

7. L'analisi modale dinamica

7.1. L'energia cinetica e le vibrazioni libere

Si considerano le masse m_i concentrate sull'asse dell'arco in corrispondenza delle dividenti; esse si ordinano nell'array \mathbf{m} , di dimensioni $n + 3$. Le masse m_1 ed m_{n+3} non entrano in gioco, poichè si prevede solo una possibile cedibilità angolare elastica delle imposte (Figura 7.1).

Se $s_i(t)$ è lo spostamento della massa i , la sua energia cinetica è:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i [\dot{s}(t)]^2 \quad (7.1)$$

Poichè:

$$\mathbf{s} = v(t)\mathbf{u}_y + w(t)\mathbf{u}_z, \quad (7.2)$$

ove \mathbf{u}_y ed \mathbf{u}_z sono i versori di y e z , si ha:

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{v}(t)\mathbf{u}_y + \dot{w}(t)\mathbf{u}_z, \quad (7.3)$$

e quindi:

$$\dot{s}^2 = \dot{v}^2 + \dot{w}^2. \quad (7.4)$$

La (7.1) si scrive perciò come segue:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i (\dot{v}^2 + \dot{w}^2). \quad (7.5)$$

L'energia cinetica è quindi data da:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+3} m_i (\dot{v}_i^2 + \dot{w}_i^2). \quad (7.6)$$

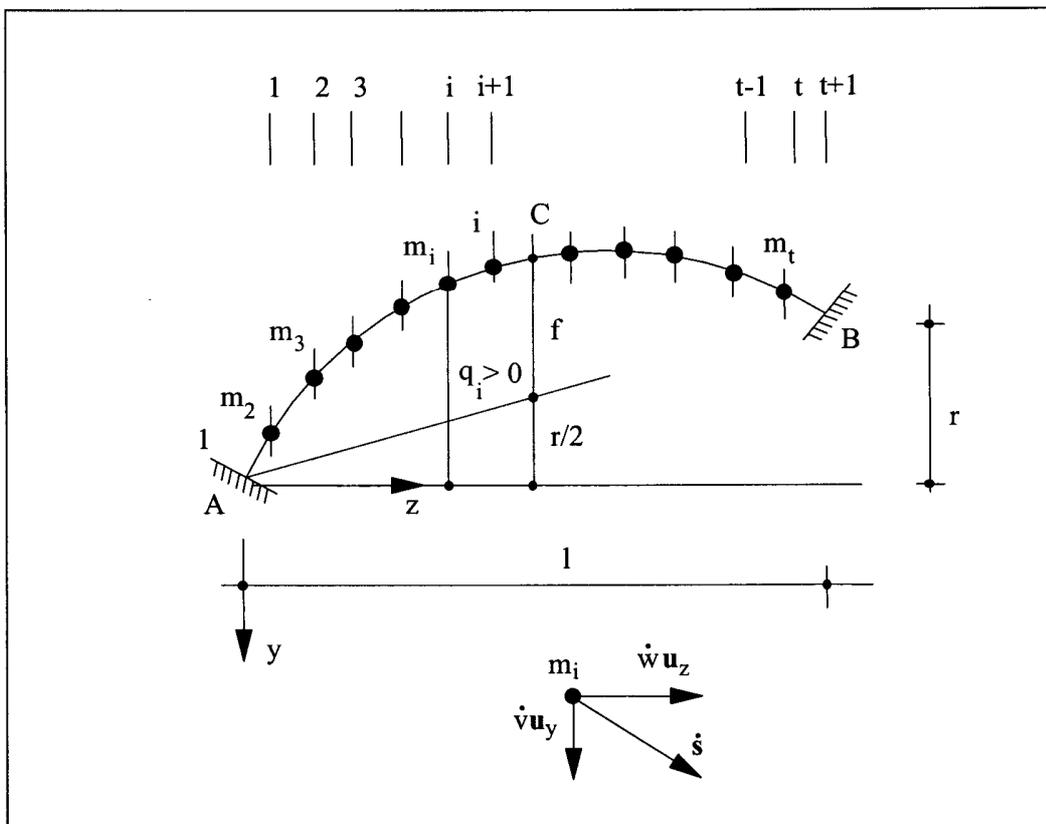


Figura 7.1- La discretizzazione della massa

Si chiami M_p la matrice diagonale delle masse:

$$M_p = \text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_{n+3}\}; \quad (7.7)$$

può scriversi:

$$T = \frac{1}{2} (\mathbf{v}^T M_p \mathbf{v} + \mathbf{w}^T M_p \mathbf{w}). \quad (7.8)$$

Per le relazioni che permettono di dedurre gli spostamenti dalle coordinate lagrangiane:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Vc} \quad \mathbf{w} = \mathbf{Wc} \quad (7.9)$$

la (7.8) si scrive come segue:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{c}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{c}} \quad (7.10)$$

ove:

$$\mathbf{M} = \mathbf{V}^T \mathbf{M}_p \mathbf{V} + \mathbf{W}^T \mathbf{M}_p \mathbf{W} \quad (7.11)$$

Naturalmente i termini della \mathbf{M} si calcolano direttamente, senza bisogno quindi di introdurre la \mathbf{M}_p . Dalla Figura 7.2 e dalle (6.31) e (6.33) si trae infatti ($j \leq i$):

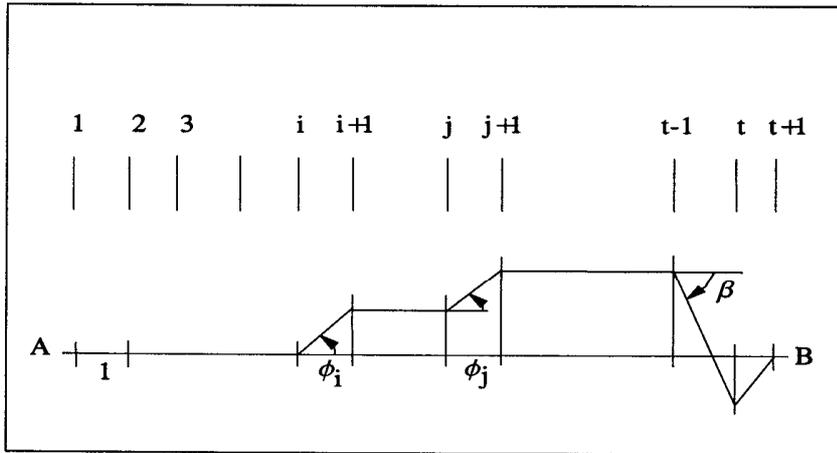


Figura 7.2- Il calcolo della matrice lagrangiana delle masse

$$M_{ij} = a^2 \left[\sum_{t=i+1}^{n+1} m_t + (1 + \beta_i)(1 + \beta_j)m_{n+2} \right] + (q_{i+1} - q_i)(q_{j+1} - q_j) \sum_{t=i+1}^{n+1} m_t + [q_{i+1} - q_i + (q_{n+2} - q_{n+1})\beta_i] [q_{j+1} - q_j + (q_{n+2} - q_{n+1})\beta_j] m_{n+2} \quad (7.12)$$

Poichè è:

$$(\mathbf{V}^T \mathbf{M}_p \mathbf{V})^T = \mathbf{V}^T \mathbf{M}_p^T \mathbf{V} = \mathbf{V}^T \mathbf{M}_p \mathbf{V} \quad (7.13)$$

ed analogamente per la \mathbf{W} , la matrice \mathbf{M} (*matrice lagrangiana delle masse*) è simmetrica. Poichè poi T è comunque maggiore di zero, per la (7.10) la \mathbf{M} è definita positiva.

Le equazioni di Lagrange sono le seguenti:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{c}_i} + \frac{\partial E_t}{\partial c_i} = 0, \quad (7.14)$$

per $i = 1, 2, \dots, n$.

Per la (6.27), le (7.14), in assenza di peso proprio, si scrivono come segue:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{B})\mathbf{c} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{c}} = 0 \quad (7.15)$$

Si associ a (7.15) il sistema algebrico:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{B})\mathbf{c} - \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{c} = 0 \quad (7.16)$$

questo ammette gli autovettori \mathbf{e}_i (da non confondersi con gli omonimi del sistema 6.29) sotto gli autovalori ω_i^2 , per $i = 1, 2, \dots, n$. Gli n autovalori ω_i^2 sono reali e positivi, per gli stessi motivi esposti nel Capitolo 6, e, come noto, ortogonali. Per quest'ultimo motivo gli \mathbf{e}_i costituiscono una base, e quindi la soluzione del sistema (7.16) può porsi sotto l'aspetto seguente:

$$\mathbf{c}(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) \mathbf{e}_i. \quad (7.17)$$

Il sistema (7.15) così si scrive:

$$\sum_{i=1}^n x_i (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{B}) \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^n \ddot{x}_i \mathbf{M} \mathbf{e}_i = 0 \quad (7.18)$$

Premoltiplicando per \mathbf{e}_h^T si ha:

$$\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_h^T (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{B}) \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^n \ddot{x}_i \mathbf{e}_h^T \mathbf{M} \mathbf{e}_i = 0 \quad (7.19)$$

Per l'ortogonalità degli \mathbf{e}_i si trae:

$$x_h \mathbf{e}_h^T (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{B}) \mathbf{e}_h + \ddot{x}_h \mathbf{e}_h^T \mathbf{M} \mathbf{e}_h = 0 \quad (7.20)$$

Per la (7.16) è:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{B}) \mathbf{e}_h = \omega_h^2 \mathbf{M} \mathbf{e}_h; \quad (7.21)$$

quindi la (7.20) si scrive, ponendo i al posto di h ,

$$\ddot{x}_i(t) + \omega_i^2 x(t) = 0 \quad (7.22)$$

La (7.22), che è l'equazione dell'oscillatore semplice, fornisce la generica $x_i(t)$ della (7.17). La sua soluzione è:

$$x_i(t) = A_i \sin \omega_i t + B_i \cos \omega_i t \quad (7.23)$$

e quindi la soluzione del sistema (7.16) è:

$$\mathbf{c}(t) = \sum_{i=1}^n (A_i \sin \omega_i t + B_i \cos \omega_i t) \mathbf{e}_i \quad (7.24)$$

I valori delle $2n$ costanti A_i e B_i sono definiti dalle condizioni iniziali $\mathbf{c}(0)$ e $\dot{\mathbf{c}}(0)$.

Le vibrazioni *libere* sono perciò somma di n moti indipendenti; ciascuno di essi è costituito dall'autovettore $\mathbf{e}_i x_i(t)$, ove $x_i(t)$ è una legge *armonica* di frequenza circolare ω_i , con periodo:

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} \quad (7.25)$$

e frequenza:

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} \quad (7.26)$$

Sono questi i cosiddetti *modi di vibrazione*, e lo studio esposto costituisce l'*analisi modale dinamica*.

7.2. La presenza di forze variabili

Agiscono sull'arco, in corrispondenza delle dividenti, le forze verticali $P_i(t)$ ed orizzontali $Q_i(t)$, definite attraverso gli array \mathbf{p} e \mathbf{q} , di dimensione $n + 3$, e le leggi temporali $f(t)$ ed $h(t)$.

Poichè alla E_t del precedente capitolo occorre aggiungere il termine:

$$-\mathbf{c}^T \mathbf{V}^T \mathbf{p} f(t) - \mathbf{c}^T \mathbf{W}^T \mathbf{q} h(t) \quad (7.27)$$

il sistema (7.15) si modifica come segue:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{B})\mathbf{c} + \mathbf{M}\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{V}^T \mathbf{p} f(t) + \mathbf{W}^T \mathbf{q} h(t) \quad (7.28)$$

Si possono considerare separatamente gli effetti delle $P_i(t)$ e delle $Q_i(t)$. In presenza delle sole $P_i(t)$ la (7.28) si scrive:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{B})\mathbf{c} + \mathbf{M}\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{V}^T \mathbf{p} f(t) \quad (7.29)$$

Si ponga (cfr.7.17):

$$\mathbf{c}(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) \mathbf{e}_i; \quad (7.30)$$

operando come nel paragrafo precedente, si riconosce che la $x_i(t)$ è fornita dall'equazione:

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i(t) = \omega_i^2 p_i f(t) \quad (7.31)$$

ove:

$$p_i = \frac{\mathbf{e}_i \mathbf{V}^T \mathbf{p}}{\mathbf{e}_i^T (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{B}) \mathbf{e}_i} = \frac{1}{\omega_i^2} \frac{\mathbf{e}_i \mathbf{V}^T \mathbf{p}}{\mathbf{e}_i^T \mathbf{M} \mathbf{e}_i} \quad (7.32)$$

E' particolarmente interessante il caso in cui la $f(t)$ è di tipo sinusoidale:

$$f(t) = \sin \omega_f t; \quad (7.33)$$

la (7.31) assume così l'aspetto:

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i(t) = \omega_i^2 p_i \sin \omega_f t \quad (7.34)$$

ed ammette l'integrale particolare:

$$x_i = x_{0i} \sin \omega_f t \quad (7.35)$$

ove:

$$x_{0i} = \frac{\omega_i^2}{\omega_i^2 - \omega_f^2} p_i \quad (7.36)$$

Le dimensioni fisiche degli enti chiamati finora in causa sono le seguenti:

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}] = [\mathbf{B}] &= Fl & [\mathbf{V}] &= l \\ [\mathbf{M}] &= Flt^2 & [\mathbf{p}] &= F & [\omega_i] &= t^{-1} \end{aligned} \quad (7.37)$$

Il termine:

$$r_i = \frac{\omega_i^2}{\omega_i^2 - \omega_f^2} \quad (7.38)$$

è il *coefficiente di amplificazione*. Il termine p_i (cfr. 7.32) è il *coefficiente di partecipazione*, ed ambedue sono adimensionali.

Il sistema (7.29) ammette quindi, se la sollecitazione è sinusoidale:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p} \sin \omega_f t, \quad (7.39)$$

l'integrale particolare:

$$\mathbf{c}(t) = \sin \omega_f t \sum_{i=1}^n r_i p_i \mathbf{e}_i \quad (7.40)$$

La sua soluzione è somma della (7.24) e della (7.40).

Quanto detto vale anche per le forze orizzontali Q_i ; il coefficiente di partecipazione si scrive in questo caso come segue:

$$q_i = \frac{\mathbf{e}_i \mathbf{W}^T \mathbf{q}}{\mathbf{e}_i^T (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{B}) \mathbf{e}_i} \quad (7.41)$$

Il moto è quindi somma del *moto libero* (7.24), secondo le frequenze naturali, e del *moto forzato* (7.40), secondo la frequenza della sollecitazione esterna. Se questa è di lunga durata, gli effetti del moto libero possono essere trascurati.

La soluzione di tipo sinusoidale è di portata generale. Se infatti la sollecitazione può essere posta nella forma:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p} f(t) \quad (7.42)$$

si può scomporre $f(t)$ in armoniche alla Fourier come segue:

$$f(t) = \sum_{h=1}^{\infty} f_h \sin \omega_{fh} t \quad (7.43)$$

e per ogni armonica utilizzare i risultati precedenti, ove si ponga $f_h \mathbf{p}$ al posto di \mathbf{p} , ed ω_{fh} al posto di ω_f .

7.3. La presenza di uno scuotimento

Si consideri uno *scuotimento sincrono*, e cioè un moto rigido del suolo. Lo scuotimento sia *verticale*, e definito da:

$$v^*(t) = v_0 f(t) \quad (7.44)$$

Siano poi v_i e w_i le componenti degli spostamenti delle masse rispetto al suolo; esse dipendono dalle c secondo le (7.9), e da esse sono generate le sollecitazioni nella struttura.

L'energia cinetica è data da:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+3} m_i [(\dot{v}_i + \dot{w}^*)^2 + \dot{w}_i^2]^2 = \quad (7.45)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+3} m_i (\dot{v}_i^2 + \dot{w}_i^2)^2 + \frac{1}{2} \dot{v}^{*2} \sum_{i=1}^{n+3} m_i + \dot{v}^* \sum_{i=1}^{n+3} m_i \dot{v}_i$$

può quindi scriversi:

$$T = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{v}}^T \mathbf{M}_p \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{w}}^T \mathbf{M}_p \dot{\mathbf{w}}) + \dot{v}^* \mathbf{v}^T \mathbf{m} + \frac{1}{2} \dot{v}^{*2} \sum_{i=1}^{n+3} m_i \quad (7.46)$$

In funzione delle ϕ_i si ha:

$$T = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{c}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{c}}) + \dot{v}^* \mathbf{c}^T \mathbf{V}^T \mathbf{m} + \frac{1}{2} \dot{v}^{*2} \sum_{i=1}^{n+3} m_i \quad (7.47)$$

Le equazioni di Lagrange si scrivono come segue:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{B}) \mathbf{c} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{c}} = -v_0 \dot{f}(t) \mathbf{V}^T \mathbf{m} \quad (7.48)$$

L'analogia tra la (7.48) e la (7.28) permette di sfruttare i risultati del paragrafo precedente, ponendo $\mathbf{V}^T \mathbf{m}$ al posto di $\mathbf{V}^T \mathbf{p}$, e $v_0 \dot{f}(t)$ al posto di $f(t)$. Si può quindi scrivere la soluzione nella forma:

$$\mathbf{c}(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) \mathbf{e}_i; \quad (7.49)$$

la x_i è data dall'equazione:

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i(t) = p_i^* v_0 \dot{f}(t) \quad (7.50)$$

ove:

$$p_i^* = \omega_i^2 \frac{\mathbf{e}_i^T \mathbf{V}^T \mathbf{m}}{\mathbf{e}_i^T (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{B}) \mathbf{e}_i} = \frac{\mathbf{e}_i^T \mathbf{V}^T \mathbf{m}}{\mathbf{e}_i^T \mathbf{M} \mathbf{e}_i} \quad (7.51)$$

Se lo scuotimento è sinusoidale:

$$v^*(t) = v_0 \sin \omega_s t \quad (7.52)$$

la (7.50) si scrive:

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i(t) = -v_0 \omega_s^2 p_i^* \sin \omega_s t \quad (7.53)$$

ponendo:

$$v_0 \omega_s^2 = a_s \quad (7.54)$$

ove a_s è l'accelerazione dello scuotimento, può scriversi:

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i(t) = -a_s p_i^* \sin \omega_s t \quad (7.55)$$

Paragonando la (7.55) con la (7.34) si ha:

$$x_{0i} = -\frac{1}{\omega_i^2 - \omega_s^2} a_s p_i^* \quad (7.56)$$

e quindi la (7.49) si scrive come segue:

$$\mathbf{c}(t) = -a_s \sin \omega_s t \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{\omega_i^2} p_i^* \mathbf{e}_i \quad (7.57)$$

Si ha:

$$[p_i^*] = [l^{-1}] \quad (7.58)$$

come è facile constatare dalla definizione stessa.

Dalle (7.57) è immediato risalire agli spostamenti, ed ai momenti M_i sotto le $n+3$ dividenti. Infatti è:

$$M_i = k_i(\phi_i - \phi_{i-1}) \quad (7.59)$$

È interessante però, anche se non indispensabile, conoscere le *forze equivalenti al sismo*, e cioè quelle che in regime statico generano gli stessi momenti della (7.59), calcolati per $\sin \omega_s t = 1$. Queste forze sono le P_h verticali e le Q_h orizzontali, ove $h = 1, 2, \dots, n+3$.

Ad ogni modo i si associano le forze equivalenti P_{hi} e Q_{hi} . Si considerano i seguenti due insiemi di forze agenti sull'arco (Figura 7.3):

- Le forze P_{hi} e Q_{hi} , cui corrispondono le coordinate lagrangiane (7.57) della deformata ai tempi $t_s = 2k\pi/\omega_s$, limitata all'autovettore \mathbf{e}_i .
- Le forze di massa corrispondenti al modo i , al tempo in cui le ϕ_i della \mathbf{e}_i raggiungono il massimo valore.

Il teorema di Betti permette di scrivere:

$$\mathbf{P}_i^T \mathbf{V} \mathbf{e}_i + \mathbf{Q}_i^T \mathbf{W} \mathbf{e}_i = -\omega_i^2 (\mathbf{M}_p \mathbf{V} \mathbf{e}_i)^T \mathbf{V} \mathbf{e}_i - \omega_i^2 (\mathbf{M}_p \mathbf{W} \mathbf{e}_i)^T \mathbf{W} \mathbf{e}_i \quad (7.60)$$

da cui:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i &= a_s r_i p_i^* \mathbf{M}_p \mathbf{V} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{Q}_i &= a_s r_i p_i^* \mathbf{M}_p \mathbf{W} \mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (7.61)$$

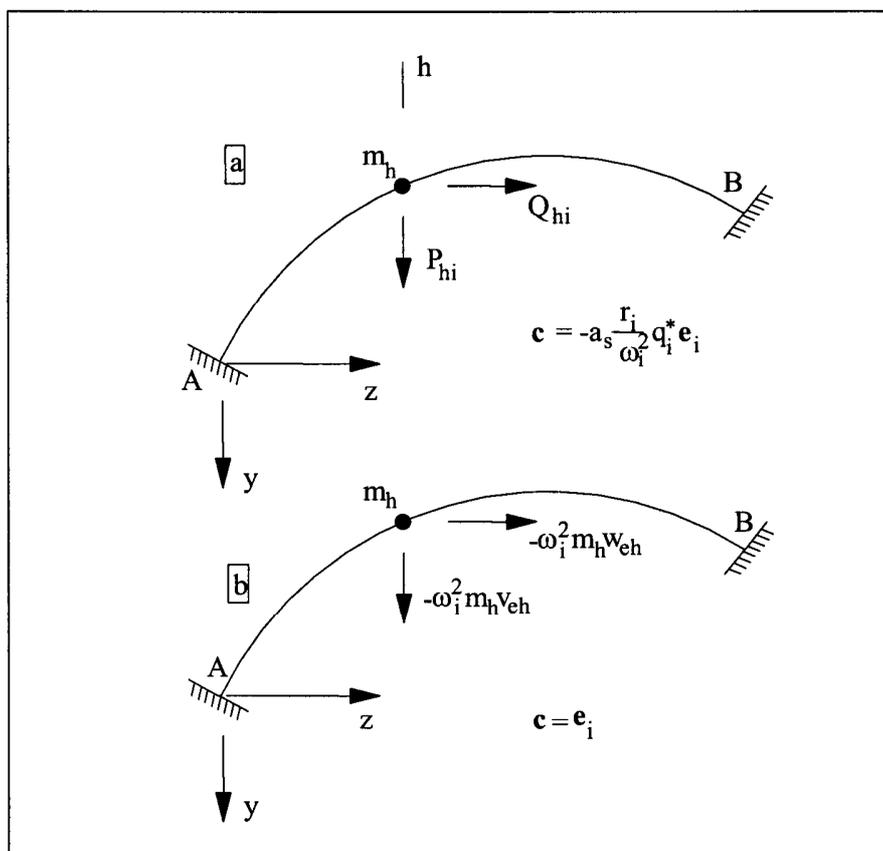


Figura 7.3- Forze sismiche agenti sull'arco

Se lo scuotimento è *orizzontale*, dato da:

$$w^*(t) = w_0 f(t) \tag{7.62}$$

le (7.61) si modificano ponendo q_i^* al posto di p_i^* . Il coefficiente di partecipazione diviene quindi:

$$q_i^* = \omega_i^2 \frac{\mathbf{e}_i^T \mathbf{W}^T \mathbf{m}}{\mathbf{e}_i^T (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{B}) \mathbf{e}_i} = \frac{\mathbf{e}_i^T \mathbf{W}^T \mathbf{m}}{\mathbf{e}_i^T \mathbf{M} \mathbf{e}_i} \tag{7.63}$$

mentre le forze sismiche sono:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i &= a_s r_i q_i^* \mathbf{M}_p \mathbf{V} e_i \\ \mathbf{Q}_i &= a_s r_i q_i^* \mathbf{M}_p \mathbf{W} e_i \end{aligned} \quad (7.64)$$

Si osserva che il coefficiente di partecipazione dipende dall'ordine i del modo e dal tipo di scuotimento; le forze P_h e Q_h sono somma degli n contributi che ad esse forniscono gli n modi, ciascuno proporzionale agli spostamenti v_{ie} e w_{ie} del modo, ed al coefficiente di partecipazione. Le quantità v_{ie} e w_{ie} sono definite a meno di costante, ma i prodotti $p_i^* v_{ie}$ e $q_i^* w_{ie}$, adimensionali, sono definiti.

7.4. Il programma ADIN1

Il programma ADIN1, il cui listato è fornito nell'appendice 7.1 è molto simile al programma AINS, illustrato nel capitolo precedente, in quanto ambedue risolvono un problema di autovalori generalizzato. Nel caso delle frequenze, il problema si scrive:

$$[(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{B}) - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{c} = 0 \quad (7.65)$$

e quindi occorre costruire la *matrice delle rigidezze ridotte* $\mathbf{K}_r = \mathbf{K} - \lambda \mathbf{B}$ e la *matrice delle masse* \mathbf{M} .

La prima matrice è immediatamente formata, nella subroutine 'RigidezzeRidotte', a partire dalla matrice globale di rigidezza \mathbf{K} e dalla matrice di rigidezza geometrica \mathbf{B} , a loro volta costruite nelle subroutine — già presentate nel capitolo precedente — 'RigidezzeGlobali' e 'RigidezzeGeometriche'.

La seconda matrice viene invece costruita nella subroutine 'MatriceDelleMasse', che essenzialmente implementa la formula (7.12). Ciò fatto, la subroutine di libreria 'sivib2' calcola le prime frequenze libere, assieme ai corrispondenti modi di vibrare, e da questi la già nota subroutine 'AutoSpostamenti' calcola le componenti di spostamento.

7.5. Alcuni esempi

7.5.1. Un test di convergenza

Come primo esempio, si fa riferimento ad un arco ad asse parabolico, incastrato ed a vincoli non cedevoli, di 200 metri di luce, di 50 metri di freccia, di momento di inerzia costante e pari a 30 m^4 , modulo di Young pari a $3 \cdot 10^6 \text{ t m}^{-2}$. Sia inoltre l'arco soggetto ad un carico uniformemente distribuito g di intensità 225 t m^{-1} , e si ponga $\lambda = 1$ per tener conto dell'effetto instabilizzante del peso proprio.

Al variare del numero di coordinate lagrangiane si hanno i risultati di Tabella 7.1, da cui si evince ancora una volta la convergenza dal basso del procedimento.

n	ω_1^2	ω_2^2	ω_3^2
3	1.8120	6.2064	14.631
4	2.2298	7.9331	18.312
5	2.5507	9.5367	22.896
6	2.7926	10.888	27.452
7	2.9760	11.988	31.513
8	3.1168	12.877	34.968
9	3.2267	13.597	37.858
10	3.3137	14.184	40.268
15	3.5589	15.921	47.670
20	3.6637	16.705	51.137
25	3.7175	17.117	52.993
30	3.7486	17.358	54.091
35	3.7682	17.511	54.791
40	3.7812	17.613	55.264
45	3.7904	17.686	55.597
50	3.7971	17.738	55.841
55	3.8021	17.778	56.024
60	3.8059	17.808	56.165
70	3.8113	17.852	56.366

Tabella 7.1- Curva di convergenza dei primi tre autovalori

7.5.2. L'effetto instabilizzante del peso proprio

E' ben noto che un carico assiale di tipo *conservativo* ha l'effetto di deprimere le frequenze libere di vibrazione, e che in corrispondenza dell' i -mo carico critico si annulla la i -ma frequenza. Ricercare quindi il punto di zero del diagramma (λ, ω^2) fornisce un ulteriore mezzo per ottenere il valore dei carichi critici, non più in via statica ma in via dinamica.

Per lo stesso arco dell'esempio precedente si è fatto crescere il moltiplicatore delle forze da peso proprio a partire da zero, ottenendo i risultati di Tabella 7.2. Il moltiplicatore critico fornito dal programma AINS è circa pari a 5.71. Si noti che il programma ADIN1, che fornisce le frequenze, segnala un errore se il moltiplicatore delle forze è maggiore di tale valore critico, perchè in tal caso la matrice delle rigidezze ridotte non è più definita positiva.

7.5.3. Il caso dell'arco molto ribassato

Si consideri la situazione limite di arco a 2 cerniere molto ribassato (rapporto freccia-luce pari a 1/200), che potrebbe anche riguardarsi come trave rettilinea con monta centrale. L'arco descritto nel file di ingresso dati seguente:

"ARCO DI PROVA", VIDEO, VIDEO
 20,72,3000000,0,0,0
 3,12,100,1E-6
 FUNC, "2 CERNIERE", "PARABOLA", "FUNC", "VERTICALE"
 .1,0
 1,73
 1.01980390272e-2, 1.01980390272e-2, 1.01980390272e-2
 10

λ	ω_1^2	ω_2^2	ω_3^2
0.0	4.589	19.764	59.654
0.5	4.194	18.752	57.748
1.0	3.797	17.738	55.841
1.5	3.399	16.724	53.933
2.0	3.001	15.709	52.026
2.5	2.601	14.692	50.117
3.0	2.200	13.675	48.209
3.5	1.798	12.657	46.300
4.0	1.394	11.638	44.390
4.5	0.989	10.618	42.481
5.0	0.583	9.596	40.571
5.5	0.174	8.574	38.661

Tabella 7.2- L'effetto instabilizzante sulle prime tre frequenze
 ha i primi tre periodi pari a:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= 0.36778 \text{ sec} \\
 T_2 &= 0.17233 \text{ sec} \\
 T_3 &= 0.09211 \text{ sec}
 \end{aligned}
 \tag{7.66}$$

D'altro canto è noto che per una trave appoggiata le frequenze sono fornite da:

$$\omega_i = \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}
 \tag{7.67}$$

dove μ è la densità di massa, pari in questo caso a 10/9.81. Ne segue che il secondo, il terzo ed il quarto periodo della struttura in esame, considerata come trave e non più come arco, sono:

$$\begin{aligned}
 T_2 &= 0.36747 \text{ sec} \\
 T_3 &= 0.16332 \text{ sec} \\
 T_4 &= 0.09187 \text{ sec}
 \end{aligned}
 \tag{7.68}$$

7.5.4. L'influenza del rapporto freccia-luce

Se il suolo è rigido, e se si trascura l'effetto instabilizzante del peso proprio, si può introdurre un comodo coefficiente adimensionale, tramite la formula:

$$\omega_i^2 = \gamma_i \frac{EI_c}{\mu l^4}
 \tag{7.69}$$

analogamente a quanto fatto nel capitolo precedente per i carichi critici. In Tabella 7.3, allora, si riporta il primo coefficiente adimensionale di frequenza per un arco parabolico a sezione costante, incastrato o a 2 cerniere, in funzione del rapporto freccia-luce.

f/l	Incastrato	1 cerniera	2/3 cerniere
0.1	3292	1782	1330
0.2	2322	1249	907.3
0.3	1492	795.7	567.7
0.4	947.3	501.3	354.4
0.5	615.7	323.8	228.0
0.6	414.0	216.6	152.3
0.7	288.1	150.2	105.4
0.8	206.9	107.5	75.50
0.9	152.86	79.25	55.63
1	115.7	59.88	42.02

Tabella 7.3- Coefficiente adimensionale di frequenza.
Arco parabolico a sezione costante

7.5.5. Un esempio dalla letteratura

Si consideri un arco a 3 cerniere caratterizzato da un rapporto freccia-luce pari ad $1/4$. In Sakiyama [1986] il problema delle vibrazioni di questo tipo di struttura è affrontato seguendo la via classica delle tre equazioni differenziali in $u(s)$, $v(s)$ e $\phi(s)$, e tabulando i risultati della soluzione ottenuta per discretizzazione secondo il procedimento dell'imposizione puntuale.

Nel procedimento si tiene conto degli effetti dello sforzo normale e del taglio, ma non dei termini del secondo ordine, e cioè del momento connesso con gli spostamenti. Secondo tali studi, si introduce un *coefficiente di snellezza* a , dato da:

$$a^2 = \frac{A_c l^2}{I_c} \quad (7.70)$$

ove A_c ed I_c sono l'area e l'inerzia che definiscono le aree e le inerzie assegnate con una certa legge $A(z) = A_c f(z)$ ed $I(z) = I_c g(z)$, ed un coefficiente adimensionale di frequenza pari a:

$$\lambda_i^4 = \omega_i^2 \frac{\mu l^4}{EI_c} \quad (7.71)$$

In Tabella 7.4 si pongono a confronto — per $a = 230.82$ — i dati da Sakiyama [1986], i dati ottenuti con ADIN1 trascurando l'effetto del peso proprio, e quelli ottenuti considerando la riduzione dovuta all'effetto instabilizzante del peso proprio. In ambedue i casi si è operato con 50 coordinate lagrangiane, con il seguente file di ingresso dati:

```

"ARCO RIALZATO DI SAKIYAMA", VIDEO, VIDEO
200,52,3000000,0,0,0
6,12,100,1E-9
FUNC, "3 CERNIERE", "PARABOLA", "FUNC", "ARCO"
50,0,1,27,53,29.97,29.97,29.97,225

```

Come si vede, i risultati della prima e seconda colonna mostrano un buon accordo, mentre in terza colonna l'effetto del peso proprio deprime le frequenze. D'altro canto, è opportuno ribadire che il coefficiente adimensionale introdotto è valido solo in assenza di effetti del secondo ordine.

γ_i	Sakiyama	Primo ordine	Secondo ordine
1	5.03	5.031	4.42
2	6.61	6.612	5.75
3	10.76	10.76	10.49
4	12.15	12.14	11.80
5	16.23	16.22	16.04
6	17.18	17.55	17.34

Tabella 7.4- Primi sei coefficienti di frequenza per arco rialzato a 3 cerniere.

Si noti infine che si è ipotizzato, come in Sakiyama [1986], che le masse siano distribuite lungo l'asse dell'arco e non lungo l'impalcato.

Prendendo in esame l'arco molto ribassato, caratterizzato dal seguente file di ingresso dati:

“ARCO RIBASSATO DI SAKIYAMA”
 VIDEO,VIDEO
 20,52,3000000,0,0,0
 6,12,100,1E-9
 FUNC,“3 CERNIERE”,“PARABOLA”,“FUNC”,“ARCO”
 1,0
 1,27,53
 6.66666e-4,6.66666e-4,6.66666e-4
 0.4905

si ottiene:

$$\gamma_1 = 6.207 \quad \gamma_2 = 7.476 \quad \gamma_3 = 12.438 \quad (7.72)$$

mentre per Sakiyama si avrebbe:

$$\gamma_1 = 6.208 \quad \gamma_2 = 7.405 \quad \gamma_3 = 12.451 \quad (7.73)$$

Come si vede, anche in questo caso l'accordo è notevole.

7.5.6. Un esempio concreto

Come sempre, si prende ora in esame l'arco prototipo di 400 metri di luce e 66 metri di freccia, il cui asse ed i cui carichi sono già stati determinati nei capitoli precedenti. Si noti come il file di ingresso dati sia solo minimamente modificato rispetto al file che permetteva il calcolo dei carichi critici. In Tabella 7.5 sono riportati i periodi propri di vibrazione sia trascurando che tenendo in conto il peso proprio.

T (sec)	Primo ordine	Secondo ordine
1	1.774	1.8212
2	.9845	1.0016
3	.5748	.5808
4	.4052	.4083
5	.2945	.2962
6	.2328	.2338
7	.1883	.1890
8	.1597	.1602
9	.1381	.1385
10	.1228	.1232

Tabella 7.5- Primi dieci periodi propri per l'arco di esempio.

7.6. Il programma ADIN2

In Appendice 7.2. è riportato il programma ADIN2 per il calcolo delle sollecitazioni interne, degli spostamenti e delle forze equivalenti connessi con uno scuotimento sincrono sinusoidale verticale o orizzontale.

Il programma è una integrazione dell'ADIN1, necessario per ottenere frequenze e modi delle vibrazioni libere, con le due subroutine "Trasferimento" e "ForzeSismiche". Con la prima si calcolano le matrici di trasferimento \mathbf{V} e \mathbf{W} per poter calcolare le componenti degli spostamenti in funzione delle coordinate lagrangiane.

Con la seconda si calcolano preliminarmente i coefficienti di partecipazione, ed a ciò fare occorrono alcune subroutine di libreria per gli opportuni prodotti matriciali. Poi si calcolano in sequenza gli spostamenti, i momenti flettenti e le forze (orizzontali e verticali) equivalenti al sismo.

7.7. Alcuni esempi

Si sceglie come prototipo un arco di 200 metri di luce, 50 metri di freccia, momento di inerzia variabile con legge parabolica tra un valore agli estremi di $60 m^4$ ed uno in chiave di $30 m^4$. Il modulo di Young sia pari a $3 \cdot 10^6 tm^{-2}$, l'asse sia parabolico ed il peso proprio sia uniformemente distribuito e di intensità pari a $225 tm^{-1}$. Infine, si tiene in conto l'effetto instabilizzante del peso proprio.

Come primo esempio, si ipotizza uno scuotimento verticale di ampiezza $w_0 = 0.004$ metri e di periodo $T_s = 0.4$ secondi, corrispondenti ad una accelerazione pari a:

$$a_s = w_0 \left(\frac{2\pi}{T_s} \right)^2 = 0.987 m sec^{-2} \quad (7.74)$$

Il file di ingresso dati, minimamente modificato rispetto a quello necessario per una analisi delle vibrazioni libere, si presenta come:

```

"ARCO DI PROVA",TUTTO,TUTTO,"ES7-11.ING","ES7-11.USC"
200,14,3000000,0,0,1
0.004,0.4
12,12,100,1E-9
FUNC,"INCASTRO","PARABOLA","FUNC","VERTICALE",VERTICALE
50,0,60,30,60,225

```

Come si vede, è stata solo aggiunta la terza riga, contenente ampiezza e periodo dello scuotimento, e l'ultima stringa in quinta riga, che indica il tipo di scuotimento (verticale o orizzontale).

I risultati sono alla fine contenuti nel file "ES7-11.USC", e sono parzialmente riportati nel seguito:

N.	FREQUENZA CIRCOLARE	PERIODO
1	5.22964427475951	2.74753854599492
2	21.4462336783529	1.35676412453956
3	61.8190025108549	.799132644232422
4	126.948492985946	.55765563305956
5	230.698632536911	.413673173694397
6	361.538586404517	.330447553248093
7	525.634599221092	.274055104879481
8	700.335241006696	.237425235810771
9	881.944169231125	.211572550595471
10	1051.58296554408	.193757310344715
11	1216.63993575145	.180135303002603
12	1395.49035944614	.168196303935425

N.	COEFFICIENTE DI PARTECIPAZIONE
1	-2.10181116251879D-18
2	-2.38527852525112D-18
3	6.40098314859768D-18
4	-2.72266439713886D-18
5	9.67362270306557D-19
6	-3.49534735150882D-18
7	-1.59024297962962D-17
8	4.58662693433196D-18
9	5.44647418859699D-18
10	-1.20693437254868D-17
11	-1.95614070886272D-19
12	-1.18872651638475D-18

DIVIDENTE	SPOS. VERTICALI	SPOS. ORIZZONTALI
1	0	0
2	4.12089708155778D-19	3.82654729001794D-19
3	2.21762570728653D-19	2.33111978166195D-19
4	-8.29144764241454D-19	-4.42471308600301D-19
5	-1.35331783083865D-18	-7.04557841898898D-19
6	4.66311542854861D-19	-5.46902084369312D-20

7	1.37732770752265D-18	1.40527541134738D-19
8	-4.93148290772563D-19	6.92211268507943D-21
9	-1.68124459436065D-18	9.17861343699432D-20
10	-4.91150255672172D-19	-1.63234081063303D-19
11	7.62242014765108D-19	-6.10874177648045D-19
12	4.21927993983832D-19	-4.40717167257407D-19
13	1.86736452620062D-19	-2.89522604952127D-19
14	9.99607745254558D-19	-9.28207192022087D-19
15	0	1.82355238926483D-33

DIVIDENTE	FORZA VERTICALE	FORZA ORIZZONTALE
1	0	0
2	2.32410790104772D-14	2.15810019383002D-14
3	3.14003047255155D-14	2.79918221429732D-14
4	1.11046273706315D-15	8.51978086468241D-15
5	-1.45475697102805D-13	-6.47732990552516D-14
6	3.61750227097681D-14	1.01958020667301D-16
7	1.48115097160806D-13	2.40891168316039D-14
8	-6.28397694756482D-14	9.02091207185718D-15
9	-1.2771819681877D-13	1.36550854535087D-14
10	5.68220999242447D-15	-1.49307160060329D-14
11	8.16660293887953D-14	-4.20677943618796D-14
12	-2.75036882801819D-14	1.2517064472609D-14
13	-1.09159514618579D-13	6.50100956901499D-14
14	1.45306660571137D-13	-1.34927613387484D-13
15	0	6.69761263210032D-29

DIVIDENTE	MOMENTO FLETTENTE
1	-5.32686821365224D-13
2	3.51960810402676D-13
3	4.69539692092646D-13
4	-2.6959804887155D-13
5	-1.13423598282364D-12
6	4.20664092657514D-13
7	1.25148245666904D-12
8	-3.04000153992023D-13
9	-1.07002417876782D-12
10	-2.93052827778691D-14
11	7.71242059688398D-13
12	-5.38047684481296D-14

13 -5.71831773231935D-13
 14 1.05893717230971D-12
 15 -1.29214067202674D-12

TEMPO DI ESECUZIONE = 13.1171875 SEC.

RUN DEL 10-21-1994 ORE 17:02:40

Si osserva che i valori degli spostamenti, e quindi delle sollecitazioni, sono praticamente nulli; ciò dipende dal fatto che l'asse dell'arco, parabolico, è funicolare del peso proprio, supposto uniforme. E' anche interessante osservare che i primi periodi propri sono abbastanza elevati, e che l'ipotizzato periodo dello scuotimento si colloca tra il quarto ed il sesto modo.

Si supponga ora che lo scuotimento sia orizzontale, di ampiezza 0.001 metri, e di periodo 2.7 secondi, con accelerazione:

$$a_s = 0.00541m \text{ sec}^{-2} \quad (7.75)$$

Si hanno i seguenti risultati:

N.	COEFFICIENTE DI PARTECIPAZIONE	
1	-9.53205914637359D-03	
2	-2.95084937684533D-16	
3	3.38235654478073D-03	
4	1.9527386244297D-16	
5	-6.1349539333692D-04	
6	-2.03792172774833D-14	
7	1.3132451873185D-03	
8	1.51751122884822D-17	
9	-2.61047663183775D-04	
10	2.68574742539441D-16	
11	7.6271500239504D-05	
12	2.77540897972826D-17	
DIVIDENTE	SPOS. VERTICALI	SPOS. ORIZZONTALI
1	0	0
2	-1.36010599774742D-03	-1.26295556933689D-03
3	-4.04833157679636D-03	-3.3751328100182D-03
4	-6.55939911595336D-03	-4.98939051376198D-03
5	-7.68251086193872D-03	-5.55094638675467D-03
6	-6.78854005096422D-03	-5.23167109712091D-03
7	-3.97397815413193D-03	-4.62855069065685D-03
8	-1.56652810010263D-12	-4.34469510833075D-03

9	3.97397815218633D-03	-4.62855069074167D-03
10	6.78854005143033D-03	-5.23167109772253D-03
11	7.68251086382771D-03	-5.55094638786445D-03
12	6.55939911734368D-03	-4.98939051462243D-03
13	4.04833157690968D-03	-3.37513281005772D-03
14	1.36010599740077D-03	-1.26295556901501D-03
15	0	-6.19669809932389D-18

DIVIDENTE	FORZA VERTICALE	FORZA ORIZZONTALE
-----------	-----------------	-------------------

1	0	0
2	-2.25163289870478	-2.09080197736873
3	-6.85672327493364	-5.70908727297712
4	-11.2086758178481	-8.50677105056497
5	-13.1912563071362	-9.49806129520903
6	-11.7209370887266	-8.97294728863417
7	-6.90148146088988	-7.94020679695487
8	-2.64460841148424D-09	-7.44724383565164
9	6.90148145757733	-7.94020679709606
10	11.7209370894533	-8.97294728964091
11	13.1912563102973	-9.49806129708522
12	11.2086758202253	-8.50677105204921
13	6.85672327518399	-5.70908727309407
14	2.25163289814655	-2.09080197685035
15	0	-5.30866743566208D-15

DIVIDENTE	MOMENTO FLETTENTE
-----------	-------------------

1	1758.1379158976
2	775.951150061621
3	-96.6588956381872
4	-710.396486856484
5	-976.126475978082
6	-889.183316369342
7	-521.658526796355
8	-5.29014086240913D-07
9	521.65852624553
10	889.183316827139
11	976.126476907977
12	710.396487254856
13	96.6588951924097
14	-775.951150532882

15 -1758.13791544951
 TEMPO DI ESECUZIONE = 6.92578125 SEC.
 RUN DEL 10-21-1994 ORE 17:04:44

Si vede che giocano un ruolo i soli coefficienti di partecipazione relativi ai modi antisimmetrici, decrescenti in valore assoluto. Si osservi anche che — pur avendo lo scuotimento energia molto bassa — le sollecitazioni indotte non sono affatto trascurabili. Ciò si spiega con la vicinanza di T_s al primo periodo naturale. I coefficienti di partecipazione non variano col variare dell'ampiezza e del periodo dello scuotimento, e non saranno quindi più riprodotti nel seguito.

Ponendo $T_s = 2.747$ secondi, gli effetti si esaltano in modo clamoroso, come può evincersi dai seguenti risultati:

DIVIDENTE	SPOS. VERTICALI	SPOS. ORIZZONTALI
1	0	0
2	-.119271766209414	-.110752354337313
3	-.354699287141066	-.295731120783611
4	-.574289977994877	-.436896564903918
5	-.672193374590625	-.485848263201792
6	-.593659908658601	-.457800596797498
7	-.347398313227186	-.405030254919337
8	-1.34785383201017D-10	-.380216089698451
9	.347398313060932	-.405030254926717
10	.593659908701353	-.457800596849664
11	.67219337475495	-.485848263297378
12	.574289978113392	-.436896564976599
13	.354699287148055	-.295731120784597
14	.119271766177871	-.110752354308023
15	0	-5.42269160145382D-16

DIVIDENTE	FORZA VERTICALE	FORZA ORIZZONTALE
1	0	0
2	-204.297734535183	-189.705039211241
3	-607.704981725514	-506.667876289359
4	-984.024091986917	-748.587304314546
5	-1151.8387988904	-832.494657766286
6	-1017.32984365092	-784.455745180759
7	-595.360451311092	-694.03373253651
8	-2.3070780627667D-07	-651.507986030768
9	595.360451049576	-694.033732550788
10	1017.32984374768	-784.455745271811

11	1151.83879916597	-832.494657921201
12	984.024092150381	-748.587304413404
13	607.704981726718	-506.667876283906
14	204.297734490395	-189.705039169653
15	0	-4.64592459669325D-13

DIVIDENTE	MOMENTO FLETTENTE
-----------	-------------------

1	154176.376558988
2	67863.7622183614
3	-8640.7058164984
4	-62283.1265673523
5	-85383.0658827567
6	-77653.7262590096
7	-45504.650188546
8	-4.60276394567829D-05
9	45504.6501409932
10	77653.7262994886
11	85383.0659637582
12	62283.1266009876
13	8640.70577667263
14	-67863.7622593024
15	-154176.376518215

TEMPO DI ESECUZIONE = 6.98046875 SEC.

RUN DEL 10-21-1994 ORE 17:06:58

Naturalmente questi risultati sono solo indicativi del fatto che gli spostamenti sono maggiori di quanto implicitamente contenuto nella definizione di piccoli spostamenti. Inoltre occorre tener conto delle dissipazioni di energia, in primo luogo quelle per la formazione di deformazioni plastiche.

Si consideri ora un caso tipico di uno scuotimento orizzontale di ampiezza 0.004 metri e periodo 0.4 secondi, valori che possono realisticamente trarsi da un accelerogramma standard di sismo, e che comportano una accelerazione pari ad un decimo della accelerazione di gravità. I risultati sono:

DIVIDENTE	SPOS. VERTICALI	SPOS. ORIZZONTALI
-----------	-----------------	-------------------

1	0	0
2	-6.28893402943719D-04	-5.83972445590596D-04
3	-1.07772601348606D-03	-9.36626639588148D-04
4	-8.0630996089271D-04	-7.62144891492425D-04
5	-5.69602415640947D-04	-6.43791118866543D-04
6	-8.0456512379778D-04	-7.27706371779698D-04

372 *Le strutture ad arco*

7	-7.81039257384639D-04	-7.22665114691168D-04
8	-1.14237168046485D-10	-6.66876604466348D-04
9	7.81039209931709D-04	-7.22665127621268D-04
10	8.04565190983443D-04	-7.27706409275211D-04
11	5.69602442533298D-04	-6.43791141971588D-04
12	8.06309883392262D-04	-7.6214486240107D-04
13	1.07772604880744D-03	-9.36626683025109D-04
14	6.28893512734872D-04	-5.83972547539522D-04
15	0	-1.63287560867277D-18

DIVIDENTE	FORZA VERTICALE	FORZA ORIZZONTALE
-----------	-----------------	-------------------

1	0	0
2	-21.370060455077	-19.8436275654287
3	-27.6113172908185	-24.7474722220827
4	13.2209359746763	1.50183344859256
5	34.2259542887795	12.0043426056441
6	-5.89766623032894	-2.32552186546602
7	-35.8272625501234	-8.73900679113626
8	-9.17159295219263D-06	-6.17991726409836
9	35.8272631421563	-8.73900814365189
10	5.89767609130642	-2.32552520418406
11	-34.2259532663258	12.0043424235417
12	-13.2209497284209	1.50184065458927
13	27.6113181130187	-24.7474743863362
14	21.3700710827501	-19.8436374339823
15	0	-3.15610002418586D-14

DIVIDENTE	MOMENTO FLETTENTE
-----------	-------------------

1	812.937622953232
2	-105.200149829835
3	-392.973643228619
4	17.7648321371613
5	228.255318898473
6	-119.673432659435
7	-340.829497616494
8	-8.06450364447831D-05
9	340.829527484249
10	119.673504388844
11	-228.255287878817
12	-17.7649433139766

13 392.973664153815
 14 105.200257483906
 15 -812.937764874515

TEMPO DI ESECUZIONE = 13.0703125 SEC.

RUN DEL 10-21-1994 ORE 17:11:03

Si nota subito che, pur avendo questo scuotimento una energia pari a circa un ventesimo dell'energia dello scuotimento precedente, ciononostante gli effetti hanno lo stesso ordine di grandezza. Se poi T_s si porta nei pressi del quinto periodo naturale, e cioè $T_s = 0.4137$ secondi, allora gli effetti si esaltano grandemente:

DIVIDENTE	SPOS. VERTICALI	SPOS. ORIZZONTALI
1	0	0
2	.17015661583954	.158002571851001
3	.1164327117002	.115790932884377
4	-.153779615062767	-5.79169914632444D-02
5	-.18952063683598	-.075787502349851
6	8.10781175946392D-02	2.08549099467987D-02
7	.218810388491368	5.03689679960978D-02
8	9.1583930640828D-09	3.47396551865995D-02
9	-.218810395778702	5.03689698249635D-02
10	-.081078117837207	2.08549102660716D-02
11	.189520630794498	-7.57874999595373D-02
12	.153779616291544	-.05791699270806
13	-.11643270365212	.115790927255723
14	-.170156620703407	.158002576367449
15	0	4.00879284642964D-16

DIVIDENTE	FORZA VERTICALE	FORZA ORIZZONTALE
1	0	0
2	12887.9097647526	11967.344781556
3	8855.57036167334	8799.078107708
4	-11549.2901453334	-4318.33221822489
5	-14248.8330264621	-5668.10365878924
6	6183.14085012558	1629.0298685635
7	16563.1224328115	3853.3116362819
8	6.9224679140439D-04	2670.23151195585
9	-16563.1229794448	3853.31177421954
10	-6183.14086431793	1629.02989240663
11	14248.8325687731	-5668.10347655444
12	11549.2902312033	-4318.33230776954

13	-8855.56975530417	8799.07768355667
14	-12887.9101307238	11967.3451213864
15	0	1.51813339245289D-11

DIVIDENTE	MOMENTO FLETTENTE
-----------	-------------------

1	-219952.561376671
2	130801.736078436
3	118117.878601597
4	-120009.291472281
5	-148246.964491355
6	61513.6982218321
7	160419.963700863
8	1.14066355851654D-02
9	-160419.978390644
10	-61513.6922755448
11	148246.958166792
12	120009.291703093
13	-118117.867836063
14	-130801.74646392
15	219952.567663938

TEMPO DI ESECUZIONE = 6.26171875 SEC.

RUN DEL 10-21-1994 ORE 17:13:01

così come accadeva nel caso precedente. Laddove però la deformata del caso precedente riproduceva la forma del primo autovettore, ora la deformata sarà simile alla forma del quinto autovettore.

Si fa infine osservare che una utile verifica può ottenersi caricando l'arco con le forze sismiche verticali ed orizzontali, ed adoperando il programma AS2 del capitolo precedente. I risultati dovranno ovviamente coincidere con quelli ottenuti tramite il programma ADIN2.

Appendice 7.1. Il programma ADIN1

```
DEFDBL A-Z
DECLARE SUB RigidezzeRidotte ()
DECLARE SUB MatriceDelleMasse ()
DECLARE SUB sivib2 (G(), GD(), L(), LD(), BD(), ERRO(), U(), V(), W(), NA,
    NK, N, M, NRQD, NOI, TOLVEC)
DECLARE SUB errore (U(), W(), BD(), ERRO(), N, M, NRQD, LCK, TOLVEC,
    LT)
DECLARE SUB decouple (U(), V(), W(), BD(), N, M, LCK, TOLVEC)
DECLARE SUB orthog (W(), N, M, LCK)
DECLARE SUB premult (U(), V(), L(), LD(), NA, N, M, LCK, IRENT)
DECLARE SUB rand (U(), N, M, IRENT)
DECLARE SUB reduce (L(), LD(), NK, N)
DECLARE SUB forsub (U(), V(), L(), LD(), NK, N, M, LCK)
DECLARE SUB backsub (U(), V(), L(), LD(), NK, N, M, LCK)
DECLARE SUB AutoSpostamenti ()
DECLARE SUB RigidezzeGeometriche ()
DECLARE SUB RigidezzeGlobali ()
DECLARE SUB RigidezzeLocali ()
DECLARE SUB Geometria ()
DECLARE SUB UscitaDati ()
DECLARE SUB UscitaRisultati ()
DECLARE SUB IngressoDati ()
DECLARE SUB IngressoDatiArray ()
DECLARE SUB OpenFiles ()
REM *****
REM *
REM *          P R O G R A M M A      A D I N 1          *
REM *
REM *
REM *          di
REM *
REM *          V I N C E N Z O      F R A N C I O S I      *
REM *
```



```

REM
DIM TITLE$(100), TITLE1$(100), STAMPA$(10), STAMPARIS$(10)
DIM FILEINGR$(10), FILEUSC$(10), DIVCERN(3) AS DOUBLE
REM
REM *****
REM *
REM *          DEFINISCE ALCUNE LEGGI DI VARIAZIONE          *
REM *
REM *****
DEF FNQ (Z) = RIAL * Z / LUCE + 4 * FREC / LUCE ^ 2 * Z * (LUCE - Z)
DEF FNINERZ1 (Z)
  FAUX = INERZS * (LUCE - Z) / LUCE + INERZD * Z / LUCE
  FAUX = FAUX - 2 * (INERZS + INERZD - 2 * INERZC) / LUCE ^ 2 * Z *
    (LUCE - Z)
  FNINERZ1 = FAUX
END DEF
DEF FNA (Z) = 4 * FREC / LUCE ^ 2 * (LUCE - 2 * Z) + RIAL / LUCE
DEF FNINERZ2 (Z) = INERZC * COS(ATN(FNA(Z))) ^ W
CLS
REM
REM *****
REM *
REM *          LEGGE IL NOME DEL FILE DI INPUT DATI          *
REM *
REM *****
REM
PRINT "NOME DEL FILE DI INPUT"
INPUT FILEINPUT$
TIME1 = TIMER
OPEN FILEINPUT$ FOR INPUT AS #7
REM -----
REM CHIAMA LA SUBROUTINE PER L'INGRESSO DEI DATI
REM -----
CALL IngressoDati
TT = (T - 2) * (T - 1) / 2
LTRAT = LUCE / T
GRAV = 9.81#
REM
REM *****
REM *
REM *          REDIMENSIONA GLI ARRAY DINAMICI          *
REM *

```