

## 8. Verifica in fase elastica e calcolo a rottura

### 8.1. Il procedimento delle tensioni ammissibili

La verifica di una sezione presso o tensoinflessa in una struttura soggetta a carichi variabili non può essere eseguita attraverso la costruzione delle linee d'influenza del momento flettente baricentrico  $M$  e dello sforzo normale  $N$ . Le tensioni massime e minime infatti — che sono comunque domiciliate in uno dei due bordi — non si verificano nè sotto le condizioni di carico che forniscono  $M_{max}$  o  $M_{min}$ , nè sotto quelle che forniscono  $N_{max}$  o  $N_{min}$ .

In regime di proporzionalità (procedimento delle tensioni ammissibili), e con riferimento alle strutture metalliche, il problema è classicamente risolto chiamando in causa i due momenti di nocciolo. Se  $N$  è lo sforzo normale, e si chiamano  $d_1$  e  $d_2$  le distanze dei due punti di nocciolo  $E_1$  ed  $E_2$  dalla retta di azione di  $N$ , le tensioni ai due bordi sono date da (Figura 8.1):

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{Nd_1}{n_1A} \\ \sigma_2 &= -\frac{Nd_2}{n_2A}\end{aligned}\tag{8.1}$$

I punti di nocciolo  $E_1$  ed  $E_2$  corrispondono rispettivamente ai due estremi 1 e 2 della sezione; il baricentro  $G$  sta fra 1 ed  $E_1$ , e fra 2 ed  $E_2$ . I raggi di nocciolo:

$$\begin{aligned}n_1 &= GE_1 \\ n_2 &= GE_2\end{aligned}\tag{8.2}$$

sono presi in valore assoluto. Lo sforzo  $N$  è positivo se di trazione; la retta d'azione di  $N$  è orientata dalla sezione verso l'esterno; le distanze  $d_1$  e  $d_2$  sono positive se  $E_1$  ed  $E_2$  sono alla sinistra di tale retta. Si è poi indicata con  $A$  l'area della sezione.

Le (8.1) permettono di ottenere le sollecitazioni più elevate nella sezione attraverso le linee di influenza dei due momenti di nocciolo:

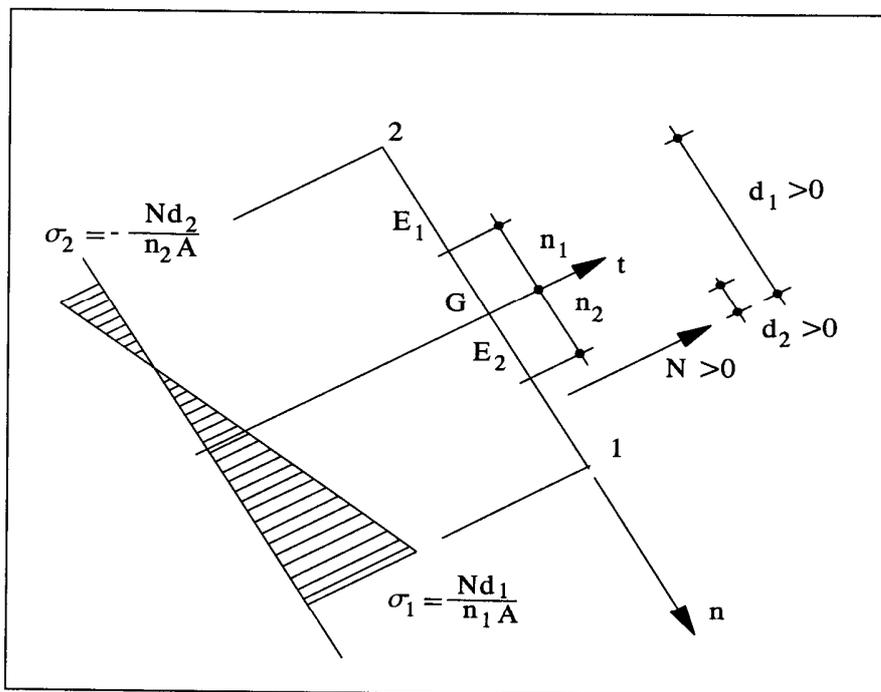


Figura 8.1- Il diagramma delle tensioni ed i punti di nocciolo

$$\begin{aligned} M_{n1} &= Nd_1 \\ M_{n2} &= Nd_2; \end{aligned} \quad (8.3)$$

tali linee sono generate dalla distorsione  $D_\phi = -1$  ( $\Delta\phi = 1$ ) agente in  $E_1$  o in  $E_2$ . Seguendo, come detto, il procedimento delle tensioni ammissibili, e limitando la verifica alle compressioni, si costruisce il diagramma:

$$|\sigma(z)| = |\sigma_g(z)| + |\sigma_a(z)| \quad (8.4)$$

ove  $\sigma_g$  e  $\sigma_a$  sono le tensioni nel bordo della generica sezione ove la compressione  $\sigma$  attinge il massimo valore assoluto. Se:

$$|\sigma| \leq |\sigma_{amm}| \quad (8.5)$$

la struttura rispetta il minorante  $s_m$  dei coefficienti di sicurezza implicito nella  $\sigma_{amm}$ ; infatti:

$$|\sigma_{amm}| = \frac{|\sigma_0''|}{s_m} \quad (8.6)$$

ove  $\sigma_0''$  è la tensione di crisi a compressione.  
Nella Figura 8.2 è:

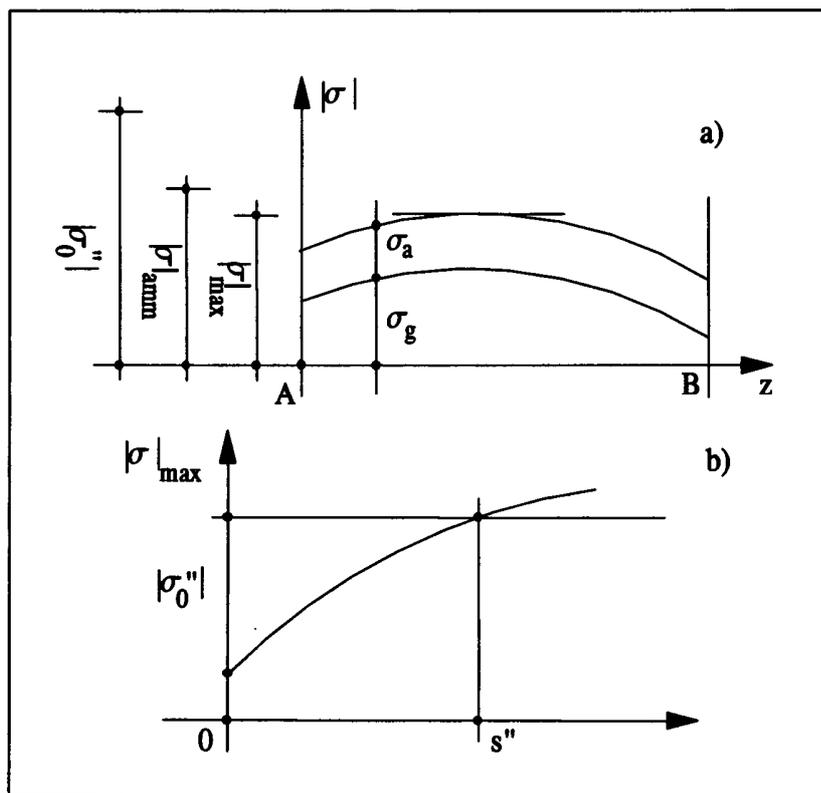


Figura 8.2- Il diagramma delle tensioni in regime elastico

$$\begin{aligned} s_m &= 1.5 \\ |\sigma_{maz}| &= 0.94 |\sigma_{amm}| \\ s' &= \frac{s}{0.94} = 1.6 \end{aligned} \quad (8.7)$$

Quest'ultimo è il coefficiente di sicurezza della struttura, valutato nell'ipotesi che i carichi fissi ed accidentali aumentino nello stesso rapporto, e cioè in applicazione proporzionale del carico.

E' questo il procedimento delle tensioni ammissibili.

Se si vuole invece il coefficiente di sicurezza  $s''$  nell'ipotesi che aumenti il solo carico accidentale, occorre considerare la seguente funzione di  $z$ :

$$|\sigma(z)| = |\sigma_g(z)| + c|\sigma_a(z)| \quad (8.8)$$

Assegnato  $c$ , la funzione (8.8) raggiunge il suo massimo all'ascissa  $z_m$  data dall'equazione:

$$\frac{\partial|\sigma_g|}{\partial z} + c\frac{\partial|\sigma_a|}{\partial z} = 0 \quad (8.9)$$

All'ascissa  $z_m$  si ha la  $\sigma_{max}$ , data da:

$$|\sigma_{max}| = |\sigma_g(z_m)| + c|\sigma_a(z_m)| \quad (8.10)$$

La  $|\sigma_{max}|$  è così (Figura 8.2b) una funzione di  $c$ ; in corrispondenza di  $|\sigma_{max}| = |\sigma_0''|$  si legge il valore di  $s''$ .

Poichè appare evidente che il coefficiente di sicurezza che interessa non è  $s'$ , ma  $s''$ , il procedimento delle tensioni ammissibili — che fornisce solo  $s'$  — si basa sul tacito presupposto che sia comunque:

$$s'' \geq s' \quad (8.11)$$

Si riconosce quindi che è innanzitutto antieconomico procedere fidando nella (8.11), senza sapere di quanto  $s''$  supera  $s'$ . Il primo difetto del procedimento delle tensioni ammissibili è perciò quello di chiamare in causa un solo minorante.

Ma è la stessa (8.11) che può palesarsi falsa, ed allora il procedimento sarebbe carente sul piano della sicurezza. La (8.11) in realtà può cadere in difetto in molti casi. Ciò è raro in un arco metallico, ove la (8.11) può dimostrarsi falsa solo se il carico accidentale induce tensioni di trazione; è frequente invece negli archi in conglomerato armato, come si mostrerà più appresso con l'aiuto dei domini limite  $NM$ , ed è addirittura la norma negli archi in muratura. Nel caso del conglomerato armato però il procedimento dei momenti di nocciolo cade in difetto per un'altra, ancor più grave ragione. Interviene infatti in questo caso la fessurazione.

E' vero che di questa non si tiene conto nel trarre le linee di influenza, ma non se ne può prescindere nella verifica della sezione; e quindi è la stessa posizione dei punti  $E_1$  ed  $E_2$  che non è nota *a priori*.

Le suddette obiezioni si superano attraverso la nozione del dominio  $NM$ . Esiste per ogni sezione un *dominio elastico di esercizio*  $D_e$ , di frontiera  $\Lambda_e$ , ed un *dominio elastico limite*  $D_{Oe}$ , di frontiera  $\Lambda_{Oe}$ , (Figura 8.3) entrambi nel riferimento  $NM$ .

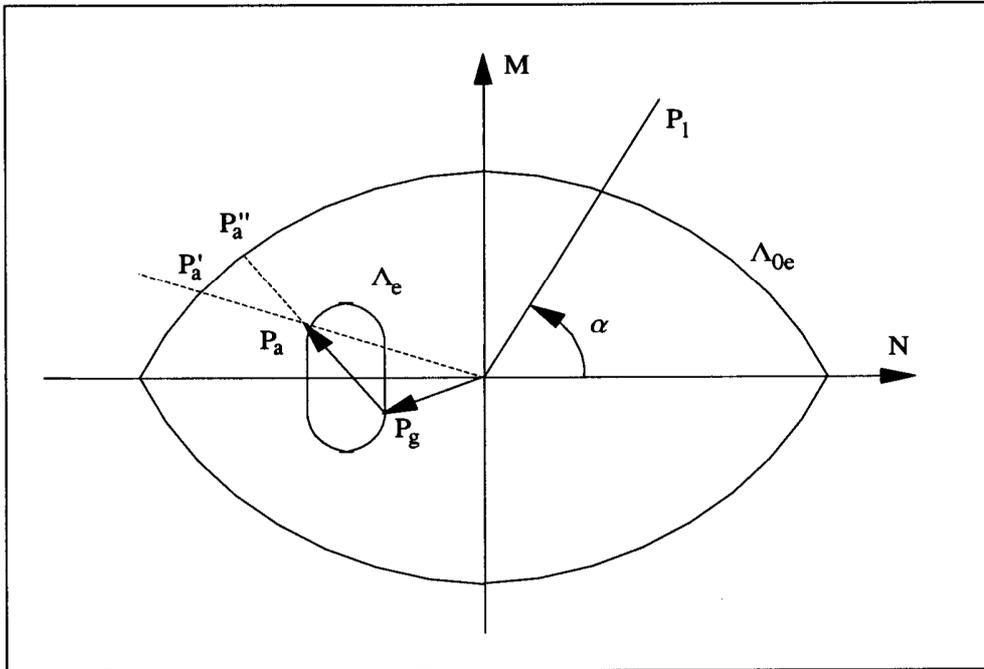


Figura 8.3- I domini elastici

Il primo si ottiene costruendo il vettore  $OP_g$  di componenti  $N_g M_g$ , sforzo normale e momento flettente nella sezione dovuti ai carichi fissi; e poi costruendo tutti i possibili vettori  $P_g P_a$  di componenti  $N_a M_a$  dovuti ai carichi accidentali. Il luogo dei punti  $P_a$  è la frontiera  $\Lambda_e$ .

Il secondo si ottiene costruendo per ogni valore della eccentricità  $e$  il vettore  $OP_l$  di componenti  $N$  ed  $Ne$ , ove  $N$  è il valore dello sforzo normale per cui si attinge, in uno dei due bordi della sezione, la  $\sigma$  di crisi. Il vettore  $OP_l$  è inclinato sull'asse delle  $N$  di  $\arctan(e)$ . Il luogo dei punti  $P_l$  è la frontiera  $\Lambda_{0e}$ .

Ottenuti così i domini  $D_e$  e  $D_{el}$ , il coefficiente di sicurezza nella sezione è il più basso dei moltiplicatori dei carichi per cui  $P_a$  raggiunge  $\Lambda_{0e}$ .

Se carichi fissi ed accidentali aumenteranno assieme,  $P_a$  si sposta lungo la semiretta  $OP_a$ , e si può scrivere:

$$s' = \left( \frac{OP'_a}{OP_a} \right)_{min} \quad (8.12)$$

Se invece i carichi fissi non aumentano,  $P_a$  si sposta lungo la semiretta  $P_g P_a$ , e si

può scrivere:

$$s'' = \left( \frac{P_g P_a''}{P_g P_a} \right)_{min} \quad (8.13)$$

Naturalmente  $s''$  non deve più paragonarsi al coefficiente  $s_m$  implicito nella prescrizione dei valori  $\sigma_{amm}$ , poichè  $s_m$  in questo caso può e deve essere più piccolo, non essendoci più alcun motivo di cautela. E' invece  $s'$  che deve essere paragonato ad  $s_m$ .

## 8.2. I fondamenti del calcolo a rottura

Operando come si è detto nel paragrafo precedente, si agisce entro i confini dell'ambito elastico; il grado di sicurezza, espresso dal più basso valore di  $s'$  o  $s''$  calcolato in tutte le sezioni, è da intendersi in riferimento alla crisi puntuale.

Questi coefficienti, espressi come segue:

$$\begin{aligned} s'_e &= s'_{min} \\ s''_e &= s''_{min} \end{aligned} \quad (8.14)$$

sono i moltiplicatori delle forze applicate che portano alla crisi puntuale.

Se le forze applicate crescono oltre i valori (8.14) si esce dal campo elastico; man mano che le forze crescono si verificano plasticizzazioni sempre più estese, finchè si giunge alla rottura, e cioè al crollo di tutta la struttura, o di una sua parte.

L'ipotesi di duttilità illimitata, connessa con quella di tensione limite costante, semplifica grandemente il calcolo. Questa ipotesi si traduce infatti in un diagramma  $\sigma - \epsilon$  bilatero come quello di Figura 8.4, ove per  $\epsilon \leq \sigma_0/E$  il comportamento del materiale è linearmente elastico, mentre per  $\epsilon > \sigma_0/E$  si ha:

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = \begin{cases} 0, & \text{se } \epsilon d\epsilon > 0 \\ 1, & \text{se } \epsilon d\epsilon < 0. \end{cases} \quad (8.15)$$

La  $\epsilon$  è illimitata. Questo è il cosiddetto *materiale idealmente elasto-plastico*; tale può considerarsi con buona approssimazione qualsiasi materiale duttile, in particolare l'acciaio, specialmente quello ordinario da carpenteria metallica, o quello in barre per conglomerato armato.

Accettate queste ipotesi per il materiale, il diagramma  $M(\Delta\phi)$  per il tronco elementare assume lo stesso aspetto (Figura 8.5), poichè può assimilarsi ai due asintoti del diagramma effettivo.

Per ogni valore di  $N$  esiste un diagramma come quello della Figura 8.5, e due momenti limiti  $M'_{ON} > 0$  ed  $M''_{ON} < 0$ ; per sezioni simmetriche, come quelle degli archi da ponte, è:

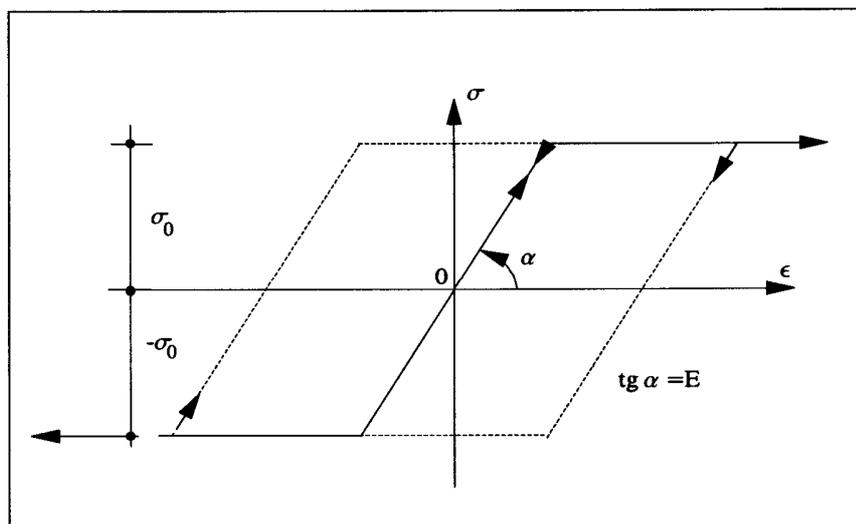


Figura 8.4- Il diagramma tensioni-deformazioni idealizzato

$$M'_{ON} = -M''_{ON} = M_{ON} \quad (8.16)$$

Nel piano  $NM$  sorge così la curva  $M_{ON}(N)$ , che è la frontiera  $\Lambda_0$  del dominio limite  $D_0$ ; essa è la *curva limite* della sezione (Figura 8.6).

Il principio dello scorrimento plastico (Drucker) definisce nel generico punto  $A$  di  $\Lambda_0$  la direzione ed il verso della deformazione plastica (peraltro di valore qualsiasi). Il riferimento  $(N, M)$  coincide con quello  $(\Delta u, \Delta \phi)$ , in modo che la relazione di ortogonalità:

$$\Delta M \cdot \Delta \phi + \Delta N \cdot \Delta u = 0 \quad (8.17)$$

si traduca in ortogonalità geometrica tra i due vettori  $\Delta \mathbf{S}(\Delta N, \Delta M)$  ed  $\mathbf{s}(\Delta u, \Delta \phi)$ :

$$\Delta \mathbf{S} \cdot \mathbf{s} = 0 \quad (8.18)$$

In questo caso il principio suddetto permette di dire che  $\mathbf{s}$  è ortogonale al  $\Delta \mathbf{F}$  cui si accompagna, e cioè è diretto secondo la normale in  $A$  a  $\Lambda_0$ . Inoltre, sempre per lo stesso principio, deve essere:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{s} > 0 \quad (8.19)$$

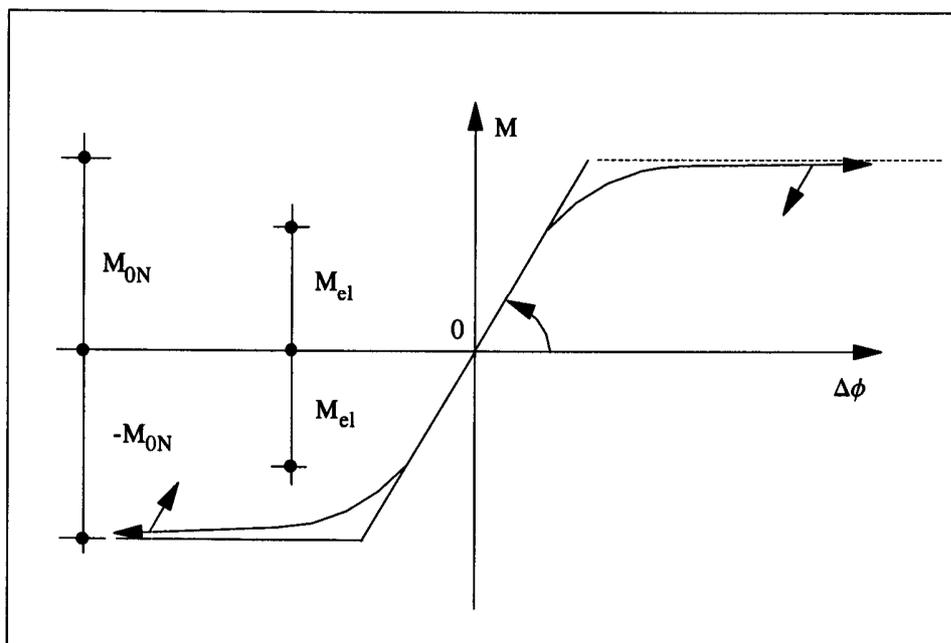


Figura 8.5- Il diagramma  $M-\Delta\phi$  idealizzato

quindi  $s$  è diretto secondo la normale esterna in  $A$  a  $\Lambda_0$ .

Dalle:

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta u} = -\frac{\Delta N}{\Delta M} \quad (8.20)$$

e:

$$\frac{\Delta u}{\Delta\phi} = d_n \quad (8.21)$$

ove  $d_n$  è la distanza del baricentro dall'asse neutro (positiva se  $G$  è al disopra dell'asse neutro) si ricava:

$$d_n = -\frac{dN}{dM} \quad (8.22)$$

La (8.22) fissa univocamente la posizione dell'asse neutro  $n$  in dipendenza del punto  $A$  su  $\Lambda_0$ .

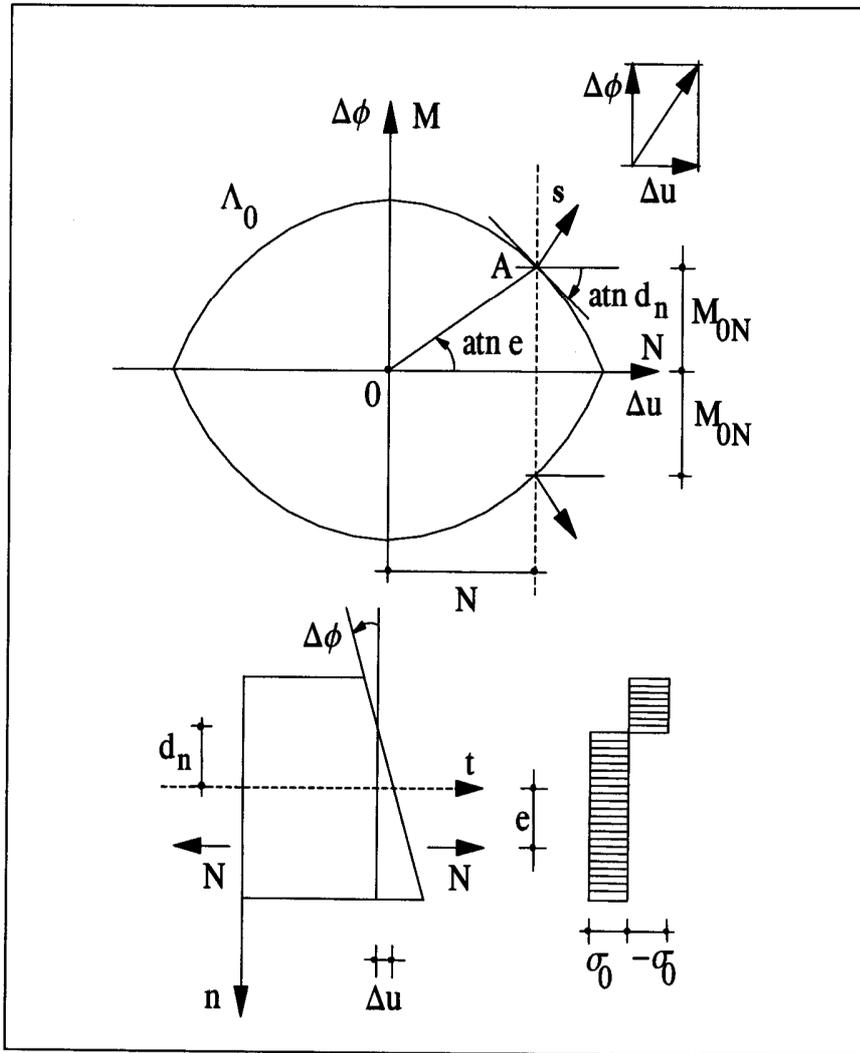


Figura 8.6- Il dominio limite

Se in una sezione viene raggiunta in un punto  $A$  la frontiera  $\Lambda_0$ , in essa si genera una *cerniera plastica* di asse  $n$ ; la cerniera è unilaterale (Figura 8.5), e trasmette alla struttura le due coppie:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_s &= M_{ON} \\ \mathcal{M}_d &= -M_{ON} \end{aligned} \quad (8.23)$$

All'aumentare del moltiplicatore delle forze applicate oltre i valori  $s'$  o  $s''$  si formano successivamente una, due, tre, ed infine quattro cerniere plastiche, che possono anche spostarsi lungo l'asse al progredire delle forze.

All'atto della formazione della quarta cerniera la struttura si muta in meccanismo, e rovina. Il valore corrispondente di  $s'$ , o  $s''$ , è il moltiplicatore di rottura  $s'_r$ , o  $s''_r$ .

Si può seguire la struttura all'aumentare dei carichi, in un procedimento al passo. E' anche possibile però — e molto più economico — mettere a fuoco la struttura nel momento del crollo, determinando così direttamente  $s'_r$ , o  $s''_r$ . E' questo il cosiddetto procedimento del *calcolo a rottura* (limit design), ed è di questo che si tratterà nel seguito.

Si può prendere in esame il solo carico fisso, o, assieme a questo, una sola condizione di carico accidentale. E' questo il caso del *collasso statico*. Oppure, si può considerare l'insieme di tutte le possibili azioni esterne accidentali, comprendendo in queste anche le distorsioni variabili, come per esempio le variazioni termiche. In questo caso si ha un moltiplicatore di crisi  $s'_r$ , o  $s''_r$ , per collasso statico dipendente da ciascuna delle condizioni di carico accidentale, ma anche un moltiplicatore di crisi  $\tilde{s}'_r$ , o  $\tilde{s}''_r$ , per *collasso incrementale* o per collasso locale (*plasticizzazione alternata*).

Il moltiplicatore  $\tilde{s}'_r$  (o  $\tilde{s}''_r$ ) è non maggiore di  $s'_{rmin}$  (o  $s''_{rmin}$ ). Inoltre, nel collasso statico non giocano nè le distorsioni — fisse o alterne che siano — nè le cedibilità elastiche dei vincoli. Può sembrare quindi che il calcolo di  $\tilde{s}_r$  renda inutile quello degli  $s_r$  per le singole condizioni di carico. Questa conclusione è errata, poichè è diverso il minorante  $s_m$  nei due casi. Si consideri infatti che il collasso statico è di carattere istantaneo, quello incrementale invece è progressivo, e quindi per il primo si esige un minorante più elevato; per una generica condizione di carico accidentale può essere perciò che si verifichi:

$$\frac{s_r}{s_m} < \frac{\tilde{s}_r}{\tilde{s}_m} \quad (8.24)$$

pur essendo  $s_r > \tilde{s}_r$ .

### 8.2.1. Il collasso statico

Nel collasso statico la condizione di carico accidentale è rappresentata nella generica sezione dal vettore  $P_g P_a$  (Figura 8.7); appaiono poi il vettore  $P_r P_g$  del peso proprio, ed il vettore  $OP_r$  dello stato tensionale cosiddetto *residuo*, dovuto alle deformazioni permanenti. Nella stessa figura si è fatto il caso della applicazione proporzionale delle forze, e quindi il punto  $P_a$  si sposta lungo la semiretta  $P_r P_a$ . Si è fatta l'ipotesi inoltre che si sia raggiunto il valore  $s'_r$  del moltiplicatore, e che la figura si riferisca ad una

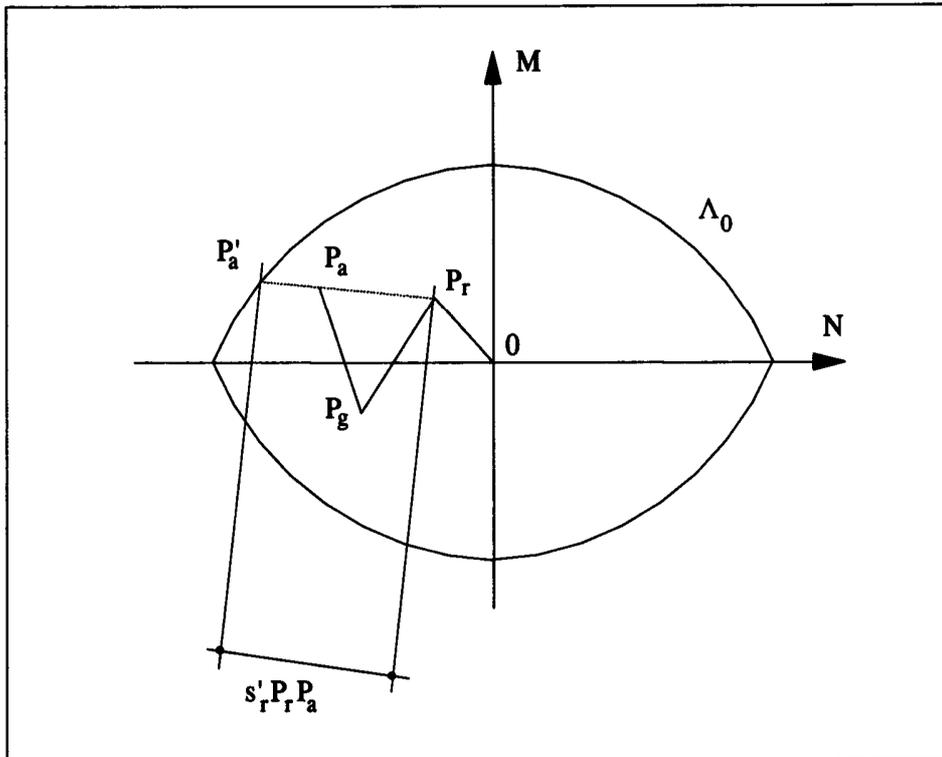


Figura 8.7- Carichi accidentali e pesi propri nel dominio limite

delle quattro sezioni ove si sono formate le cerniere plastiche; quindi l'estremo  $P'_a$  del vettore  $s'_r \cdot P_r P'_a$  giace su  $\Lambda_0$ .

Nella sezione generica  $P'_a$  è interno al dominio, mentre in almeno quattro sezioni (ed in genere solo in quattro)  $P'_a$  è sulla frontiera.

Se si conoscesse l'ubicazione delle quattro cerniere — e cioè le quattro sezioni e la posizione su esse dell'asse neutro — si potrebbe calcolare  $s'_r$  scrivendo l'equazione di equilibrio del meccanismo (Figura 8.8) nel momento della crisi:

$$s'_r(L_g + L_a) - \sum_1^4 \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{s}_i = 0 \quad (8.25)$$

da cui:

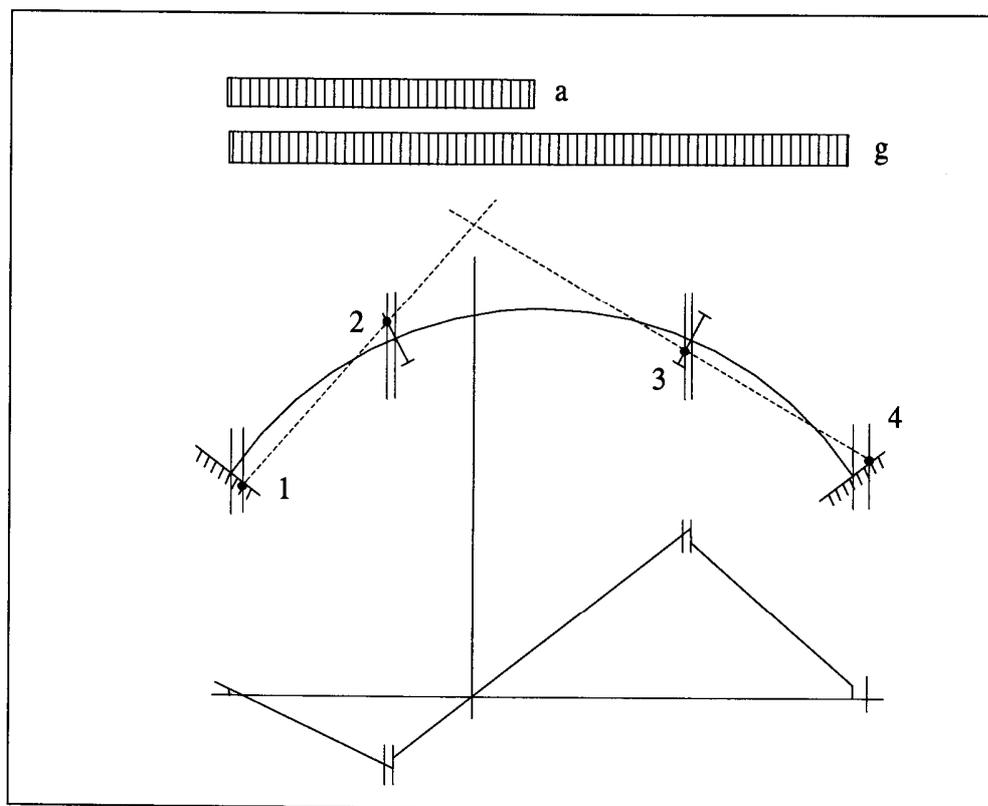


Figura 8.8- Meccanismo di collasso a quattro cerniere

$$s'_r = \frac{\sum_1^4 \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{s}_i}{L_g + L_a} \quad (8.26)$$

La sollecitazione residua nella cerniera generica è data dalla relazione:

$$\mathbf{S}_r + (\mathbf{S}_g + \mathbf{S}_a) s'_r = OP'_a \quad (8.27)$$

da cui:

$$\mathbf{S}_r = OP'_a - (\mathbf{S}_g + \mathbf{S}_a) s'_r; \quad (8.28)$$

E' così definito in tutta la struttura lo stato tensionale residuo. Ricostruendo in ogni sezione il vettore  $\mathbf{S}$ , deve essere ovunque rispettata la condizione di compatibilità:

$$P'_a \subset D_0, \quad (8.29)$$

e cioè (Figura 8.9):

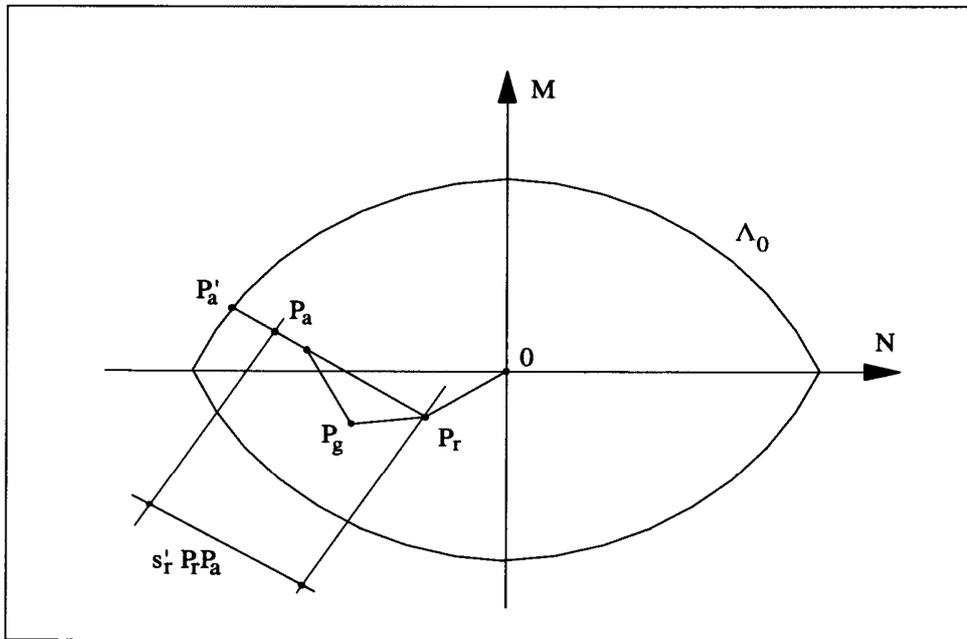


Figura 8.9- Stati tensionali residui nel dominio limite

$$(S_g + S_a)s'_r \leq P_r P'_a. \quad (8.30)$$

Se si scelgono a caso le quattro cerniere, la (8.25) fornisce un valore  $\gamma'$  che in genere non rispetta la (8.30) in tutte le sezioni. Questo coefficiente, chiamato *cinematicamente sufficiente*, è il moltiplicatore di rottura della struttura rinforzata, e cioè della struttura ove ovunque (fatta eccezione per le quattro cerniere) le  $\sigma_0$  siano esaltate fino al rispetto delle (8.30). Si intuisce così — e si dimostra, se ce n'è bisogno — che un  $\gamma'$  così ottenuto è non minore di  $s'_r$ , e che  $s'_r$  stesso è un  $\gamma'$ . Nasce così l' *upper bound theorem*: il moltiplicatore di rottura è il più piccolo dei coefficienti cinematicamente sufficienti.

Si definisce *staticamente ammissibile* un coefficiente  $\psi'$  tale che esista uno stato tensionale residuo cui si associ sotto i carichi  $\psi(g+a)$  uno stato tensionale compatibile, tale cioè che ovunque sia rispettata la condizione:

$$(\mathbf{S}_g + \mathbf{S}_a)\psi' \leq P_r P'_a. \quad (8.31)$$

Si intuisce — ed anche qui si può dare dimostrazione — che sotto  $\psi'$  non può aversi rottura; e d'altro canto  $s'_r$  è un  $\psi'$ . Si ha così il *lower bound theorem*: il moltiplicatore di rottura è il più alto dei coefficienti staticamente ammissibili.

Si trae dai due teoremi precedenti che, dati un qualsiasi  $\psi$  ed un qualsiasi  $\gamma$ , è:

$$\psi \leq \gamma \quad (8.32)$$

I  $\psi$  ed i  $\gamma$  costituiscono quindi due classi contigue; l'elemento separatore — unico — è proprio  $s_r$ .

Ai lumi di quanto sopra, dopo aver ottenuto un  $\gamma'$  si esegua in ogni sezione il rapporto:

$$r = \frac{|\mathbf{S}_g + \mathbf{S}_a|}{|P_r P'_a|} \quad (8.33)$$

e si scelga  $r_{max}$ . Risulta che, dividendo  $\gamma'$  per  $r_{max}$  si ottiene un  $\psi'$ . Quindi può scriversi:

$$\frac{\gamma'}{r_{max}} \leq s'_r \leq \gamma' \quad (8.34)$$

E' ottenuto così un intervallo in cui  $s'_r$  è sicuramente compreso. Si può dimostrare che tale intervallo si restringe nel secondo tentativo se la scelta delle cerniere per ottenere il secondo valore di  $\gamma$  è effettuata ove i rapporti (8.34) attingono i più alti valori.

### 8.2.2. Il collasso incrementale

Se si desidera invece il moltiplicatore di rottura per collasso incrementale, o per plasticizzazione alternata, il vettore  $P_g P_a$  cede il posto al dominio elastico di esercizio.

Se le forze fisse e quelle accidentali si moltiplicano per un coefficiente  $k' < s'_r$ , ove  $s'_r$  è il più piccolo dei moltiplicatori di rottura per collasso statico sotto ciascuna delle condizioni di carico accidentale, è certo che non può aversi una rottura istantanea. Può però farsi luogo un fenomeno di deformazione progressiva che cresce oltre ogni limite. Può infatti succedere che esista uno stato tensionale residuo  $\mathbf{S}_r$ , invariato nel tempo, tale che in quattro sezioni il dominio  $k'(D_e + \mathbf{S}_r)$  risulta tangente alla frontiera del dominio limite. Le quattro sezioni, ed i punti di tangenza, definiscono quattro cerniere plastiche, e cioè un meccanismo. I punti di tangenza corrispondono a quattro diverse condizioni di carico; ciò significa che ciascuna di queste sezioni subisce successivamente — ed indipendentemente dalle altre tre — una rotazione plastica.

Quando le rotazioni plastiche delle quattro cerniere corrispondono ad una deformata rigida, questa si verifica, liberando energia vincolata. Tali deformate, sommandosi nel tempo, portano alla crisi per eccesso di spostamenti. Il moltiplicatore  $k'$  è il

*moltiplicatore di crisi  $\tilde{s}_r$  per collasso incrementale*, relativo all'aumento contemporaneo delle forze fisse e delle accidentali. Così pure esiste un analogo moltiplicatore di crisi relativo all'aumento dei soli carichi accidentali.

Può anche darsi che, sotto i carichi  $k'(g+a)$ , esista uno stato tensionale residuo  $S_r$  tale che in una sezione la curva limite sia toccata dal dominio  $k'(D_e + S_r)$  in due punti opposti  $P'_a$  e  $P'_b$  corrispondenti a due tangenti parallele (Figura 8.10).

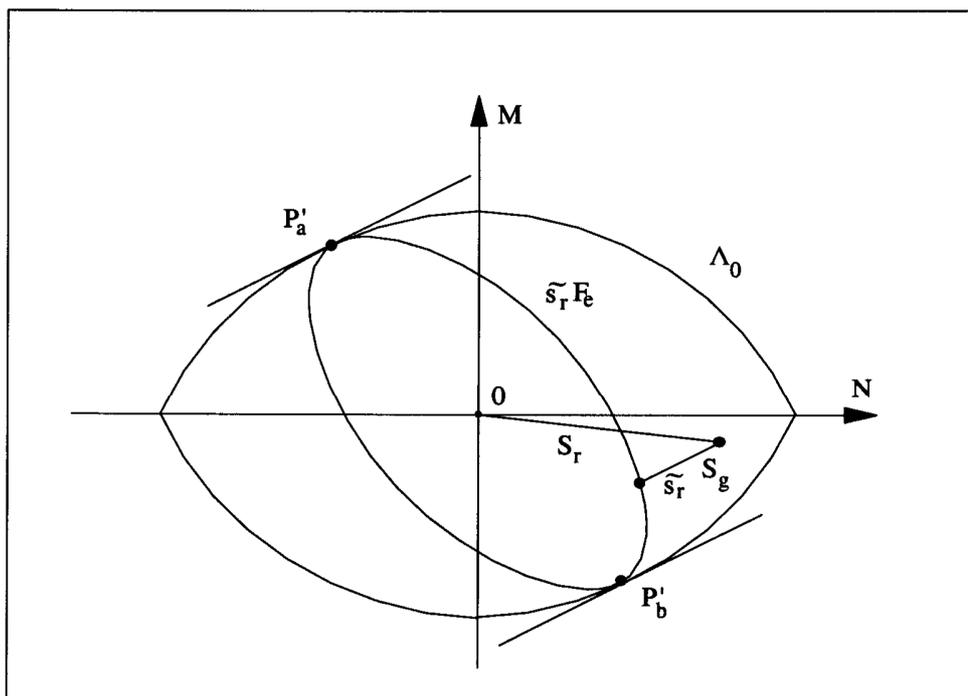


Figura 8.10- Il caso della plasticizzazione alternata

Questi due punti di tangenza corrispondono allo stesso asse neutro, ma con versi opposti della cerniera plastica. Si verificherà quindi in tale sezione una rotazione plastica alterna, che porta, dopo un certo numero di cicli, alla rottura localizzata. In questo caso  $k'$  è il *moltiplicatore di crisi  $\tilde{s}_r$  per plasticizzazione alternata*.

Accanto ai moltiplicatori  $\tilde{s}_r$  relativi all'aumento contemporaneo dei carichi fissi ed accidentali, esistono gli analoghi moltiplicatori  $\tilde{s}_r''$  relativi all'aumento dei soli carichi accidentali.

Si definisce anche nel caso in esame il moltiplicatore cinematicamente sufficiente  $\tilde{\gamma}'$ , o  $\tilde{\gamma}''$ , nel modo che segue. Si scelgono quattro qualsiasi sezioni, e sulle frontiere  $\Lambda_0$

di queste, quattro punti  $P'_a$ ; così è definito un meccanismo come quello della Figura 8.8.

La conoscenza di  $P'_a$  implica (Figura 8.11) quella del vettore  $\mathbf{S}_a = P_g P_a$  corrispondente alla condizione di carico accidentale che porta alla plasticizzazione nella sezione; infatti esaltando in ragione di  $\tilde{\gamma}'$  il dominio  $D_e + \mathbf{S}_g$ , e trasladolo di  $\mathbf{S}_r$  (per ora incognito), esso deve risultare tangente in  $P'_a$  a  $\Lambda_0$ .

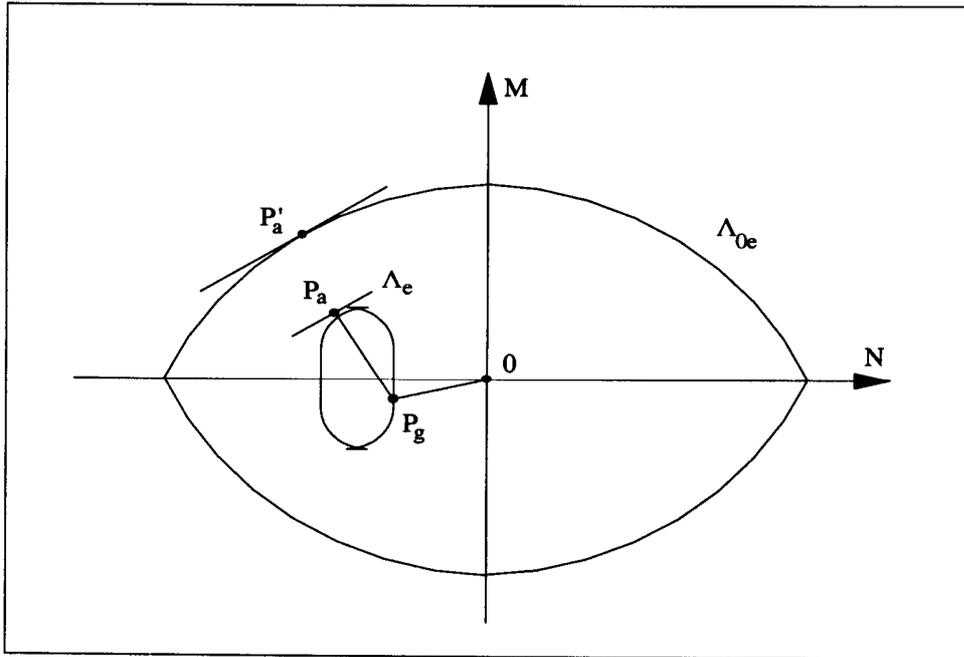


Figura 8.11- La plasticizzazione alternata nel dominio limite

In ciascuna delle quattro sezioni si ha:

$$\mathbf{S} = OP'_a = \mathbf{S}_r + \tilde{\gamma}'\mathbf{S}_g + \tilde{\gamma}'\mathbf{S}_a; \quad (8.35)$$

la condizione di equilibrio sotto forze applicate nulle degli  $\mathbf{S}_r$  si scrive:

$$\sum_1^4 \mathbf{S}_r \mathbf{s}_r = 0, \quad (8.36)$$

e quindi, per la (8.35), si ottiene l'espressione di  $\tilde{\gamma}'$ :

$$\tilde{\gamma}' = \frac{\sum_1^4 \mathbf{S}_r \mathbf{s}_r}{\sum_1^4 (\mathbf{S}_g + \mathbf{S}_a)_r \mathbf{s}_r}; \quad (8.37)$$

Ottenuto  $\tilde{\gamma}'$ , dalla (8.35) si hanno gli  $\mathbf{S}_r$  nelle quattro sezioni, e quindi in tutto l'arco.

Analogamente alla (8.37) si ha:

$$\tilde{\gamma}'' = \frac{\sum_1^4 (\mathbf{S} - \mathbf{S}_g)_r \mathbf{s}_r}{\sum_1^4 \mathbf{S}_{ar} \mathbf{s}_r}; \quad (8.38)$$

Se si ipotizza invece crisi di plasticità alternata, e si sceglie la sezione ove ciò accade ed i due punti  $P'_a$  e  $P'_b$  di contatto (Figura 8.10), dalle due relazioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 &= \mathbf{S}_r + \tilde{\gamma}' (\mathbf{S}_g + \mathbf{S}_{a1}) \\ \mathbf{S}_2 &= \mathbf{S}_r + \tilde{\gamma}' (\mathbf{S}_g + \mathbf{S}_{a2}) \end{aligned} \quad (8.39)$$

si trae per differenza:

$$\tilde{\gamma}' = \frac{\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2}{\mathbf{S}_{a1} - \mathbf{S}_{a2}} \quad (8.40)$$

Identica formula vale per la  $\tilde{\gamma}''$ .

Si definisce poi il moltiplicatore *staticamente ammissibile*  $\tilde{\psi}'$ , o  $\tilde{\psi}''$ , come un numero al quale possa associarsi uno stato tensionale residuo tale che ovunque, sia:

$$(\mathbf{S}_g + D_e)\psi' + \mathbf{S}_r \subset D_0 \quad (8.41)$$

oppure:

$$\mathbf{S}_g + D_e\psi' + \mathbf{S}_r \subset D_0 \quad (8.42)$$

Si dimostra che dato un  $\tilde{\gamma}'$  (ottenuto nell'ipotesi di collasso incrementale o di plasticizzazione alternata) ed un  $\psi'$  è sempre:

$$\tilde{\psi}' \leq \tilde{s}'_r \leq \tilde{\gamma}' \quad (8.43)$$

e così pure:

$$\tilde{\psi}'' \leq \tilde{s}''_r \leq \tilde{\gamma}'' \quad (8.44)$$

Il moltiplicatore  $\tilde{s}'_r$ , o  $\tilde{s}''_r$ , è quindi unico, e può collegarsi ad un collasso incrementale, ad una plasticizzazione alternata, o a tutti e due.

Ottenuto un  $\tilde{\gamma}'$  da un dato meccanismo, è possibile da esso risalire ad un  $\tilde{\psi}'$  con tecnica identica a quella che ha portato alla (8.34). Ottenuti infatti dalle (8.35) gli  $\mathbf{S}_r$  nelle quattro sezioni di cerniera, e quindi in tutte le sezioni, si disegna da  $P_r$  il

dominio  $(S_r + D_e)\tilde{\gamma}'$ , e si calcola il coefficiente  $1/r$  per cui deve essere ridotto perchè si contragga tutto entro il dominio  $D_0$ . Eseguito ciò per ogni sezione, può scriversi una relazione identica alla (8.34):

$$\frac{\tilde{\gamma}'}{r_{max}} \leq \tilde{s}'_r \leq \tilde{\gamma}' \quad (8.45)$$

Identica espressione vale per  $\tilde{s}''_r$ .

### 8.3. L'arco in conglomerato armato: il collasso statico

Il calcolo a rottura esige la duttilità del materiale; sembrerebbe quindi inapplicabile alle opere in conglomerato armato. Ma è proprio l'armatura metallica a conferire a tali opere quella duttilità che il conglomerato in sè non possiede; ormai numerosi studi teorici e verifiche sperimentali confermano tale assunto.

I domini limite che appaiono nelle figure precedenti sono simmetrici perchè relativi all'acciaio, e cioè a materiale duttile e perciò iso-resistente ( $\sigma'_0 = -\sigma''_0 = \sigma_0$ ).

Nel conglomerato armato invece i domini, pur conservando lo stesso aspetto, appaiono traslati nel verso delle  $N$  negative. Essi si conservano simmetrici rispetto all'asse delle  $N$  se le armature inferiore e superiore sono uguali ( $A'_f = A_f$ ), come generalmente accade negli archi da ponte. Nella Figura 8.12 è disegnato uno di questi domini, nella sola parte al disopra dell'asse  $N$ , per cui è  $M > 0$ ,  $\Delta\phi > 0$ . La parte al disotto dell'asse  $N$  si trae per simmetria.

Il dominio si giustifica perchè la sezione è stata idealizzata in due aree concentrate, pari ad:

$$A_f + bs \quad (8.46)$$

alla distanza reciproca  $b$ . Le situazioni limiti si raggiungono quando è plasticizzata l'area inferiore, o l'area superiore. Nel primo caso l'asse neutro è all'estradosso, e la condizione di equivalenza tra forze interne ed esterne si scrive come segue:

$$M + N\frac{b}{2} = \sigma_{f0}A_f b \quad (8.47)$$

da cui:

$$M = \sigma_{f0}A_f b - N\frac{b}{2} \quad (8.48)$$

la retta (8.48) è la  $AE$  della Figura 8.12. Si osservi che è pure:

$$\Delta u = \Delta\phi\frac{b}{2} \quad (8.49)$$

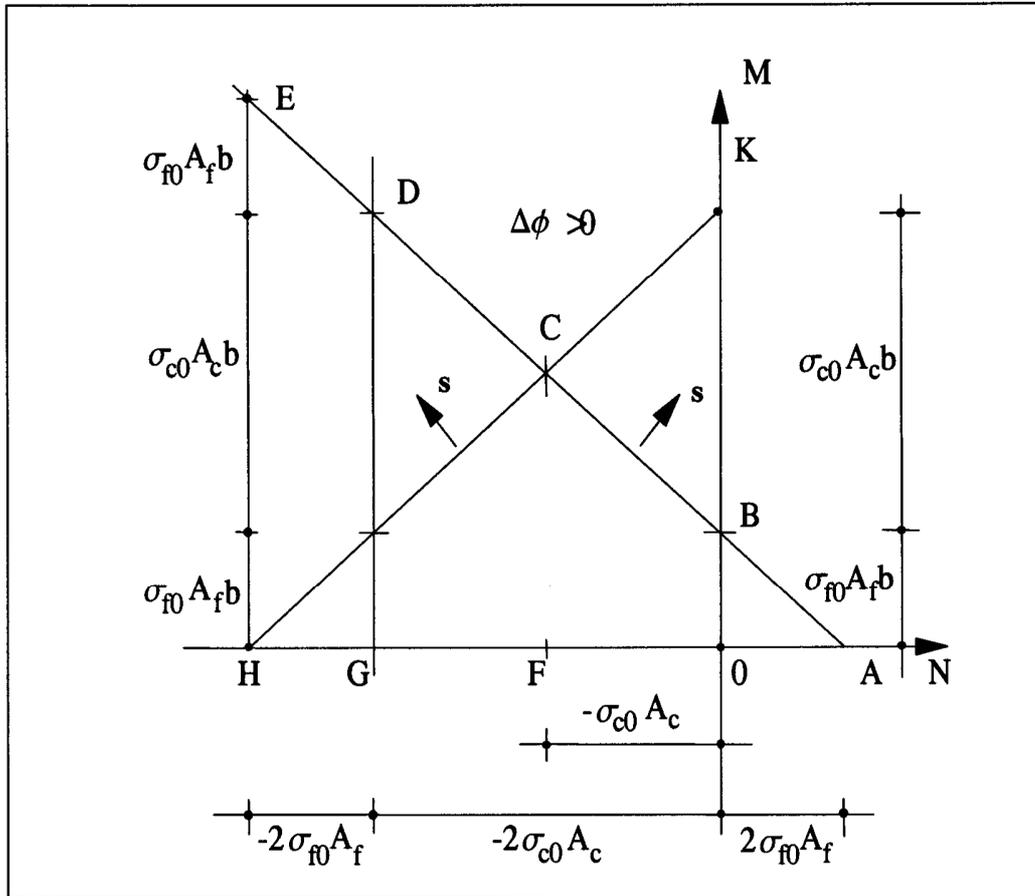


Figura 8.12- Il dominio limite nel caso del conglomerato armato

e ciò conferma la validità del principio dello scorrimento plastico.

Nel secondo caso l'asse neutro è all'intradosso, e la condizione di equivalenza si scrive come segue:

$$M - N \frac{b}{2} = \sigma_{f0} A_f b + \sigma_{c0} A_c b, \quad (8.50)$$

ove  $\sigma_{c0}$  è in valore assoluto. Si ha quindi:

$$M = \sigma_{f0} A_f b + \sigma_{c0} A_c b + N \frac{b}{2}. \quad (8.51)$$

La retta (8.51) è la  $HK$  della Figura 8.12. Si ha:

$$\Delta u = -\Delta\phi \frac{b}{2} \quad (8.52)$$

e anche questa conferma la validità del principio dello scorrimento plastico.

I domini come quello della Figura 8.12 si giustificano nelle sezioni a cassone, come quasi sempre si verifica negli archi da ponte. Il dominio reale differisce dal rombo per una breve parte in prossimità del vertice  $C$  e del simmetrico, corrispondentemente al transito dell'asse neutro attraverso il setto.

Il dominio a rombo semplifica moltissimo i calcoli; ma una ulteriore semplificazione si ottiene considerando che quando la crisi avviene per carichi abbastanza dissimili dall'uniforme — per esempio, carico su mezza luce, o carico antisimmetrico di tipo sismico — il dominio limite è impegnato solo sulla frontiera  $AC$ , e sulla simmetrica. Il dominio può quindi addirittura ridursi (Figura 8.13) ad una bilatera. Ciò è tanto più vero quanto più elevato è il valore di  $\sigma_{c0}$ ; al limite, è esatto per  $\sigma_{c0} = \infty$ .

Allo stesso dominio della Figura 8.13 si perviene infatti accettando l'ipotesi di Heyman, ed estendendola alle sezioni in conglomerato debolmente armato.

Nelle sezioni a cassone però la semplificazione più notevole si ottiene introducendo la nozione dei *momenti limite intradossali* e *momenti limite estradossali*, e cioè quella di quattro momenti limite intrinseci della sezione, ed indipendenti dallo sforzo normale.

Nella Figura 8.14 sono rappresentati questi momenti con le forze interne che li generano; la  $\sigma_{c0}$  è presa in valore assoluto. Se la plasticizzazione nella sezione avviene per  $\Delta\phi > 0$ , ciò succede per snervamento del ferro se il momento rispetto all'estradosso (momento estradosale):

$$M_e = M + N \frac{b}{2} \quad (8.53)$$

attinge il valore limite:

$$M_{ef0} = \sigma_{f0} A_f b; \quad (8.54)$$

per crack del conglomerato se il momento rispetto all'intradosso (momento intradosale):

$$M_i = M - N \frac{b}{2} \quad (8.55)$$

attinge il valore limite:

$$M_{ic0} = \sigma_{c0} A_c b. \quad (8.56)$$

I due casi sono quelli delle Figura 8.14a e Figura 8.14b, e si compendiano nelle relazioni seguenti:

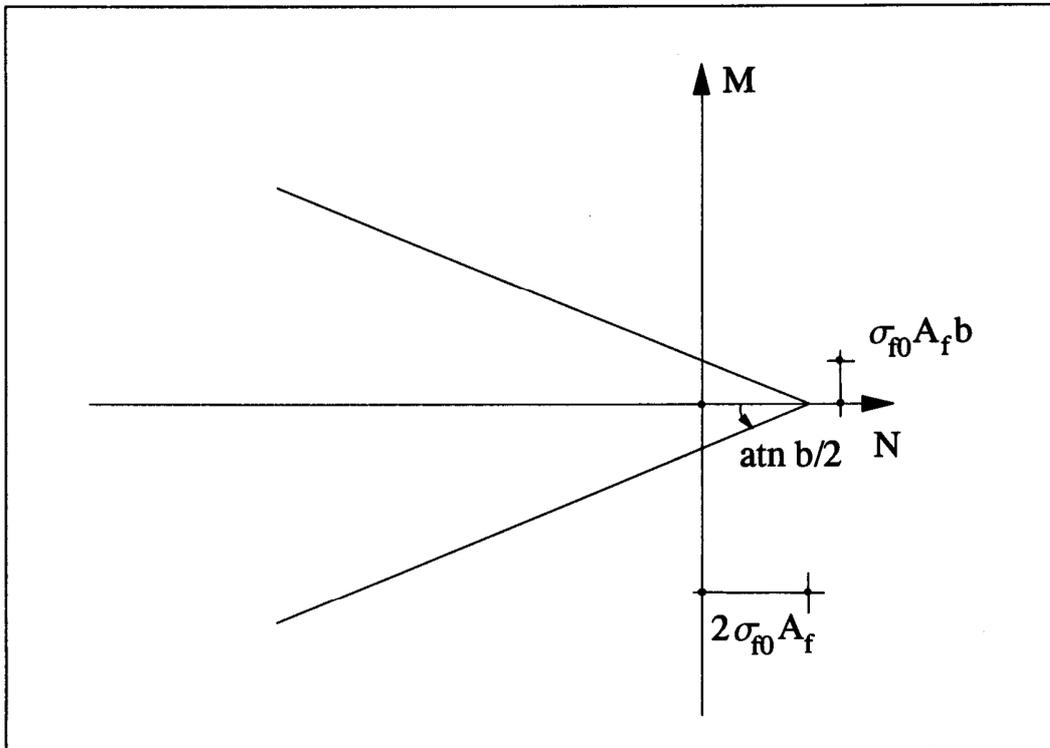


Figura 8.13- Il dominio limite idealizzato alla Heyman

$$\begin{cases} M_e = M_{ef0} \\ M_i \leq M_{ic0} \end{cases} \quad (8.57)$$

oppure:

$$\begin{cases} M_e \leq M_{ef0} \\ M_i = M_{ic0} \end{cases} \quad (8.58)$$

Se invece la plasticizzazione avviene per  $\Delta\phi < 0$ , ciò succede per snervamento del ferro se il momento rispetto all'intradosso attinge il valore limite, che per armatura simmetrica è:

$$M_{if0} = -M_{ef0}; \quad (8.59)$$

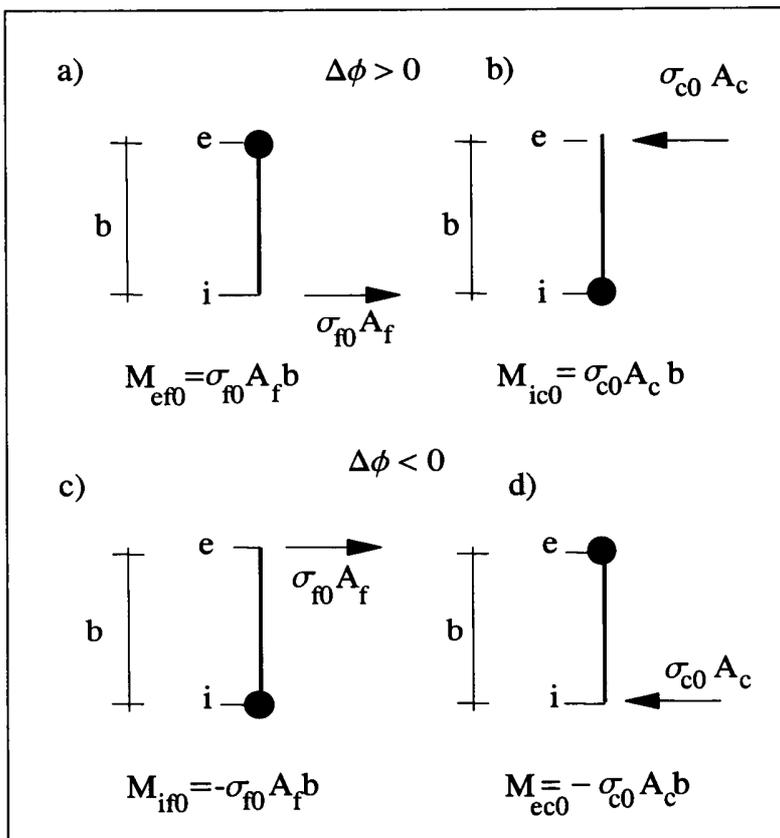


Figura 8.14- I momenti limite all'intradosso ed all'estradosso

per crack del conglomerato se il momento rispetto all'estradosso attinge il valore limite, che per soletta simmetrica è:

$$M_{ec0} = -M_{ic0} \tag{8.60}$$

I due casi sono quelli delle figure Figura 8.14c e Figura 8.14d, e si compendiano nelle relazioni seguenti:

$$\begin{cases} M_i = M_{if0} \\ M_e \geq M_{ec0} \end{cases} \tag{8.61}$$

oppure:

$$\begin{cases} M_i \geq M_{if0} \\ M_e = M_{ec0} \end{cases} \quad (8.62)$$

Nella Figura 8.15 è disegnato un caso di collasso con meccanismo del segno di quello della Figura 8.8. In *C* e *B* si ha il caso (8.57), in *A* e *D* rispettivamente i casi (8.62) e (8.61). Questo esempio è relativo ad un carico accidentale orizzontale verso destra.

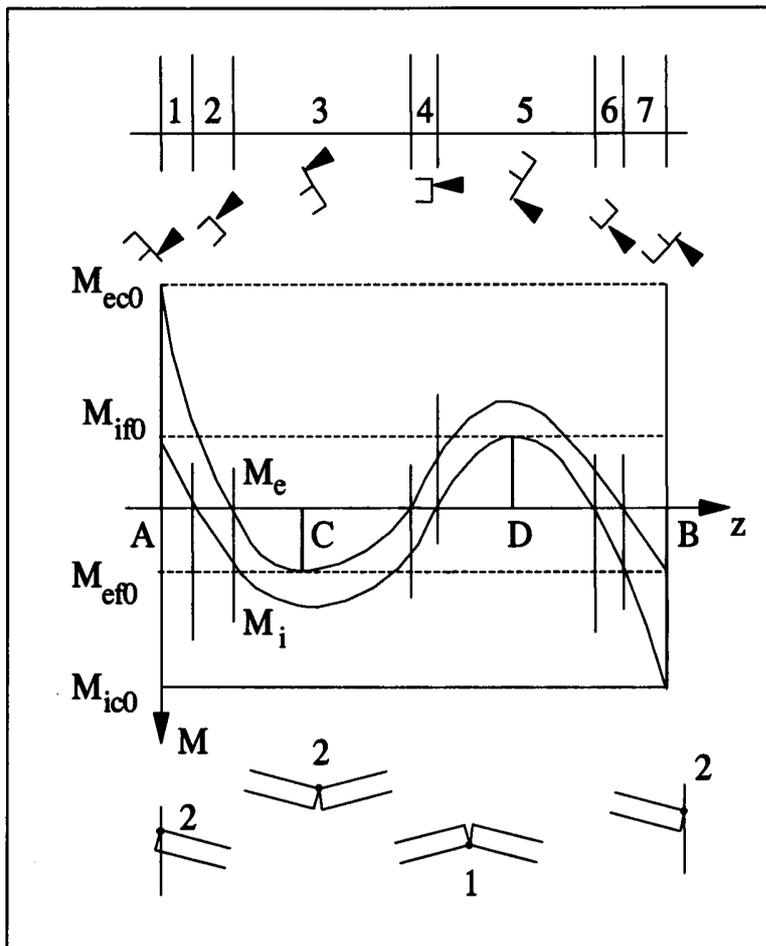


Figura 8.15- Il diagramma dei momenti e la localizzazione delle cerniere

Nella Figura 8.15 è anche riportata la condizione di compatibilità, ed i disegni delle cerniere di crisi nella loro posizione intradossale o estradossale.

Inoltre, si è diviso l'arco in sette zone. Nella prima e nella quinta si ha:

$$\begin{aligned} M_i < 0 \\ M_e < 0 \end{aligned} \quad (8.63)$$

e quindi, se  $N < 0$  — come di regola in un arco — lo sforzo normale è applicato al disotto della sezione.

Nella terza e nella settima si ha:

$$\begin{aligned} M_i > 0 \\ M_e > 0 \end{aligned} \quad (8.64)$$

e quindi lo sforzo normale è applicato al disopra della sezione.

Nella seconda, quarta e sesta invece si ha:

$$M_i \times M_e < 0 \quad (8.65)$$

e quindi lo sforzo normale è applicato sulla sezione.

Il poligono funicolare ha quindi l'aspetto della Figura 8.16.

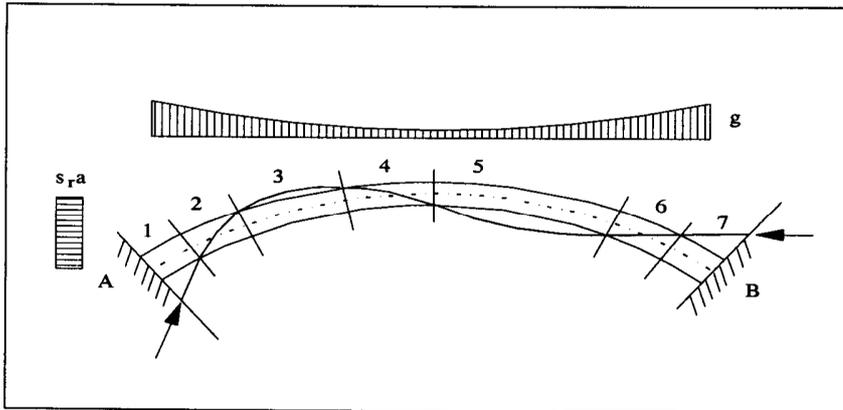


Figura 8.16- Il poligono funicolare

Si hanno, in sintesi, le seguenti quattro relazioni di plasticizzazione:

$$\Delta\phi > 0 \left\{ \begin{array}{l} M + N\frac{b}{2} = \sigma_{f0}A_f b = M_{ef0} \\ M - N\frac{b}{2} = \sigma_{c0}A_c b = M_{ic0} \end{array} \right. \quad (8.66)$$

$$\Delta\phi < 0 \left\{ \begin{array}{l} M - N\frac{b}{2} = -\sigma_{f0}A_f b = M_{if0} \\ M + N\frac{b}{2} = -\sigma_{c0}A_c b = M_{ec0} \end{array} \right. \quad (8.67)$$

In una sezione di crisi, di queste condizioni se ne verificano in genere una nel collasso incrementale, due — una del primo gruppo, ed una del secondo gruppo — in quello da plasticizzazione alternata.

Il meccanismo di rottura è ad un grado di libertà — salvo casi eccezionali, come è noto — e quindi a quattro cerniere, come quello della Figura 8.8.

Le due cerniere di estremità possono anche non trovarsi alle imposte, e quindi un programma di calcolo deve prevedere questa sia pur remota possibilità.

Date le quattro sezioni, le cerniere possono essere ubicate all'estradosso o all'intradosso. Il verso del meccanismo determina poi quale delle quattro condizioni (8.67, 8.66) è verificata.

Se si sceglie come coordinata lagrangiana la rotazione  $\phi$  del primo tratto a sinistra — negativa, come nella Figura 8.8 — si ha:

$$\begin{array}{ll} \Delta\phi_1 < 0 & \Delta\phi_2 > 0 \\ \Delta\phi_3 < 0 & \Delta\phi_4 > 0 \end{array} \quad (8.68)$$

Nelle sezioni 1 e 3 si verificano quindi la prima o la seconda delle (8.67), secondo che la cerniera è ubicata all'intradosso o all'estradosso; nelle sezioni 2 e 4 invece si verificano la prima o la seconda delle (8.66), secondo che la cerniera è ubicata all'estradosso o all'intradosso.

Per ottenere un  $\gamma'$  basta perciò fissare le quattro cerniere, fare agire su queste due coppie uguali e contrarie in accordo con le (8.66, 8.67), ottenere la deformata e scrivere la condizione di equilibrio.

Questa è la seguente:

$$\gamma'(L_g + L_a) = \sum_1^4 M_{0j} \Delta\phi_j \quad (8.69)$$

particolarizzazione della (8.25). Il momento  $M_{0j}$  è positivo su  $\Delta\phi_j$  è positivo, e viceversa.

Dalla (8.69) si trae:

$$\gamma' = \frac{\sum_1^4 M_{0j} \Delta \phi_j}{L_g + L_a}. \quad (8.70)$$

Se invece si vuole un  $\gamma''$ , la (8.69) si scrive nell'altro modo:

$$L_g + \gamma'' L_a = \sum_1^4 M_{0j} \Delta \phi_j, \quad (8.71)$$

da cui si trae:

$$\gamma'' = \frac{\sum_1^4 M_{0j} \Delta \phi_j - L_g}{L_a}. \quad (8.72)$$

Se le cerniere sono quelle reali,  $\gamma'$  e  $\gamma''$  sono proprio  $s'_r$  ed  $s''_r$ , e dovunque sono rispettate le condizioni di compatibilità.

Queste si scrivono come segue:

$$\begin{aligned} -\sigma_{c0} A_c b &\leq M_e \leq \sigma_{f0} A_f b \\ -\sigma_{f0} A_f b &\leq M_i \leq \sigma_{c0} A_c b \end{aligned} \quad (8.73)$$

ove  $M_e = M + Nb/2$  ed  $M_i = M - Nb/2$  sono i valori presenti sotto  $\gamma'(g+a)$ , o sotto  $g + \gamma''a$ .

Se invece le cerniere non sono quelle reali, qualche momento estradossale — o intradossale — non rispetta la prima — o la seconda — delle (8.73).

Per ottenere un  $\psi'$  si calcolano in ogni sezione i seguenti rapporti  $r$ :

$$\begin{aligned} M_i > 0 &\implies r_1 = M_i / \sigma_{c0} A_c b \\ M_e > 0 &\implies r_2 = M_e / \sigma_{f0} A_f b \\ M_i < 0 &\implies r_3 = -M_i / \sigma_{f0} A_f b \\ M_e < 0 &\implies r_4 = -M_e / \sigma_{c0} A_c b. \end{aligned} \quad (8.74)$$

I rapporti (8.74) sono tutti positivi. Se  $r_{max}$  è il più elevato tra tutti gli  $r$  così calcolati lungo l'arco, si può asserire che:

$$\frac{\gamma'}{r_{max}} \leq s'_r \leq \gamma' \quad (8.75)$$

Nella sezione ove  $r = r_{max}$ , tale  $r$  è una delle quattro espressioni (8.74). In un secondo tentativo, inteso a restringere l'intervallo (8.75), si deve prevedere in tale sezione una cerniera ed un verso di apertura così definiti:

$$\begin{aligned}
r_1 = r_{max} &\implies \text{cern. all'estradosso, } \Delta\phi > 0 \\
r_2 = r_{max} &\implies \text{cern. all'estradosso, } \Delta\phi < 0 \\
r_3 = r_{max} &\implies \text{cern. all'intradosso, } \Delta\phi > 0 \\
r_4 = r_{max} &\implies \text{cern. all'intradosso, } \Delta\phi < 0
\end{aligned} \tag{8.76}$$

Il lavoro  $L_a$  che appare nelle (8.70) e (8.72) è positivo; in caso contrario occorre cambiare verso al meccanismo iniziale.

Il verso del meccanismo rimane inalterato nel passo di calcolo successivo. Se quindi si verificano la prima o la terza delle (8.76), la nuova cerniera sostituisce quella tra 2 e 4 che è ad essa più vicina; se invece si verificano le seconda o la quarta delle (8.76), la nuova cerniera sostituisce quella tra 1 e 3 che è ad essa più vicina.

In un procedimento di programmazione occorre iniziare con un meccanismo arbitrario, e cioè fornire in input le ascisse delle quattro sezioni di supposta crisi, la posizione della cerniera in ciascuna di esse (intradosso o estradosso), il verso del meccanismo (e cioè il segno della rotazione  $\phi_1$  del primo tratto). Se  $L_a < 0$ , occorre, come già detto, cambiare segno al meccanismo, e cioè passare da  $\phi_1 = -1$ , se tale era il valore di input, a  $\phi_1 = 1$ .

Nel calcolo di  $L_g$  ed  $L_a$  occorre l'espressione degli spostamenti  $v_j$  e  $w_j$  in corrispondenza delle mezzerie dei tronchi definiti dalle  $t + 1$  dividenti. Le forze infatti —  $F_j$  verticali da peso proprio,  $P_j$  e  $T_j$  verticali ed orizzontali da carico accidentale — sono applicate sull'asse in corrispondenza di tali dividenti. Se  $c$  è la dividente della sezione in cui è prevista una cerniera  $C$ , ed  $i_C$  l'indice di tale dividente, la coordinate di  $C$  sono:

$$\begin{aligned}
z_C &= \frac{l}{t}(i_C - 1) \pm \frac{b_C}{2} \sin \alpha_C \\
y_C &= -q_C \pm \frac{b_C}{2} \cos \alpha_C
\end{aligned} \tag{8.77}$$

ove  $l$  è la luce dell'arco,  $t$  il numero di tratti (di uguale proiezione normale sull'orizzontale),  $b_C$  l'altezza della sezione,  $\alpha_C$  l'inclinazione dell'asse (positiva se le  $q$  sono crescenti). Vale il segno + o — secondo che la cerniera è all'intradosso o all'estradosso.

Le coordinate  $y_5 z_5$  del centro  $C_5$  di rotazione del tratto centrale (Figura 8.17) sono:

$$\begin{aligned}
y_5 &= \frac{(y_1 z_2 - y_2 z_1)(y_3 - y_4) - (y_3 z_4 - y_4 z_3)(y_1 - y_2)}{(z_2 - z_1)(y_3 - y_4) - (z_4 - z_3)(y_1 - y_2)} \\
z_5 &= \frac{(y_1 z_2 - y_2 z_1)(z_3 - z_4) - (y_3 z_4 - y_4 z_3)(z_1 - z_2)}{(z_2 - z_1)(y_3 - y_4) - (z_4 - z_3)(y_1 - y_2)}
\end{aligned} \tag{8.78}$$

Le rotazioni  $\phi_2$  e  $\phi_3$  del secondo e terzo tratto sono date, in funzione della rotazione  $\phi_1$  del primo, da:

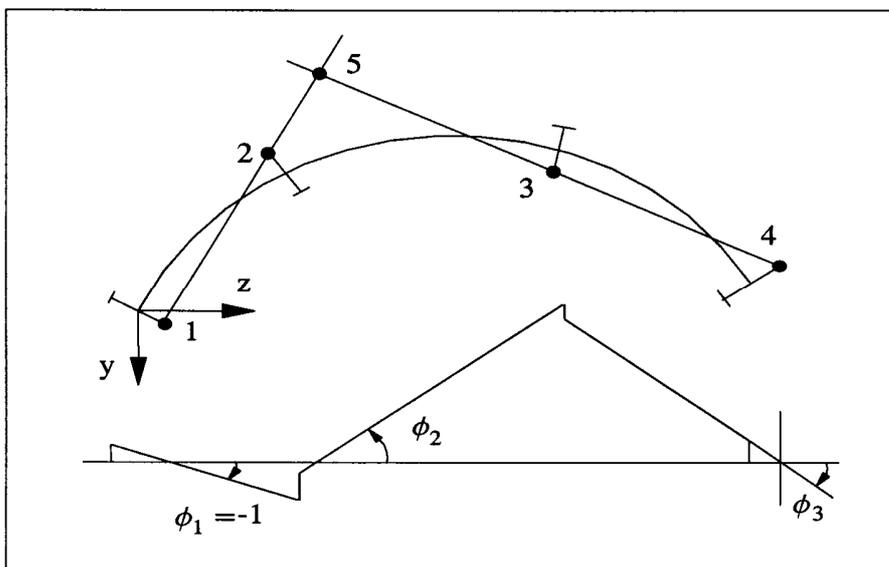


Figura 8.17- Meccanismo di collasso a quattro cerniere

$$\begin{aligned} \phi_2 &= -\phi_1 \frac{z_2 - z_1}{z_5 - z_2} \\ \phi_3 &= \phi_1 \frac{z_2 - z_1}{z_5 - z_2} \frac{z_3 - z_5}{z_4 - z_3} \end{aligned} \quad (8.79)$$

Gli spostamenti sono dati da più espressioni lineari, valide ciascuna per uno dei tre tratti in cui la struttura è divisa dalle quattro cerniere; in genere — ma può non accadere — le due cerniere estreme sono in corrispondenza delle sezioni di imposta, e quindi  $i_1 = 1, i_4 = t + 1$ :

$$\begin{cases} v_j = -\phi_1(z_j - z_1) \\ w_j = -\phi_1(q_j + y_1) \end{cases} \quad (8.80)$$

se  $i_1 \leq j \leq i_2 - 1,$

$$\begin{cases} v_j = -\phi_2(z_j - z_5) \\ w_j = -\phi_2(q_j + y_5) \end{cases} \quad (8.81)$$

se  $i_2 \leq j \leq i_3 - 1,$

$$\begin{cases} v_j = -\phi_3(z_j - z_4) \\ w_j = -\phi_3(q_j + y_4) \end{cases} \quad (8.82)$$

se  $i_3 \leq j \leq i_4 - 1$ .

Si ha così:

$$L_g = \sum_1^t F_j v_j$$

$$L_a = \sum_1^t (P_j v_j + T_j w_j)$$
(8.83)

Occorre infine conoscere  $N$  ed  $M$  sotto tutte le dividenti, per calcolare da essi i momenti  $M_i$  ed  $M_e$ , e quindi i rapporti (8.74). A ciò fare si calcolano le reazioni  $V_4$  ed  $H_4$  nella quarta cerniera (Figura 8.18), attraverso il sistema seguente, che esprime le condizioni di equilibrio alla rotazione delle parti 1-4 e 2-4 rispetto ai punti 1 e 2:

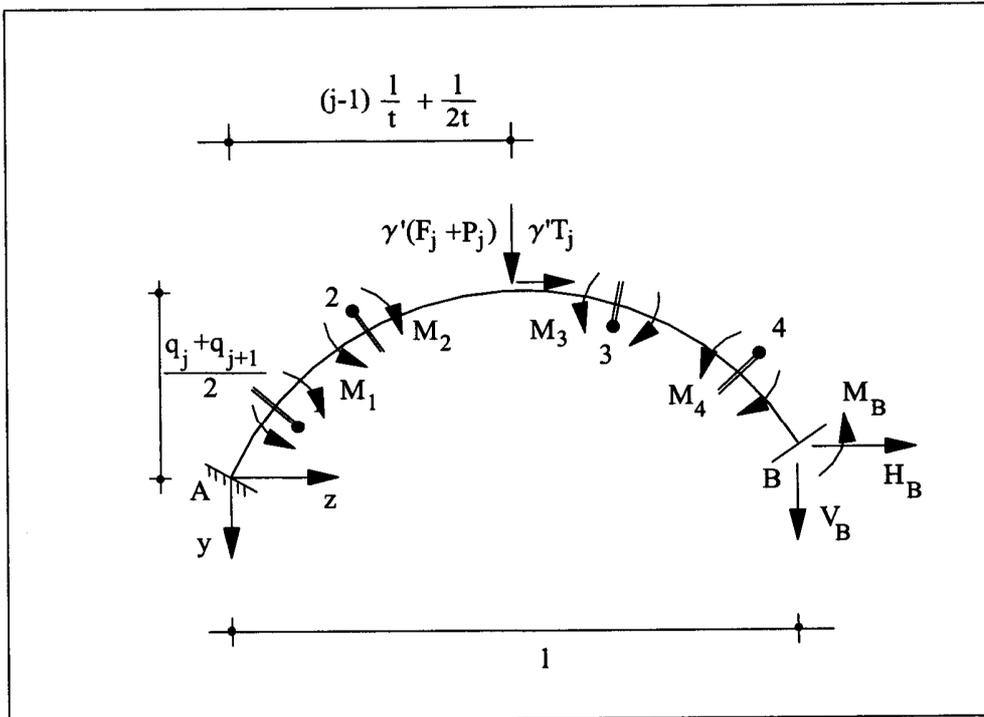


Figura 8.18- Lo schema per il calcolo delle reazioni nella quarta cerniera

$$\begin{aligned}
& H_4(y_4 - y_1) - V_4(z_4 - z_1) - M_1 + M_4 \\
& - \gamma' \sum_{i_1}^{i_4-1} (F_j + P_j)(z_j - z_1) - \gamma' \sum_{i_1}^{i_4-1} T_j(q_j + y_1) = 0
\end{aligned} \tag{8.84}$$

$$\begin{aligned}
& H_4(y_4 - y_2) - V_4(z_4 - z_2) - M_2 + M_4 \\
& - \gamma' \sum_{i_2}^{i_4-1} (F_j + P_j)(z_j - z_2) - \gamma' \sum_{i_1}^{i_4-1} T_j(q_j + y_2) = 0
\end{aligned} \tag{8.85}$$

I momenti  $M$  della (8.85) sono positivi se corrispondono ad un momento flettente positivo. Si ha poi:

$$\begin{aligned}
V_B &= V_4 - \gamma' \sum_{i_4}^t (F_j + P_j), \\
H_B &= H_4 - \gamma' \sum_{i_4}^t Q_j, \\
\mathcal{M}_B &= M_4 + V_B(l - z_4) + H_B(y_4 + r) - \gamma' \sum_{i_4}^t (F_j + P_j) \left[ \frac{l}{t}(j - i_4) + \frac{l}{2t} \right] \\
& - \gamma' \sum_{i_4}^t T_j \left( \frac{q_j + q_{j+1}}{2} + y_4 \right)
\end{aligned} \tag{8.86}$$

e quindi:

$$N_i = - \left[ V_B + \gamma' \sum_{j=i}^t (F_j + P_j) \right] \sin \alpha_i + (H_B + \gamma' \sum_{j=i}^t T_j) \cos \alpha_i, \tag{8.87}$$

$$M_i = \mathcal{M}_B - V_B(l - z_i) + H_B(q_i - r) - \gamma' \sum_{j=i}^t (F_j + P_j)(z_j - z_i) - \gamma' \sum_{j=i}^t T_j(q_j - q_i) \tag{8.88}$$

Se invece di  $s'_r$  si vuole un  $s''_r$ , le (8.74) cedono il posto alle seguenti:

$$\begin{aligned}
M_i > 0 &\implies r_1 = M_{ia}/(\sigma_{c0}A_c b - M_{ig}) \\
M_e > 0 &\implies r_2 = M_{ea}/(\sigma_{f0}A_f b - M_{eg}) \\
M_i < 0 &\implies r_3 = M_{ia}/(-\sigma_{f0}A_f b - M_{ig}) \\
M_e < 0 &\implies r_4 = M_{ea}/(-\sigma_{c0}A_c b - M_{eg}).
\end{aligned} \tag{8.89}$$

e sarà sempre:

$$\frac{\gamma''}{r_{max}} \leq s_r'' \leq \gamma'' \quad (8.90)$$

Esso esige solo l'equilibrio. Quindi i valori  $M_{eg}$  ed  $M_{ig}$  della (8.88) possono essere calcolati una volta per sempre. Con le (8.86), (8.87) e (8.88) — ove l'espressione  $\gamma'(F_i + P_i)$  cede il posto alla  $F_i + \gamma''P_i$  — si calcolano  $M_e$  ed  $M_i$  totali, ottenendo così:

$$\begin{aligned} M_{ea} &= M_e - M_{eg} \\ M_{ia} &= M_i - M_{ig} \end{aligned} \quad (8.91)$$

e quindi le  $r$  delle (8.90).

#### 8.4. L'arco in conglomerato armato: il collasso sotto carichi ripetuti

Soprattutto nel collasso sotto carichi ripetuti le nozioni di momento estradossale ed intradossale sono di grande aiuto. E' innanzitutto elementare ottenere per ogni sezione le linee di influenza di  $M_i$  ed  $M_e$ ; esse si calcolano infatti così come si è esposto per il momento baricentrico, con la sola variante della posizione della cerniera, che deve essere ubicata all'intradosso o all'estradosso della sezione. Da tali linee si ottengono i diagrammi  $M_{imax}$ ,  $M_{amax}$ ,  $M_{imin}$ ,  $M_{emin}$ .

Sotto i carichi  $\tilde{s}_r''(g+a)$  esistono due diagrammi di momenti residui,  $M_{ir}$  ed  $M_{er}$ , invarianti nel tempo, ed un meccanismo a quattro cerniere, tali da indurre un collasso incrementale. In corrispondenza della generica cerniera si può verificare una qualsiasi delle seguenti quattro uguaglianze:

$$\Delta\phi < 0 \begin{cases} \tilde{M}_{emin} = -\sigma_{c0}A_c b & \text{cerniera all'estradosso} \\ \tilde{M}_{imin} = -\sigma_{f0}A_f b & \text{cerniera all'intradosso} \end{cases} \quad (8.92)$$

$$\Delta\phi > 0 \begin{cases} \tilde{M}_{emax} = \sigma_{f0}A_f b & \text{cerniera all'estradosso} \\ \tilde{M}_{imax} = \sigma_{c0}A_c b & \text{cerniera all'intradosso} \end{cases} \quad (8.93)$$

Nella Figura 8.19 sono evidenziati questi quattro casi nelle sezioni alle ascisse  $O$ ,  $C$ ,  $B$ ,  $D$ .

Le espressioni dei momenti  $\tilde{M}$  nella (8.93) sono:

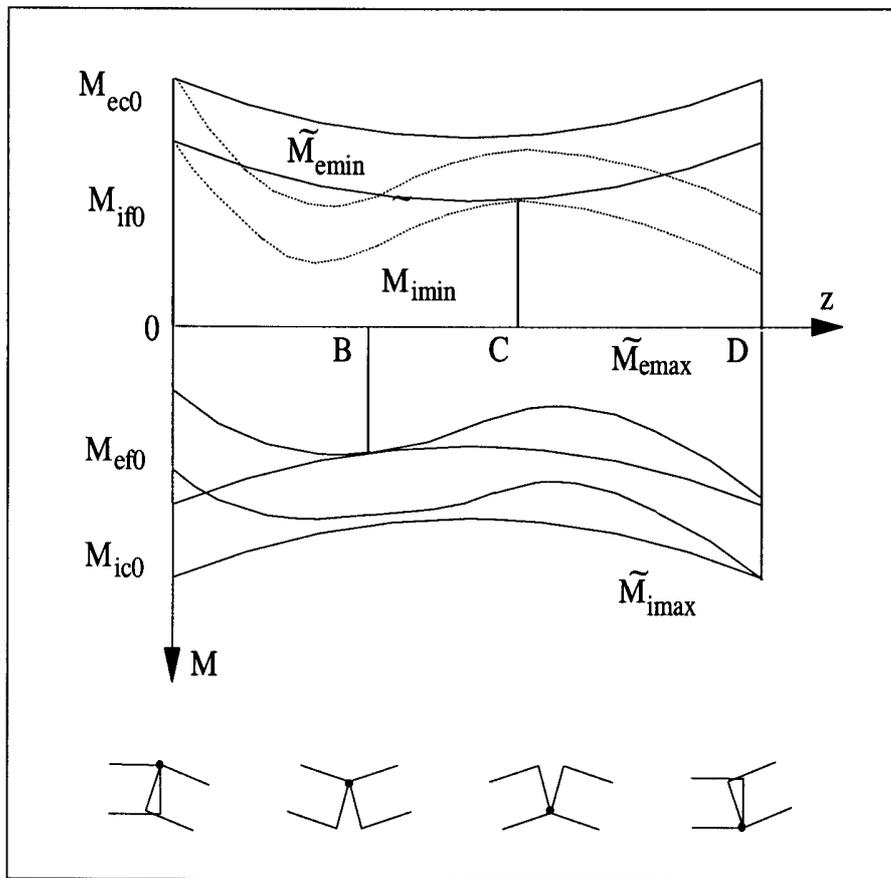


Figura 8.19- Il diagramma dei momenti per il collasso incrementale

$$\begin{aligned}
 \tilde{M}_{emin} &= M_{eg} + M_{er} + \tilde{s}_r'' M_{emin} \\
 \tilde{M}_{imin} &= M_{ig} + M_{ir} + \tilde{s}_r'' M_{imin} \\
 \tilde{M}_{emax} &= M_{eg} + M_{er} + \tilde{s}_r'' M_{emax} \\
 \tilde{M}_{imax} &= M_{ig} + M_{ir} + \tilde{s}_r'' M_{imax}
 \end{aligned}
 \tag{8.94}$$

I momenti residui sono in equilibrio sotto forze applicate nulle. Quindi può scriversi, in relazione al meccanismo di collasso incrementale con quattro cerniere

(Figura 8.17),

$$M_{rA}\Delta\phi_A + M_{rB}\Delta\phi_B + M_{rC}\Delta\phi_C + M_{rD}\Delta\phi_D = 0. \quad (8.95)$$

Dalle (8.94) e (8.95) si trae: ( $\tilde{M} = M_0$ )

$$\tilde{s}_r'' = \frac{(M_{0A} - M_{gA})\Delta\phi_A + (M_{0B} - M_{gB})\Delta\phi_B}{M_{extrA}\Delta\phi_A + M_{extrB}\Delta\phi_B + M_{extrC}\Delta\phi_C + M_{extrD}\Delta\phi_D} + \frac{(M_{0C} - M_{gC})\Delta\phi_C + (M_{0D} - M_{gD})\Delta\phi_D}{M_{extrA}\Delta\phi_A + M_{extrB}\Delta\phi_B + M_{extrC}\Delta\phi_C + M_{extrD}\Delta\phi_D} \quad (8.96)$$

dove deve porsi:

$$\Delta\phi < 0 \begin{cases} M_0 = -\sigma_{f0}A_f b, & M_{extr} = M_{imin} & \text{per cerniera all'intradosso} \\ M_0 = -\sigma_{c0}A_c b, & M_{extr} = M_{emin} & \text{per cerniera all'estradosso} \end{cases} \quad (8.97)$$

$$\Delta\phi > 0 \begin{cases} M_0 = \sigma_{f0}A_f b, & M_{extr} = M_{emax} & \text{per cerniera all'estradosso} \\ M_0 = \sigma_{c0}A_c b, & M_{extr} = M_{imax} & \text{per cerniera all'intradosso} \end{cases} \quad (8.98)$$

Ottenuto  $\tilde{s}_r''$ , le (8.94) permettono di calcolare i momenti residui  $M_{ri}$  o  $M_{re}$  in  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ; più precisamente, si ha:

$$\Delta\phi < 0 \begin{cases} M_{ir} = -\sigma_{f0}A_f b - M_{ig} - \tilde{s}_r'' M_{imin} & \text{per cerniera all'intradosso} \\ M_{er} = -\sigma_{c0}A_c b - M_{eg} - \tilde{s}_r'' M_{emin} & \text{per cerniera all'estradosso} \end{cases} \quad (8.99)$$

$$\Delta\phi > 0 \begin{cases} M_{ir} = \sigma_{c0}A_c b - M_{ig} - \tilde{s}_r'' M_{imax} & \text{per cerniera all'intradosso} \\ M_{er} = \sigma_{f0}A_f b - M_{eg} - \tilde{s}_r'' M_{emax} & \text{per cerniera all'estradosso} \end{cases} \quad (8.100)$$

Conosciuti i momenti (8.100) si calcolano i momenti  $M_r$  in tutte le sezioni, con la stessa subroutine che si è usata per il calcolo del moltiplicatore di rottura al collasso statico.

In ogni sezione sono rispettate le condizioni di compatibilità, che si scrivono come segue: (Figura 8.20)

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{imax} &\leq \sigma_{c0}A_c b & \tilde{M}_{emax} &\leq \sigma_{f0}A_f b \\ \tilde{M}_{imin} &\geq -\sigma_{f0}A_f b & \tilde{M}_{emin} &\geq -\sigma_{c0}A_c b \end{aligned} \quad (8.101)$$

Se si parte da un meccanismo di tentativo, la (8.96) fornisce  $\gamma''$ . Le (8.101) non sono più rispettate. Si calcolano in tutte le sezioni i seguenti rapporti:

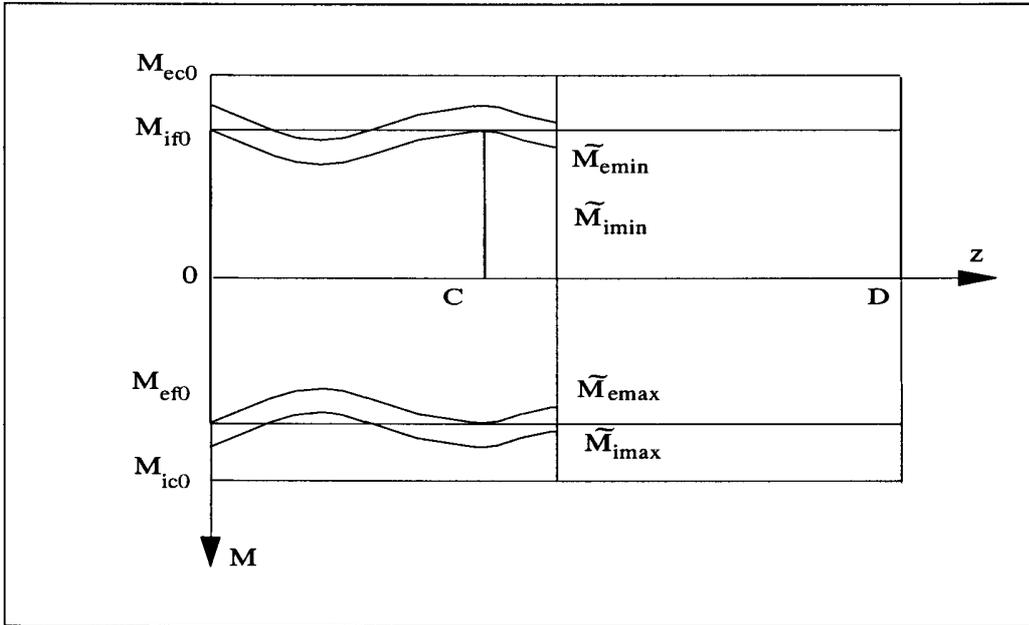


Figura 8.20- Le condizioni di compatibilità

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \frac{M_{ir} + \gamma'' M_{imax}}{\sigma_{c0} A_c b - M_{ig}} & r_2 &= \frac{M_{er} + \gamma'' M_{emax}}{\sigma_{f0} A_f b - M_{eg}} \\
 r_3 &= \frac{M_{ir} + \gamma'' M_{imin}}{-\sigma_{f0} A_f b - M_{ig}} & r_4 &= \frac{M_{er} + \gamma'' M_{emin}}{-\sigma_{c0} A_c b - M_{eg}}
 \end{aligned}
 \tag{8.102}$$

Se  $r_{max}$  è il più elevato tra tutti gli  $r$ , può scriversi:

$$\frac{\gamma''}{r_{max}} \leq s_r'' \leq \gamma''
 \tag{8.103}$$

Se il  $\gamma''$  fornito dalla (8.96) è negativo, occorre cambiare verso al meccanismo di tentativo. Nel secondo tentativo occorre restringere l'intervallo (8.103), e perciò conviene prevedere una sezione di crisi laddove si verifica  $r = r_{max}$ . La cerniera in questa sezione è definita come nelle (8.76).

Se l'arco è simmetrico, si presenta la situazione della Figura 8.20; ogni meccanismo di collasso incrementale implica la possibilità del suo simmetrico. Inoltre, nella stessa figura è rappresentato un tipo di collasso incrementale molto frequente sotto un carico accidentale costituito da segmenti di carico uniforme.

La sezione di imposta è sezione di crisi sia per  $\Delta\phi > 0$  che per  $\Delta\phi < 0$ , poichè alle imposte i diagrammi  $M$  presentano valori molto elevati. Se sono toccati  $M_{if0}$  ed  $M_{ic0}$  si ha crisi per *plasticizzazione alternata*; l'asse neutro è all'intradosso sia per  $\Delta\phi < 0$  (collasso nel ferro) sia per  $\Delta\phi > 0$  (collasso nel conglomerato). I punti di contatto sulla curva limite della sezione si trovano (Figura 8.12) sul lato  $HC$  del rombo, e sul lato ad esso parallelo.

Così pure, se sono toccati  $M_{ef0}$  ed  $M_{ec0}$  l'asse neutro è all'estradosso sia per  $\Delta\phi > 0$  (collasso nel ferro) che per  $\Delta\phi < 0$  (collasso nel conglomerato). I punti di contatto sulla curva limite della sezione si trovano sul lato  $AC$ , e su quello ad esso parallelo. Se invece sono toccati  $M_{if0}$  ed  $M_{ef0}$ , come nella Figura 8.20, l'asse neutro è rispettivamente all'intradosso (per  $\Delta\phi < 0$ ) ed all'estradosso (per  $\Delta\phi > 0$ ); i punti di contatto sulla curva limite sono ubicati sui due lati del rombo con vertice in  $A$ . I successivi  $\Delta\phi$  dei due segni provocano ambedue una plasticizzazione permanente di allontanamento relativo.

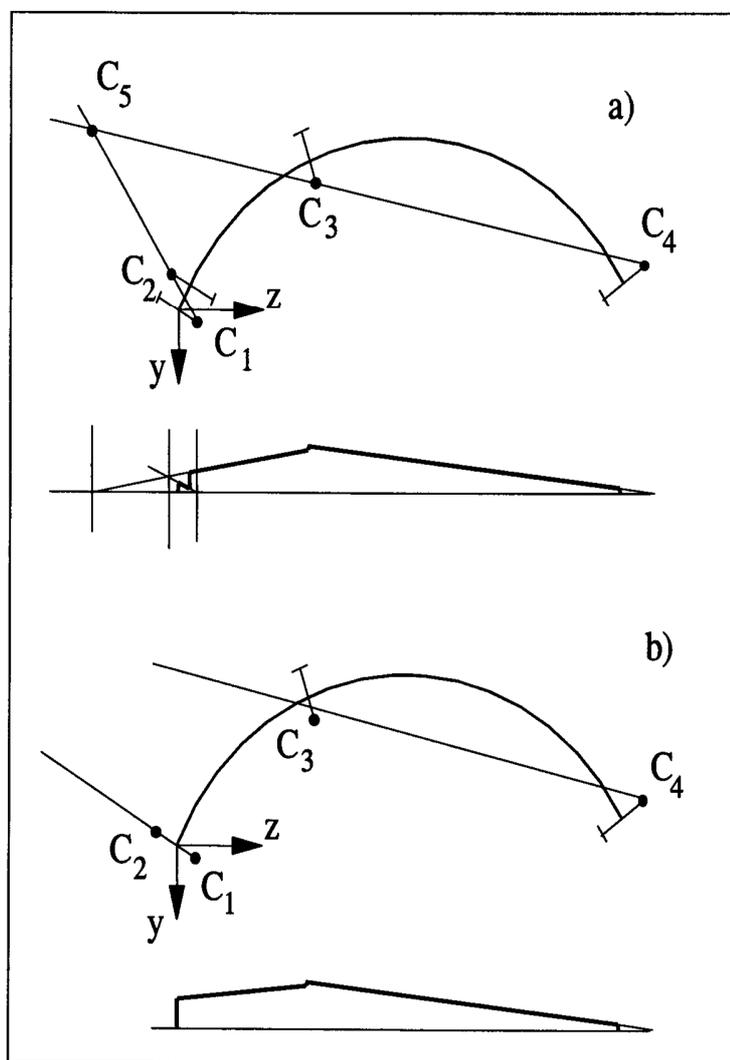
Ed infine, se sono toccati  $M_{ic0}$  ed  $M_{ec0}$  l'asse neutro è rispettivamente all'intradosso (per  $\Delta\phi > 0$ ) e all'estradosso (per  $\Delta\phi < 0$ ); i punti di contatto sulla curva limite sono ubicati sui due lati del rombo con vertice in  $H$ . I successivi  $\Delta\phi$  dei due segni provocano ambedue una plasticizzazione permanente di avvicinamento relativo.

Nella Figura 8.21 è disegnata la deformata di collasso incrementale nel caso della Figura 8.20, e così nel caso in cui le sezioni di crisi collassano tutte per plasticizzazione nel ferro. Si è disegnata nella figura Figura 8.21a) la deformata nell'ipotesi che la seconda sezione sia diversa dalla prima, anche se ad essa molto vicina; ciò per rendere più chiara la costruzione della deformata reale, che è quella della Figura 8.21b).

I due ultimi casi, riportati nella Figura 8.21, sono quelli del cosiddetto *snodo plastico*, ben noto. Si verifica tale snodo quando la sezione è tutta plasticizzata con tensioni dello stesso segno; in tal caso sono leciti sia la rotazione plastica  $\Delta\phi$  che la traslazione assiale relativa  $\Delta u$ , purchè le deformazioni siano dello stesso segno delle tensioni. Il rapporto tra  $\Delta u$  e  $\Delta\phi$  può essere qualsiasi; esso fornisce (Figura 8.22) la distanza del centro  $C$  di rotazione dal baricentro  $G$ . Sotto il profilo cinematico, lo snodo plastico equivale quindi ad un pendolo ortogonale all'asse. Esso è di tipo monolatero; se per esempio la sezione è plasticizzata per compressione, deve essere  $\Delta u < 0$ , e quindi  $y_C$  ha lo stesso segno di  $\Delta\phi$ . Nella Figura 8.21 la posizione di  $C$  (che coincide con  $C_5$ , centro assoluto della rotazione del primo tratto) è definita dalle altre due cerniere  $C_3$  e  $C_4$ .

Un meccanismo come quello della Figura 8.21 può verificarsi anche in collasso statico, se il peso proprio è predominante, e se il carico è del tipo proporzionale.

Può dirsi quindi che di regola il meccanismo di rottura è a quattro cerniere; due di queste possono verificarsi nella stessa sezione — nell'arco a cassone, all'intradosso e all'estradosso, con plasticizzazione dello stesso segno — dando luogo ad un pendolo. In casi eccezionali, possono essere presenti altre cerniere, generandosi così un meccanismo a più gradi di libertà. Il calcolo del moltiplicatore di rottura — che è unico — può farsi sempre utilizzando solo quattro cerniere; la presenza di altre cerniere sarà rivelata dal



*Figura 8.21- Meccanismo di collasso incrementale*

diagramma dei momenti finali.

### 8.5. Il programma AR1

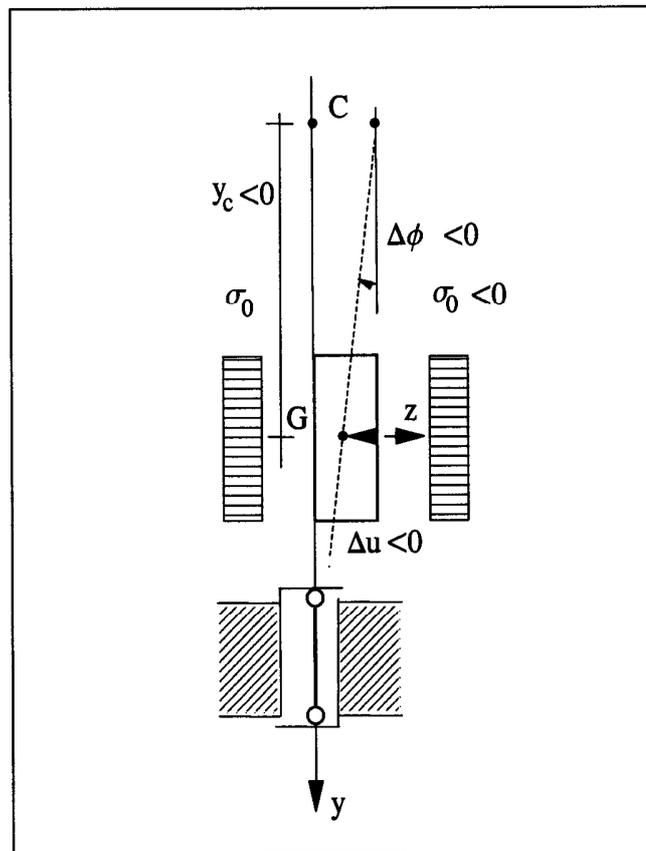


Figura 8.22- Lo snodo plastico

In Appendice 8.1 si è riportato il listato del programma AR1, relativo al collasso statico, e delle sue subroutine.

Il programma prevede la solita fase preliminare in cui si dichiarano le variabili in comune, si dimensionano gli array statici, si definiscono alcune funzioni e si legge il nome del file contenente i dati di ingresso.

Le prime tre leggi di variazione riguardano l'altezza della sezione, lo spessore della soletta e l'area dei ferri, mentre le tre successive riguardano il peso proprio, il carico accidentale verticale ed il carico accidentale orizzontale. Tutte queste funzioni sono di tipo parabolico:

$$f(z) = f_S + (f_D - f_S) \frac{z}{L} - \frac{4}{L^2} (f_S + \frac{f_D - f_S}{2} - f_C) z(L - z) \quad (8.104)$$

dove  $f_S$ ,  $f_C$  ed  $f_D$  sono i valori della funzione a sinistra (in  $z = 0$ ), al centro (in  $z = l/2$ ) ed a destra (in  $z = l$ ).

Infine, l'ultima funzione, anch'essa parabolica, riguarda l'asse dell'arco.

### 8.5.1. La subroutine "IngressoDati"

Letto il nome del file di dati si chiama la subroutine "IngressoDati", che ha il compito di incamerare i seguenti dati:

- luce dell'arco, numero di tratti di divisione, larghezza della sezione (supposta costante), tensione limite dell'acciaio, compressione limite del conglomerato (in valore assoluto).
- altezze della sezione dell'arco a sinistra, al centro ed a destra, spessori della soletta inferiore (o della soletta superiore, che è ipotizzata identica) a sinistra, al centro ed a destra, aree del ferro nei tre punti suddetti.
- infine, la quantità  $MAXR$ , che governa il test d'uscita; quando infatti:

$$\frac{\gamma - \psi}{\psi} < MAXR \quad (8.105)$$

allora il procedimento si arresta.

- Occorre ancora fornire delle quantità iniziali per permettere la partenza del ciclo iterativo, e cioè le prime quattro dividenti di tentativo, e la locazione delle cerniere (intradosso o estradosso) in ciascuna di esse.

In rari casi potrebbe accadere che il procedimento iterativo fallisca, ed in tali casi occorre riproporre una diversa scelta delle dividenti di tentativo e/o della locazione delle cerniere.

- Poi si deve specificare se l'asse dell'arco è descritto da una funzione, o se è assegnato per punti. Nel primo caso sarà  $ASSE\$ = "FUNC"$ , nel secondo  $ASSE\$ = "DATI"$ .

Nel listato, come già detto, si è ipotizzata una variazione parabolica dell'asse, ma questo non è restrittivo, potendosi modificare la relativa riga di comando.

- Si deve ancora specificare se i carichi variano secondo una assegnata legge ( $CARICHI\$ = "FUNC"$ ) oppure se devono essere assegnati per punti ( $CARICHI\$ = "DATI"$ ), ed infine occorre indicare se si suppone che il carico cresca con legge proporzionale ( $COLLASSO\$ = "PROPORZIONALE"$ ) o non proporzionale ( $COLLASSO\$ = "NON PROPORZIONALE"$ ).
- Se l'asse dell'arco varia con legge parabolica, bisognerà assegnare ancora la freccia ed il rialzo, mentre se i carichi sono descritti da funzione bisognerà assegnare i

valori (a sinistra, al centro e a destra) del peso proprio, del carico accidentale verticale e del carico accidentale orizzontale.

Non appena esaurita la prima fase di input si definisce la variabile di comodo LTRAT, pari alla lunghezza del singolo tratto di divisione, e si pone  $\phi_1 = -1$ . Poi si dimensionano gli array dinamici:

- FVERT, FACCV, FACCO contengono i valori dei carichi da peso proprio, accidentali verticali ed accidentali orizzontali in corrispondenza dei tratti i divisione
- Q contiene le quote delle dividenti, INCL le inclinazioni dell'asse sull'orizzontale in corrispondenza delle dividenti, B, S, T contengono rispettivamente le altezze delle sezioni, gli spessori delle solette e le aree di ferro nelle T+1 dividenti. Tutti questi array vengono riempiti dalle due successive subroutine, "Ingresso-DatiArray" e "Geometria", simili alle omonime subroutine descritte nei capitoli precedenti, e quindi non più illustrate.
- I quattro array MINTR, MEXTR, MINTRP, MEXTRP, che contengono rispettivamente i momenti totali all'intradosso ed all'estradosso ed i momenti da solo peso proprio all'intradosso ed all'estradosso.
- Infine, l'array R contiene le fuoriuscite del poligono nelle T+1 dividenti, e l'array G contiene i segni delle rotazioni relative nelle suddette dividenti

Dopo aver chiamato la subroutine "UscitaDati", che si occupa, al solito, della stampa dei più significativi dati d'ingresso, comincia il calcolo iterativo per la deduzione del moltiplicatore di rottura.

Partendo infatti dall'assegnato meccanismo, si chiama la subroutine "Cerniere-Plastiche" che utilizza le (8.77) ed (8.78) per calcolare le coordinate delle cerniere e del centro di rotazione  $C_5$  del tratto medio.

La subroutine successiva, "LavoroEsterno", inizia col dedurre i valori delle rotazioni  $\phi_2$  e  $\phi_3$ , in base alla (8.79), e poi calcola il lavoro compiuto dal peso proprio e dal carico accidentale, secondo la (8.83).

Si esegue poi il test sul verso del meccanismo. Si osservi infatti che, assegnato il meccanismo, l'espressione del coefficiente cinematicamente sufficiente è pari, come già osservato, a:

$$\gamma = \frac{L_0}{L_g + L_a} \quad (8.106)$$

nel caso di carico proporzionale, oppure a:

$$\gamma = \frac{L_0 - L_g}{L_a} \quad (8.107)$$

nel caso di carico non proporzionale. Il lavoro  $L_0$  è comunque positivo, così come la differenza  $L_0 - L_g$ , quale che sia il meccanismo, altrimenti sotto tale meccanismo si avrebbe rottura sotto il solo peso proprio. Quindi il segno di  $\gamma$  dipende solo dal segno del meccanismo, e cioè dall'angolo  $\phi_1$ . Se, assegnato il meccanismo, dovesse risultare

$L_g + L_a < 0$ , nel caso del carico proporzionale, oppure  $L_a < 0$  nel caso del carico non proporzionale, basterà invertire il meccanismo — e cioè cambiare il segno di  $\phi_1$  — per ricondursi ad un moltiplicatore positivo.

Si chiama poi la subroutine “LavoroInterno”, che svolge opportunamente la sommatoria:

$$\sum_{j=1}^4 M_{0j} \Delta \phi_j \quad (8.108)$$

e quindi la subroutine “EstremoSuperiore” che calcola il coefficiente cinematicamente sufficiente secondo la (8.70) o (8.72) nei due casi di carico proporzionale o non proporzionale.

Occorre ora conoscere i momenti estradossali ed intradossali, e ciò vien fatto nella subroutine “MomentiEstremi”.

### 8.5.2. La subroutine “MomentiEstremi”

Per calcolare i momenti estremi occorre conoscere i momenti baricentrici e gli sforzi normali in ciascuna sezione, e quindi abbisognano le reazioni  $V_4$  ed  $H_4$ , secondo le (8.84) ed (8.85), poi i termini noti B1(1) e B1(2), ed infine i quattro coefficienti della matrice. Poiché si tratta di un sistema di due equazioni si è rinunciato a chiamare un sottoprogramma di libreria, utilizzando la regola di Cramer.

Il calcolo successivo dello sforzo normale e del momento flettente è immediato, a partire dalla (8.87) ed (8.88) rispettivamente. Infine, i momenti estradossali ed intradossali sono dedotti a partire dalla (8.53) ed (8.53) rispettivamente.

### 8.5.3. La subroutine “Fuoruscite”

La conoscenza dei momenti estremi permette il calcolo delle fuoruscite, come descritto nella subroutine “Fuoruscite”.

Dopo aver annullato i due vettori R e G, ed il vettore di stringhe WCERN1\$, si comincia col trattare il caso del carico proporzionale.

Sezione per sezione si memorizza in R il maggiore dei quattro rapporti (8.74), il corrispondente elemento di G sarà pari a  $\pm 1$  secondo che sia  $\Delta \phi \pm 1$ , e la corrispondente stringa di caratteri sarà pari ad INTR o EXTR, secondo che la cerniera si formi all'intradosso o all'estradosso.

Sia G che WCERN\$ vengono calcolati in base alla (8.76).

Nel caso di carico ad aumento non proporzionale i rapporti da calcolare sono gli (8.89), e quindi vanno preliminarmente calcolati i momenti  $M_{ig}$  ed  $M_{eg}$  estradossali da peso proprio. Tali quantità possono dedursi dalla (8.84– 8.88) per  $\gamma' = 1$ ,  $P_j = T_j = 0$ , e ponendo anche  $M_1 = M_2 = M_4 = 0$ .

Interessa infatti soltanto che gli  $M_{ig}$  ed  $M_{eg}$  siano in equilibrio con le forze  $F_i$  del peso proprio. Infatti il teorema di unicità di  $s''$  richiede soltanto che l'insieme  $S_g$  sia equilibrato; naturalmente, sotto  $s''$  è definito l'insieme  $S_g + S_r$ , e quindi a due diversi

insiemi  $S_g$  corrispondono due diversi insiemi  $S_r$ . Se, sfiorato  $s''$ , i carichi accidentali ritornano al valore zero, la struttura è soggetta alle caratteristiche  $S_g + S_r$ .

Ottenuti i rapporti  $R$  è immediato giungere alla conoscenza di un estremo inferiore  $\psi$ , tramite la nota relazione:

$$\psi = \frac{\gamma}{r_{max}} \quad (8.109)$$

Ciò è fatto nella subroutine "EstremoInferiore", in cui viene anche memorizzato in I9 la dividente in cui  $r_{max}$  è attinto, in G9 il valore del corrispondente  $\Delta\phi$ , ed in W9\$ la locazione della cerniera.

## 8.6. Esempi numerici

I dati dell'arco sui quali si svolgono gli esempi sono quelli del ponte Argento-bel in Algovia, recentemente costruito attraverso il parco nazionale Eistobel, per l'attraversamento della vallata dell'alto Argen, a servizio della Statale 13.18 tra la Baviera ed il lago di Costanza. Si ha così un'asse parabolico con luce di 143 metri, freccia di 29 metri e rialzo nullo. La sezione ha larghezza di 8.5 metri ed è a cassone, con due setti laterali di 50 centimetri di spessore, ed un setto centrale di 40 centimetri. L'armatura superiore, come quella inferiore, è costituita da  $70 \phi 20 + 66 \phi 16$ , per un'area di  $3.5261 \cdot 10^{-2} m^2$ . Infine, la soletta è alta 30 centimetri, l'altezza della sezione varia da 3.5 metri alle estremità fino a 2 metri in chiave, ed il peso proprio varia con legge parabolica tra  $33 tm^{-1}$  alle imposte e  $28 tm^{-1}$  in chiave.

I calcoli sono per la maggior parte eseguiti con soli 10 tratti di divisione; si possono così fornire i dati di tutti gli enti in gioco.

### 8.6.1. I carichi distribuiti

Come primo esempio, si consideri un caso in cui il peso proprio viene trascurato, e dove invece i carichi accidentali verticali variano con legge parabolica tra  $5 tm^{-1}$  a sinistra, 0 al centro e  $-5 tm^{-1}$  a destra, e dove il carico orizzontale è costante, e pari a  $10 tm^{-1}$ . Il file di ingresso dei dati si presenta come:

---

```

"ARCO DI PROVA"
VIDEOFILES,VIDEOFILES,"ES8-1.ING","ES8-1.USC"
143,10,8.5,40000,2000,3.5,2,3.5,.3,.3,3
0.035261,0.035261,0.035261,0.01
2,5,7,9,INTR,INTR,INTR,INTR
FUNC,FUNC,PROPORZIONALE
29,0
0,0,0,5,0,-5,10,10,10

```

---

La terza riga contiene la luce dell'arco, il numero dei tratti di divisione, la larghezza della sezione, la tensione limite dell'acciaio, la compressione limite del conglomerato (in valore assoluto), l'altezza della sezione a sinistra, al centro ed a destra, lo spessore della soletta a sinistra, al centro ed a destra.

La quarta riga contiene l'area dei ferri a sinistra, al centro ed a destra, e la quantità MAXR.

La quinta riga contiene l'indice delle quattro dividenti in cui inizialmente si ipotizza una cerniera, e la locazione di queste cerniere. Quindi, si parte con un meccanismo con cerniere alle dividenti 2,5,7,9, tutte all'intradosso.

La sesta riga indica che sia l'asse dell'arco che i carichi verranno descritti da funzione, e che il carico varia con legge proporzionale. Di conseguenza, la riga successiva contiene la freccia ed il rialzo.

L'ultima riga descrive i carichi, ed è l'unica riga che andrà modificata in quasi tutti gli esempi che seguono. In essa va specificato il valore del peso proprio, del carico accidentale verticale e del carico accidentale orizzontale, a sinistra, al centro ed a destra.

I risultati si troveranno alla fine memorizzati nel file "ES8-1.USC", che si presenta come segue:

---

MOLTIPLICATORE STATICAMENTE AMMISSIBILE = .857767996787893  
 MOLTIPLICATORE CINEMATICAMENTE SUFFICIENTE = .857767996787894

---

CERNIERA	ASCISSA	LOCAZIONE	CRISI
1	0	INTR	FERRO
4	42.9	EXTR	FERRO
8	100.1	INTR	FERRO
11	143	EXTR	FERRO

---

DIV.	MOMENTI INTRADOSSALI	MOMENTI ESTRADOSSALI
1	-4936.54	-3352.26736602227
2	236.569983206519	1413.93353611185
3	2511.13675413376	3343.80420001768
4	2654.22173626065	3159.38560000001
5	1408.51118197724	1607.09388145249
6	-477.236875385	-572.726591172629
7	-2250.62156403089	-2643.37429188679
8	-3159.3856	-3868.00410686671
9	-2455.14533554485	-3505.89728607614
10	604.30532409964	-810.157526496461
11	6790.74394858953	4936.54

DIV.	MOMENTI LIMITE FERRO	MOMENTI LIMITE CONGLOMEARTO
1	4936.54	17850
2	4174.9024	15096
3	3582.5176	12954
4	3159.3856	11424
5	2905.5064	10506
6	2820.88	10200
7	2905.5064	10506
8	3159.3856	11424
9	3582.5176	12954
10	4174.9024	15096
11	4936.54	17850

TEMPO DI ESECUZIONE = 12.296875 SEC.  
 RUN DEL 10-28-1994 ORE 10:52:47

Come si vede, il meccanismo prevede due cerniere agli estremi ed alle dividenti 4 ed 8, con cerniere localizzate alternativamente all'intradosso ed all'estradosso. La crisi si raggiunge per snervamento del ferro in tutte le quattro sezioni. Si noti che cambiando di segno alle forze il valore del moltiplicatore di crisi non varia, ma il meccanismo si inverte.

Come secondo esempio si faccia agire il solo peso proprio, modificando in modo ovvio la sola ultima riga del file di ingresso. Si ottiene:

MOLTIPLICATORE STATICAMENTE AMMISSIBILE = 3.07508126795896  
 MOLTIPLICATORE CINEMATICAMENTE SUFFICIENTE = 3.07508126795898

CERNIERA	ASCISSA	LOCAZIONE	CRISI
1	0	EXTR	CONGLOMERATO
10	128.7	INTR	CONGLOMERATO
11	143	INTR	CONGLOMERATO
11	143	EXTR	CONGLOMERATO

DIV.	MOMENTI INTRADOSSALI	MOMENTI ESTRADOSSALI
1	17850	-17849.9999999999
2	15096.0000000001	-12672.0177414495
3	12057.6889404356	-10095.9943898009
4	9422.45969328828	-9048.61738527736
5	7655.85030943424	-8737.77804178543
6	7036.13987825524	-8687.16740652521

7	7655.85030943416	-8737.7780417855
8	9422.45969328833	-9048.61738527731
9	12057.6889404357	-10095.9943898009
10	15096	-12672.0177414495
11	17849.9999999999	-17850

TEMPO DI ESECUZIONE = 10.162109375 SEC.

RUN DEL 10-31-1994 ORE 08:55:23

I diagrammi dei momenti sono simmetrici, la crisi è dovuta a schiacciamento del conglomerato, secondo il meccanismo di rottura di Figura 8.23. Si hanno sei cerniere, o più precisamente due pendoli e due cerniere — come ci si doveva attendere, poichè il meccanismo deve essere simmetrico.

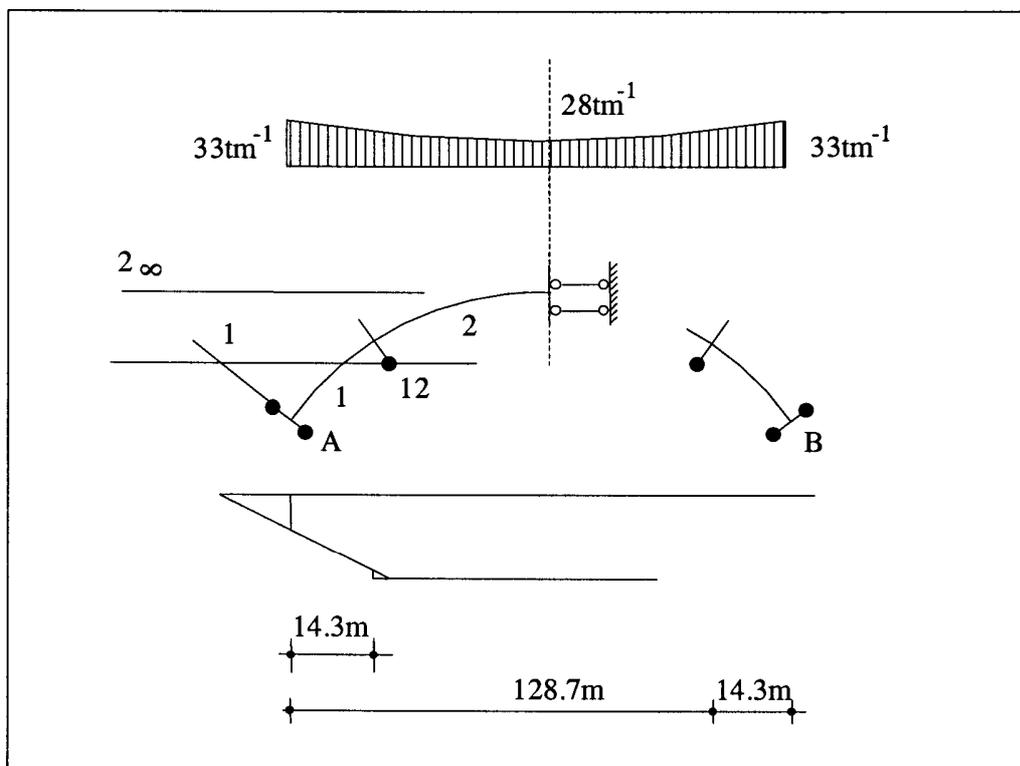


Figura 8.23- Un meccanismo di collasso a sei cerniere

Aumentando il numero dei tratti di divisione il coefficiente di sicurezza diminuisce, poichè la struttura meglio discretizzata ammette come  $\gamma$  il coefficiente di sicurezza

della struttura meno discretizzata. Per  $t = 80$ , ad esempio, si ha:

MOLTIPLICATORE STATICAMENTE AMMISSIBILE = 3.06095820951236  
 MOLTIPLICATORE CINEMATICAMENTE SUFFICIENTE = 3.068920495156

con una modesta variazione rispetto al valore ottenuto con  $t = 10$ .

Se al peso proprio si aggiunge un carico accidentale verticale definito dai tre valori:

$$p_1 = 1 \text{ tm}^{-1} \quad p_2 = 0 \text{ tm}^{-1} \quad p_3 = 0 \text{ tm}^{-1} \quad (8.110)$$

si ha, sempre per carico proporzionale:

MOLTIPLICATORE STATICAMENTE AMMISSIBILE = 3.02506397640424  
 MOLTIPLICATORE CINEMATICAMENTE SUFFICIENTE = 3.05147851279839

CERNIERA	ASCISSA	LOCAZIONE	CRISI
1	0	EXTR	CONGLOMERATO
2	14.3	INTR	CONGLOMERATO
7	85.8	EXTR	CONGLOMERATO
11	143	INTR	CONGLOMERATO

DIV.	MOMENTI INTRADOSSALI	MOMENTI ESTRADOSSALI
1	17953.2552525183	-17850.0000000001
2	15096	-12715.1181436074
3	11716.4204627915	-10460.7025462467
4	8634.82035003858	-9860.34727831345
5	6430.19940167971	-9995.45966114923
6	5474.05843484073	-10289.0653134353
7	5930.59119264288	-10506.0000000002
8	7756.40091627971	-10752.626203897
9	10699.4108959804	-11475.7436773671
10	14297.6605351893	-13461.3855060189
11	17850	-17805.512758263

Come esempio finale di carico distribuito si consideri il caso definito dalle tre stese di carico con valori estremi:

$$f_1 = 33 \text{ tm}^{-1} \quad f_2 = 28 \text{ tm}^{-1} \quad f_3 = 33 \text{ tm}^{-1} \quad (8.111)$$

$$p_1 = 1 \text{ tm}^{-1} \quad p_2 = 0 \text{ tm}^{-1} \quad p_3 = 1 \text{ tm}^{-1} \quad (8.112)$$

$$t_1 = 1 \text{ tm}^{-1} \quad t_2 = 1 \text{ tm}^{-1} \quad t_3 = 1 \text{ tm}^{-1} \quad (8.113)$$