con-

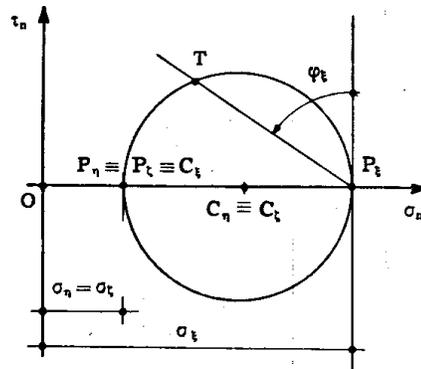


FIG. 2-39

trario alla definizione; dunque tutte le rette normali alla retta delle tensioni sono principali, e con tensione principale nulla. In particolare, esistono due tensioni principali nulle. Se viceversa esistono due tensioni principali nulle, per es. σ_η e σ_ζ , dalle (2-18) si trae

$$t_{n\xi} = \sigma_\xi \alpha_\xi$$

$$t_{n\eta} = 0$$

$$t_{n\zeta} = 0$$

e cioè, per qualsiasi n , t_n è diretta secondo ξ , che è la retta delle tensioni. Quindi condizione necessaria e sufficiente perchè uno stato tensionale sia monoassiale è che due tensioni principali siano nulle; e cioè che il determinante

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

abbia tutti i minori di ordine due nulli. In tal caso, infatti, e solo in tal caso il sistema (2-7) scritto per $t_{nx} = t_{ny} = t_{nz} = 0$ ammette due soluzioni

indipendenti non nulle per $\alpha_x \alpha_y \alpha_z$, e quindi qualsiasi combinazione lineare delle stesse.

Nei regimi monoassiali il cerchio massimo è quello di diametro $OP_\xi = \sigma_\xi$ (fig. 2-40), ed in esso coincidono i due cerchi relativi agli assi η e ζ

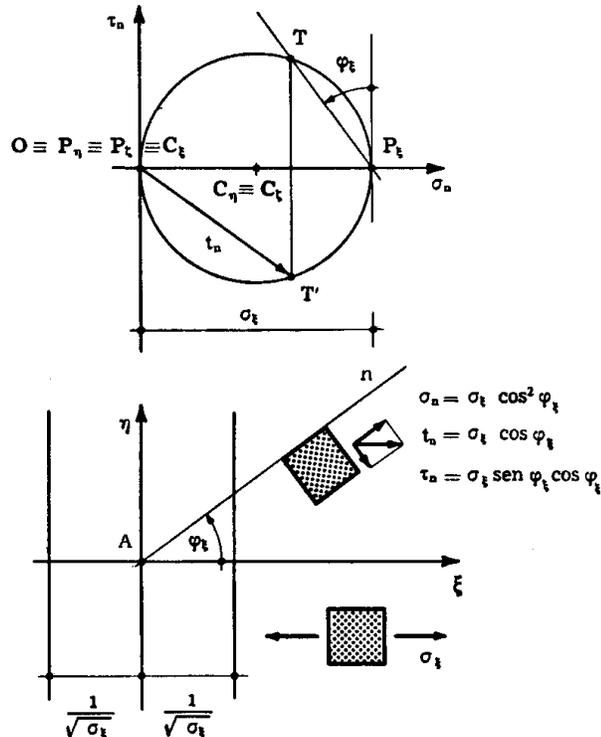


FIG. 2-40

(ed a qualsiasi retta ortogonale a ξ); il cerchio relativo all'asse ξ degenera nell'origine.

Le quadriche di tensione degenerano nei due piani ortogonali all'asse ξ e distanti dall'origine $\pm \frac{1}{\sqrt{|\sigma_\xi|}}$.

12. Le linee isostatiche.

Si considerino le linee involuppo delle direzioni principali nell'interno

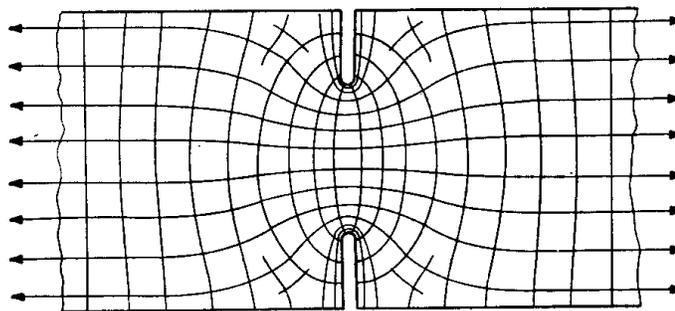


FIG. 2-41

di un corpo sottoposto ad un insieme di forze (fig. 2-41); queste linee co-

stituiscono una triplice famiglia (congruenza) di curve che si incontrano in ogni punto sotto angoli retti. Se si sostituisce al corpo reale un insieme di elementi filiformi non collegati tra loro, e disposti secondo le linee anzidette, l'equilibrio del corpo non viene turbato. La considerazione precedente giustifica il nome di *linee isostatiche* che comunemente si dà alla linee involuppo delle direzioni principali. La conoscenza delle linee isostatiche è di prezioso aiuto in svariati problemi tecnici, soprattutto nel campo del conglomerato armato; poichè infatti in questo si tende ad affidare ad una opportuna armatura metallica gli sforzi di trazione che il conglomerato non è di per sè atto a sopportare, soluzione optimum del problema è quella di disporre tali armature secondo le isostatiche di trazione. Questa condizione in pratica non è completamente soddisfacibile, sia per la variabilità dei carichi agenti (il che fa variare l'andamento delle linee isostatiche), sia per le difficoltà esecutive che renderebbero poco economica la costruzione; ad essa però si cerca di avvicinarsi quanto più possibile, ed è quanto si verifica nelle travi inflesse (fig. 2-42) e, ancora più, nelle volte sottili, nei serbatoi, nelle lastre, nelle strutture cellulari, ecc.