Prof. Ing. VINCENZO FRANCIOSI

PROFESSORE ORDINARIO DI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI
NELL'UNIVERSITA' DI NAPOLI

SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

VOLUME PRIMO

EDITORE LIGUORI - NAPOLI

1965

PREFAZIONE ALLA PRIMA EDIZIONE

È ormai consuetudine premettere alla prima edizione di un libro poche parole indicanti sommariamente gli scopi che ci si è prefissi nello scriverlo, e i mezzi con cui tali scopi si è cercato di conseguire. Nel caso in esame è innanzitutto opportuno chiarire la posizione ed i limiti del dominio della Scienza delle Costruzioni.

Nello spazio delle discipline la S.d.C. confina da una parte con la Meccanica Razionale, in particolare con la Meccanica del mezzo continuo, e dal versante opposto con le materie strettamente applicative, direi quasi cantieristiche e tecnologiche, come Costruzioni di Macchine, Costruzioni Stradali, Costruzioni Navali, Meccanica Tecnica del terreno, Costruzioni Aeronautiche, Costruzioni in legno, ferro e cemento armato, Costruzione di Ponti, etc.

Il compito assegnato alla S.d.C. è quello di fornire il grado di sicurezza con cui una determinata costruzione, soggetta a determinati cimenti, è garentita nei riguardi della crisi.

Dalla posizione che occupa, e dalle risposte che ad essa si chiedono, deriva il particolarissimo carattere della S.d.C., materia di transizione per eccellenza; e questo carattere è felicemente riconosciuto dal vigente ordinamento degli studi universitari.

Rientra nella dinamica delle cose che la S.d.C. abbia in sé l'impulso a valicare i suoi confini, per accamparsi nel dominio della Meccanica Razionale dalla parte della Teoria dell'elasticità, e in quello delle materie applicate dalla parte della Tecnica delle Costruzioni; come è altrettanto fatale che la S.d.C. veda i suoi stessi confini spesso violati dalle discipline limitrofe.

È necessario pertanto definire ciò che comunque è patrimonio inalienabile della S.d.C., e ciò che può essere oggetto di mercato.

La S.d.C. utilizza alcuni capitoli della Meccanica del continuo, e cioè l'analisi della deformazione e dello stato tensionale, la teoria dei mezzi elastici isotropi e relative equazioni dell'equilibrio elastico, la teoria del potenziale elastico. Naturalmente, di questi capitoli sono particolarmente sviluppate le parti sulle quali si poggia sia l'edificio della S.d.C. che quello delle materie costruttive, e se ne mettono in evidenza soprat-

tutto gli aspetti applicativi. Lo stesso avviene per la statica e per la geometria delle aree, i cui risultati si ereditano in blocco dalla Meccanica Razionale, affinandone il carattere tecnico.

Partendo da queste basi, la S.d.C. appronta gli strumenti fondamentali per il calcolo delle sollecitazioni nelle strutture: estensione del principio dei lavori virtuali ai sistemi deformabili, teorema di stazionarietà della energia potenziale totale, teoremi di reciprocità, teoremi delle derivate del lavoro.

La S.d.C. si preoccupa poi di fornire le soluzioni, sia pure approssimate, delle più elementari unità strutturali: travi (problema del De Saint-Venant, ellisse di elasticità, teoria dei telai), lastre, piastre, volte sottili a semplice e doppia curvatura.

Inoltre la S.d.C. studia in generale, e ne assegna i criteri fondamentali di impostazione, i varii problemi di stabilità dell'equilibrio elastico e — compito ultimo in ordine di esposizione, ma non di importanza — indaga sugli effetti delle distorsioni, intendendo come tali tutte le deformazioni di carattere anelastico: termiche, viscose, plastiche, etc.

Nel corso ufficiale di S.d.C. i problemi di stabilità dell'equilibrio si sfiorano appena, limitatamente al solido di Eulero, e quelli inerenti alle distorsioni si ignorano totalmente. Non sarebbe inopportuno, nel quadro di una generale revisione dell'ordinamento degli studi, prevedere un corso di S.d.C. biennale, con conseguente alleggerimento del corso annuale in atto, che permettesse di inserire nell'insegnamento qualche cenno non troppo vago ad argomenti di tale importanza.

Completano naturalmente il dominio di pertinenza della S.d.C. gli studi relativi alla determinazione sperimentale delle qualità elastiche e resistenti dei materiali, ed ai criterii attraverso i quali, utilizzando i risultati dei calcoli e delle sperimentazioni, si può arrivare al valore del grado di sicurezza; è questa, forse, la zona più affascinante e tormentata della S.d.C.

Dalla S.d.C. le discipline applicate traggono i metodi e i risultati generali per risolvere i vari problemi particolari, che ad esse attengono; è di loro competenza lo sviluppo di procedimenti pratici di calcolo che, basati sui metodi della S.d.C., sono appropriati ai vari schemi strutturali, e trovano immediato sfocio nella realizzazione di cantiere e di officina.

Il presente volume contiene nei primi quattro capitoli una breve trattazione dell'analisi della deformazione, dello stato tensionale, delle relazioni di elasticità per i corpi isotropi; quanto cioè della teoria del continuo è strettamente indispensabile all'ingegnere. Particolare rilievo si è dato alle componenti del secondo ordine della deformazione, così importanti per lo studio dei problemi di stabilità attraverso il criterio energetico, e sulle quali mi pare si trovi ancora in giro qualche ine-

sattezza; si è poi distinto, ogni volta che è parso opportuno, fra i dominii mono e pluriconnessi, soprattutto in vista della teoria delle distorsioni. Si è scesi nel dettaglio e nell'esemplificazione trattando del cerchio di Mohr delle tensioni che troverà in seguito continue utilissime applicazioni non solo nel corso di S.d.C., ma in svariati altri problemi (isostatiche delle volte sottili, c.a. precompresso, teoria delle terre, etc.).

Nei capitoli quinto e sesto si è fatta seguire, alle equazioni dell'equilibrio elastico secondo Cauchy e Beltrami, la trattazione dei problemi piani in coordinate cartesiane ortogonali e in coordinate polari; non solo questa sede è sembrata la più adatta per lo studio del problema della lastra, ma si è pensato che immediate estese applicazioni fossero necessarie a ben chiarire il problema dell'equilibrio elastico. Inoltre ci si appronta così la pietra di paragone per saggiare la validità e l'estensione del postulato e dei risultati del problema di De Saint-Venant. La lastra rettangolare si è studiata attraverso le espressioni polinominali, le serie trigonometriche, il procedimento delle differenze finite; si è affrontato il problema della lastra da silos. Si è studiata inoltre la trave di sezione rettangolare a forte curvatura, il problema delle concentrazioni di tensioni nella lastra forata, il problema di Boussinesq nel piano, e quello del cuneo.

Il capitolo settimo è dedicato all'energia di deformazione; si mette in particolare evidenza il significato fisico e la formulazione analitica del potenziale elastico, e si fornisce l'espressione della variazione seconda dell'energia di deformazione, pur essa indispensabile per i problemi di instabilità trattati per via energetica.

Si dimostra il teorema di Betti, e sulla sua scorta si riconosce la sovrapponibilità dell'energia vincolata e di quella inerente ai carichi applicati.

Il capitolo ottavo riguarda i cosiddetti criteri di resistenza, raggruppati nei tre fondamentali della curva intrinseca, del potenziale elastico e della deformazione massima; si è data particolare estensione al criterio della curva intrinseca, attesa la sua basilare importanza nella Meccanica del terreno, fornendo qualche elementare cenno introduttivo al calcolo delle spinte attiva e passiva delle terre.

La materia è notevolmente più vasta di quanto non si richieda allo studente; si è voluto fornire però agli allievi un testo che integrasse e completasse le lezioni, e che nello stesso tempo potesse utilmente accompagnarlo anche nel vivo della futura professione; perciò, ove necessario, non si è esitato a fornire coefficienti, grafici, tabelle. Si è tenuta presente inoltre la necessità di fornire gli addentellati agli insegnamenti di carattere applicativo che fanno seguito alla S.d.C., in modo che l'allievo possa agevolmente innestare la preparazione di queste materie su quella della

Scienza stessa. Come tale il libro si raccomanda anche al tecnico progettista che non voglia limitarsi alla cieca applicazione di formule e dati.

Ringrazio il mio amico e collaboratore prof. ing. Eugenio Bruzzese per il valido insostituibile aiuto datomi nell'ordinamento e nella stampa del volume così pure ringrazio l'Editore, alla cui preziosa esperienza è soprattutto dovuta l'ineccepibile veste editoriale.

Napoli, luglio 1959.

PREFAZIONE ALLA SECONDA EDIZIONE

Poche cose ho da aggiungere alla prima prefazione; sei anni di maggiore esperienza hanno infatti consolidato i miei convincimenti circa i limiti della materia ed il più valido metodo per esporla: rigore nelle definizioni e nelle premesse, e bando a qualsiasi approssimazione nei concetti basilari; snellezza nei procedimenti, senza indugiare in formali compiacimenti matematici; completezza di argomenti, senza peraltro naufragare nel manuale.

Rispetto alla prima edizione, il contenuto del primo volume risulta incrementato dal solo capitolo relativo alle macchine di prova ed agli strumenti di misura, con le quali gli ingegneri hanno sempre più frequenti contatti, diretti o indiretti. Anche gli altri capitoli, però, risultano arricchiti, specialmente quelli relativi ai criteri di sicurezza ed alla meccanica del terreno; con riferimento a quest'ultima si avverte che si è appena sfiorato l'argomento, la trattazione volendo essere nient'altro che un invito allo studio delle opere specializzate, ormai così numerose e pregevoli in ogni lingua.

A questa seguiranno in breve tempo le ristampe del secondo volume (le sollecitazioni della trave), del terzo (teoria delle strutture), del quarto (distorsioni e calcolo a rottura), e la stampa del quinto (stabilità dell'equilibrio); l'opera, così articolata, è certo esuberante nei riguardi dello studente, che ne deve affrontare per programma solo una parte, ma vuole essere utile come visione generale della materia, e per l'allievo che ci si avvicina per la prima volta, e, soprattutto, per l'ingegnere che desideri rendersi ragione delle origini e dei limiti delle formule e dei procedimenti che costituiscono il suo pane quotidiano.

Molto l'opera deve alla presentazione editoriale, cui ha provveduto con rara competenza e straordinaria larghezza di idee il dott. Rolando Liguori; e ringrazio alla fine il prof. ing. Eugenio Bruzzese per i consigli, il sostegno morale, e la brillante e metodica trattazione contenuta nell'ultimo capitolo.

Napoli, luglio 1965.

CAPITOLO I

SPOSTAMENTI E DEFORMAZIONI DEI MEZZI CONTINUI

1. Generalità.

Si definisce *mezzo continuo* o *corpo continuo* una regione dello spazio delimitata da una o più superfici chiuse, ed occupata da materia in ogni sua parte comunque piccola. La suddetta definizione prescinde dalla struttura molecolare, e come tale è una astrazione. Nei mezzi continui rientrano i solidi, i liquidi, gli aeriformi; la Scienza delle Costruzioni prende in esame soltanto i solidi.

La regione dello spazio occupata dal mezzo continuo si dice *connessa* se, dati due qualsiasi punti di essa, si può passare dall'uno all'altro seguendo una curva contenuta tutta nella regione. Questa poi si dice *semplicemente connessa* se ogni curva chiusa in essa contenuta è *riducibile,* il che significa che ognuna di tali curve si può, per deformazione continua (e cioè passando sempre da una curva ad un'altra vicinissima) e senza mai uscire dalla regione, ridurre ad un punto.

Se esiste qualche curva chiusa non riducibile, la regione si dice *molteplicemente connessa.* Se n è il numero dei tagli, effettuati secondo superfici appartenenti tutte alla regione, necessario per rendere la regione semplicemente connessa, $n+1$ è il *grado di connessione* della regione.

Una sfera, o un cilindro finito, dividono lo spazio in due regioni semplicemente connesse; un cilindro indefinito divide lo spazio in una regione semplicemente connessa ed una due volte connessa; un toro in due regioni doppiamente connesse.

Si osservi che una regione semplicemente connessa può essere limitata da più superfici chiuse; valga come esempio la regione compresa tra due superfici sferiche concentriche. Una sola superficie chiusa può d'altro canto limitare una regione pluriconnessa; tale è il caso del toro.

Nel piano una regione semplicemente connessa non può essere invece limitata che da una sola curva chiusa; la regione compresa tra una curva chiusa esterna ed n curve chiuse interne risulta $n+1$ volte connessa (fig. 1-1).

Un telaio ordinario di r ritti e t traversi è $1 + (r - 1)\,t$ volte con-

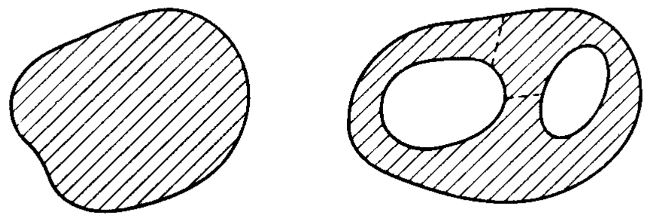

FIG. 1-1

nesso (fig. 1-2); un arco due volte connesso (fig. 1-3).

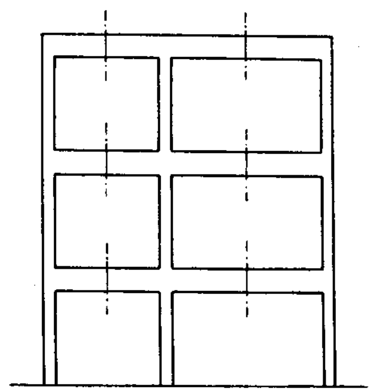

FIG. 1-2

Una struttura è costituita da più parti, ciascuna da considerare come

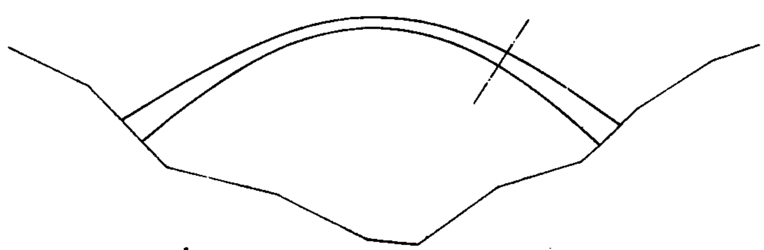

FIG. 1-3

un mezzo continuo connesso, collegate tra loro e con il suolo; della natura di questi collegamenti (vincoli interni ed esterni) si tratterà in un capitolo seguente.

Sotto l'azione di cause che si preciseranno tra breve la configurazione della struttura subisce un cambiamento. Il generico punto passa dalla posizione P in assenza della causa alla posizione P′ in presenza della causa stessa; il vettore $\bar{s} = PP'$ si chiama *spostamento* del punto P (fig. 1-4).

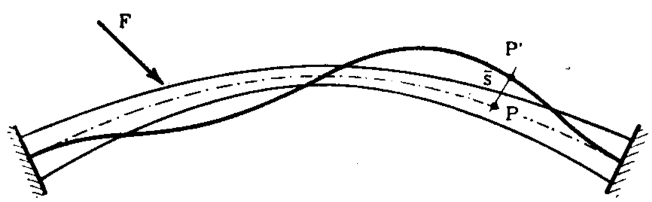

FIG. 1-4

I diagrammi delle componenti, valutate secondo una determinata direzione, degli spostamenti dei punti appartenenti ad una curva o ad una superficie si chiamano *deformate*.

Cause che producono spostamenti sono le *forze* applicate alla struttura. Le altre cause che producono spostamenti vanno comprese tutte sotto il nome di *distorsioni*; esse sono, per esempio, le variazioni termiche o di umidità, i procedimenti correttivi o tecnologici di forzatura, la precompressione, i cedimenti vincolari. Altre distorsioni, di cui si tratterà in seguito, derivano dal superamento della soglia elastica (distorsioni plastiche), dal rifluire del materiale sotto le sollecitazioni permanenti (distorsioni viscose), dalla contrazione del conglomerato durante la presa (ritiro).

Si chiama *iniziale* la configurazione della struttura in assenza di forze e distorsioni, *deformata* la configurazione in presenza delle stesse. Se le distorsioni non entrano in gioco, la configurazione iniziale è nella realtà facilmente ottenibile, poichè le forze, compreso il peso proprio, possono essere tutte rimosse o neutralizzate. Non altrettanto accade per le distorsioni perchè mentre alcune possono essere a volte annullate (come le variazioni termiche, riportando il materiale alla temperatura di realizzazione), altre invece, come le plastiche, non possono scomparire che inducendo altre distorsioni, il che è spesso solo idealmente possibile.

Un volume elementare della struttura subisce una *deformazione* quando risultano alterate le mutue distanze di alcuni o di tutti i punti dell'elemento stesso. A tale proposito si fa notare che esistono spostamenti — *spostamenti rigidi* — che non sono accompagnati da deformazioni; se per esempio su una trave isostatica si verifica un cedimento vincolare, si hanno spostamenti per i quali variano le posizioni relative delle singole parti e quindi le distanze relative tra due punti appartenenti a parti diverse, ma non deformazioni degli intorni dei punti di ogni parte. Così pure, si fa notare che può darsi il caso di strutture in cui una causa, che generalmente provoca spostamenti e deformazioni, non ne provoca affatto; così accade, per esempio, in una trave sottile ad asse rettilineo incastrata agli estremi e soggetta ad una variazione termica uniforme.

Nel presente capitolo si tratterà degli aspetti esclusivamente geometrici degli spostamenti e delle deformazioni, prescindendo dalle cause che possono produrli.

2. Componenti dello spostamento.

Le componenti u v w del vettore $\bar{s} = PP'$ (fig. 1-4) in un riferimento cartesiano, che in genere si assume ortogonale, si definiscono *componenti dello spostamento*; le u v w sono tre funzioni del punto P, e cioè delle coordinate x y z di P, definite in tutta la regione occupata dal corpo.

Una terna u v w si dice *congruente* se non si verificano per essa distacchi, compenetrazioni o tranciamenti di materia, in una parola se non si verificano rotture. Ciò equivale a dire che una terna u v w è congruente se sono rispettati i vincoli e la compagine del corpo.

Le due condizioni si distinguono in *congruenza esterna* (rispetto dei vincoli) e *congruenza interna* (rispetto della compagine).

Una terna reale deve essere congruente; tale condizione, necessaria, non è certo però sufficiente per la realtà, giacchè devono essere rispettate altre condizioni, che poi si preciseranno, relative alle sollecitazioni interne.

Ambedue le condizioni suddette si traducono in termini analitici.

Per il rispetto dei vincoli occorre e basta che le u v w scritte in corrispondenza dei punti vincolati verifichino particolari relazioni, dette *condizioni ai limiti* o *condizioni di vincolo*; queste saranno precisate più avanti.

La congruenza interna limita qualitativamente le funzioni u v w. Infatti la terna

$$\begin{aligned} &u\ (x\,y\,z)\\ &v\ (x\,y\,z)\\ &w\ (x\,y\,z) \end{aligned} \tag{a}$$

è definita nella regione V occupata dal corpo prima che esso subisca gli spostamenti di cui le (a) sono le componenti; ogni punto P (x y z) di V si porta in un punto P′ (x′ y′ z′); l'insieme dei punti P′ è la regione V′ occupata dal corpo a spostamenti avvenuti. Le coordinate x′ y′ z′ sono legate alle x y z dalle relazioni

$$\begin{aligned} x' &= x + u\ (x\,y\,z) = x'\ (x\,y\,z)\\ y' &= y + v\ (x\,y\,z) = y'\ (x\,y\,z)\\ z' &= z + w\ (x\,y\,z) = z'\ (x\,y\,z)\ . \end{aligned} \tag{b}$$

Le (b) stabiliscono una corrispondenza tra le due regioni V e V′, e cioè una *trasformazione*. Per la congruenza interna occorre innanzitutto che le (b), e quindi le u v w, siano *continue* in tutta la regione occupata del corpo; se c'è congruenza, infatti, dati due qualsiasi punti vicini P e Q ed i trasformati P′ e Q′, facendo tendere P a Q fino a coincidere, anche P′ e Q′ tendono a coincidere. E' poi necessario che le (b), e quindi le u v w, siano *uniformi*, cioè *ad un sol valore*; questo equivale a dire, nell'ipotesi di derivabilità delle u v w, che dati due punti qualunque P e Q comunque distanti ed una qualsiasi curva c che li congiunga, in domini mono o pluriconnessi, le tre espressioni

$$\begin{aligned} u_Q &= u_P + \int_c \left(\frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy + \frac{\partial u}{\partial z}\, dz\right) \\ v_Q &= v_P + \int_c \left(\frac{\partial v}{\partial x}\, dx + \frac{\partial v}{\partial y}\, dy + \frac{\partial v}{\partial z}\, dz\right) \\ w_Q &= w_P + \int_c \left(\frac{\partial w}{\partial x}\, dx + \frac{\partial w}{\partial y}\, dy + \frac{\partial w}{\partial z}\, dz\right) \end{aligned} \tag{c}$$

devono essere indipendenti dalla curva c, e cioè, se P è fisso, funzioni ad un sol valore delle coordinate di Q.

Le due condizioni di continuità e uniformità in tutto il mezzo sono pure, assieme, sufficienti per garantire la congruenza interna; infatti nella zona ove tale congruenza non fosse rispettata le u v w sarebbero o discontinue, o a più valori. Si ammette così implicitamente come non contraria alla congruenza interna l'accumulazione di più punti P in un sol punto P′; se si volesse infatti escludere anche tale caso nella definizione di congruenza interna (*Muskhelishvili*), si dovrebbero aggiungere alle due suddette condizioni altre due, essere anche la trasformazione inversa

$$\begin{aligned} x &= x\ (x'\, y'\, z') \\ y &= y\ (x'\, y'\, z') \\ z &= z\ (x'\, y'\, z')\ , \end{aligned}$$

ottenuta risolvendo il sistema (b) rispetto ad x y z, caratterizzata dalla continuità e dalla uniformità; queste due condizioni sarebbero in tal caso anch'esse necessarie, ed il complesso delle quattro condizioni sufficiente per la congruenza interna.

La formulazione (c) della condizione di uniformità è utile per tradurre tale condizione in termini analitici; essa si utilizzerà infatti al par. 1-16 per trarre le equazioni di compatibilità tra le componenti della deformazione. Si nota intanto che, data la forma differenziale

$$f\,dx + g\,dy + h\,dz$$

dove f g h sono funzioni di x y z ad un sol valore, continue con le loro derivate prime non omologhe, e cioè:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\,,\ \frac{\partial f}{\partial z}\,,\ \frac{\partial g}{\partial x}\,,\ \frac{\partial g}{\partial z}\,,\ \frac{\partial h}{\partial x}\,,\ \frac{\partial h}{\partial y}\right)$$

l'integrale

$$\int f\,dx + g\,dy + h\,dz$$

non dipende dalla curva c (e cioè è funzione ad un sol valore) in domini monoconnessi se, e solo se, sono soddisfatte le condizioni

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\,,$$

in domini pluriconnessi se, e solo se, oltre alle suddette condizioni ne sono verificate altre relative alle curve chiuse non riducibili, di cui si parlerà alla fine del capitolo.

Quindi l'eventuale esistenza delle derivate prime delle u v w uniformi, continue, e delle derivate seconde miste pur continue (e di necessità uniformi) è condizione sufficiente (*) per l'uniformità delle u v w in domini monoconnessi; essa lo è pure in domini pluriconnessi, purchè siano soddisfatte anche alcune condizioni complementari.

Basta perciò che una terna u v w, assegnata ad arbitrio o ricavata da un sistema di equazioni, presenti ovunque nel corpo derivate prime, e seconde miste, uniformi e continue, perchè essa sia in domini monoconnessi una possibile terna di componenti dello spostamento nei riguardi della congruenza interna; mentre possono esistere altre terne, continue e uniformi, che non presentano le suddette proprietà nei riguardi delle derivate. L'esistenza delle suddette derivate è perciò condizione sufficiente per la congruenza interna, da sola nei domini monoconnessi e accompagnata da altre (u') nei domini pluriconnessi, mentre non è condizione necessaria.

(*) Se esistono le derivate prime continue, e se le derivate seconde miste sono continue, in tutto il dominio, per il teorema di *Schwarz* le derivate seconde soddisfano ovunque la condizione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\,.$$

Si ricordi poi che le derivate di una funzione uniforme, se esistono, sono pur esse uniformi.

Un'ipotesi che condiziona gran parte dei risultati cui si perverrà (esplicitamente si noteranno i casi in cui essa non interviene) è quella cosiddetta di *piccoli spostamenti*; le u v w, in tale ipotesi, sono tali che la variazione della distanza tra due punti qualsiasi della struttura possa trascurarsi nei riguardi della distanza stessa.

Ciò equivale a dire, nel caso di esistenza di tutte le derivate parziali prime delle u v w rispetto alle coordinate, che tali derivate sono trascurabili rispetto all'unità (e quindi i prodotti delle derivate rispetto alle derivate stesse); in tal caso infatti, e solo in tal caso, per le (c), si può in prima approssimazione porre $\bar{s}_P = \bar{s}_Q$ e quindi, per la presenza dei vincoli, $\bar{s}_P = \bar{s}_Q = 0$.

L'ipotesi di piccoli spostamenti si può esprimere in forma equivalente, nel caso delle strutture monodimensionali, dicendo che le caratteristiche della sollecitazione (cap. XII) possono essere calcolate sulla struttura indeformata.

Si avverte che l'ipotesi di piccoli spostamenti chiama in causa le variazioni di distanza di due punti comunque lontani della struttura; quasi sempre essa, non più valida in tal senso, lo è ancora se limitata a coppie di punti vicini e cioè a parti più piccole in cui si può scomporre la struttura.

In tal caso le derivate prime delle u v w non sono più trascurabili rispetto all'unità, ma lo sono ancora se depurate delle componenti relative ad uno spostamento rigido e variabile da parte a parte.

E' questo il caso della trave sottile della fig. 1-5, per la quale i risultati tratti nell'ipotesi di piccoli spostamenti (risultati del De Saint-Venant), in particolare il legame tra momento e curvatura, sono validi limitatamente ai tronchi di piccola lunghezza, mentre gli stessi risultati non sono più accettabili per tutta la trave. In particolare, gli spostamenti e le rotazioni non sono più quelli della trave considerata come solido di De Saint-Venant; e, cosa più importante, cade in difetto il principio di Kirchhoff (cap. V). Infatti, se la forza **F** è applicata da sola, la configurazione di equilibrio è quella della fig. 1-5 b; ma se prima della **F** agisce una **F'** (fig. 1-5 c) che poi svanisce, alla fine sotto la **F**, se questa è abbastanza elevata, è presente una configurazione (fig. 1-5 e) diversa da quella della fig. 1-5 b.

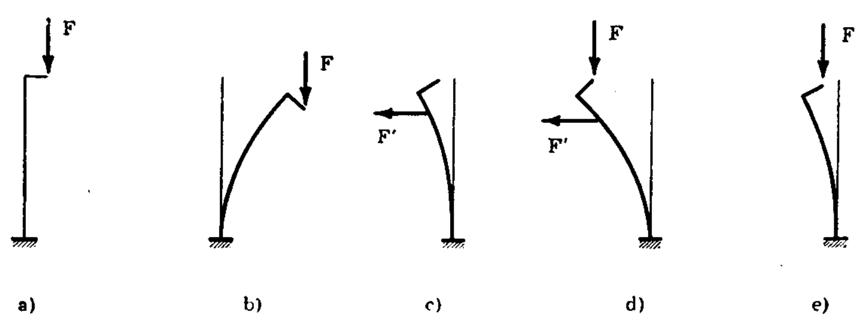

FIG. 1-5

Il punto P′ è il *corrispondente* o *trasformato* del punto P. L'insieme dei punti P′ corrispondenti dei punti P di una curva s è un'altra curva s′ *corrispondente* o *trasformata* di s.

Così pure l'insieme dei punti P′ corrispondenti dei punti P di una superficie S è un'altra superficie S′ *corrispondente* o *trasformata* di S; sia s che S sono limitati alla regione V, s′ ed S′ alla regione V′.

Se

$$f\,(x\,y\,z) = 0 \tag{d}$$

è l'equazione di S, l'equazione di S′ è

$$f\,[x\;(x'\,y'\,z')\;,\;y\;(x'\,y'\,z')\;,\;z\;(x'\,y'\,z')] = 0\;, \tag{e}$$

e cioè ancora

$$g\;(x'\,y'\,z') = 0\;. \tag{f}$$

Così pure, se la curva s è l'intersezione delle due superfici S_1 ed S_2, di equazioni

$$f_1\;(x\,y\,z) = 0$$

$$f_2\;(x\,y\,z) = 0$$

la curva s′ corrispondente di s è l'intersezione delle due superfici S'_1 ed S'_2, corrispondenti di S_1 ed S_2, di equazioni

$$g_1\;(x'\,y'\,z') = 0$$

$$g_2\;(x'\,y'\,z') = 0\;.$$

3. Componenti degli spostamenti rigidi.

Si sono già definiti *spostamenti rigidi* quelli cui non si associano deformazioni dei volumi elementari; un mezzo continuo che presenti la proprietà di essere indeformabile in ogni suo intorno si chiama *corpo rigido*. Una struttura può essere costituita da più corpi rigidi collegati tra loro e con il suolo; ad essa sono consentiti spostamenti solo se i vincoli sono in numero o disposizione opportuni (struttura *labile*).

Gli spostamenti di un corpo rigido derivano solo da una *traslazione* se, e solo se, è per ogni punto

$$\begin{aligned} u &= u_t \\ v &= v_t \\ w &= w_t \end{aligned} \tag{1}$$

essendo $u_t\, v_t\, w_t$ costanti; queste ultime prendono nome di *componenti della traslazione.*

La rotazione di un corpo rigido intorno ad un'asse x, se la sua ampiezza p (*) è molto piccola rispetto all'unità, provoca gli spostamenti (fig. 1-6)

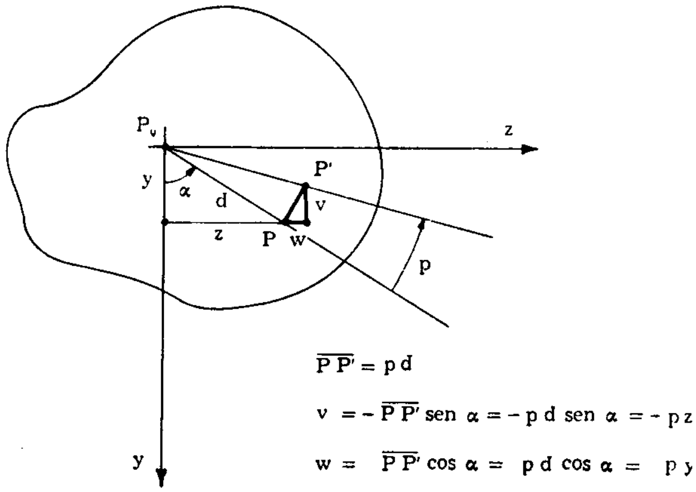

FIG. 1-6

$$\begin{aligned} u_p &= 0 \\ v_p &= -\ pz \\ w_p &= \ py \end{aligned} \qquad \text{(g)}$$

ove y e z sono due assi ortogonali ad x.

Se si hanno tre rotazioni p q r, piccole rispetto all'unità, intorno a tre assi ortogonali x y z di origine P_o (*centro di rotazione*) ognuna di esse provoca variazioni delle coordinate del punto generico trascurabili rispetto alle coordinate stesse, e quindi si può prima far agire la p, quindi la q che provoca gli spostamenti

$$\begin{aligned} u_q &= q\ (z + py) = qz \\ v_q &= 0 \\ w_q &= -\ qx \end{aligned} \qquad \text{(h)}$$

e poi la r che provoca gli spostamenti

$$u_r = -\ r\ (y - pz) = -\ ry$$

(*) Gli angoli si intendono sempre misurati in radianti; solo così si evita di introdurre una nuova unità fondamentale di misura.

$$\begin{aligned} v_r &= \quad r\,(x + qz) = \quad rx \\ w_r &= \quad 0\,. \end{aligned} \tag{i}$$

La somma delle (g) (h) ed (i) fornisce le componenti u v w degli spostamenti dovuti alle tre rotazioni p q r:

$$\begin{aligned} u &= \quad\quad\; - ry + qz \\ v &= \quad rx \quad\quad - pz \\ w &= - qx + py\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Le p q r sono le *componenti della rotazione* complessiva intorno a P_o; è interessante notare che il vettore $\bar{s}$ di componenti (1-2) è lo sviluppo del determinante

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

ove $\bar{i}\ \bar{j}\ \bar{k}$ sono i versori diretti secondo gli assi x y z.

Le (1-2) sono caratterizzate da matrice emisimmetrica con i termini della diagonale principale nulli; esse sono valide solo se p q r sono trascurabili rispetto all'unità.

Se un corpo presenta spostamenti rigidi, si consideri un generico punto P_0 fisso al corpo, di coordinate $x_0\,y_0\,z_0$, ed un punto P variabile nel corpo, di coordinate x y z. Si ha lo stesso risultato finale assegnando prima al corpo la traslazione $P_0 P'_0$,

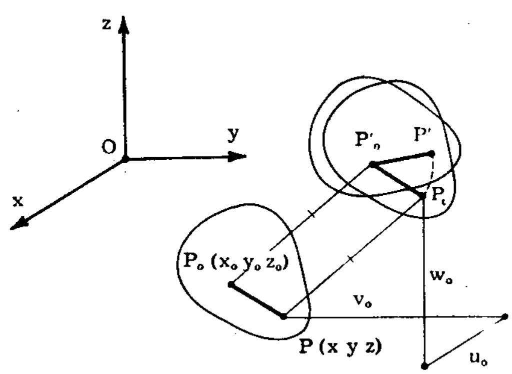

FIG. 1-7

di componenti $u_0\,v_0\,w_0$, che porta P_0 in P'_0, e poi una rotazione intorno al centro P'_0, che porta il corpo nella sua posizione finale (fig. 1-7); se le componenti p q r della rotazione sono piccole, si ha, per il punto P generico,

$$\begin{aligned} u &= u_0 - r\,(y - y_0) + q\,(z - z_0) \\ v &= v_0 + r\,(x - x_0) - p\,(z - z_0) \\ w &= w_0 - q\,(x - x_0) + p\,(y - y_0) \end{aligned} \qquad (\ell)$$

e cioè

$$\begin{aligned} u &= u_0 + ry_0 - qz_0 - ry + qz \\ v &= v_0 - rx_0 + pz_0 + rx - pz \\ w &= w_0 + qx_0 - py_0 - qx + py\,. \end{aligned} \qquad (m)$$

Dalle (m) si osserva che le componenti di un generico insieme di spostamenti di un corpo rigido hanno l'aspetto seguente, nell'ipotesi di piccole rotazioni,

$$\begin{aligned} u &= u_t - ry + qz \\ v &= v_t + rx - pz \\ w &= w_t - qx + py\,; \end{aligned} \qquad (4)$$

queste si chiamano *equazioni di Eulero.*

Viceversa, se un insieme di componenti di spostamento ha l'aspetto (1-4), esse sono un insieme di spostamenti rigidi. Infatti ponendo $u = u_t$, $v = v_t$, $w = w_t$, si hanno le coordinate $x_t\, y_t\, z_t$ dei punti i cui spostamenti si limitano a quelli relativi alla traslazione $u_t\, v_t\, w_t$; esse sono fornite dal sistema

$$\begin{aligned} - ry_t + qz_t &= 0 \\ rx_t - pz_t &= 0 \\ - qx_t + py_t &= 0\,; \end{aligned}$$

il determinante dei coefficienti è nullo, e la soluzione è

$$\begin{aligned} x_t &= k\,p \\ y_t &= k\,q \\ z_t &= k\,r\,. \end{aligned} \qquad (n)$$

I punti $x_t\, y_t\, z_t$ sono quelli della retta passante per l'origine e parallela al vettore di componenti $p\,q\,r$; con riferimento a qualsiasi punto di tale retta, ripetendo il procedimento già esposto in questa nota si ottengono dalle (ℓ) le (1-4); e quindi le (1-4) derivano da un insieme di spostamenti rigidi.

4. Corrispondenza tra le configurazioni di un volume elementare prima e dopo l'intervento di un insieme di spostamenti.

Data una terna u v w di componenti dello spostamento, interessa conoscere quale corrispondenza intercorra tra la configurazione di un volume elementare prima dell'intervento delle u v w, (intorno del punto generico P_0) e la configurazione dello stesso volume dopo l'intervento delle u v w (intorno del punto P'_0).

Per studiare tale corrispondenza è utile riferirsi a due terne cartesiane (ortogonali o meno) con assi paralleli ed equiversi, una $P_0\,x\,y\,z$ con origine in P_0, l'altra $P'_0\,x_1\,y_1\,z_1$ con origine in P'_0 (fig. 1-8); la corrispon-

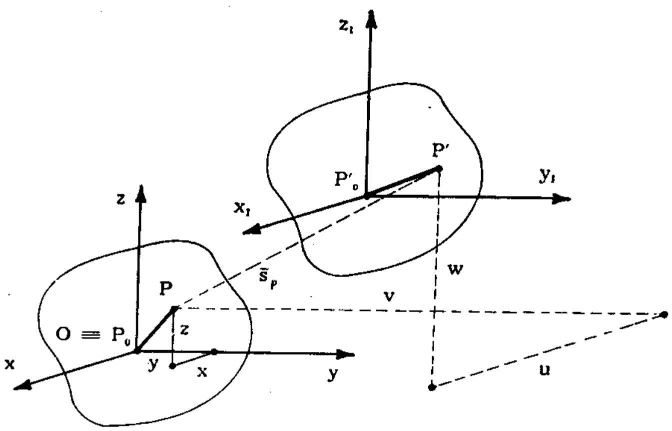

FIG. 1-8

denza si ha così a meno della traslazione di componenti $u_0\,v_0\,w_0$, pari alle componenti dello spostamento di P_0, traslazione che non altera la configurazione dell'intorno.

Le funzioni u v w, assegnate con riferimento alla terna $P_0\,x\,y\,z$, siano fornite di derivate prime e seconde continue e uniformi; si supporrà in seguito, salvo avviso in contrario, di trattare con funzioni u v w che soddisfino almeno a tali proprietà. Le u v w, per quanto già detto, saranno anch'esse quindi uniformi. Poichè le derivate seconde continue sono perciò stesso finite, si possono porre le u v w nell'intorno di P_0 sotto l'aspetto di Mac Laurin (o Taylor)

$$u\,(t) = u\,(0) + u'\,(0)\,t + \frac{1}{2!}\,u''\,(\vartheta)\,\vartheta^2 \qquad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 1)\ ; \qquad \text{(o)}$$

infatti, dato il punto C di coordinate a b c appartenente alla frontiera dell'intorno, i punti del segmento P_0C hanno coordinate ta, tb, tc, e la u (x y z) lungo P_0C può considerarsi funzione di t, per $0 \leqslant t \leqslant 1$. Si può quindi eseguire lo sviluppo (o), avendo posto il resto sotto la forma di Lagrange. Poichè il segmento P_0C è piccolo e la derivata seconda è finita, si può trascurare l'ultimo termine della (o), ottenendosi

$$u = u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 z .$$

Si può quindi porre

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 z \\ v &= v_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 z \\ w &= w_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 z . \end{aligned} \tag{5}$$

Con riferimento alla terna $P'_0 x_1 y_1 z_1$ le coordinate di P' sono fornite da

$$\begin{aligned} x_1 &= x + u - u_0 \\ y_1 &= y + v - v_0 \\ z_1 &= z + w - w_0 ; \end{aligned}$$

si ha così

$$\begin{aligned} x_1 &= \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0\right] x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 z \\ y_1 &= \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 x + \left[1 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0\right] y + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 z \\ z_1 &= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 y + \left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0\right] z . \end{aligned} \tag{6}$$

Le derivate della (1-6) sono calcolate nel punto P_0 (esse sono pure indipendenti dalla traslazione degli assi) e quindi sono delle costanti; le (1-6) si scrivono perciò

$$\begin{aligned} x_1 &= (1 + a_{11})\, x + a_{12}\, y + a_{13}\, z \\ y_1 &= a_{21}\, x + (1 + a_{22})\, y + a_{23}\, z \\ z_1 &= a_{31}\, x + a_{32}\, y + (1 + a_{33})\, z . \end{aligned} \tag{p}$$

Le (p) sono le equazioni di una *affinità*; è noto che questa è una particolare collineazione, in cui al piano improprio corrisponde il piano improprio, quindi ad una retta impropria una retta impropria, ad un punto improprio un punto improprio. Come in ogni collineazione, la corrispondenza tra i punti, le rette ed i piani è biunivoca; inoltre l'ordine di una curva o di una superficie algebra non viene alterato, così che per esempio ad un cerchio corrisponde una conica, ad una sfera una quadrica. In più, trattandosi di una affinità, date due punteggiate corrispondenti a ed a′ è costante il rapporto (*rapporto di similitudine*) $1 + \varepsilon_a$ tra due qualsiasi segmenti corrispondenti di a ed a′ (*punteggiate simili*); inoltre a rette parallele corrispondono rette parallele, a piani paralleli corrispondono piani paralleli.

Si deduce da ciò che a due segmenti equipollenti corrispondono due segmenti equipollenti, e quindi a due segmenti orientati paralleli qualsiasi corrispondono due segmenti orientati ancora paralleli, ed il loro rapporto resta invariato.

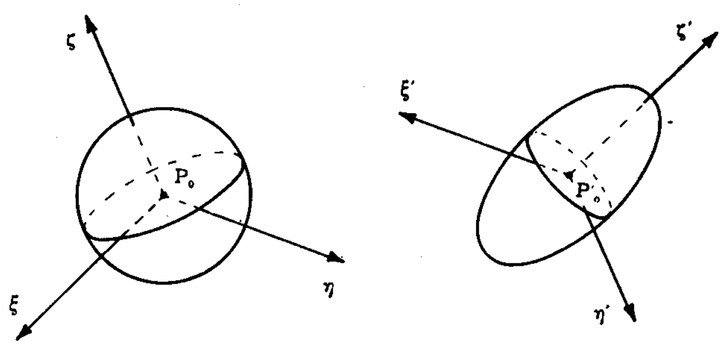

FIG. 1-9

Ad un parallelogramma corrisponde un parallelogramma, ad un parallelepipedo un parallelepipedo; ad un rettangolo, in genere, un parallelogramma, ad un parallelepipedo retto, in genere, un parallelepipedo obliquo.

Una sfera con centro in P_0 si trasforma in una quadrica a centro, con centro in P'_0; per le proprietà dell'affinità, a punti propri non possono corrispondere che punti propri, e quindi la quadrica è un ellissoide. Poichè ad un piano tangente alla sfera corrisponde un piano tangente all'ellissoide, ad ogni terna di rette triortogonali con centro in P_0 corrisponde una terna di diametri coniugati dell'ellissoide, e viceversa. Si instaura così una corrispondenza biunivoca tra le terne ortogonali in P_0 e le terne coniugate dell'ellissoide in P'_0; alla terna coniugata triortogonale $\xi' \eta' \zeta'$ in P'_0 — in genere unica — corrisponde una terna triortogonale $\xi \eta \zeta$ in P_0 (fig. 1-9). Escluso il caso particolare di ellissoide rotondo o sferico, esiste quindi una ed una sola terna triortogonale $\xi \eta \zeta$ in P_0 che si trasforma in una terna ancora triortogonale; le rette $\xi\,\eta\,\zeta$ sono le *direzioni principali di deformazione.*

In genere, dato un parallelepipedo retto con vertice in P_0 (fig. 1-10)

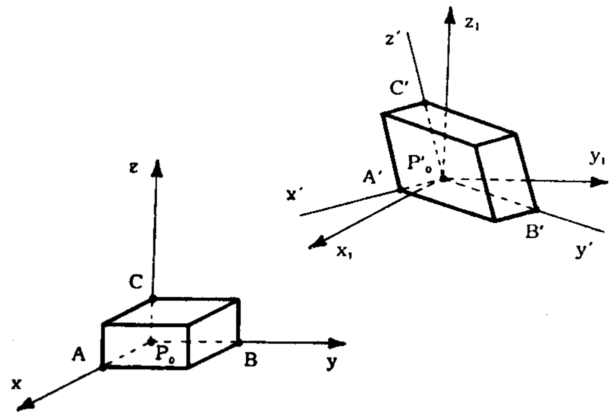

FIG. 1-10

basta conoscere le posizioni trasformate $a'\,b'\,c'$ delle tre rette $a\,b\,c$ tra loro ortogonali orientate secondo gli spigoli (in particolare le rette $x'\,y'\,z'$ se il parallelepipedo è orientato secondo gli assi $x\,y\,z$) e le variazioni dei tre spigoli, per poter definire i punti $A'\,B'\,C'$ trasformati dei vertici, e quindi il parallelepipedo trasformato; basta cioè, per conoscere quest'ultimo a meno di uno spostamento rigido, la conoscenza di tre variazioni angolari (variazioni degli angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{ca}$) e di tre variazioni di lunghezza (variazioni dei segmenti P_0A, P_0B, P_0C). Se invece il parallelepipedo retto ha gli spigoli orientati secondo le direzioni principali, il suo trasformato è ancora retto, e per definirlo a meno di uno spostamendo rigido basta conoscere le tre variazioni degli spigoli.

Poichè ogni punto può considerarsi vertice di un parallelepipedo retto con vertice in P_0 e spigoli orientati secondo $x\,y\,z$, basta la conoscenza dei tre rapporti di similitudine $1+\varepsilon_x$, $1+\varepsilon_y$, $1+\varepsilon_z$ relativi alle rette $x\,y\,z$, e delle tre variazioni angolari γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx} relative agli angoli $\widehat{xy}$, $\widehat{yz}$, $\widehat{zx}$ per ottenere il punto P', a meno della traslazione $P_0\,P'_0$ e di una rotazione rigida della terna $x\,y\,z$ intorno a P'_0; e cioè le sei quantità suddette bastano a definire la deformazione del volume elementare, la cui reale posizione si ottiene così a meno della traslazione di componenti $u_0\,v_0\,w_0$ e della rotazione rigida intorno a P'_0 che porta la terna $x'\,y'\,z'$ nella sua ubicazione effettiva. Le sei quantità $\varepsilon_i\;\gamma_{jk}$ prendono nome di *componenti della deformazione* in P_0. La conoscenza delle tre direzioni principali $\xi\,\eta\,\zeta$ (per definire le quali occorrono e bastano tre parametri) permette di limitare le sei quantità suddette ai tre numeri $\varepsilon_\xi\,\varepsilon_\eta\,\varepsilon_\zeta$ (*dilatazioni principali*).

Tutto quanto detto in questo paragrafo vale anche se gli spostamenti non sono piccoli, anche cioè se le derivate prime delle u v w non sono trascurabili rispetto all'unità.

L'introduzione di tale ipotesi permette, però, di riconoscere la sovrapponibilità delle trasformazioni del tipo (p).

Si considerino le due trasformazioni *a* e *b* caratterizzate dai coefficienti a_{ij} e b_{ij}. La prima è definita dai valori in P_o delle derivate prime di una terna $u_a\, v_a\, w_a$, la seconda dai valori delle derivate prime di una terna $u_b\, v_b\, w_b$.

La $u_a\, v_a\, w_a$ porta P_o in P'_{oa}, la $u_b\, v_b\, w_b$ porta P_o in P'_{ob}.

Se le u v w fossero costanti in tutto l'intorno di P_o, se cioè le derivate prime fossero nulle in P_o, si sarebbe in presenza di due traslazioni di componenti $u_a\, v_a\, w_a$ ed $u_b\, v_b\, w_b$, in ogni caso sovrapponibili, nel senso che è indifferente far agire prima l'una o prima l'altra, avendosi sempre come risultato la traslazione di componenti $u_a + u_b$, $v_a + v_b$, $w_a + w_b$.

L'effetto delle variazioni nell'intorno di P_o delle componenti u v w, da cui solo può dipendere la deformazione dell'intorno, è fornito appunto dalle (p); per studiarlo è indifferente considerare P_o fisso, e quindi la terna $x_1\, y_1\, z_1$ coincidente con la terna x y z.

Limitandosi per semplicità al caso di due variabili, la *a* porta il pun-

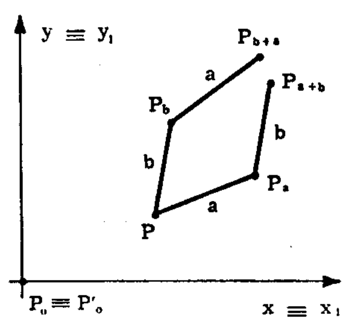

FIG. 1-11

to generico dell'intorno, P (xy), in P_a, di coordinate (fig. 1-11)

$$\begin{aligned} x_a &= (1 + a_{11})\, x + a_{12}\, y \\ y_a &= a_{21}\, x + (1 + a_{22})\, y\,; \end{aligned} \tag{q}$$

la *b* porta P_a in P_{a+b}, di coordinate

$$\begin{aligned} x_{a+b} &= (1 + b_{11})\, x_a + b_{12}\, y_a \\ y_{a+b} &= b_{21}\, x_a + (1 + b_{22})\, y_a\,. \end{aligned} \tag{r}$$

Dalle (q) ed (r) si ha

$$\begin{aligned} x_{a+b} &= (1 + a_{11} + b_{11} + a_{11}\, b_{11} + b_{12}\, a_{21})\, x + \\ &+ \quad (a_{12} + b_{12} + b_{11}\, a_{12} + a_{22}\, b_{12})\, y \\ y_{a+b} &= \quad (a_{21} + b_{21} + a_{11}\, b_{21} + b_{22}\, a_{21})\, x + \\ &+ (1 + a_{22} + b_{22} + b_{22}\, a_{22} + a_{12}\, b_{21})\, y\,. \end{aligned} \tag{s}$$

Se invece agisce prima la b e poi la la a, si passa da P a P_b e da questo a P_{b+a}, di coordinate

$$\begin{aligned} x_{b+a} &= (1 + b_{11} + a_{11} + b_{11}\, a_{11} + a_{12}\, b_{21})\, x + \\ &+ \quad (b_{12} + a_{12} + a_{11}\, b_{12} + b_{22}\, a_{12})\, y \\ y_{b+a} &= \quad (b_{21} + a_{21} + b_{11}\, a_{21} + a_{22}\, b_{21})\, x + \\ &+ (1 + b_{22} + a_{22} + a_{22}\, b_{22} + b_{12}\, a_{21})\, y\,. \end{aligned} \tag{t}$$

Le (s) e le (t) non coincidono, quindi P_{a+b} è diverso da P_{b+a}. Se si trascurano però i prodotti delle a_{ij} e b_{ij}, e ciò può farsi se gli spostamenti sono piccoli, si ha

$$\begin{aligned} x_{a+b} = x_{b+a} &= (1 + a_{11} + b_{11})\, x + \quad (a_{12} + b_{12})\, y \\ y_{a+b} = y_{b+a} &= \quad (a_{21} + b_{21})\, x + (1 + a_{22} + b_{22})\, y\,. \end{aligned} \tag{u}$$

In tale ipotesi quindi P_{a+b} coincide con P_{b+a}; cioè il risultato non dipende dall'ordine secondo cui a e b sono applicate, ed è lo stesso che si avrebbe con una sola trasformazione c del tipo (p) i cui coefficienti c_{ij} siano somma dei corrispondenti coefficienti della a e della b. Quindi, nell'ipotesi di piccoli spostamenti, e in presenza di più trasformazioni del tipo (p) caratterizzate dai coefficienti a_{ij} b_{ij} ..., lo spostamento finale del generico punto P (x y p) dell'intorno può essere ottenuto calcolando gli spostamenti dovuti alle singole trasformazioni, tutti con riferimento alle coordinate x y z, e sommandoli poi vettorialmente; ciò in sostanza è dovuto al fatto che, nell'ipotesi predetta, le variazioni delle coordinate dei punti dovuti alle trasformazioni (p) sono trascurabili rispetto alle coordinate stesse.

Il suddetto principio (*principio di sovrapponibilità dei piccoli spostamenti*) permette anche di scomporre una trasformazione caratterizzata dai coefficienti c_{ij} piccoli rispetto all'unità in più trasformazioni dipendenti dai coefficienti a_{ij} b_{ij} ..., piccoli a loro volta rispetto all'unità, e tali che sia

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} + \dots\,; \tag{v}$$

lo spostamento dovuto alla c_{ij} coincide con la somma degli spostamenti dovuti alle a_{ij}, b_{ij}... calcolati tutti con riferimento alle coordinate iniziali.

5. Le componenti della deformazione nell'ipotesi di piccoli spostamenti.

Dato l'intorno di un punto P_0, ed i valori delle derivate prime delle u v w in P_0, per le proprietà dell'affinità il rapporto di similitudine $1 + \varepsilon_a$ inerente ad una qualsiasi retta *a* è lo stesso per tutte le rette parallele ad *a*; esso cioè dipende soltanto dai coseni direttori della retta. Nell'analisi della deformazione il numero ε_a si chiama *coefficiente di dilatazione lineare* lungo la direzione a; con riferimento ad una retta passante per P_0, esso è fornito da

$$\varepsilon_a = \frac{P'_0 P' - P_0 P}{P_0 P}, \tag{7}$$

dove P è un qualsiasi punto appartenente alla retta *a* ed all'intorno di P_0. Il coefficiente di dilatazione lineare lungo una retta è quindi il rapporto tra la variazione di lunghezza di un qualsiasi segmento appartenente a tale retta (ed all'intorno di P_0) e la lunghezza originaria del segmento stesso; esso è positivo se corrisponde ad un allungamento.

La variazione dell'angolo $\widehat{ab}$ formato da due rette orientate *a* e *b* è anch'essa, per le proprietà dell'affinità, funzione della sola direzione delle due rette, e cioè dei loro coseni direttori; essa si chiama *scorrimento* mutuo γ_{ab} tra le due direzioni *a* e *b*. Lo scorrimento è positivo se corrisponde ad una diminuzione del minore dei valori assoluti dei due angoli formati dalle due rette *a* e *b*.

Si verificano le uguaglianze (*)

(*) L'angolo $\widehat{a\,b}$ (fig. 1-12) è quello che *a* descrive ruotando nel piano *a b*

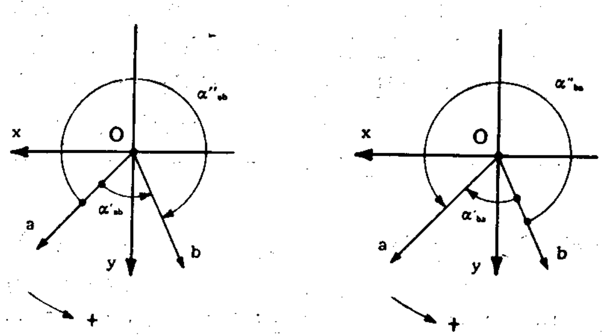

FIG. 1-12

intorno al punto comune di *a* e *b* per portarsi su *b*; esso è fornito, a meno di $2k\pi$

$$\begin{aligned} &\gamma_{ab} = \gamma_{ba} \\ &\gamma_{ab} = -\gamma_{a,-b} = -\gamma_{-a,b} = \gamma_{-a,-b}\ . \end{aligned} \tag{z}$$

La possibilità di conoscere gli ε_a ed i γ_{ab} (o anche i soli ε_a) per qualsiasi direzione e coppia di direzioni equivale alla possibilità di costruire il trasformato — a meno di spostamenti rigidi di tutto l'intorno — di una qualunque figura contenuta nell'intorno. Ma è stato già detto che, a ciò fare, basta — anche per spostamenti non piccoli — la conoscenza degli ε e dei γ relativi a tre assi (anche non ortogonali), in particolare agli assi coordinati. A conferma di ciò si mostrerà come ogni ε_a e γ_{ab} può ottenersi in funzione degli ε_i e γ_{ik} relativi agli assi coordinati, e dei coseni direttori delle rette a e b. E' importante perciò conoscere gli ε_i e γ_{ik} relativi agli assi coordinati, e cioè le *componenti della deformazione,* in funzione dei valori che le derivate prime — solo esse compaiono nelle (1-6) — della terna u v w assumono nell'intorno.

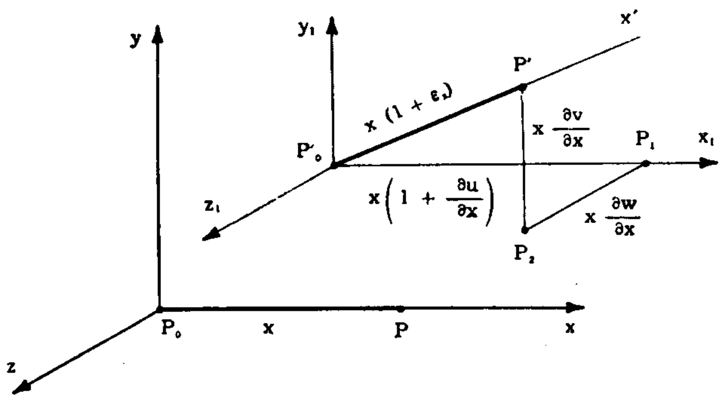

FIG. 1-13

Se P giace sull'asse x (fig. 1-13) dalla (1-6) si ricava

(k qualsiasi purchè intero) da α'_{ab} o da α''_{ab}. Fissato un riferimento x y nel piano $a\,b$, e quindi il verso positivo delle rotazioni, risultano precisati i segni di α'_{ab} ed α''_{ab}; nel caso in esame risulta $\alpha'_{ab} > 0$, $\alpha''_{ab} < 0$. Per ambedue questi angoli le funzioni trigonometriche assumono gli stessi valori.

L'angolo $\widehat{b\,a}$ è invece quello che b descrive per portarsi su a esso è fornito da α'_{ba} (< 0) o da α''_{ba} (> 0). Si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \widehat{a\,b} &= \operatorname{sen} \widehat{-a,-b} = -\operatorname{sen} \widehat{-a,b} = -\operatorname{sen} \widehat{a,-b} = -\operatorname{sen} \widehat{b\,a} \\ \cos \widehat{a\,b} &= \cos \widehat{-a,-b} = -\cos \widehat{-a,b} = -\cos \widehat{a,-b} = \cos \widehat{b\,a} \\ \operatorname{tg} \widehat{a\,b} &= \operatorname{tg} \widehat{-a,-b} = \operatorname{tg} \widehat{-a,b} = \operatorname{tg} \widehat{a,-b} = -\operatorname{tg} \widehat{b\,a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0\right] x \\ y_1 &= \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 x \\ z_1 &= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 x\,. \end{aligned} \tag{a'}$$

Le (a′) sono le proiezioni del segmento $P'_0 P'$ sui tre assi. Per la (1-7) si ha d'altronde

$$P'_0 P' = (1 + \varepsilon_x)\; x\,.$$

Trascurando, nell'ipotesi di piccoli spostamenti, $\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial w}{\partial x}$ in rapporto ad $1 + \frac{\partial u}{\partial x}$, si ha

$$P'_0 P' = P'_0 P_1$$

e quindi

$$(1 + \varepsilon_x)\; x = \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0\right] x$$

da cui

$$\varepsilon_x = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 .$$

Si considerino poi due punti P e Q giacenti rispettivamente sugli assi

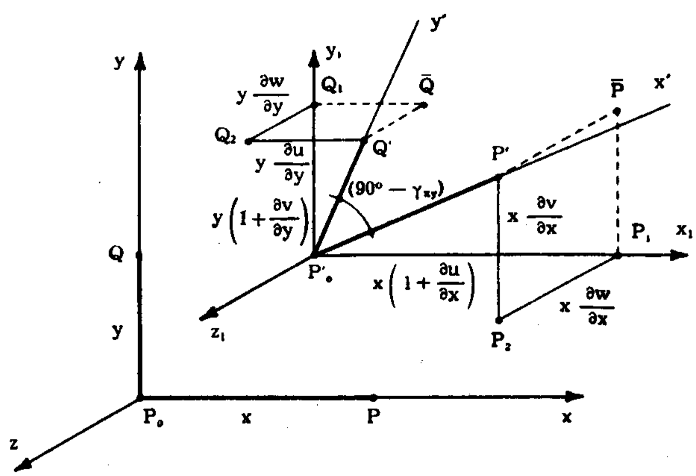

FIG. 1-14

x ed y — la terna x y z si suppone triortogonale — (fig. 1-14); dalle (1-6) si hanno le proiezioni di $P'_0 P'$ e $P'_0 Q'$ sui tre assi

$$P'_0 P_1 = \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0\right] x \qquad Q_1 \bar{Q} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 y$$

$$P_1 \bar{P} = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 x \qquad P'_0 Q_1 = \left[1 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0\right] y$$

$$\bar{P} P' = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 x \qquad Q_1 Q_2 = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 y\ .$$

Nell'ipotesi di piccoli spostamenti si può confondere l'angolo $Q'\widehat{P'_0}P'$

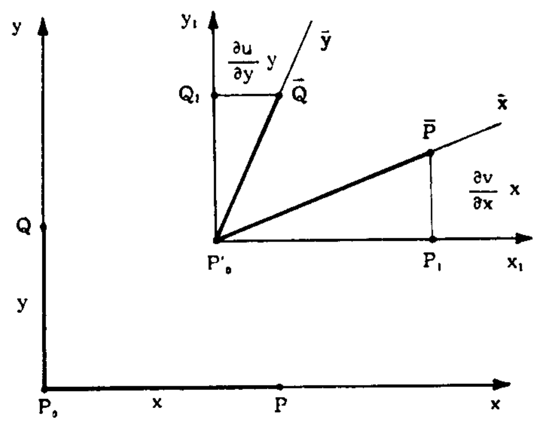

FIG. 1-15

con l'angolo $\bar{Q}\widehat{P'_0}\bar{P}$ (fig. 1-15); si ha poi, sempre nella stessa ipotesi,

$$P_1 \widehat{P'_0} \bar{P} = \frac{\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)}{1 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_0}$$

e quindi (*)

(*) Per $-1 < \varepsilon < 1$ risulta (serie geometrica)

$$\frac{1}{1-\varepsilon} = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \ldots\ ;$$

per ε piccolo, si può porre

$$\frac{1}{1-\varepsilon} = 1 + \varepsilon\ . \qquad \text{(b')}$$

$$\widehat{P_1 P'_o \overline{P}} = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_o \left[1 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_o\right] = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_o .$$

Così pure può porsi

$$\widehat{Q_1 P'_o \overline{Q}} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o .$$

Il segno positivo di $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_o$ e di $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o$ corrisponde per ambedue ad una diminuzione dell'angolo $P\widehat{P_o}Q$, quindi può scriversi

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_o + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o .$$

In definitiva, nell'ipotesi di piccoli spostamenti le componenti della deformazione nel punto P_o sono fornite da (si omettono da ora innanzi gli indici, per semplicità)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \qquad \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \qquad \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \qquad \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} .
\end{aligned} \tag{8}$$

Per quanto detto all'inizio del § 4, le ε_i γ_{jk} sono ad un sol valore e continue con le loro derivate prime.

6. Espressioni di ε_a e γ_{ab} generici in funzione delle componenti di deformazione, nell'ipotesi di piccoli spostamenti.

Si considerino (fig. 1-16) i punti P e Q sulle rette a e b, rispettivamente alle distanze d_P e d_Q da P_o; siano $\alpha_x\, \alpha_y\, \alpha_z$ e $\beta_x\, \beta_y\, \beta_z$ i coseni direttori delle rette a e b, ϑ_{ab} il minore in valore assoluto dei due angoli che a forma con b, scegliendo tra $\widehat{ab}$ e $\widehat{ba}$ il positivo ($0 < \vartheta_{ab} < \pi$).

Il coseno α_x di a e fornito da

$$\alpha_x = \frac{x_P}{d_P} ;$$

il coseno α'_x di a' è fornito da (1-6)

$$\alpha'_x = \frac{x_{1P}}{d_P\,(1+\varepsilon_a)} = \frac{\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) x_P + \frac{\partial u}{\partial y}\, y_P + \frac{\partial u}{\partial z}\, z_P}{d_P\,(1+\varepsilon_a)} .$$

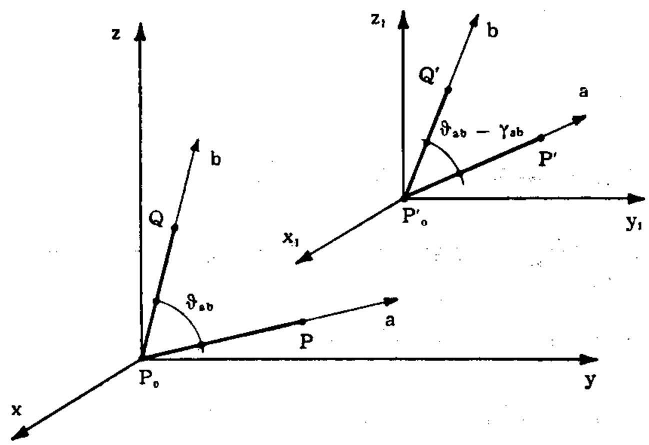

FIG. 1-16

Trascurando ε^2_a in rapporto ad ε_a si può scrivere (b')

$$\frac{1}{1+\varepsilon_a} = 1 - \varepsilon_a$$

e ancora

$$\alpha'_x = \left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) \alpha_x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\alpha_y + \frac{\partial u}{\partial z}\,\alpha_z\right] (1-\varepsilon_a) .$$

Si ha così l'espressione della variazione $\delta\alpha_x$ di α_x dovuta alla deformazione

$$\delta\alpha_x = \alpha'_x - \alpha_x = \left(\alpha_x + \frac{\partial u}{\partial x}\,\alpha_x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\alpha_y + \frac{\partial u}{\partial z}\,\alpha_z\right)(1-\varepsilon_a) - \alpha_x =$$

$$= -\varepsilon_a\,\alpha_x + \frac{\partial u}{\partial x}\,\alpha_x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\alpha_y + \frac{\partial u}{\partial z}\,\alpha_z ; \qquad (c')$$

si sono omessi i prodotti $\frac{\partial u}{\partial}\,\varepsilon_a$ perchè del secondo ordine (*).

(*) Trascurando ε_a^2 ed i prodotti $\frac{\partial u}{\partial}\,\varepsilon_a$ in rapporto ad ε_a, si trascurano le quantità del secondo ordine nelle derivate delle u v w; si è cioè nello stesso ordine di approssimazione che permette scrivere le (1-8).

Analogamente può scriversi

$$\delta\beta_x = -\ \varepsilon_b\,\beta_x + \frac{\partial u}{\partial x}\,\beta_x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\beta_y + \frac{\partial u}{\partial z}\,\beta_z\ . \qquad (d')$$

Poichè è

$$\cos\vartheta_{ab} = \alpha_x\,\beta_x + \alpha_y\,\beta_y + \alpha_z\,\beta_z$$

differenziando si ottiene

$$-\,\delta\vartheta_{ab}\ \mathrm{sen}\ \vartheta_{ab} = \alpha_x\delta\beta_x + \alpha_y\delta\beta_y + \alpha_z\delta\beta_z + \beta_x\delta\alpha_x + \beta_y\delta\alpha_y + \beta_z\delta\alpha_z\ . \qquad (e')$$

Il differenziale $\delta\vartheta_{ab}$ è pari in valore allo scorrimento γ_{ab}; poichè $0 < \vartheta_{ab} < \pi$, è $\delta\vartheta_{ab} = -\ \gamma_{ab}$.

La (e′) si traduce perciò, attraverso le (c′) e (d′) e le (1-8), nell'altra:

$$\begin{aligned}\gamma_{ab}\ \mathrm{sen}\ \vartheta_{ab} &= -\ (\varepsilon_a + \varepsilon_b)\ \cos\vartheta_{ab} + \\ &+ 2\ (\varepsilon_x\,\alpha_x\,\beta_x + \varepsilon_y\,\alpha_y\,\beta_y + \varepsilon_z\,\alpha_z\,\beta_z) + \\ &+ \gamma_{yz}\,(\alpha_y\,\beta_z + \alpha_z\,\beta_y) + \gamma_{zx}\,(\alpha_z\,\beta_x + \alpha_x\,\beta_z) + \gamma_{xy}\,(\alpha_x\,\beta_y + \alpha_y\,\beta_x)\ .\end{aligned} \qquad (9)$$

Se le due direzioni *a* e *b* coincidono, è

$$\mathrm{sen}\ \vartheta_{ab} = 0\ ,\quad \cos\vartheta_{ab} = 1\ ,\quad \varepsilon_a = \varepsilon_b\ ,\quad \alpha_x = \beta_x\ ,\quad \alpha_y = \beta_y\ ,\quad \alpha_z = \beta_z\ ,$$

e la (1-9) fornisce

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x\,\alpha_x^{\,2} + \varepsilon_y\,\alpha_y^{\,2} + \varepsilon_z\,\alpha_z^{\,2} + \gamma_{yz}\,\alpha_y\,\alpha_z + \gamma_{zx}\,\alpha_z\,\alpha_x + \gamma_{xy}\,\alpha_x\,\alpha_y\ . \qquad (10)$$

E cioè il coefficiente di dilatazione ε_a lungo una retta *a* passante per P_0 è funzione lineare omogenea delle componenti della deformazione in P_0, e quadratica omogenea dei coseni direttori della retta *a*.

Una volta conosciuti ε_a ed ε_b attraverso la (1-10) ed analoga, la (1-9) fornisce lo scorrimento mutuo γ_{ab} tra due qualsiasi direzioni *a* e *b*. Particolare interesse ha la espressione di γ_{ab} quando *a* e *b* sono inizialmente normali. Si ha allora $\vartheta_{ab} = \dfrac{\pi}{2}$, $\mathrm{sen}\ \vartheta_{ab} = 1$, $\cos\vartheta_{ab} = 0$, si trae perciò

$$\begin{aligned}\gamma_{ab} &= 2\ (\varepsilon_x\,\alpha_x\,\beta_x + \varepsilon_y\,\alpha_y\,\beta_y + \varepsilon_z\,\alpha_z\,\beta_z) + \\ &+ \gamma_{yz}\ (\alpha_y\,\beta_z + \alpha_z\,\beta_y) + \gamma_{zx}\ (\alpha_z\,\beta_x + \alpha_x\,\beta_z) + \gamma_{xy}\ (\alpha_x\,\beta_y + \alpha_y\,\beta_x)\ .\end{aligned} \qquad (11)$$

E cioè lo scorrimento mutuo γ_{ab} di due rette *a* e *b* ortogonali passanti per P_0 è funzione lineare omogenea delle componenti di deformazione in P_0, e bilineare omogenea dei coseni direttori di a e b.

Dalle (1-10) e (1-11), particolarizzando i coseni direttori delle direzioni a e b, è possibile ritrovare il già esposto significato meccanico delle sei componenti di deformazione.

7. Deformazione pura.

Si è detto al § 4 che, se si conoscono le tre direzioni principali (*terna principale*) $\xi\,\eta\,\zeta$ ed i relativi coefficienti $\varepsilon_\xi\,\varepsilon_\eta\,\varepsilon_\zeta$ (*dilatazioni principali*) la deformazione dell'intorno è definita. Con riferimento alla terna $P_0\,\xi\,\eta\,\zeta$ gli spostamenti

$$u^* = \varepsilon_\xi\,\xi$$
$$v^* = \varepsilon_\eta\,\eta \qquad (12)$$
$$w^* = \varepsilon_\zeta\,\zeta$$

portano il punto P generico nella posizione P*; l'insieme dei punti P* è l'intorno deformato, però non nella sua posizione effettiva.

Per ottenere quest'ultima, e cioè l'insieme dei punti P′, occorre portare la terna $P_0\,\xi\,\eta\,\zeta$ nella sua posizione effettiva $P'_0\,\xi'\,\eta'\,\zeta'$, e cioè imprimere al dominio deformato la traslazione $u_0\,v_0\,w_0$ che porti P_0 in P'_0, ed una rotazione rigida intorno al punto P'_0. Gli spostamenti (1-12) caratterizzano la cosiddetta *deformazione pura* (*).

Nell'ipotesi di piccoli spostamenti il calcolo delle $\varepsilon_\xi\,\varepsilon_\eta\,\varepsilon_\zeta$, delle $\xi\,\eta\,\zeta$ e delle componenti $p_0\,q_0\,r_0$ della rotazione della terna $\xi\,\eta\,\zeta$, in funzione dei valori che le derivate di u v w assumono in P_0, è semplificato.

Ciò perchè, per quanto detto alla fine del § 4, la trasformazione (1-16), che porta dall'intorno di P_0 semplicemente traslato di $u_0\,v_0\,w_0$ all'effettivo

(*) Se gli spostamenti non sono piccoli, si esporrà in seguito il procedimento per ottenere la posizione della terna $\xi'\,\eta'\,\zeta'$ e quindi quella della terna $\xi\,\eta\,\zeta$ (nonchè i coefficienti $\varepsilon_\xi\,\varepsilon_\eta\,\varepsilon_\zeta$) rispetto alla terna fissa $x_1\,y_1\,z_1$. Se gli spostamenti dovuti alla rotazione rigida che porta $\xi\,\eta\,\zeta$ in $\xi'\,\eta'\,\zeta'$ sono calcolati con riferimento alla posizione iniziale dei singoli punti, gli spostamenti dovuti alla deformazione pura, per poter essere sommati ai primi, devono essere calcolati sulla posizione dei punti a rotazione avvenuta, e cioè, attraverso le (1-12), con riferimento alla terna $\xi'\,\eta'\,\zeta'$. Se invece si calcolano prima gli spostamenti dovuti alla deformazione pura attraverso le (1-12) e con riferimento alla terna $\xi\,\eta\,\zeta$, gli spostamenti dovuti alla rotazione rigida devono essere calcolati sulla posizione dei punti a deformazione pura avvenuta.

intorno di P'_0 a deformazione avvenuta, può essere scomposta in due, cui sono associati gli spostamenti

$$\begin{aligned}
u_r &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)y+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)z \\
v_r &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)x+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)z \\
w_r &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)x+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)y
\end{aligned} \tag{f'}$$

$$\begin{aligned}
u^* &= \frac{\partial u}{\partial x}x+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)y+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)z \\
v^* &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)x+\frac{\partial v}{\partial y}y+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)z \\
w^* &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)x+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)y+\frac{\partial w}{\partial z}z\ ;
\end{aligned} \tag{g'}$$

infatti le derivate prime contenute nelle (f′) e nelle (g′) forniscono per somma le derivate prime che appaiono negli spostamenti $u\text{-}u_0$, $v\text{-}v_0$, $w\text{-}w_0$ (1-5); per semplicità nelle (f′) e (g′) si sono omessi gli indici indicanti che le derivate delle u v w sono calcolate nel punto $P_0\ (x_0\, y_0\, z_0)$.

Dalle (1-2) si riconosce che le (f′) derivano da una rotazione rigida dell'intorno, con centro P_0, le cui componenti sono fornite da

$$\begin{aligned}
p_0 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\
q_0 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\
r_0 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right).
\end{aligned} \tag{13}$$

Le (g′) possono scriversi, per le (1-8), poichè si è già supposta valida l'ipotesi di piccoli spostamenti,

$$
\begin{aligned}
u^* &= \varepsilon_x\, x + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\, y + \frac{1}{2}\gamma_{xz}\, z \\
v^* &= \frac{1}{2}\gamma_{yx}\, x + \varepsilon_y\, y + \frac{1}{2}\gamma_{yz}\, z\,. \\
w^* &= \frac{1}{2}\gamma_{zx}\, x + \frac{1}{2}\gamma_{zy}\, y + \varepsilon_z\, z\,.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

La matrice delle (1-14) è simmetrica rispetto alla diagonale principale; ciò permette di asserire che nella affinità connessa con le (1-14) la terna triortogonale che rimane triortogonale resta pure invariata di posizione. Da tale proprietà, che è caratteristica delle affinità a matrice simmetrica, e che si dimostrerà nel paragrafo seguente, segue che la terna principale $\xi\,\eta\,\zeta$ si sposta nella sua posizione definitiva per effetto delle sole (f'); quindi le (1-14) definiscono la deformazione pura, e le (1-13) sono le componenti $p_0\, q_0\, r_0$ della rotazione rigida che porta la terna principale nella sua posizione deformata.

8. Quadriche delle deformazioni.

Si è sempre nell'ipotesi di piccoli spostamenti.

Si prendano in esame gli spostamenti connessi con la deformazione (1-14). In presenza di spostamenti di tale tipo, e cioè a matrice simmetrica, sorge — si avverte fin d'ora che ciò accade anche se i coefficienti non sono piccoli rispetto all'unità, come è invece nel caso delle (1-14) — una famiglia di quadriche di interessanti proprietà. Introdotta la funzione

$$
F = \varepsilon_x\, x^2 + \varepsilon_y\, y^2 + \varepsilon_z\, z^2 + \gamma_{yz}\, yz + \gamma_{zx}\, zx + \gamma_{xy}\, xy \tag{h'}
$$

dalle (1-11) si ha

$$
\begin{aligned}
u^* &= \frac{1}{2}\,\frac{\partial F}{\partial x} \\
v^* &= \frac{1}{2}\,\frac{\partial F}{\partial y} \\
w^* &= \frac{1}{2}\,\frac{\partial F}{\partial z}\ ;
\end{aligned}
\tag{i'}
$$

e cioè la $\frac{F}{2}$ è il potenziale del campo vettoriale (1-14).

Poichè la F è una forma quadratica omogenea, $F = \text{cost.}$ rappresenta una quadrica con centro in P_0; ad ogni valore della costante corrisponde una quadrica della famiglia delle *quadriche delle deformazioni* o di *Cauchy*. Si consideri (fig. 1-17) un punto A dell'intorno di P_0. I coseni diret-

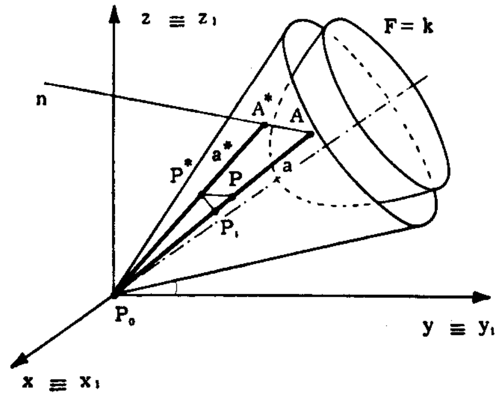

FIG. 1-17

tori della normale n in A alla quadrica di deformazione passante per A sono proporzionali ai valori delle tre derivate

$$\frac{\partial F}{\partial x} \quad \frac{\partial F}{\partial y} \quad \frac{\partial F}{\partial z}$$

calcolati in A; dalle (1-13) si deduce perciò che nella deformazione (1-14) il punto A si sposta secondo la normale n (*).

Poichè le coordinate di A sono fornite da

$$x = P_0 A \cdot \alpha_x \quad ; \quad y = P_0 A \cdot \alpha_y \quad ; \quad z = P_0 A \cdot \alpha_z$$

dove $\alpha_x\, \alpha_y\, \alpha_z$ sono i coseni direttori della retta $a = P_0 A$, sostituendo questi valori nell'equazione $F = k$ della quadrica della famiglia di Cauchy passante per A si ottiene

$$k = \overline{P_0 A}^2 \left(\varepsilon_x \alpha_x^2 + \varepsilon_y \alpha_y^2 + \varepsilon_z \alpha_z^2 + \gamma_{yz} \alpha_y \alpha_z + \gamma_{zx} \alpha_z \alpha_x + \gamma_{xy} \alpha_x \alpha_y\right)$$

e, per la (1-10),

$$\varepsilon_a = \frac{k}{\overline{P_0 A}^2} . \qquad (l')$$

(*) Il vettore di componenti $u^*\, v^*\, w^*$, poichè ammette il potenziale F, è ortogonale, conformemente alla teoria dei potenziali, alle superfici equipotenziali $F = \text{cost.}$

Basta perciò la conoscenza delle due quadriche $F = +k$ e $F = -k$ per determinare il coefficiente ε_a relativo a una qualsiasi retta a passante per P_0. In genere si costruiscono le due quadriche $F = +1$ e $F = -1$, così che la (l') fornisce

$$\varepsilon_a = \pm \frac{1}{\overline{P_0 A}^2} \tag{m'}$$

dovendosi scegliere il segno + o — secondo che la retta a incontra la quadrica $F = +1$ o $F = -1$.

I semidiametri delle due quadriche di equazioni

$$F = \varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 + \varepsilon_z z^2 + \gamma_{yz} yz + \gamma_{zx} zx + \gamma_{xy} xy = \pm 1 \tag{15}$$

forniscono perciò con gli inversi dei loro quadrati i valori assoluti dei coefficienti di dilatazione lineare in P_0; la quadrica $F = +1$ è relativa agli allungamenti, la quadrica $F = -1$ agli accorciamenti.

Tutti i punti della retta $P_0 A$ si spostano secondo rette parallele ad n (fig. 1-17), atteso il carattere di affinità della corrispondenza tra l'intorno indeformato e quello deformato. Disegnate perciò le due quadriche (1-15) è possibile ottenere la posizione deformata P^* di un qualsiasi punto P per effetto delle 1-14: si prolunga $P_0 P$ fino ad incontrare in A la quadrica, e si traccia da A la normale n alla quadrica; da P si traccia la parallela ad n; il segmento $P_0 A$ fornisce, attraverso la (m'), ε_a, che è positiva o negativa secondo che la quadrica è quella di equazione $F = +1$, o $F = -1$; si disegna sulla retta a un segmento $PP_1 = P_0 P \cdot \varepsilon_a$, e da P_1 si traccia — trattandosi di piccoli spostamenti — il piano normale ad a; l'intersezione P^* di questo piano con la parallela ad n per P fornisce la posizione deformata di P. La retta $a^* = P_0 P^*$ è la trasformata di a nella deformazione pura.

Le (1-15) sono due quadriche con centro in P_0; i punti situati sui tre assi $\xi\, \eta\, \zeta$ di queste quadriche si spostano lungo gli stessi assi, i quali perciò nella deformazione (1-14) restano ortogonali e, di più, non variano di posizione; perciò le (1-14) corrispondono alla deformazione pura; le direzioni $\xi\, \eta\, \zeta$, che presentano scorrimenti mutui nulli, sono le *direzioni principali della deformazione* in P_0. Le due terne principali relative alle $F = +1$ e $F = -1$ coincidono, poichè le due quadriche sono omotetiche, con centro in P_0 e rapporto pari ad i. Assumendo come terna di riferimento la $P_0\, \xi\, \eta\, \zeta$, le (1-15) si riducono alla forma canonica

$$F = \varepsilon_\xi \xi^2 + \varepsilon_\eta \eta^2 + \varepsilon_\zeta \zeta^2 = \pm 1 \tag{16}$$

essendo $\varepsilon_\xi\, \varepsilon_\eta\, \varepsilon_\zeta$ i coefficienti di dilatazione secondo le direzioni principali. Le quadriche (1-15) e (1-16) coincidono, poichè sono uguali i semidiametri lungo ogni retta per P_o. Dalla (1-16) si osserva come siano esclusi i casi del paraboloide ellittico o iperbolico, di equazioni rispettivamente

$$a\,\xi^2 + b\,\eta^2 = 2\,\zeta$$

e

$$a\,\xi^2 - b\,\eta^2 = 2\,\zeta$$

(*a* e *b* reali positivi); del resto il paraboloide non è a centro proprio.

Se $\varepsilon_\xi\,\varepsilon_\eta\,\varepsilon_\zeta$ sono tutti positivi, l'equazione $F = +1$ rappresenta un ellissoide con punti reali (equazione dell'ellissoide $a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 = +1$, con a b c reali e positivi) e l'equazione $F = -1$ un ellissoide con punti immaginari; se $\varepsilon_\xi\,\varepsilon_\eta\,\varepsilon_\zeta$ sono tutti negativi, l'equazione $F = -1$ corrisponde all'ellissoide reale, e la $F = +1$ all'immaginario. Se $\varepsilon_\xi\,\varepsilon_\eta\,\varepsilon_\zeta$ non sono tutti dello stesso segno, le due quadriche (1-15) sono ambedue reali; precisamente si tratta di un iperboloide iperbolico o ad una falda (di equazione $a\xi^2 + b\eta^2 - c\zeta^2 = +1$) e di un iperboloide ellittico o a due falde (di equazione $a\xi^2 - b\eta^2 - c\zeta^2 = +1$). Se per esempio ε_ξ ed ε_η sono positivi, ed ε_ζ negativo, la $F = +1$ rappresenta (fig. 1-18) un iperboloide ad una falda, e la $F = -1$ un iperboloide a due falde.

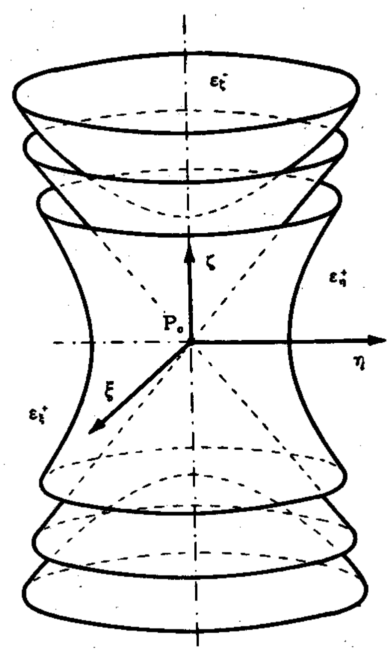

FIG. 1-18

L'equazione $F = 0$ rappresenta un cono, poichè la F è omogenea in $\xi\,\eta\,\zeta$; esso è il cono asintotico alle due quadriche $F = +1$ e $F = -1$, ed è reale se $\varepsilon_\xi\,\varepsilon_\eta\,\varepsilon_\zeta$ non sono dello stesso segno, immaginario se $\varepsilon_\xi\,\varepsilon_\eta\,\varepsilon_\zeta$ sono dello stesso segno. Nel primo caso (fig. 1-18) il cono $F = 0$ divide l'intorno di P_o in due parti: tutti gli elementi di retta uscenti da P_o e giacenti in una di queste parti si allungano, tutti gli altri si accorciano. Gli elementi appartenenti al cono non variano perciò di lunghezza, per ragioni di continuità; ciò può dedursi anche dalla (1-10), o dalla costruzione su riportata, essendo in tal caso n ortogonale ad a (fig. 1-17). Questo cono si chiama perciò *cono delle deformazioni nulle,* o anche *cono di scorrimento.*

Nel secondo caso tutte le rette dell'intorno presentano dilatazioni dello stesso segno.

9. Ricerche delle direzioni principali e delle tre dilatazioni principali.

Sia p (fig. 1-19) una delle tre direzioni principali per P_o, e P un punto su p a distanza r da P_o; siano $\alpha_{px}\,\alpha_{py}\,\alpha_{pz}$ i coseni direttori di p,

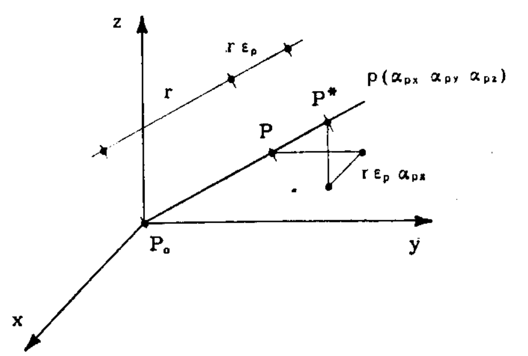

FIG. 1-19

e quindi $r\,\alpha_{px}$, $r\,\alpha_{py}$, $r\,\alpha_{pz}$ le coordinate di P. Il punto P si sposta per effetto della deformazione pura lungo $P_o P$, portandosi in P*. Le (1-14) permettono di scrivere (si è nell'ipotesi di piccoli spostamenti)

$$u^* = r\left(\varepsilon_x\,\alpha_{px} + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\,\alpha_{py} + \frac{1}{2}\gamma_{xz}\,\alpha_{pz}\right)$$

$$v^* = r\left(\frac{1}{2}\gamma_{yx}\,\alpha_{px} + \varepsilon_y\,\alpha_{py} + \frac{1}{2}\gamma_{yz}\,\alpha_{pz}\right)$$

$$w^* = r\left(\frac{1}{2}\gamma_{zx}\,\alpha_{px} + \frac{1}{2}\gamma_{zy}\,\alpha_{py} + \varepsilon_z\,\alpha_{pz}\right).$$

Poichè anche P* giace su p, è pure

$$u^* = r\,\varepsilon_p\,\alpha_{px}$$

$$v^* = r\,\varepsilon_p\,\alpha_{py}$$

$$w^* = r\,\varepsilon_p\,\alpha_{pz}.$$

Può perciò scriversi il sistema

$$\begin{aligned}
&(\varepsilon_x - \varepsilon_p)\,\alpha_{px} + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\,\alpha_{py} + \frac{1}{2}\gamma_{xz}\,\alpha_{pz} = 0\\
&\frac{1}{2}\gamma_{yx}\,\alpha_{px} + (\varepsilon_y - \varepsilon_p)\,\alpha_{py} + \frac{1}{2}\gamma_{yz}\,\alpha_{pz} = 0\\
&\frac{1}{2}\gamma_{zx}\,\alpha_{px} + \frac{1}{2}\gamma_{zy}\,\alpha_{py} + (\varepsilon_z - \varepsilon_p)\,\alpha_{pz} = 0\ .
\end{aligned} \tag{n'}$$

Il sistema (n′) è un sistema di tre equazioni algebriche lineari omogenee nelle incognite $\alpha_{px}\,\alpha_{py}\,\alpha_{pz}$; poichè esso deve essere soddisfatto da valori non tutti nulli delle incognite, atteso il fatto fisico dell'esistenza delle direzioni principali, assi di quadriche reali, deve essere nullo il determinante dei coefficienti:

$$\begin{vmatrix}
\varepsilon_x - \varepsilon_p & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz}\\
\frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_p & \frac{1}{2}\gamma_{yz}\\
\frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_p
\end{vmatrix} = 0 \tag{17}$$

La (1-17) è un'equazione algebrica del terzo grado nell'incognita ε_p. E' noto che una equazione di questo tipo, a matrice simmetrica rispetto alla diagonale (equazione secolare), ammette radici tutte reali; si ritrova così conferma di quanto detto più sopra. Le tre radici della (1-17) sono i valori delle dilatazioni principali $\varepsilon_\xi\,\varepsilon_\eta\,\varepsilon_\zeta$. Sostituendo uno alla volta questi valori nelle (n′) e tenendo conto della relazione

$$\alpha_{px}^2 + \alpha_{py}^2 + \alpha_{pz}^2 = 1\ ,$$

si ottengono tre terne di soluzioni $\alpha_{px}\,\alpha_{py}\,\alpha_{pz}$ caratterizzanti le tre direzioni principali $\xi\,\eta\,\zeta$.

Assumendo gli assi $\xi\,\eta\,\zeta$ come riferimento cartesiano, le (1-14) diventano ($\gamma_{\xi\eta} = \gamma_{\eta\zeta} = \gamma_{\zeta\xi} = 0$)

$$\begin{aligned}
u^* &= \varepsilon_\xi\ \xi\\
v^* &= \varepsilon_\eta\ \eta\\
w^* &= \varepsilon_\zeta\ \zeta
\end{aligned} \tag{18}$$

e cioè nella deformazione pura le componenti degli spostamenti secondo i tre assi principali sono proporzionali alle distanze dagli assi stessi (*). Si ha conferma così delle (1-12). La (1-17) diviene, col riferimento $P_o\ \xi\ \eta\ \zeta$,

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_\xi - \varepsilon_p & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\eta - \varepsilon_p & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\zeta - \varepsilon_p \end{vmatrix} = 0 \ ; \qquad (o')$$

la (1-17) e la (o') devono fornire gli stessi valori di ε_p, i coefficienti dei termini omologhi delle due equazioni devono perciò essere proporzionali. Poichè i coefficienti di $\varepsilon_p{}^3$ sono ambedue pari a -1, può dirsi che i coefficienti devono essere uguali. Ciò si traduce nelle relazioni di invarianza rispetto alla terna di riferimento (relazioni valide nell'ipotesi di piccoli spostamenti)

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta + \varepsilon_\zeta &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \\ \varepsilon_\xi\,\varepsilon_\eta + \varepsilon_\eta\,\varepsilon_\zeta + \varepsilon_\zeta\,\varepsilon_\xi &= \varepsilon_x\,\varepsilon_y + \varepsilon_y\,\varepsilon_z + \varepsilon_z\,\varepsilon_x - \\ &\quad - \frac{1}{4}\left(\gamma_{xy}{}^2 + \gamma_{yz}{}^2 + \gamma_{zx}{}^2\right) \\ \varepsilon_\xi\,\varepsilon_\eta\,\varepsilon_\zeta &= \varepsilon_x\,\varepsilon_y\,\varepsilon_z + \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\gamma_{xy}\,\gamma_{yz}\,\gamma_{zx} - \varepsilon_x\,\gamma_{yz}{}^2 - \varepsilon_y\,\gamma_{zx}{}^2 - \varepsilon_z\,\gamma_{xy}{}^2\right) \end{aligned} \qquad (19)$$

i cui termini rappresentano rispettivamente i cosiddetti *invarianti lineare, quadratico e cubico della deformazione* (**).

(*) Se i tre coefficienti di proporzionalità $\varepsilon_\xi\ \varepsilon_\eta\ \varepsilon_\zeta$ sono gli stessi, ogni punto si sposta secondo la sua congiungente con P_o, e quindi ogni terna trirettangola per P_o è principale. In tal caso la quadrica reale di deformazione è una sfera.

(**) Gli invarianti possono ricavarsi direttamente dalla (1-17). Sono note infatti dalla teoria delle equazioni algebriche le relazioni (formule di Newton) tra i coefficienti e le radici di un'equazione di grado n

$$a_o\,x^n + a_1\,x^{n-1} + \dots + a_{n-1}\,x + a_n = 0 \ :$$

$$-\frac{a_1}{a_o} = \sum_1^n{}_h\ \alpha_h$$

$$\frac{a_2}{a_o} = \sum_{h<k} \alpha_h\ \alpha_k$$

Si può anche scrivere

$$I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_z & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \varepsilon_x \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}$$

10. Le quadriche di deformazione in presenza di spostamenti non piccoli.

Se le derivate delle u v w in P_0 e quindi i coefficienti delle (1-6) non sono trascurabili rispetto all'unità, continua a valere tutto quanto detto al § 1-4 circa la corrispondenza geometrica tra l'intorno di P_0 e quello di

---

. . . .

$$(-1)^n \frac{a_n}{a_o} = \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \dots \alpha_n$$

e, in generale,

$$(-1)^i \frac{a_i}{a_o} = \sum_{h_1 < h_2 < \dots < h_i} \alpha_{h1}\ \alpha_{h2} \dots \alpha_{hi} \quad (i = 1, 2, \dots n) ;$$

la somma va estesa agli $\binom{n}{i}$ prodotti di ordine i delle radici.

Nel caso in esame è $n = 3$, $a_o = -1$, e perciò

$$a_1 = \varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta + \varepsilon_\zeta$$

$$-\ a_2 = \varepsilon_\xi\,\varepsilon_\eta + \varepsilon_\xi\,\varepsilon_\zeta + \varepsilon_\eta\,\varepsilon_\zeta$$

$$a_3 = \varepsilon_\xi\,\varepsilon_\eta\,\varepsilon_\zeta$$

e sostituendo i valori di $a_1\, a_2\, a_3$ ricavabili dallo sviluppo della (1-17) si perviene alle (1-19).

P'_0; cade in difetto il solo principio di sovrapponibilità dei piccoli spostamenti. La ricerca delle direzioni principali e delle dilatazioni corrispondenti si esegue scrivendo attraverso le (1-6) l'equazione dell'ellissoide trasformato della sfera di raggio r e centro P_0:

$$c_{xx}\, x_1^2 + c_{yy}\, y_1^2 + c_{zz}\, z_1^2 + 2\, c_{yz}\, y_1 z_1 + 2\, c_{zx}\, z_1 x_1 + 2\, c_{xy}\, x_1 y_1 = 1 \;;$$

da questa si traggono i valori dei coseni direttori delle tre rette $\xi'\,\eta'\,\zeta'$, assi dell'ellissoide, e dei tre semidiametri $e_\xi\, e_\eta\, e_\zeta$; da questi si ha

$$\varepsilon_\xi = \frac{e_\xi}{r} - 1$$

$$\varepsilon_\eta = \frac{e_\eta}{r} - 1$$

$$\varepsilon_\zeta = \frac{e_\zeta}{r} - 1 \,.$$

Sempre attraverso le (1-6), si determina la posizione originaria $\xi\,\eta\,\zeta$ della terna che si trasforma in $\xi'\,\eta'\,\zeta'$; rispetto alla terna $\xi\,\eta\,\zeta$, la deformazione è caratterizzata dalle (1-12); l'effettiva posizione dell'intorno si ha facendo traslare l'intorno, già deformato per le (1-12), di $P_0 P'_0$, e facendolo ruotare rigidamente intorno al punto P_0, in modo che $\xi\,\eta\,\zeta$ si portino in $\xi'\,\eta'\,\zeta'$.

Con riferimento alle (1-12), continua a valere la teoria delle quadriche di deformazione; la F è fornita, in rapporto alla terna $\xi\,\eta\,\zeta$, da

$$F = \varepsilon_\xi\, \xi^2 + \varepsilon_\eta\, \eta^2 + \varepsilon_\zeta\, \zeta^2 \;,$$

da cui si trae

$$u^* = \frac{1}{2}\,\frac{\partial F}{\partial \xi}$$

$$v^* = \frac{1}{2}\,\frac{\partial F}{\partial \eta}$$

$$w^* = \frac{1}{2}\,\frac{\partial F}{\partial \zeta} \,.$$

Lo spostamento AA* di un punto A appartenente alla quadrica F=cost, in particolare $F = 1$ (fig. 1-20), è un vettore ortogonale in A alla quadrica stessa; quindi un qualsiasi punto P si sposta secondo la parallela alla ret-

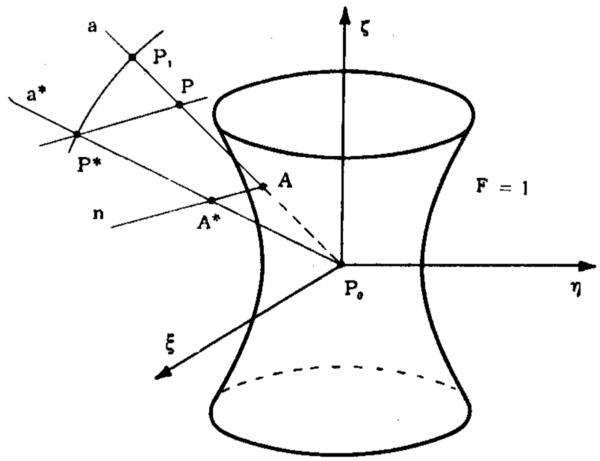

FIG. 1-20

ta n, normale alla quadrica nel punto A dove questa è intersecata dalla retta $a = P_0 P$. Non vale più, però, la (m'); per ottenere l'effettiva posizione P* deformata di P occorre perciò conoscere ε_a per via diversa dalla (m') — e di ciò si dirà in seguito — costruire il segmento $PP_1 = P_0 P \cdot \varepsilon_a$, e la sfera di centro P_0 e raggio $P_0 P_1$; questa sfera incontra la parallela ad n per P in P*.

La conoscenza delle ε e delle γ relative ai tre assi x y z permette anch'essa di conoscere la posizione deformata del punto generico P, come già detto al § 1-4; gli spostamenti così ottenuti non sono quelli della deformazione pura, ma coincidono con questi a meno della rotazione rigida che riporta le direzioni principali su se stesse; anche il suddetto procedimento quindi consente di conoscere completamente la deformazione dell'intorno. E' utile perciò fornire in seconda approssimazione le ε e γ relative agli assi x y z in funzione dei valori che le derivate delle componenti dello spostamento assumono nel punto P_0; derivate prime, sempre, poichè solo queste entrano nelle (1-6). Così pure è utile fornire i valori esatti delle suddette componenti della deformazione, nonchè i valori esatti delle ε rispetto a qualsiasi retta, questi ultimi anche per l'utilizzazione della teoria delle quadriche; tutti, ovviamente, anche essi in funzione delle sole derivate prime delle u v w. E' quanto si farà nei due paragrafi seguenti.

11. Componenti del secondo ordine della deformazione.

Nel ricavare le (1-8) si è utilizzata l'ipotesi di piccolezza delle componenti dello spostamento. Se invece non si trascurano le derivate delle u v w rispetto all'unità, ai termini (1-8), detti *componenti del primo ordine della deformazione,* debbono aggiungersi altre espressioni in seconda approssimazione, limitate cioè ai termini quadratici (*componenti del secondo ordine della deformazione*) nelle derivate di u, v, e w.

Con riferimento ad ε_x si chiami $\varepsilon_x^{(1)}$ la quantità del primo ordine (lineare nelle derivate delle u v w), ed $\varepsilon_x^{(2)}$ la parte correttiva del secondo ordine.

Dalla fig. 1-13 si ricava

$$x^2\ (1+\varepsilon_x)^2 = x^2\ \left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]$$

e, poichè $\varepsilon_x = \varepsilon_x^{(1)} + \varepsilon_x^{(2)}$, si può scrivere

$$1+\varepsilon_x^{(1)^2}+\varepsilon_x^{(2)^2}+2\,\varepsilon_x^{(1)}+2\,\varepsilon_x^{(2)}+2\,\varepsilon_x^{(1)}\,\varepsilon_x^{(2)} =$$

$$= 1+2\,\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

da cui, trascurando $\varepsilon_x^{(2)^2}$ ed $\varepsilon_x^{(1)}\ \varepsilon_x^{(2)}$, si ottiene

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right].$$

Trascurando $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$ e $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$ in rapporto a $\frac{\partial u}{\partial x}$ ci si riconduce alle (1-8).

Analogamente, dalla fig. 1-14 si ha, effettuando il prodotto scalare dei due vettori $P'_0\,P'$ e $P'_0\,Q'$:

$$\overline{P'_0\,P'}\times\overline{P'_0\,Q'} = x\ (1+\varepsilon_x)\ y\ (1+\varepsilon_y)\ \cos\ (90^\circ - \gamma_{xy}) =$$

$$= x\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)y\,\frac{\partial u}{\partial y}+x\,\frac{\partial w}{\partial x}\,y\,\frac{\partial w}{\partial y}+x\,\frac{\partial v}{\partial x}\,y\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Dallo sviluppo in serie del seno $\left(\operatorname{sen}\gamma = \gamma - \frac{\gamma^3}{3!}+\frac{\gamma^5}{5!} - \ldots\right)$ può porsi, limitandosi alle componenti del secondo ordine, sen $\gamma_{xy} = \gamma_{xy}$; così pure può scriversi

$$(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_y)\ \gamma_{xy} = (1 + \varepsilon_x^{(1)} + \varepsilon_y^{(1)})\ \gamma_{xy}\ .$$

Si ha perciò

$$\gamma_{xy}\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}$$

e ancora

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\ .$$

Dalle precedenti relazioni si ha, permutando ciclicamente gli indici,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x^{(2)} &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \\
\varepsilon_y^{(2)} &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \\
\varepsilon_z^{(2)} &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right] \\
\gamma_{yz}^{(2)} &= \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z} \\
\gamma_{zx}^{(2)} &= \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\ . \\
\gamma_{xy}^{(2)} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}
\end{aligned} \tag{20}$$

12. Determinazione dei valori esatti delle dilatazioni rispetto a qualsiasi retta, nonchè delle componenti della deformazione, in funzione dei valori delle derivate prime di uvw nel punto.

Su molti testi, le componenti del secondo ordine della deformazione sono riportate in una forma diversa dalle (1-20); si tratta però soltanto di una differenza di definizione. Attesa l'importanza dell'argomento, non è inopportuno dilungarsi un poco su di esso. Si rimuova l'ipotesi di piccolezza degli spostamenti, e si ricerchi perciò un legame più generale dell'(1-10) tra il coefficiente di dilatazione lineare lungo una qualsiasi direzione, e le componenti dello spostamento. Si consideri (fig. 1-21) una

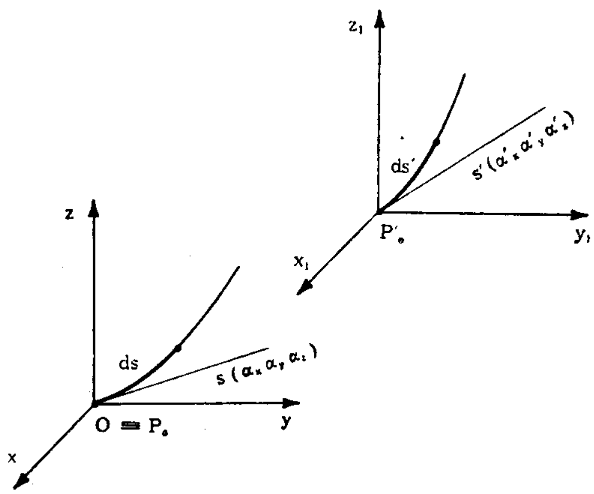

FIG. 1-21

curva continua e la sua trasformata a deformazione avvenuta; al punto P_0 corrisponda il punto P'_0; alla tangente s in P_0, di coseni direttori $\alpha_x\,\alpha_y\,\alpha_z$, corrisponda la tangente s' in P'_0, di coseni direttori $\alpha'_x\;\alpha'_y\;\alpha'_z$; all'elemento di curva ds, di componenti dx dy dz, corrisponda l'elemento ds', di componenti $d\,(x+u)$, $d\,(y+v)$, $d\,(z+w)$. Si ha

$$\alpha_x = \frac{dx}{ds} \qquad \alpha_y = \frac{dy}{ds} \qquad \alpha_z = \frac{dz}{ds}$$

$$\alpha'_x = \frac{d\,(x+u)}{ds'} \qquad \alpha'_y = \frac{d\,(y+v)}{ds'} \qquad \alpha'_z = \frac{d\,(z+w)}{ds'}\;.$$

Poichè si può scrivere

$$d\,(x+u) = dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz =$$

$$= \left(\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{ds} \right) ds$$

è pure

$$\alpha'_x = \frac{ds}{ds'} \left[\alpha_x \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \alpha_y \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial u}{\partial z} \right] ;$$

analoghe relazioni valgono per α'_y ed α'_z (*).

Quadrando e sommando membro a membro queste tre relazioni, e ricordando che

$$\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = 1$$

$$\alpha'^2_x + \alpha'^2_y + \alpha'^2_z = 1$$

si ha

$$\left(\frac{ds'}{ds} \right)^2 = (1 + 2\, e_{xx})\, \alpha_x^2 + (1 + 2\, e_{yy})\, \alpha_y^2 + (1 + 2\, e_{zz})\, \alpha_z^2 +$$

$$+ 2\, e_{yz}\, \alpha_y\, \alpha_z + 2\, e_{zx}\, \alpha_z\, \alpha_x + 2\, e_{xy}\, \alpha_x\, \alpha_y \qquad (21)$$

dove è

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]$$

$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]$$

$$(22)$$

$$e_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$e_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$e_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} .$$

(*) Ponendo $\frac{ds}{ds'} = \frac{1}{1 + \varepsilon_a} \backsimeq 1 - \varepsilon_a$ e trascurando i termini del secondo ordine, si riottiene la (c').

Le (1-22) permettono di determinare, attraverso la (1-21), il coefficiente di dilatazione lineare lungo una qualsiasi retta dell'intorno di P_0 (*). La configurazione deformata dell'intorno è perciò definita, perchè sono note le lunghezze del generico elemento ds e del suo corrispondente ds': è per questo che molti autori chiamano le (1-22) componenti della deformazione. Esse però non coincidono con le dilatazioni o gli scorrimenti relativi agli assi x y z. Questi ultimi possono ottenersi dalla (1-21) particolarizzando i valori di $\alpha_x\ \alpha_y\ \alpha_z$; ponendo per esempio $\alpha_x = 1,\ \ \alpha_y = \alpha_z = 0$ si ha:

$$\left(\frac{dx'}{dx}\right)^2 = 1 + 2\,e_{xx}$$

ed essendo, per definizione,

$$\varepsilon_x = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{dx'}{dx} - 1$$

si può scrivere

$$\varepsilon_x = \sqrt{1 + 2\,e_{xx}} - 1\ . \tag{23}$$

Così pure, considerando due elementi $P_0A = dx = ds$ e $P_0B = dy = ds$

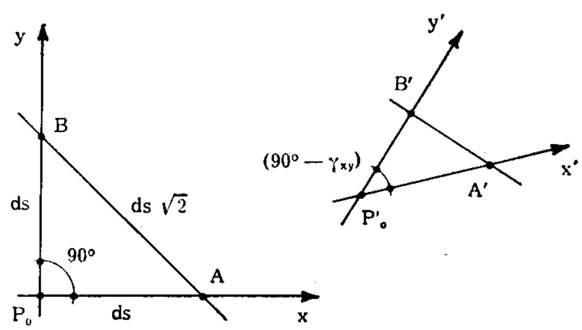

FIG. 1-22

appartenenti agli assi x ed y (fig. 1-22) si ha (la retta $\ell = AB$ ha coseni direttori $\sqrt{2}/2$, $\sqrt{2}/2$, 0)

$$P'_0A' = ds\ \sqrt{1 + 2\,e_{xx}} \quad ; \quad P'_0B' = ds\ \sqrt{1 + 2\,e_{yy}}\ :$$

$$A'\,B' = ds\ \sqrt{2}\,\varepsilon_\ell = ds\ \sqrt{2}\ \sqrt{\frac{1 + 2\,e_{xx}}{2} + \frac{1 + 2\,e_{yy}}{2} + e_{xy}}\ .$$

(*) La trattazione è relativa all'intorno di P_0, poichè nello sviluppo dei du dv dw ci si è limitati ai termini del primo ordine in dx dy dz; le derivate delle (1-22) sono calcolate in P_0. Si noti bene che nel trarre la (1-21) non si è fatta alcuna ipotesi restrittiva circa la grandezza degli spostamenti.

Dalla relazione

$$\overline{A'B'}^2 = \overline{P'_0A'}^2 + \overline{P'_0B'}^2 + 2\ \overline{P'_0A'} \cdot \overline{P'_0B'} \cdot \cos\ (90^\circ - \gamma_{xy})$$

si ottiene

$$2\,ds^2 \left(\frac{1+2\,e_{xx}}{2} + \frac{1+2\,e_{yy}}{2} + e_{xy}\right) =$$

$$= 2\,ds^2 \left(\frac{1+2\,e_{xx}}{2} + \frac{1+2\,e_{yy}}{2}\right) + 2\,ds^2 \sqrt{(1+2\,e_{xx})\ (1+2\,e_{yy})}\ \text{sen}\ \gamma_{xy}$$

da cui

$$\text{sen}\ \gamma_{xy} = \frac{e_{xy}}{\sqrt{(1+2\,e_{xx})\ (1+2\,e_{yy})}}\ . \tag{24}$$

Dalla (1-23) si ottiene

$$\varepsilon_x = 1 + \frac{2\,e_{xx}}{2} - \frac{8\,e^2_{xx}}{8} + \ldots - 1$$

dalla quale si trae, in prima approssimazione,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

ed in seconda approssimazione

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right].$$

Dalla (1-24) si ha

$$\text{sen}\ \gamma_{xy} = e_{xy}\ \frac{1}{\sqrt{1+2\,e_{xx}+2\,e_{yy}+4\,e_{xx}\,e_{yy}}} =$$

$$= e_{xy}\left[1 - \frac{2\,e_{xx}+2\,e_{yy}+4\,e_{xx}\,e_{yy}}{2} + \frac{3}{8}\ (2\,e_{xx}+2\,e_{yy}+4\,e_{xx}\,e_{yy})^2 + \ldots\right]$$

da cui si ottiene,in prima approssimazione,

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

ed in seconda approssimazione

$$\gamma_{xy} = e_{xy} - \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) =$$

$$= e_{xy} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Si ritrovano così le (1-20). Le espressioni (1-22) delle e_{ij} sono perciò esatte, ma non possono essere assunte — come si incontra in qualche testo — a definire le dilatazioni e gli scorrimenti relativi ai tre assi coordinati; questi invece sono funzioni delle e_{ij}.

Si osservi che le (1-21) ... (1-24) sono state tratte senza imporre alcuna restrizione alla grandezza degli spostamenti; invece per trarre le (1-20), sia nel modo esposto al n. 11 che attraverso le (4-21), si sono trascurati i prodotti dal terzo ordine in poi delle derivate delle u v w. Perciò, mentre le (1-21) ... (1-24) valgono in generale, le (1-20) invece sono condizionate dai limiti della approssimazione in cui sono state conseguite; in parole povere, esse, pur comprendendo un campo più vasto di quello retto dalle (1-8), presuppongono sempre che le derivate degli spostamenti non superino certi limiti.

13. Stati piani di deformazione.

Nell'intorno di un punto si verifica uno *stato piano di deformazione* se gli spostamenti di componenti u^* v^* w^* di ogni punto dell'intorno sono paralleli ad un piano π, (piano delle deformazioni) e si riproducono identicamente nei piani paralleli a π.

Se in P_0 una dilatazione principale è nulla, per es. ε_ζ, lo stato di deformazione è piano, e $\xi\eta$ è il piano delle deformazioni; infatti dalle (1-18) si trae che w^* è nullo, mentre u^* e v^* sono indipendenti da ζ.

Viceversa, se uno stato di deformazione è piano, con piano delle deformazioni π, la normale n a π resta normale a π e non presenta dilatazioni; cioè n è direzione principale, e ad essa corrisponde dilatazione nulla.

Dunque condizione necessaria e sufficiente perchè uno stato di deformazione sia piano è che una dilatazione principale sia nulla, e cioè che esista una retta per cui si verifichi

$$u^* = 0$$

$$v^* = 0$$

$$w^* = 0 \ .$$

Per le (1-11) questa condizione si traduce nell'altra

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = 0 \ ; \qquad (25)$$

infatti in tal caso, e solo in tal caso, esiste una soluzione kx, ky, kz (rappresentata da una retta per P_o) del sistema. La (1-25) esprime la condizione essere nullo l'invariante cubico della deformazione (*).

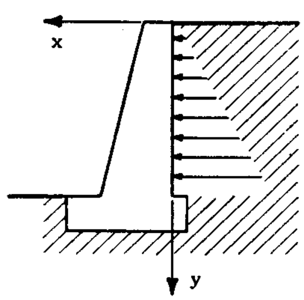

FIG. 1-23

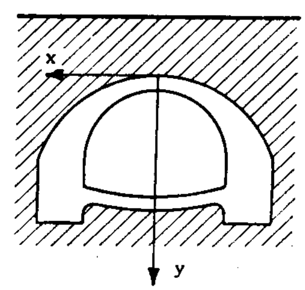

FIG. 1-24

Negli stati piani di deformazione la (1-15) si scrive, assunto un riferimento xy contenuto nel piano delle deformazioni (da cui derivano $\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$)

$$\varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 = \gamma_{xy} xy = \pm 1 \qquad (26)$$

(*) La (1-25) coincide con la (1-17) per $\varepsilon_p = 0$, e può trarsi anche per questa via. Si osservi che se una terna u v w è indipendente da z, e soddisfa ovunque la conzione $w = 0$ (tale è il caso della fig. 1-23 ed 1-24, strutture indefinite secondo z caricate da forze costanti con z e dirette nel piano xy), lo stato di deformazione è piano ovunque, con piano delle deformazioni parallelo al piano xy; si verifica infatti, in tal caso, ovunque $\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$, e quindi z è direzione principale con ε_ζ nulla.

che rappresenta due coniche a centro nel piano xy, e più in generale due cilindri quadrici aventi tali coniche per direttrici; come le quadriche di deformazione si specializzano in cilindri quadrici, così il cono asintotico si specializza in due piani, le cui tracce sul piano xy sono le due rette passanti per l'origine e definite dall'equazione

$$\varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 + \gamma_{xy} xy = 0 \ . \tag{27}$$

La (1-27) è l'equazione degli asintoti delle coniche (1-26), e rappresenta due rette reali o immaginarie secondo che il termine

$$\Delta = \gamma_{xy}^2 - 4 \varepsilon_x \varepsilon_y$$

discriminante dall'equazione

$$\varepsilon_x \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \gamma_{xy} \frac{x}{y} + \varepsilon_y = 0 \tag{p'}$$

è maggiore o minore di zero. Si osserva cioè che le coniche (1-26) sono due ellissi, di cui una a punti reali e una a punti immaginari, se $\Delta < 0$, o due iperboli, con asintoti reali definiti dalla (p'), se $\Delta > 0$.

Se ε_x ed ε_y sono di segno contrario, sicuramente $\Delta > 0$; nulla può dirsi invece circa il segno di Δ se ε_x ed ε_y sono dello stesso segno.

Con riferimento agli assi principali per P_0 la (1-26) si scrive

$$\varepsilon_\xi \xi^2 + \varepsilon_\eta \eta^2 = \pm 1 \tag{28}$$

e cioè si ottengono due ellissi se ε_ξ ed ε_η sono dello stesso segno, due iperboli se ε_ξ ed ε_η sono di segno contrario. Così pure la (p') si scrive

$$\frac{\eta}{\xi} = \pm \sqrt{-\frac{\varepsilon_\xi}{\varepsilon_\eta}} \tag{q'}$$

e cioè (fig. 1-25) i due asintoti risultano simmetrici rispetto all'asse ξ, e inclinati su esso di

$$\operatorname{arctg} \sqrt{-\frac{\varepsilon_\xi}{\varepsilon_\eta}} \ .$$

L'equazione (1-17) diviene

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_p & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_p \end{vmatrix} = 0 \tag{29}$$

da cui

$$\varepsilon_p = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \tag{30}$$

I due valori ε_ξ ed ε_η della (1-30) sono il massimo e il minimo tra i coefficienti di dilatazione relativi alle rette passanti per P_o. Il valore ε_ξ

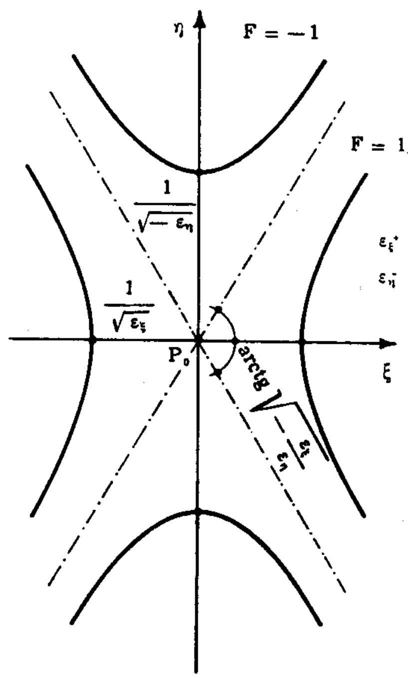

FIG. 1-25

è nullo; delle tre direzioni principali due, ξ ed η, sono contenute nel piano delle deformazioni, e la terza, ζ, è ad esso ortogonale.

Esempio.

Si consideri lo stato di deformazione piana definito dai seguenti valori delle componenti

$$\varepsilon_x = 6 \cdot 10^{-4} \qquad \varepsilon_z = 0$$
$$\varepsilon_y = -2 \cdot 10^{-4} \qquad \gamma_{xz} = 0$$
$$\gamma_{xy} = 6 \cdot 10^{-4} \qquad \gamma_{yz} = 0 \, .$$

La (1-29) si scrive, a meno di 10^{-4},

$$\begin{vmatrix} 6 - \varepsilon_p\, 10^4 & 3 \\ 3 & -2 - \varepsilon_p\, 10^4 \end{vmatrix} = 0$$

che fornisce

$$10^4 \cdot \varepsilon_p = 2 \pm \sqrt{16 + 9} = \begin{cases} +7 \\ -3 \end{cases}$$

e quindi è

$$\varepsilon_\xi = 7 \cdot 10^{-4}$$
$$\varepsilon_\eta = -3 \cdot 10^{-4} \, .$$

I coseni direttori di ξ sono forniti dal sistema di cui la (1-29) è il determinante, ove ad ε_p è sostituito il valore ε_ξ :

$$- \alpha_{x\xi} + 3\, \alpha_{y\xi} = 0$$
$$3\, \alpha_{x\xi} - 9\, \alpha_{y\xi} = 0 \;;$$

con la condizione $\alpha_{x\xi}^2 + \alpha_{y\xi}^2 = 1$, si trae

$$\alpha_{x\xi} = 0{,}950$$
$$\alpha_{y\xi} = 0{,}316 \, .$$

L'asse ξ forma un angolo di 18° 30′ con l'asse x, ed è compreso nel quadrante positivo.

I coseni direttori di η sono invece forniti da

$$9\, \alpha_{x\eta} + 3\, \alpha_{y\eta} = 0$$
$$3\, \alpha_{x\eta} + \alpha_{y\eta} = 0$$

da cui

$$\alpha_{x\eta} = -0{,}316$$
$$\alpha_{y\eta} = 0{,}950 \;;$$

l'asse η (fig. 1-26) forma un angolo di 18° 30′ con l'asse delle y, ed è compreso nel quadrante $-x$, $+y$.

Le coniche, tracce sul piano xy dei cilindri quadrici di deformazione, sono date da (1-26)

$$6\, x^2 - 2\, y^2 + 6\, xy = \pm 10^4 \;;$$

il $\Delta = +21$ assicura che le coniche sono due iperboli. Gli asintoti sono

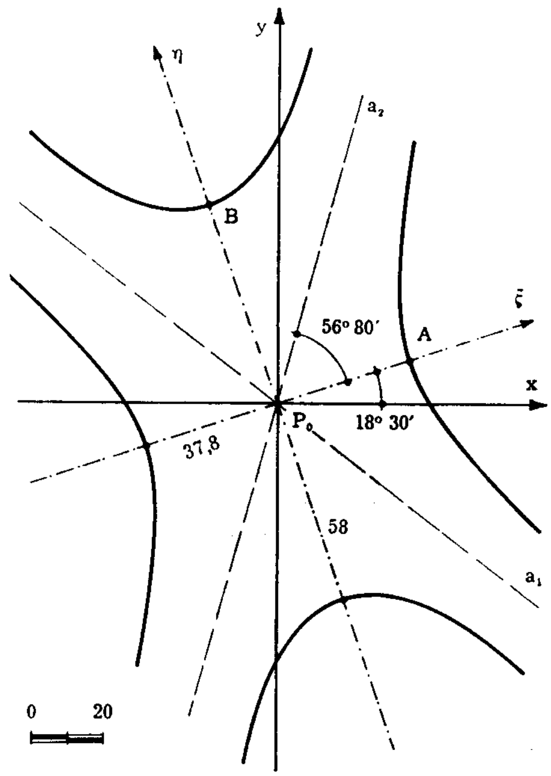

FIG. 1-26

forniti da (q′)

$$\frac{\eta}{\xi} = \pm \sqrt{\frac{7}{3}} = \pm 1{,}53$$

e cioè sono inclinati di 56° 50′ sull'asse ξ. I semidiametri $P_0 A$ e $P_0 B$ delle due iperboli sono forniti da

$$P_0 A = \frac{1}{\sqrt{7 \cdot 10^{-4}}} = 37{,}8$$

$$P_0 B = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 10^{-4}}} = 58 \ .$$

14. Dilatazione cubica.

Si definisce *coefficiente di dilatazione cubica* in P_0 il rapporto

$$\Theta = \frac{d\,\Delta V}{\Delta V} \tag{31}$$

tra la variazione $d\Delta V$ di un volume ΔV dell'intorno di P_0 ed il volume stesso. Un coefficiente Θ positivo corrisponde perciò ad un aumento di volume. Si proceda al suo calcolo operando su un volume ΔV di forma particolare, e cioè su un parallelepipedo retto contenuto nell'intorno di P_0, con i lati distesi lungo le direzioni principali e lunghi $\xi\,\eta\,\zeta$. Si ha così

$$\Theta = \frac{(1+\varepsilon_\xi)\,(1+\varepsilon_\eta)\,(1+\varepsilon_\zeta)\,\xi\,\eta\,\zeta - \xi\,\eta\,\zeta}{\xi\,\eta\,\zeta}$$

e, trascurando i prodotti delle ε in rapporto alle ε stesse (e cioè nell'ipotesi di piccoli spostamenti)

$$\Theta = \varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta + \varepsilon_\zeta \;.$$

Ricordando la definizione di invariante lineare di deformazione (1-29), si riconosce che il coefficiente di dilatazione cubica coincide con tale invariante:

$$\Theta = \varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta + \varepsilon_\zeta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \;. \tag{32}$$

Esso risulta lo stesso per altre forme del volume, perchè ogni volume può scomporsi in parallelepipedi retti elementari.

All'espressione (1-32) si può pervenire anche attraverso il teorema della divergenza. Si consideri (fig. 1-27) un volume elementare delimitato

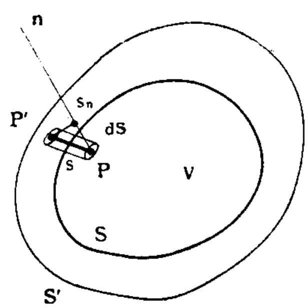

FIG. 1-27

da una superficie S; a deformazione avvenuta (e depurata della traslazione rigida) S si trasferisce in S', e V si incrementa di δV. Lo spostamento $\bar{s}$ del punto P generico sulla superficie S presenti la componente s_n secondo la normale n ad S in P; se dS è l'elemento superficiale in corrispondenza di P, si ha nell'ipotesi di piccoli spostamenti

$$\delta V = \int_S s_n \, dS \;.$$

Il teorema della divergenza riferito al campo vettoriale $\bar{s}$ fornisce

$$\int_S s_n\, dS = \int_V \operatorname{div} \bar{s} \cdot dV = \int_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dV = \int_V (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\, dV .$$

Poichè il volume V è elementare, può supporsi costante in esso l'espressione dell'invariante lineare $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$, che in genere è funzione del punto; e perciò

$$\int_S s_n\, dS = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \int_V dV$$

da cui

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\delta V}{V} = \Theta .$$

Si dimostra anche, così, in rigore l'invarianza di Θ dalla forma del volume e dalla terna di riferimento.

Si rimuova ora l'ipotesi di piccoli spostamenti. Si consideri il parallelepipedo retto con i lati distesi secondo gli assi x y z e di valore unitario. Esso si deforma nel parallelepipedo obliquo i cui lati hanno le coordinate

$$\begin{array}{ccc}
1 + \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial x} \\[2ex]
\dfrac{\partial u}{\partial y} & 1 + \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial y} \\[2ex]
\dfrac{\partial u}{\partial z} & \dfrac{\partial v}{\partial z} & 1 + \dfrac{\partial w}{\partial z}
\end{array}$$

ed il cui volume è fornito dal determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix}
1 + \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\[2ex]
\dfrac{\partial v}{\partial x} & 1 + \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\[2ex]
\dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & 1 + \dfrac{\partial w}{\partial z}
\end{vmatrix} = (1 + \Theta) .$$

E' questa quindi l'espressione generale di Θ, dalla quale, nell'ipotesi di piccoli spostamenti, discende la (1-32).

Si osserva che Δ è l'invariante cubico del tensore della trasformazione (1-6) (cap. III).

15. Le condizioni di congruenza interna delle componenti della deformazione.

Nei riguardi della congruenza interna, qualsiasi terna di funzioni u v w definita in tutta la regione occupata dal corpo ne è rispettosa se, e soltanto se, presenta le proprietà di continuità e uniformità; le tre funzioni quindi non devono soddisfare particolari legami analitici.

Non altrettanto accade per le componenti della deformazione; se si considera infatti soltanto un volume elementare, una qualsiasi sestupla di valori numerici $\varepsilon_i \gamma_{jk}$ può definire la deformazione del volume stesso; ma se si assegna una sestupla arbitraria di funzioni del punto definite in tutta la regione occupata dal corpo, pur soddisfacenti alle condizioni di continuità e uniformità (*) e i valori di tale sestupla in ogni punto si assumono come componenti della deformazione nel punto, si sarà in presenza di un insieme di volumi elementari ciascuno deformato per suo conto, ma in genere non atti a far ricostruire con soli moti rigidi l'integrità del corpo. In genere cioè una sestupla arbitraria di funzioni continue e uniformi $\varepsilon_i \gamma_{jk}$ definita in tutto il corpo non rispetta la congruenza interna; ciò vuol dire che sussistono delle condizioni cui le $\varepsilon_i \gamma_{jk}$ devono soddisfare perchè rispettino la congruenza interna. Condizione necessaria è che esistano tre funzioni continue e ad un sol valore u v w definite in tutto il corpo, a meno di uno spostamento rigido del corpo stesso, dalle quali le $\varepsilon_i \gamma_{jk}$ possano ricavarsi attraverso le (1-8) nell'ipotesi di piccoli spostamenti, attraverso le (1-22) in caso contrario.

Esistano tre funzioni u v w cui le $\varepsilon_i \gamma_{jk}$ sono legate dalle (1-8); si è quindi nell'ipotesi di piccoli spostamenti.

Si fa l'ipotesi che le $\varepsilon_i \gamma_{jk}$ siano almeno uniformi e tre volte derivabili; quindi le u v w hanno derivate prime e seconde ad un sol valore e continue, e sono pur esse ad un sol valore in dominî monoconnessi (par. 1-2). In dominî pluriconnessi, invece, esse possono essere anche a più valori. Dalla prima delle due dimostrazioni che seguono si ottengono delle condizioni necessarie per l'esistenza delle u v w. La seconda dimostrazione invece mostrerà che le stesse condizioni sono necessarie e sufficienti per l'esistenza ed uniformità delle u v w, da sole in dominî monoconnessi, unite con altre in dominî pluriconnessi.

E' necessario che siano rispettate le relazioni che si ottengono dalle (1-8) per derivazioni successive. Si ha così

(*) Si ricordi (par. 1-4) che sotto tali ipotesi si può, dai valori delle $\varepsilon_i \gamma_{jx}$ nel punto, risalire alla conoscenza dell'intorno deformato.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y\, \partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^3 v}{\partial y\, \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y^2}$$

da cui si ottiene

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\, \partial y}\ .$$

Così pure si ha

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial y\, \partial x^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial z\, \partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2\, \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\, \partial z} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2\, \partial z} + \frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z}$$

da cui si trae

$$2\, \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} \right) .$$

Permutando circolarmente gli indici, si hanno così le sei *condizioni di congruenza interna,* come condizioni necessarie:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\, \partial y} \\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y\, \partial z} \qquad (33) \\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z\, \partial x}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\,\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x}\right)\\
2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z\,\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial z}-\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}\right)\\
2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x}-\frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial z}\right).
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Le sei relazioni (1-33) non sono indipendenti; ciò si intuisce poichè le $\varepsilon_i\,\gamma_{jk}$ sono definite una volta assegnate le u v w, e queste ultime non sono soggette ad alcun legame, il che significa che per definire una deformazione congruente c'è libertà di scelta per tre funzioni. E infatti, si considerino le tre equazioni

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y}=0\\
-&\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\,\partial z}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial x^2}\right)=0\\
-&\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z\,\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2}\right)=0
\end{aligned}
$$

e si derivi la prima per z, la seconda per y e la terza per x; sommando si ha

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^3 \varepsilon_x}{\partial y^2\,\partial z}+\frac{\partial^3 \varepsilon_y}{\partial x^2\,\partial z}-\frac{\partial^3 \gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y\,\partial z}-\\
-&\frac{\partial^3 \varepsilon_x}{\partial y^2\,\partial z}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 \gamma_{xy}}{\partial x\,\partial z\,\partial y}+\frac{\partial^3 \gamma_{xz}}{\partial x\,\partial y^2}-\frac{\partial^3 \gamma_{zy}}{\partial x^2\,\partial y}\right)-\\
-&\frac{\partial^3 \varepsilon_y}{\partial z\,\partial x^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 \gamma_{yz}}{\partial y\,\partial x^2}+\frac{\partial^3 \gamma_{yx}}{\partial y\,\partial z\,\partial x}-\frac{\partial^3 \gamma_{xz}}{\partial y^2\,\partial x}\right)=0
\end{aligned}
$$

che si riconosce essere una identità.

Altre due relazioni si ottengono con permutazione circolare degli indici. Esistono quindi tre legami differenziali tra le (1-33) e le (1-34), che equivalgono perciò a tre relazioni indipendenti. E' proprio per la necessità che le (1-33) equivalgano a sole tre relazioni indipendenti che occorre ammettere l'esistenza delle derivate terze delle $\varepsilon_i\,\gamma_{jk}$.

E' fondamentale che le (1-33), oltre che necessarie, sono anche sufficienti per la congruenza interna, e cioè perchè le u v w legate alle $\varepsilon_i\,\gamma_{jk}$ dalle (1-8) esistano e siano continue e uniformi. Ciò in domini monoconnessi; in domini pluriconnessi l'uniformità importa che, come condizioni necessarie e sufficienti, alle (1-33) si affianchino alcune condizioni complementari.

Si tratta prima il caso del dominio monoconnesso. Esistano le u v w uniformi in tutto il corpo, e legate alle $\varepsilon_i \gamma_{jk}$ dalla (1-8). Preso un punto arbitrario del corpo, $P_o (x_o y_o z_o)$, siano $u_o v_o w_o$ le componenti del suo spostamento, e $p_o q_o r_o$ le componenti (1-10) della rotazione rigida dell'intorno di P_o. Sia poi $P (x_P y_P z_P)$ un altro generico punto del corpo, $u_P v_P w_P$ le componenti del suo spostamento.

Se *c* è una qualsiasi curva tutta contenuta nel dominio, e congiungente P_o con P, si può esprimere u_p attraverso l'integrale curvilineo (c)

$$u_P = u_o + \int_c \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) . \qquad (r')$$

Dalle (c′), (1-10) ed (1-8) si trae, nell'ipotesi di piccoli spostamenti,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \varepsilon_x \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2} \gamma_{xy} - r_o \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{2} \gamma_{zx} + q_o \quad ; \end{aligned} \qquad (s')$$

la (r′) si scrive perciò

$$u_P = u_o + \int_c \left(\varepsilon_x dx + \frac{1}{2} \gamma_{xy} dy + \frac{1}{2} \gamma_{xz} dz \right) + \int_c (q_o dz - r_o dy) .$$

Il primo integrale è noto, essendo note $\varepsilon_x \gamma_{xy} \gamma_{xz}$.

Per il secondo si ha

$$\int_c (q_o dz - r_o dy) = \int_c [r_o d (y_P - y) - q_o d (z_P - z)]$$

ed integrando per parti

$$\begin{aligned} \int_c (q_o dz - r_o dy) = q_o (z_P - z_o) - r_o (y_P - y_o) - \\ - \int_c [(y_P - y) dr_o - (z_P - z) dq_o] . \end{aligned} \qquad (t')$$

Poichè è

$$\frac{\partial r_o}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial q_o}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{zx}}{dx}$$

$$\frac{\partial r_o}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial q_o}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial r_o}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial q_o}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x}$$

si ha

$$\begin{aligned} u_P &= u_o + q_o\,(z_P - z_o) - r_o\,(y_P - y_o) + \int_c (U_x\,dx + U_y\,dy + U_z\,dz) \\ v_P &= v_o + r_o\,(x_P - x_o) - p_o\,(z_P - z_o) + \int_c (V_x\,dx + V_y\,dy + V_z\,dz) \qquad (u') \\ w_P &= w_o + p_o\,(y_P - y_o) - q_o\,(x_P - x_o) + \int_c (W_x\,dx + W_y\,dy + W_z\,dz) \end{aligned}$$

dove si è posto

$$\begin{aligned} U_x = {} & \varepsilon_x + (y_P - y)\left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial x}\right) + \\ & + (z_P - z)\left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z}\right) \\ U_y = {} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} + (y_P - y)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x}\right) + \\ & + (z_P - z)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x}\right) \qquad (v') \\ U_z = {} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} + (y_P - y)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right) + \\ & + (z_P - z)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x}\right) ; \end{aligned}$$

le espressioni delle V e W si ottengono dalle (v′) permutando circolarmente gli indici (*). Condizioni necessarie e sufficienti perchè le (u′) esistano e siano (a meno di $u_0\, v_0\, w_0\, p_0\, q_0\, r_0$) ad un sol valore — perchè cioè gli integrali curvilinei non dipendano che dagli estremi P_0 e P della curva c — sono le nove seguenti (**):

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_i}{\partial j}&=\frac{\partial U_j}{\partial i}\\ \frac{\partial V_i}{\partial j}&=\frac{\partial V_j}{\partial i}\\ \frac{\partial W_i}{\partial j}&=\frac{\partial W_j}{\partial i}\qquad (i,\ j=x,y,z)\ .\end{aligned}\tag{z′}$$

Se quindi esistono le u v w soddisfacenti le (1-8) ed uniformi, devono essere soddisfatte le (z′). Se poi le (z′) sono soddisfatte, esistono le (u′) ad un sol valore, e che [si verifica dalle (v′)] soddisfano le (1-8) e sono quindi anche continue. Le (z′) si riducono alle (1-33). Per esempio la condizione

$$\frac{\partial U_y}{\partial z}=\frac{\partial U_z}{\partial y}$$

si scrive, per le (v′)

$$(y_P-y)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x\,\partial z}\right)+(z_P-z)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial z^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial x\,\partial z}\right)=$$

$$=(y_P-y)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial x\,\partial y}\right)+(z_P-z)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\,\partial y}-\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\,\partial y}\right)\ ;$$

poichè questa deve essere valida per qualsiasi valore y_P e z_P, deve essere

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x\,\partial z}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial x\,\partial y}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial z^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial x\,\partial z}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\,\partial y}-\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\,\partial y}$$

(*) Le (u′) e (v′) coincidono con quelle riportate da *V. Volterra* (1907); la deduzione delle stesse è dovuta ad *E. Cesaro* (1906), e riportata anche nel classico trattato di *N. I. Muskhelishvili* (1948).

(**) Si è supposto che le $\varepsilon_i\,\gamma_{jk}$ siano fornite di derivate prime uniformi, e di derivate seconde continue. Le U V W perciò sono uniformi, e continue con le loro derivate prime (z′).

e queste coincidono con le ultime due delle (1-32).

Se una sestupla $\varepsilon_i\,\gamma_{jk}$ è indipendente da z, e soddisfa in tutto il mezzo le condizioni

$$\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0\ ,$$

lo stato di deformazione è ovunque piano, con piano delle deformazioni parallelo al piano xy; e viceversa.

Perchè tale sestupla sia internamente congruente è necessario e sufficiente che sia rispettata la sola condizione

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\, \partial y}\ ; \qquad (34)$$

infatti le altre cinque equazioni di congruenza sono identicamente soddisfatte.

Se la regione in cui $\varepsilon_i\,\gamma_{jk}$ sono definite è pluriconnessa, le condizioni (z′), e con esse le (1-33), continuano ad essere necessarie perchè gli inte-

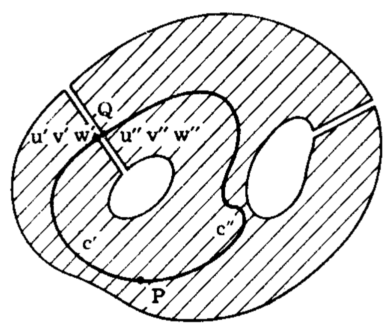

FIG. 1-28

grali curvilinei (r′) esistano e siano ad un sol valore, ma non sono più sufficienti. Le (z′) sono cioè ancora sufficienti per l'esistenza di tali integrali, e quindi delle funzioni u v w, ma in genere queste sono a più valori. Infatti nella struttura resa monoconnessa con opportuni tagli il generico integrale curvilineo da P_0 a Q, ove Q è un punto giacente sulla superficie di un taglio, può avere due valori, e quindi le funzioni u v w hanno due valori u′ v′ w′, o u″ v″ w″, secondo che il punto Q è raggiunto su una o sull'altra delle due facce del taglio (fig. 1-28) (*). La condizione

(*) Risulta chiaro da questa precisazione che il termine « a più valori » non significa che esistono due possibili spostamenti u′ v′ w′ ed u″ v″ w″ dello stesso punto, ma due spostamenti effettivi, per cui si crea una discontinuità.

che per tutti i tagli necessari a rendere monoconnessa la struttura sia

$$\begin{aligned} u' &= u'' \\ v' &= v'' \\ w' &= w'' \end{aligned} \tag{a''}$$

e l'altra espressa dalle (z'), sono nel complesso necessarie e sufficienti per l'esistenza e la uniformità delle funzioni u v w nei domini pluriconnessi.

Per la migliore comprensione di quanto esposto in questo paragrafo, si puntualizzano nel paragrafo che segue alcune proprietà già note dal corso di analisi.

16. Alcuni richiami.

Sia data una forma differenziale lineare

$$f\,dx + g\,dy \; ; \tag{b''}$$

f e *g* siano funzioni ad un sol valore di x ed y, continue assieme alle loro derivate prime $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial g}{\partial x}$ in ogni punto di un dominio A del piano xy (frontiera inclusa). La (b″) si chiama *diffenziale esatto* $d\varphi$ di una funzione φ (xy) se esiste una funzione φ (xy), ad uno o più valori, tale che sia

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = g \; . \tag{c''}$$

Si vuol sapere quali sono le condizioni necessarie e sufficienti cui devono soddisfare le funzioni *f* e *g* perchè esista una funzione φ (xy) che verifichi le (c″).

Si consideri una curva *c* di estremi P e Q, contenuta nel dominio A considerato, e definita dalle equazioni parametriche

$$\begin{aligned} x &= x\,(t) \\ y &= y\,(t) \end{aligned}$$

ove è

$$a \leqslant t \leqslant b \; .$$

Si definisce *integrale curvilineo* della forma (b″) esteso alla curva c l'espressione

$$\int_c (f\,dx + g\,dy) = \int_a^b \left\{ f[x(t)\,,\ y(t)]\,\frac{dx}{dt} + g[x(t)\,,\ y(t)]\,\frac{dy}{dt} \right\} dt\,. \quad (d'')$$

Se (b″) non è un differenziale esatto, (d″) dipende dalla curva, e non è definito. Se invece esiste la funzione φ che soddisfa le (c″), si ha

$$\int_c (f\,dx + g\,dy) = \int_c \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy \right) = \int_a^b \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\frac{dy}{dt} \right) dt =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dt = \varphi(b) - \varphi(a) = \varphi(x_Q\, y_Q) - \varphi(x_P\, y_P)\,. \quad (e'')$$

In tal caso l'integrale curvilineo è funzione, ad uno o a più valori, di x_Q ed y_Q, se P è fisso.

Se la φ è funzione ad un sol valore di x ed y l'integrale curvilineo è, se P è fisso, funzione a un sol valore delle coordinate dell'estremo Q della

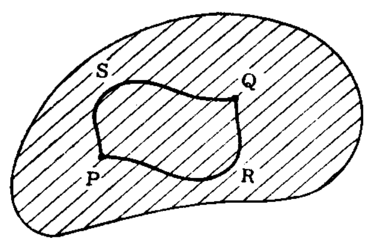

FIG. 1-29

curva, è lo stesso cioè quale che sia la curva che unisce P e Q. Si ha quindi (fig. 1-29)

$$\int_{PRQ} = \int_{PSQ}\,. \quad (f'')$$

La (f″) equivale a dire che l'integrale curvilineo esteso ad una qualsiasi curva chiusa s è nullo:

$$\oint_s = \int_{PRQ} + \int_{QSP} = \int_{PRQ} - \int_{PSQ} = 0\,. \quad (g'')$$

Se le funzioni f e g sono uniformi, e continue con le loro derivate prime $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ in tutti i punti del piano racchiusi entro una curva chiusa riducibile *s*, e sulla curva stessa, vale la formula di Green

$$\oint_s (f\,dx + g\,dy) = -\int_A \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right) dx\,dy\ ; \qquad (h'')$$

la (h″) è un caso particolare della più generale formula di Gauss (*).

Se il dominio di definizione di f e g è semplicemente connesso, la (h″) vale per qualsiasi curva in esso contenuta; dalla (g″) si trae perciò che in ogni punto del dominio deve essere

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}\ . \qquad (i'')$$

Con riferimento ad un dominio semplicemente connesso la condizione (i″) è perciò necessaria per l'esistenza di una funzione φ uniforme soddisfacente le (c″).

Si può anche dire che in un dominio semplicemente connesso la (i″) è necessaria perchè l'integrale curvilineo (e″) dipenda solo dagli estremi della curva di integrazione.

Si faccia ora l'ipotesi che la (i″) sia rispettata in ogni punto di un dominio semplicemente connesso e della sua frontiera. Si trae che la (g″) è valida per qualsiasi curva chiusa contenuta nel dominio, e perciò, presi due punti P e Q del dominio, l'integrale (e″) è, per P fisso, una funzione φ (xy) ad un sol valore delle coordinate xy di Q. Questa funzione soddisfa le (c″); infatti si ha

$$\varphi(x + \Delta x, y) = \varphi(xy) + \int_x^{x+\Delta x} f\,dx\ .$$

da cui

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(xy)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\displaystyle\int_x^{x+\Delta x} f\,dx}{\Delta x} = f\ ; \qquad (\ell'')$$

analogamente si ottiente $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = g$.

(*) Si trae dalla (h″) che, con riferimento ad un dominio comunque connesso, la (i″) è condizione necessaria e sufficiente perchè l'integrale curvilineo della (b″) esteso ad una qualsiasi curva chiusa riducibile risulti nullo.

La condizione (i″) è perciò necessaria e sufficiente per l'esistenza di una funzione φ uniforme che verifichi le (c″), essendo f e g ad un sol valore e continue con le loro derivate prime in tutti i punti di un dominio monoconnesso; la φ è data dall'integrale curvilineo.

Si può anche dire che, in un dominio semplicemente connesso, la (i″) è condizione necessaria e sufficiente perchè l'integrale (e″) sia funzione ad un sol valore degli estremi della curva di integrazione.

Si consideri adesso un dominio pluriconnesso. La (i″) è ancora condizione necessaria per l'esistenza di una funzione φ rispettante le (c″) e uniforme, o anche perchè l'integrale curvilineo (e″) sia funzione ad un sol valore degli estremi della curva; infatti la (h″) vale anche in un dominio pluriconnesso, con riferimento a tutte le curve riducibili in esso contenute. Essa però non è più sufficiente; se infatti la (i″) si verifica, si dimostra che esiste ancora una funzione φ rispettante le (c″), ma essa è in genere a più valori, e l'integrale d'altro canto, dipende ancora dagli estremi, ma è funzione a più valori di essi; perchè la φ sia ad un sol valore, o anche perchè l'integrale (e″) dipenda solo dagli estremi di integrazione, occorre e basta che oltre alla (i″) siano rispettate altre condizioni, che subito si preciseranno.

Sia quindi valida la (i″) in tutti i punti di un dominio pluriconnesso e della sua frontiera. Si considerino che curve chiuse s′ e s″ circondanti

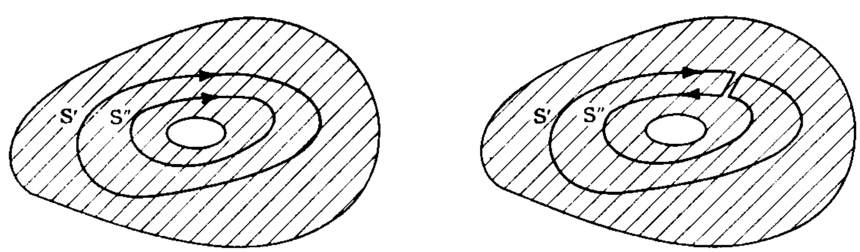

FIG. 1-30

una curva interna di frontiera (fig. 1-30 a); fissato uno stesso verso positivo su di esso, si ha:

$$\oint_{s'} = \oint_{s''} = k \;; \qquad (m'')$$

infatti la curva chiusa ottenuta congiungendo con due tratti vicinissimi s′ ed s″ (fig. 1-30 b) è frontiera di un dominio semplicemente connesso, in ogni punto del quale le f e g rispettano le già precisate condizioni; per essa vale perciò la (h″), che si traduce nella

$$\oint_{s'} - \oint_{s''} = 0 \qquad (n'')$$

da cui si ottiene la (m″). Dalla (m″) si trae che, sotto l'ipotesi di validità della (i″), l'integrale curvilineo esteso ad una curva chiusa che circonda una sola volta una curva interna di frontiera è in genere diverso da zero, ma è indipendente dalla curva stessa. Se l'integrale è esteso perciò ad una curva chiusa che circonda m volte la curva interna di frontiera nel senso positivo, ed n volte nel senso negativo, il suo valore è $(m - n)\, k$. Ogni curva interna di frontiera è caratterizzata da un valore k_i di k; l'inte-

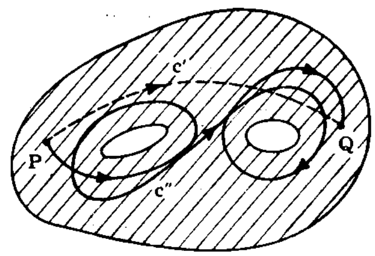

FIG. 1-31

grale curvilineo tra due punti P e Q (fig. 1-31) è definito a meno di una combinazione lineare dei k_i (funzione a più valori):

$$\int_{c'} = \int_{c''} + \Sigma\, n_i\, k_i\,. \tag{o″}$$

L'integrale della (o″) si calcola come nella (e″); tenendo P fisso, esso è funzione delle coordinate xy di Q, e del numero di volte che la curva circonda in un verso o nell'altro le singole curve interne di frontiera; esso è cioè una funzione φ a più valori. Dalla (o″) si osserva che, poichè la quantità $\Sigma\, n_i\, k_i$ non dipende da x ed y, si verifica anche nel caso in esame, con lo stesso procedimento che ha condotto alla (ℓ″), che la φ soddisfa la (c″).

Riassumendo, si può dire: le (i″) sono in ogni caso condizioni necessarie per l'esistenza di una funzione φ che rispetti le (c″), e che sia ad un sol valore o, in altre parole, sono necessarie perchè l'integrale curvilineo (e″) dipenda dagli estremi della curva di integrazione come funzione ad un sol valore.

Le (i″) sono anche condizioni sufficienti per l'esistenza di una funzione φ che rispetti le (c″). In tal caso, se il dominio di definizione della forma differenziale è semplicemente connesso, la φ è ad un sol valore e l'integrale curvilineo (e″) dipende solo dagli estremi della curva di integrazione; se invece il dominio è pluriconnesso, la φ è in genere a più valori, e l'integrale (e″) dipende non solo dai due punti P e Q, ma anche dal numero di volte che la curva circonda le curve interne di frontiera.

Nei domini pluriconnessi la φ è ad un sol valore quando e soltanto quando, accanto alla (i″) si verificano anche le altre condizioni:

$$k_1 = k_2 = \dots k_i = 0 \ . \qquad (p'')$$

Le (i″) e (p″) sono anche, nei domini pluriconnessi, condizioni necessarie e prese assieme sufficienti perchè l'integrale (e″) dipenda solo dai punti P e Q.

Quanto scritto in relazione al piano, e cioè a due sole variabili x y, vale anche in presenza di più variabili x_1, x_2, ... x_n.

In questo caso la forma differenziale è:

$$f_1 (x_1 x_2 \dots x_n)\, dx_1 + \dots + f_n (x_1 x_2 \dots x_n)\, dx_n \ ; \qquad (q'')$$

essa è un differenziale esatto se esiste una funzione $\varphi (x_1 x_2 \dots x_n)$ tale che si verifichi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = f_1 \ ; \ \dots \ \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = f_n \ . \qquad (r'')$$

Le condizioni (i″) sono in numero di $\dfrac{n(n-1)}{2}$, e si scrivono

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \ . \qquad (s'')$$

Esse sono necessarie per l'esistenza di una funzione φ (calcolabile come integrale curvilineo) rispettante le (r″) e ad un sol valore; sono anche sufficienti per l'esistenza di una funzione φ, rispettante le (r″), a un sol valore se il dominio di definizione delle f_i è semplicemente connesso, generalmente a più valori se il dominio di definizione delle f_i è pluriconnesso.

Nei domini pluriconnessi le condizioni necessarie e sufficienti di uniformità si hanno abbinando alle (s″) altre relazioni analoghe alle (p″).