

Il principio di Saint-Venant: intuizione dell'ingegnere e rigore del matematico^(*)

di GAETANO FICHERA (a Roma)

SUMMARY - *History of the Saint - Venant principle is outlined since the publication of the celebrated Memoir by this Author. Efforts to prove the Saint-Venant conjecture are reviewed and an account is given of the most recent work concerning the proof of this conjecture.*

Il 13 giugno del 1853, ADHÉMAR JEAN-CLAUDE BARRÉ, conte di SAINT-VENANT, ingegnere civile e professore di Meccanica all'École des Ponts et Chaussées, sottoponeva all'Accademia delle Scienze di Parigi una sua vasta Memoria dal titolo *De la torsion des prismes* [1] ⁽¹⁾ per la pubblicazione sugli Atti Accademici. Non essendo allora il SAINT-VENANT Membro dell'Accademia (lo sarebbe divenuto nel 1868), veniva nominata, come è prassi, una Commissione di quattro Soci al fine di esaminare la Memoria e giudicarne la pubblicabilità o meno sui volumi accademici. Tale Commissione era composta da AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (Presidente), JEAN VICTOR PONCELET, GUILLAUME PIOBERT e GABRIEL LAMÉ (Relatore).

La Commissione concludeva i suoi lavori nel dicembre del 1853 e stilava una dettagliata, minuziosa relazione che, pubblicata, occupa ben cinque grandi pagine a stampa e che dimostra l'accurato impegno professionale che, allora, si poneva nell'espletamento dei compiti accademici. Con giudizio altamente elogiativo veniva proposta l'appro-

(*) Conferenza tenuta nella Facoltà di Ingegneria dell'Università di Palermo il 25-XI-1976.

⁽¹⁾ I numeri fra [] rimandano alla Bibliografia alla fine di questo lavoro.

vazione della Memoria del SAINT-VENANT da parte dell'Accademia e se ne consigliava la stampa sugli Atti Accademici.

Il 26 dicembre di quell'anno le conclusioni della Commissione divenivano esecutive. Aveva così inizio uno dei capitoli più suggestivi e stimolanti in tutta la storia della Meccanica e della Scienza delle Costruzioni. Suggestivo, perché il metodo proposto dal SAINT-VENANT per la soluzione del problema considerato si rivelava di tale sbalorditiva efficacia pratica, da farlo, ancorá oggi, chiamare *miracolo di Saint-Venant*; stimolante, perché la congettura affacciata dal SAINT-VENANT a giustificazione del suo procedimento, ha costituito per tutti gli studiosi di Matematica, Meccanica e Scienza delle Costruzioni, che si sono cimentati a tentarne una rigorosa dimostrazione, un'autentica sfida attraverso l'arco di questi ultimi centoventi anni.

Del lavoro di SAINT-VENANT dà un preciso giudizio CLIFFORD TRUESDELL, in una sua recente pubblicazione, nella quale traccia una sintetica e suggestiva storia della Meccanica classica da Archimede ai nostri giorni: « ... *For penetration of concept, for assessment of a key problem, and for skill in solving it, his work stands as one of the supreme monuments of mechanics...* » ([2] Part. II, pag. 124).

Io cercherò, in questa conferenza, di tratteggiare la tematica cui la teoria di SAINT-VENANT ha dato inizio. Voglio però sin da ora premettere che coloro i quali sono interessati all'annoso problema, dibattuto sia ieri che oggi, concernente il modo nel quale gli ingegneri debbano servirsi della Matematica, possono, nella Memoria di SAINT-VENANT, trovare una esauriente e significativa risposta a questo quesito.

1. Posizione del problema: deformazione del cilindro elastico caricato sulle basi.

Nello spazio cartesiano X^3 delle tre variabili reali x_1, x_2, x_3 si consideri il cilindro (prisma) definito dalle limitazioni:

$$(x_1, x_2) \in A, \quad -L < x_3 < L,$$

essendo A un campo (insieme aperto connesso) limitato del piano x_1, x_2 ed L un numero positivo. Con S_c indicherò la generica sezione retta del cilindro.

$$S_z: (x_1, x_2) \in \bar{A}, \quad x_3 = z, \quad (-L \leq z \leq L),$$

denotando $\bar{A}$, come di consueto, la chiusura di A ($\bar{A} = A \cup \partial A$). Lascero alla forma di A completa arbitrarietà, soltanto richiedendo che la sua frontiera ∂A sia composta da archi di curva sufficientemente regolari che si incontrano senza formare cuspidi. S_L ed S_{-L} sono le basi, rispettivamente superiore ed inferiore, di C (ved. Fig. 1). Con $\partial_1 C$ indicherò il *mantello laterale* del cilindro, cioè

$$\partial_1 C = \partial C - (S_L \cup S_{-L}).$$

Supponiamo che C schematizzi un solido elastico isotropo ed omogeneo nella sua configurazione naturale. Per semplicità e senza lesione di generalità supporrò uguale ad 1 la densità del corpo. Chiamerò con λ e μ le sue *costanti di Lamé*. Dette costanti soddisfano alle ben note limitazioni

$$\mu > 0, \quad 2\mu + 3\lambda > 0.$$

Sarà per me comodo, in seguito, considerare anche il *rapporto di Poisson*

$$\kappa = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}$$

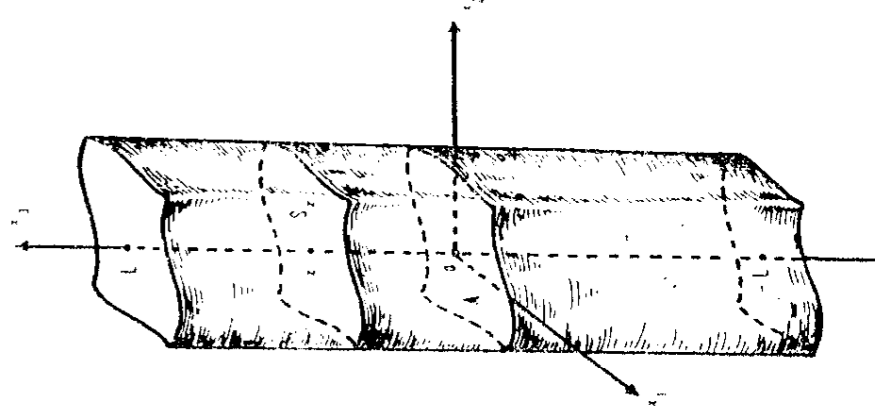


Fig. 1

ed il modulo di Young

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda}.$$

Supponiamo che C sia sollecitato da un sistema di forze superficiali f che agiscono sulla base superiore S_L e da un sistema di forze superficiali φ che agiscono su S_{-L} . Nessuna forza superficiale agisca su $\partial_1 C$ e siano nulle le forze di massa. Le forze f e φ siano rappresentate dai vettori

$$f(x_1, x_2) \equiv \{f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2)\},$$

$$\varphi(x_1, x_2) \equiv \{\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2), \varphi_3(x_1, x_2)\}.$$

Se si ricerca una configurazione di equilibrio per C , il sistema totale delle forze che agiscono su ∂C dovrà essere equilibrato, cioè dovrà avere risultante e momento risultante nullo:

$$\iint_A f dx_1 dx_2 + \iint_A \varphi dx_1 dx_2 = 0,$$

$$\iint_A (x \wedge f) dx_1 dx_2 + \iint_A (x \wedge \varphi) dx_1 dx_2 = 0,$$

$$(x \equiv \{x_1, x_2, x_3\}).$$

Se si indica con $u \equiv \{u_1, u_2, u_3\}$ il vettore spostamento del generico punto x di C , con g_{ij} le componenti del tensore di deformazione (linearizzata)

$$g_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})^{(2)}$$

e con σ_{ij} quelle del tensore degli sforzi, avremo (*legge di Hooke*)

$$\sigma_{ij} = 2\mu g_{ij} + \lambda \delta_{ij} g_{hh} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

(2) Se q è una funzione di $x \equiv \{x_1, x_2, x_3\}$, con q_i indichiamo la derivata $\partial q / \partial x_i$ e con $q_{,ij}$ la derivata $\partial^2 q / \partial x_i \partial x_j$.

ove δ_{ij} è il classico simbolo di Kronecker. Si è impiegata la convenzione sommatoria, secondo cui un indice ripetuto due volte sottintende una sommazione eseguita rispetto ad esso.

Lo stato di deformazione, che C raggiunge nella sua configurazione di equilibrio, si ottiene risolvendo il seguente *problema al contorno*, relativo alle classiche equazioni dell'elastostatica:

$$(1) \quad \mu u_{i,jk} + (\lambda + \mu) u_{k,ijk} = 0 \quad \text{in } C,$$

$$(2) \quad \sigma_{i3} = f_i \quad \text{su } S_L,$$

$$(3) \quad -\sigma_{i3} = \varphi_i \quad \text{su } S_{-L},$$

$$(4) \quad \sigma_{i1} n_1 + \sigma_{i2} n_2 = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad \text{su } \partial_1 C;$$

$n \equiv (n_1, n_2, n_3)$ denota il *versore normale esterno* nel generico punto regolare di ∂C .

Per quanto concerne l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema (1), (2), (5), (4), oggi si conosce tutto quanto era lecito desiderare. In effetti, se i «dati» f e φ verificano ragionevoli ipotesi di regolarità, la soluzione di (1), (2), (5), (4), esiste, è determinata a meno di uno spostamento rigido (che può essere individuato imponendo ulteriori condizioni di «ancoraggio» del solido), è «regolare» sia all'interno di C che nei punti regolari di ∂C e rende finito l'*integrale dell'energia elastica* del sistema

$$\int_{\sigma} W(g) dx \equiv \int_{\sigma} \left(\mu g_{ij} g_{ij} + \frac{1}{2} \lambda g_{ii} g_{ii} \right) dx < +\infty \quad (3).$$

Discorso ben diverso va fatto per quanto concerne il calcolo effettivo dell'incognita u e, quel che più conta, delle sue derivate, tramite le quali si esprimono la deformazione e lo sforzo cui è sottoposto C .

Lasciando ad A completa generalità, non è pensabile che tale problema fosse risolubile ai tempi di SAINT-VENANT. Ma non lo è, in piena generalità, neppure ai nostri giorni, ancorché l'Analisi matematica sia in grado di produrre, oggi giorno, numerosi procedimenti che, in teoria, dovrebbero fornire il calcolo numerico della funzione vettoriale incognita u e delle sue derivate. Per convincerci di questo pensiamo ad un metodo di approssimazione (fra i diversi che è possi-

bile dare, cfr. [4]) che rappresenti u mediante vettori polinomiali omogenei soluzioni del sistema (1). Poiché esistono $6k+3$ di siffatti vettori del grado k linearmente indipendenti, l'approssimazione m -esima (cioè con polinomi del grado m) dell'incognita u è del tipo seguente:

$$u \simeq \sum_{k=0}^m \sum_{h=1}^{6k+3} a_{hk} P_{hk}.$$

Le costanti a_{hk} sono quindi in tutto $3(m+1)^2$ e si calcolano risolvendo un sistema lineare algebrico di $3(m+1)^2$ equazioni in altrettante incognite. Ora, limitandoci a polinomi di grado 5 (approssimazione da ritenere del tutto inadeguata, specie ricordando che più che u interessano le sue derivate) il numero delle quazioni e delle relative incognite è di 108, mentre per $m=10$ tale numero sale a 363. Se C ha qualche spigolo, è allora ben noto che la convergenza dell'approssimazione polinomiale diviene assai più lenta. In tal caso, se si volesse una approssimazione con polinomi, ad esempio, di grado 100, si dovrebbe risolvere un sistema di 50603 equazioni in altrettante incognite! E ciò neanche i moderni potentissimi elaboratori elettronici sono in grado di potere, in modo accettabile, fare.

Considerazioni analoghe possono svolgersi in relazione a qualsiasi altro metodo di calcolo numerico di u e delle sue derivate.

Le cose dette dimostrano che l'approssimazione proposta da SAINT-VENANT, della quale verremo ora a parlare, è pienamente attuale anche ai nostri giorni.

2. L'approssimazione di Saint-Venant e la scomposizione della deformazione in sei deformazioni semplici.

L'idea, che guida SAINT-VENANT nel proporre la sua soluzione approssimata al problema (1)-(4), è originata dall'intuire che il cilindro C , sotto l'azione delle forze superficiali f e φ , si deforma in guisa tale che ogni *fibra longitudinale* di C (sezione piana di C , parallela all'asse x_3) viene sottoposta ad uno sforzo tale, che di esso soltanto la componente tangenziale parallela all'asse x_3 sia avvertibile, riuscendo trascurabili tanto la componente normale che l'altra componente tangenziale.

Indicata con v una soluzione del sistema omogeneo (1), cioè

$$(5) \quad \mu v_{,ijk} + (\lambda + \mu) v_{,kik} = 0 \quad \text{in } C,$$

e con τ_{ij} il corrispondente tensore degli sforzi

$$\tau_{ij} = \mu (v_{ij} + v_{ji}) + \lambda \delta_{ij} v_{K/K},$$

il SAINT-VENANT è, seguendo la sua intuizione, portato a ricercare tutte le soluzioni che verificano le condizioni

$$(6) \quad \tau_{11} = 0, \quad \tau_{12} = 0, \quad \tau_{22} = 0,$$

cioè quelle per le quali lo sforzo che agisce su ogni fibra longitudinale di C è ad essa tangente ed è diretto secondo l'asse x_3 .

La più generale soluzione del sistema (5) che verifica le (6) è la seguente:

$$\begin{aligned} v_1(x) &= c_1 + \gamma_3 x_2 - \gamma_2 x_3 - \kappa \left\{ a_0 x_1 + \frac{1}{2} a_1 (x_1^2 - x_2^2) + a_2 x_1 x_2 \right. \\ &\quad \left. + x_3 \left[b_0 x_1 + \frac{1}{2} b_1 (x_1^2 - x_2^2) + b_2 x_1 x_2 \right] \right\} + \alpha x_2 x_3 - \frac{1}{2} a_1 x_3^2 - \frac{1}{6} b_1 x_3^3, \\ v_2(x) &= c_2 + \gamma_1 x_3 - \gamma_3 x_1 - \kappa \left\{ a_0 x_2 + a_1 x_1 x_2 + \frac{1}{2} a_2 (x_2^2 - x_1^2) \right. \\ &\quad \left. + x_3 \left[b_0 x_2 + b_1 x_1 x_2 + \frac{1}{2} b_2 (x_2^2 - x_1^2) \right] \right\} - \alpha x_1 x_3 - \frac{1}{2} a_2 x_3^2 - \frac{1}{6} b_2 x_3^3, \\ v_3(x) &= c_3 + \gamma_2 x_1 - \gamma_1 x_2 + x_3 (a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} x_3^2 (b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2) - \frac{1}{2} b_0 (x_1^2 + x_2^2) - b_1 x_1 x_2^2 - b_2 x_1^2 x_2 \\ &\quad + \alpha \psi(x_1, x_2) + b_1 \eta_1(x_1, x_2) + b_2 \eta_2(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Le costanti $c_1, c_2, c_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, \alpha$ sono costanti arbitrarie, mentre che $\psi(x_1, x_2), \eta_1(x_1, x_2), \eta_2(x_1, x_2)$ sono arbitrarie funzioni armoniche in due variabili nel campo A :

$$\Delta_2 \psi = 0, \quad \Delta_2 \eta_1 = 0, \quad \Delta_2 \eta_2 = 0$$

$$\left(\Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right).$$

Si assuma come origine del sistema cartesiano ortogonale x_1, x_2, x_3 il centroide di A nel piano x_1, x_2 , considerando A come una lamina materiale di densità 1 e si assumono come assi x_1 ed x_2 gli assi prin-

cipali di inerzia di tale lamina. Avremo allora

$$\begin{aligned}\iint_A x_1 dx_1 dx_2 &= \iint_A x_2 dx_1 dx_2 = \iint_A x_1 x_2 dx_1 dx_2 = 0 \\ \iint_A x_1^2 dx_1 dx_2 &= \rho_1^2 |A|, \quad \iint_A x_2^2 dx_1 dx_2 = \rho_2^2 |A|,\end{aligned}$$

ove $|A|$ denota l'area di A e ρ_1 e ρ_2 sono i raggi principali d'inerzia relativi agli assi x_2 ed x_1 rispettivamente.

Se la soluzione di (1) data dalle (7) soddisfa le condizioni al contorno (4), deve essere $b_0 = 0$. D'altra parte, dette condizioni al contorno sono soddisfatte per qualsiasi scelta delle restanti costanti se e solo se le tre funzioni armoniche ϕ , η_1 , η_2 sono le rispettive soluzioni dei seguenti *problemi di Neumann* per funzioni armoniche nel campo A :

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = -x_2 n_1 + x_1 n_2,$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial n} = \frac{x x_1^2 + (2 - x) x_2^2}{2} n_1 + (2 + x) x_1 x_2 n_2,$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial n} = (2 + x) x_1 x_2 n_1 + \frac{x x_2^2 + (2 - x) x_1^2}{2} n_2$$

(vedi [5], pp. 291-327).

Naturalmente non ci si può attendere di soddisfare le restanti condizioni al contorno usando le costanti arbitrarie. SAINT-VENANT propone allora di servirsi di tali costanti per imporre che le forze superficiali su S_L e su S_{-L} , corrispondenti alla soluzione ν data dalle (7), abbiano la stessa risultante e lo stesso momento risultante dei sistemi di forze superficiali dati da f e ϕ rispettivamente. Le forze superficiali corrispondenti a ν si annullano su $\partial_1 C$ e costituiscono un sistema in equilibrio su $S_L \cup S_{-L}$. Pertanto, se tali forze superficiali equilibrano il sistema costituito da f su S_L , debbono equilibrare il sistema costituito da ϕ su S_{-L} . Ne segue che le uniche condizioni da imporre sono quelle che assicurano che le forze superficiali corrispondenti a ν hanno lo stesso risultante e lo stesso momento risultante del sistema f .

Questa osservazione è importante, dato che il sistema ϕ potrebbe non essere assegnato « a priori », ma essere invece ϕ la *reazione* dei vincoli imposti a C in S_{-L} . È questo il caso nel quale ci si imbatte

quando C è incastrato sulla base S_L . Allora le condizioni al contorno (5) devono essere sostituite dalle seguenti: $u_i=0$ su S_L ($i=1, 2, 3$) ed il vettore φ è esso stesso una incognita del problema.

Poniamo:

$$F_1 = \iint_{S_L} f_1 dx_1 dx_2, \quad F_2 = \iint_{S_L} f_2 dx_1 dx_2, \quad F_3 = \iint_{S_L} f_3 dx_1 dx_2,$$

$$G_1 = \iint_{S_L} \tau_{13} dx_1 dx_2, \quad G_2 = \iint_{S_L} \tau_{23} dx_1 dx_2, \quad G_3 = \iint_{S_L} \tau_{33} dx_1 dx_2,$$

$$M_1 = \iint_{S_L} (f_3 x_2 - f_2 x_3) dx_1 dx_2, \quad M_2 = \iint_{S_L} (f_1 x_3 - f_3 x_1) dx_1 dx_2,$$

$$M_3 = \iint_{S_L} (f_2 x_1 - f_1 x_2) dx_1 dx_2,$$

$$N_1 = \iint_{S_L} (\tau_{13} x_2 - \tau_{12} x_3) dx_1 dx_2, \quad N_2 = \iint_{S_L} (\tau_{11} x_3 - \tau_{13} x_1) dx_1 dx_2,$$

$$N_3 = \iint_{S_L} (\tau_{12} x_1 - \tau_{11} x_2) dx_1 dx_2.$$

Imponendo le condizioni

$$G_i = F_i, \quad N_i = M_i \quad (i=1, 2, 3),$$

si ottengono le seguenti equazioni per le costanti arbitrarie:

$$\left. \begin{aligned} |A| E \varrho_1^2 b_1 &= F_1, \quad |A| E \varrho_2^2 b_2 = F_2, \quad |A| E a_0 = F_3, \\ |A| E \varrho_2^2 a_2 &= M_1, \quad -|A| E \varrho_1^2 a_1 = M_2, \\ \frac{-E}{4(1+\kappa)} \left\{ 2|A|(\varrho_1^2 + \varrho_2^2) \alpha - b_1 \iint_A [(2-\kappa)x_2^3 - (4+\kappa)x_1^2 x_2] dx_1 dx_2 \right. \\ &\quad \left. - b_2 \iint_A [(2-\kappa)x_1^3 - (4+\kappa)x_1 x_2^2] dx_1 dx_2 \right. \\ &\quad \left. - 2 \iint_A [x_1(\alpha \psi_1 + b_1 \eta_{1/2} + b_2 \eta_{2/2}) \right. \\ &\quad \left. - x_2(\alpha \psi_1 + b_1 \eta_{1/2} + b_2 \eta_{2/2})] dx_1 dx_2 \right\} = M_3. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Il coefficiente di α nell'ultima delle equazioni (7) è:

$$\frac{E}{2(1+\kappa)} \left\{ A | (\varrho_1^2 + \varrho_2^2) - \iint_A (x_1 \psi_{|2} - x_2 \psi_{|1}) dx_1 dx_2 \right\}.$$

Questo coefficiente, che rappresenta la *rigidità torsionale* del cilindro, è sempre positivo, talché le equazioni (7) determinano univocamente le costanti $b_1, b_2, a_0, a_1, a_2, \alpha$.

Le costanti $c_1, c_2, c_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sono irrilevanti ai fini della determinazione della deformazione di C , dato che esse sono i coefficienti di un arbitrario spostamento rigido.

SAINT-VENANT assume allora come soluzione approssimata del problema (1)-(4) la funzione vettoriale data dalle (7), dove $b_0=0$ e le costanti $b_1, b_2, a_0, a_1, a_2, \alpha$ sono fornite dalle (8). Naturalmente, per il calcolo di ν occorre risolvere tre problemi di Neumann per funzioni armoniche in due variabili. Ma la soluzione di siffatti problemi è ragionevolmente conseguibile anche dal punto di vista numerico. In effetti, adottando, ad esempio, un metodo fondato sullo sviluppo della funzione incognita in polinomi armonici (se A è semplicemente connesso), per avere l'approssimazione m -esima (cioè mediante polinomi di grado m) occorrerà risolvere un sistema di $2m$ equazioni in $2m$ incognite. Quindi un sistema di 10 equazioni per $m=5$ e di 200 equazioni per $m=100$.

L'approssimazione di SAINT-VENANT si presta ad uno studio dettagliato della deformazione di C , la quale si può considerare scomponibile nella somma di 6 deformazioni, ciascuna delle quali, per la sua semplicità, permette sia un'analisi approfondita della natura dello sforzo cui è sottoposta la struttura, sia il facile calcolo delle caratteristiche meccaniche che interessano il costruttore. Tali sei deformazioni semplici si ottengono assumendo diversa da zero una sola delle costanti $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, \alpha$ e le rimanenti tutte nulle. Le sei deformazioni che si ottengono vengono classificate al modo seguente:

1) Estensione (compressione) semplice.

Tutte le costanti nulle, eccettuata a_0 . Si ha allora:

(9)

$$\nu_1 = -\kappa a_0 x_1, \quad \nu_2 = -\kappa a_0 x_2, \quad \nu_3 = a_0 x_3.$$

$$F_1 = F_2 = 0, \quad F_3 = [A] E a_0, \quad M_1 = M_2 = M_3 = 0.$$

Se è $a_0 > 0$, il solido viene *stirato* da forze opposte ortogonali alle basi, mentre se è $a_0 < 0$, viene *compresso* da forze opposte che premono ortogonalmente sulle basi (ved. Fig. 2). Ogni fibra longitudinale, nel caso $a_0 > 0$ (nel caso $a_0 < 0$), si allunga (si contrae) verticalmente nel rapporto di 1 a $1 + a_0$ e si contrae (si allunga) orizzontalmente nel rapporto di 1 a $1 - \alpha a_0$. Ogni fibra rettilinea resta rettilinea; ogni sezione piana resta piana.

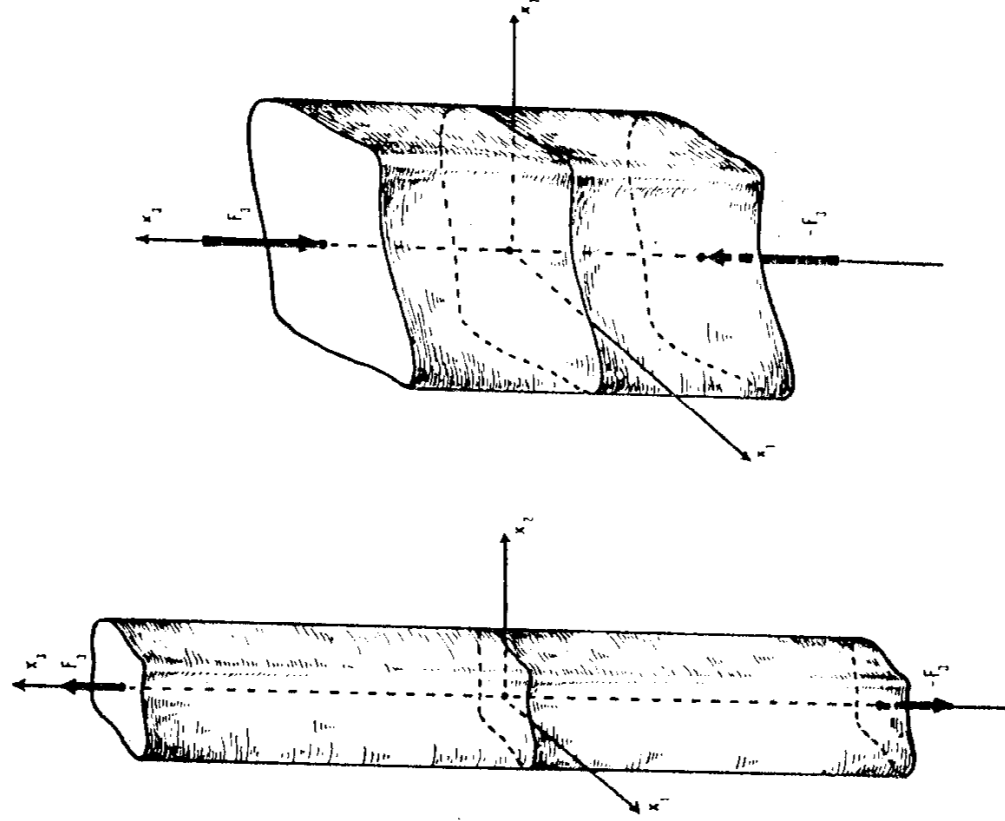


Fig. 2

La deformazione di C data dalle (9) è ovviamente indipendente dalla forma di A .

2), 3) *Flessioni uniformi.*

Tutte le costanti sono nulle, eccettuata a_1 (eccettuata a_2).

Basta esaminare solo il primo caso ($a_1 \neq 0$), dato che il secondo ($a_2 \neq 0$) si ottiene dal primo scambiando x_1 con x_2 e ν_1 con ν_2 . Si ha:

$$\nu_1 = -\frac{1}{2} a_1 [\alpha (x_1^2 - x_2^2) + x_3^2], \quad \nu_2 = -\frac{1}{2} a_1 \alpha x_1 x_2, \quad \nu_3 = a_1 x_1 x_2.$$

$$F_1 = F_2 = F_3 = 0; \quad M_1 = 0, \quad M_2 = -|A| E \rho_1^2 a_1, \quad M_3 = 0.$$

Il solido è quindi sollecitato sulle due basi da forze equivalenti, rispettivamente, a due coppie, opposte l'una all'altra, contenute nel piano x_1, x_3 .

Supposto, per fissare le idee, $a_1 > 0$, ogni generatrice di C si deforma rimanendo in un piano parallelo al piano x_1, x_3 ed assumendo la forma di una parabola volgente la concavità verso l'asse negativo delle x_1 .

La parabola che corrisponde alla generatrice di C , passante per l'origine, può, nei limiti dell'errore consentito dalla teoria lineare dell'elasticità, immedesimarsi all'arco di circonferenza del piano x_1, x_3 di centro $(-a_1^{-1}, 0)$ e raggio a_1^{-1} .

Le sezioni rette di C rimangono piane dopo la deformazione ed i loro piani contengono tutti il punto $(-a_1^{-1}, 0, 0)$ (ved. Fig. 5).

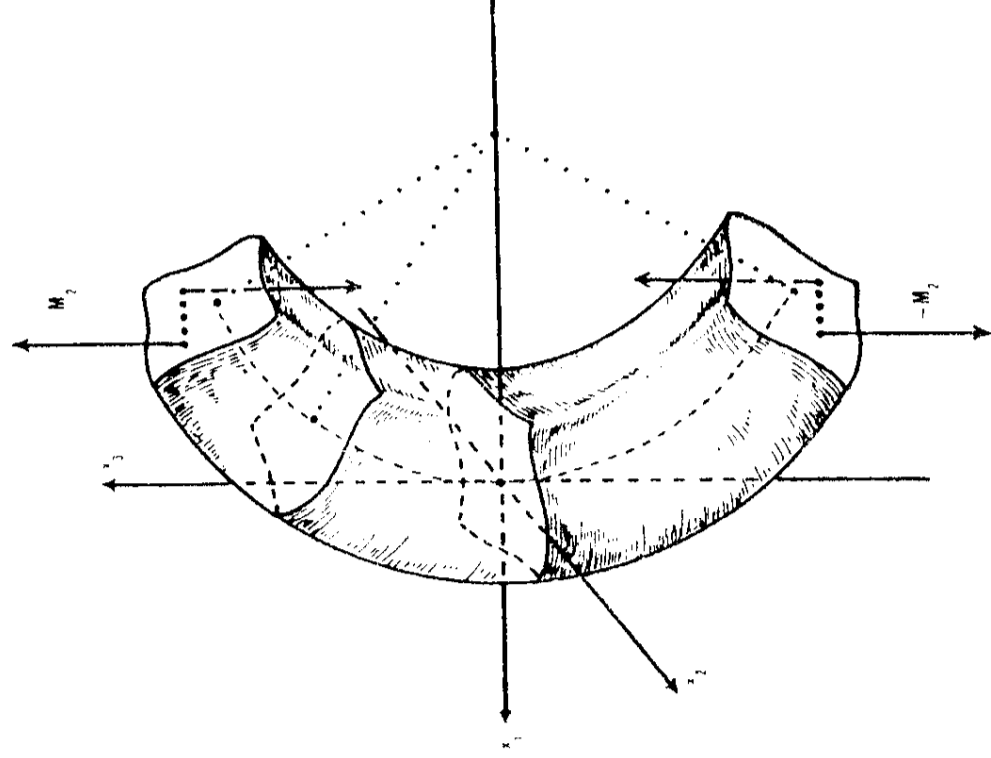


Fig. 5

Anche in questo caso la deformazione è indipendente da A .

4), 5) *Flessioni non uniformi.*

Tutte le costanti sono nulle, eccettuata b_1 (eccettuata b_2).

Basta esaminare solo il caso $b_1 \neq 0$. Si ha:

$$v_1 = -\frac{1}{2} b_1 [\alpha x_3 (x_1^2 - x_2^2) - \frac{1}{3} x_3^3], \quad v_2 = -\alpha b_1 x_1 x_2 x_3,$$

$$v_3 = b_1 \left[\frac{1}{2} x_1 x_3^2 - x_1 x_2^2 + \eta_1 (x_1, x_2) \right].$$

$$F_1 = [A] E \rho_1^2 b_1, \quad F_2 = F_3 = 0; \quad M_1 = M_2 = 0,$$

$$M_3 = -b_1 \iint_A [(2 - \alpha) x_2^3 - (4 + \alpha) x_1^2 x_2] dx_1 dx_2 - 2b_1 \iint_A (x_1 \eta_{1/2} - x_2 \eta_{1/1}) dx_1 dx_2.$$

Su ogni base di C agisce un sistema di forze equivalente ad una forza parallela all'asse x_1 e ad una coppia contenuta nel piano della base. Ogni generatrice di C si deforma secondo una cubica (a meno di un errore tollerato nella teoria lineare), il cui piano è inclinato rispetto al piano x_1, x_3 .

Le sezioni rette di C si deformano incurvandosi, in un modo che dipende dalla funzione incognita $\eta_1(x_1, x_2)$ e quindi dalla forma di A (ved. Fig. 4).

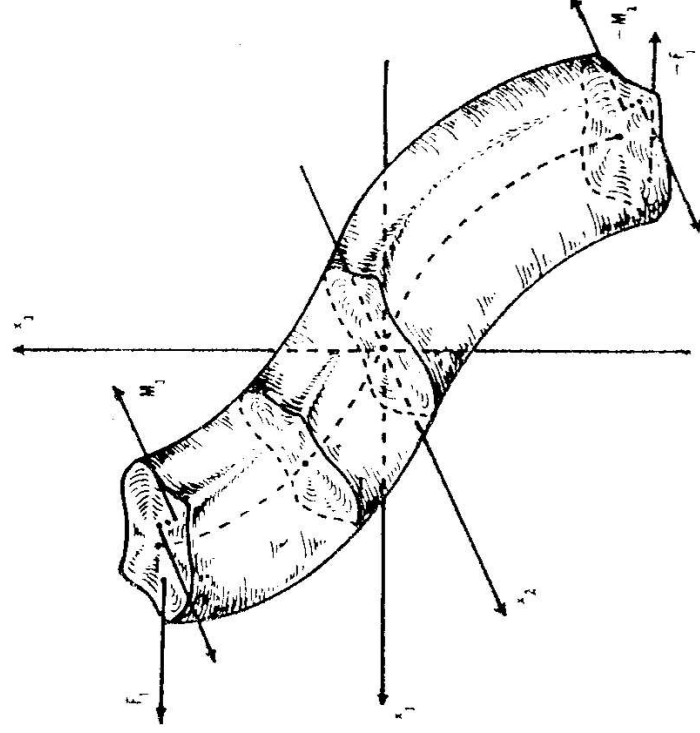


Fig. 4

6) Torsione.

Tutte le costanti sono nulle, eccettuata α . Si ha:

$$\nu_1 = \alpha x_2 x_3, \quad \nu_2 = -\alpha x_1 x_3, \quad \nu_3 = \alpha \psi_1(x_1, x_2).$$

$$F_1 = F_2 = F_3 = 0, \quad M_1 = M_2 = 0,$$

$$(10) \quad M_3 = \alpha \frac{E}{2(1+\kappa)} \left\{ |A|(\varrho_1^2 + \varrho_2^2) - \iint_A (x_1 \psi_{12} - x_2 \psi_{11}) dx_1 dx_2 \right\}.$$

Il solido è sollecitato su ogni base da un sistema di forze equivalenti ad una coppia posta nel piano della base (*coppia di torsione*). Ogni generatrice di C si deforma secondo una curva che può immaginarsi ad un'elica cilindrica a passo costante uguale ad α^{-1} . Talché αl rappresenta la misura dell'angolo di cui due sezioni rette a distanza l l'una dall'altra, hanno ruotato fra loro a deformazione avvenuta. È da notare che ogni sezione retta si incurva in un modo che dipende dalla funzione incognita $\psi(x_1, x_2)$ e quindi da A . Le sezioni rette si incurvano tutte allo stesso modo (ved. Fig. 5). La costante α (detta *angolo di torsione*) è proporzionale a M_3 secondo la rigidità torsionale di C , come esprime la (10).

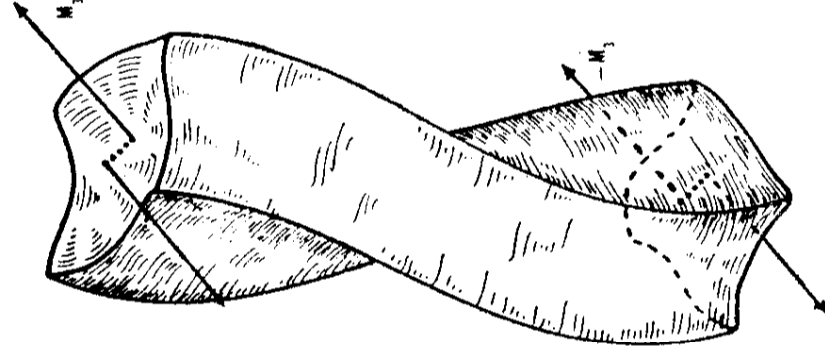


Fig. 5

3. La congettura di Saint-Venant e sua elevazione a principio. I tentativi per una formulazione ed una dimostrazione rigorosamente matematiche.

A questo punto, inevitabilmente, deve porsi il quesito: *la soluzione ν proposta da Saint-Venant, che permette un'analisi tanto dettagliata della deformazione, può considerarsi una soddisfacente approssimazione dell'effettiva soluzione?*

È evidente che rispondere affermativamente a questo interrogativo significa dimostrare che le deformazioni corrispondenti all'effettiva soluzione u ed alla approssimazione di SAINT-VENANT ν possono considerarsi come uguali, cioè che posto

$$w_i = u_i - \nu_i, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} (w_{ij} + w_{ji}) \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

il modulo del tensore e_{ij}

$$|e(x)| = |e_{ij}(x) e_{ij}(x)|^{1/2}$$

è « trascurabile ».

A questo proposito il SAINT-VENANT formula la seguente congettura:

« ... des forces, statiquement équivalentes, ou ayant la même résultante et le même moment résultant, produisent les mêmes effets sur toute la longueur de solides, quel que soit leur mode d'application et de distribution, excepté tout auprès des endroits où elles agissent, ou sur des portions à peine sensibles et dont on peut négliger de tenir compte ... » (cfr. [6], chiosa al § 22, pag. 145).

Ed ancora, riferendosi alle soluzioni ν da lui proposte,

« ... les solutions ... , bien qu'elles exigent, pour être rigoureuses, un mode particulier, jamais réalisé, d'application et de distribution des forces aux extrémités des tiges qu'elles étendent, fléchissent ou tordent, conviennent néanmoins, avec toute l'approximation désirable, si des forces qui leur soient statiquement équivalentes sont appliquées et distribuées d'un autre manière quelconque vers ces extrémités; c'est-à-dire que les dernières forces donneront les mêmes extensions, flexions et torsions que les premières, tout le long de la tige qu'elles sollicitent, en exceptant toutefois des portions très petites de sa longueur, comptées à partir des points où elles agissent ... » (cfr. [6], chiosa al § 28, pag. 174).

Il SAINT-VENANT, per giustificare la sua congettura, riferisce sulle numerose esperienze pratiche che la confermano, in particolare, su quelle dovute a DULEAU, SAVART, WERTHEIM.

La congettura di SAINT-VENANT, in quanto confortata costantemente da prove sperimentali e numeriche, è stata, successivamente, elevata al rango di principio e indicata come *Principio di Saint-Venant*.

Poiché la classica teoria lineare dell'elasticità, aderente o meno che possa essere alla realtà fisica, è una teoria matematica, cioè rigorosamente ipotetico-deduttiva, è evidente che il principio di SAINT-VENANT non può essere accettato come postulato, ma deve essere *dimostrato* matematicamente, come conseguenza di tutta l'assiomatica che sta alla base di quella teoria. Naturalmente, questo presuppone una precisa formulazione matematica del principio stesso, che indichi chiaramente quello che occorre *dimostrare*.

Alla risoluzione di questi problemi si sono dedicati numerosi ricercatori in un arco di tempo di oltre un secolo.

Il primo tentativo di una rigorosa formulazione del principio di SAINT-VENANT è dovuto a J. V. BOUSSINESQ [7]:

« ... *Des forces extérieures, qui se font équilibre sur un solide élastique et dont le points d'application se trouvent tous à l'intérieur d'une sphère donnée, ne produisent pas des déformations sensibles à des distances de cette sphère qui sont d'une certaine grandeur par rapport à son rayon ...* ».

Purtroppo, tale formulazione, sebbene dovuta ad uno Scienziato cui tanto deve la teoria matematica dell'elasticità, è assai vaga nella sua enunciazione ed è solo servita ad immergere il problema in uno più ampio, stornando l'attenzione dei ricercatori dal preciso, concreto compito posto dalla tematica di SAINT-VENANT (*deformazione del solido cilindrico caricato alle basi*) e ritardando, forse, l'effettiva soluzione del problema.

Sarebbe qui impossibile riferire su tutta la vasta letteratura originata dal problema di SAINT-VENANT, specie ove si tenesse conto di tutte le generalizzazioni e variazioni di esso. Ci limitiamo solo a citare quegli Autori le cui ricerche hanno interessato in modo più diretto il principio di SAINT-VENANT, in qualche modo rapportato al problema concreto inizialmente considerato da questo Autore. Essi sono, in ordine di tempo: M. LÉVY [8], 1877; LORD KELVIN & P. G. TAIT [9], 1903; R. SOUTHWELL [10], 1923; G. SUPINO [11], 1951; J. GOODIER [12], 1957; O. ZANABONI [13] [14], 1957; P. LOCATELLI [15], 1940; R. von MISES [16], 1945; S. TIMOSHENKO & J. GOODIER [17], 1951;

C. BIEZENO & R. GRAMMEL [18], 1953; E. STERNBERG [19], 1954; Z. KLEBOWSKI [20], 1957; H. KELLER [21], 1965; R. TOUPIN [22], 1965; A. ROBINSON [23], 1966; J. J. ROSEMAN [24], 1966.

Per ampie informazioni bibliografiche, si possono consultare le Opere [25], [26], [27].

A nostro avviso, decisivi progressi verso la definitiva formulazione e conseguentemente dimostrazione matematica del principio di SAINT-VENANT sono stati recati dai lavori di ZANABONI, von MISES e, soprattutto, TOUPIN. Di essi parleremo fra breve.

Vogliamo ora solo dire che nel 1922 G. ALBENGA, professore di Scienza delle Costruzioni nel Politecnico di Torino, malinconicamente così scriveva [28]:

« ... Questo postulato (sic!), di cui si è invano tentata una giustificazione teorica, è confermato dai risultati dell'esperienza ... ».

Per quanto concerne le prove sperimentali, più recenti di quelle indicate dallo stesso SAINT-VENANT, si vedano le Opere [29], [30], [31].

C. TRUESDELL, alla recente data del 3 gennaio del 1975, così scrive circa lo stato del problema:

« ... Saint-Venant conjectured that if each end of the twisted beam were subjected to an additional set of loads equipollent to null, the differences of stress and strain effected thereby would be small, at least at distances far from the ends. This assertion, while plausible and widely accepted pragmatically, remains unproved to this day. It is called Saint-Venant's Principle ... » ([2], pag. 124).

Fino a quella data, oltre 120 anni di ricerche non erano riuscite ancora a far completa luce sulla questione!

4. I contributi di Zanaboni, von Mises e Toupin verso la soluzione del problema.

Un'osservazione importante per la rigorosa formulazione matematica del principio di SAINT-VENANT emerge dal lavoro [13] di OSVALDO ZANABONI. Essa consiste nell'indicare che, per la verifica del principio, la trascurabilità di $|e(x)|$ non va misurata puntualmente, cioè calcolando $|e(x)|$ in un punto x di C , sia pure lontano dalle basi, ma globalmente, considerando cioè l'integrale di $|e(x)|^2$ (o, ciò che è equivalente, l'integrale dell'energia elastica) esteso a porzioni del cilindro lontane dalle basi. In effetti, se il cilindro C possiede uno

spigolo rientrante (ved. Fig. 6), è da attendersi che le derivate prime del vettore $w = u - v$, e quindi $|e(x)|$, diventino infinitamente grandi in prossimità di tale spigolo, come lo studio delle singolarità delle soluzioni del sistema omogeneo dell'elasticità, in prossimità dei punti singolari della frontiera, lascia prevedere. Ora, se x tende ad un punto x^0 del predetto spigolo, non importa quanto lontano sia x^0 dalle basi, $|e(x)|$ potrebbe tendere ad infinito, talché il discorso della sua *trascurabilità* perde significato. Ha invece senso considerare l'integrale di $|e(x)|^2$ esteso ad un cilindro di assegnata altezza, avente la stessa sezione retta di C , e verificare in che modo tale integrale tende a zero quando crescono le distanze delle sue basi dalle corrispondenti basi di C .

Fra le varie osservazioni fatte da RICHARD von MISES [16] quelle che, a nostro avviso, sono di maggior rilievo, sono, riportate al caso del cilindro C , le due seguenti: 1) è essenziale che le forze che agiscono sulle basi siano equilibrate su ciascuna di esse; 2) soddisfatta la condizione di cui al punto 1), poiché, moltiplicando le forze che agiscono sulle due basi per una stessa costante positiva ρ , la funzione $|e(x)|$ viene essa pure moltiplicata per ρ , la misura della *trascurabilità* di $|e(x)|$ va fatta *normalizzando* in modo opportuno questa grandezza.

Di tutto rilievo è il contributo apportato da RICHARD TOUPIN [22] alla definitiva soluzione della questione. Ancorché il teorema da lui dimostrato non dia risposta allo specifico problema posto dal princi-

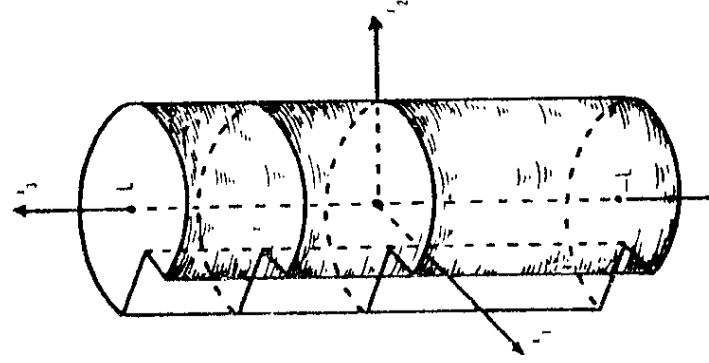


Fig. 6

prio di SAINT-VENANT, la tecnica analitica da lui introdotta può essere impiegata, come accenneremo fra poco, per una soddisfacente soluzione del problema. Il contributo di TOUPIN si concretizza nel seguente teorema.

TEOREMA DI TOUPIN. Si indichi con $C(z_1, z_2)$ il cilindro: $(x_1, x_2) \in A$, $z_1 < x_3 < z_2$ ($-L \leq z_1 < z_2 \leq L$). Si ponga:

$$U(z) = \int_{C(-L, z)} (\mu e_{ij} e_{ij} + \frac{1}{2} \lambda e_{ii} e_{ii}) dx, \quad d = L - z.$$

Se la base S_{-L} è scarica, si ha

$$(11) \quad \frac{U(z)}{U(L)} \leq \gamma_0 \exp - \frac{d}{\gamma},$$

essendo γ_0 e γ costanti che dipendono dalla geometria e dalla natura elastica di C .

Il risultato di TOUPIN dimostra che l'energia elastica conservata nel cilindro di basi S_{-L} ed S_z , rapportata all'energia totale, decade esponenzialmente quando S_z si allontana da S_L .

L'ipotesi che S_{-L} sia scarica rende questo risultato inapplicabile all'effettivo problema di SAINT-VENANT.

È veramente singolare che TOUPIN, che pure aveva in mano gli strumenti analitici per risolvere il problema, si sia limitato al conseguimento di un risultato di scarso interesse pratico.

A mio parere, ciò è conseguenza della fuorviante impostazione data al problema stesso da BOUSSINESQ, impostazione che viene ripresa nel celebre trattato del LOVE [52], dal quale il TOUPIN prende le mosse (cfr. [52], pag. 83).

Occorre anche dire che il risultato di TOUPIN era stato previsto da ZANABONI [14], il cui tentativo di dimostrazione matematica è, però, inaccettabile.

5. Il teorema del principio di Saint-Venant e sue conseguenze.

È bene, a questo punto, ricapitolare le proprietà di cui gode il vettore $w = u - v$. Esse sono le seguenti:

$$\mu w_{iikk} + (\lambda + \mu) w_{k,ik} = 0 \text{ in } C,$$

Osservo solo che, posto $d=L-z$, e dato $\varepsilon>0$, riesce

$$\frac{E(z)}{E(L)} < \varepsilon$$

appena sia

$$d > \rho + \gamma(\rho) \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

Ciò prova come $E(z)/E(L)$ diventi trascurabile appena le basi di C_ε si allontanino un poco da quelle di C .

Devo subito dire che il mio merito nel dimostrare il teorema enunciato è assai modesto, dato che la tecnica seguita è largamente ispirata a quella di TOUPIN. Ho solo introdotto taluni accorgimenti mediante i quali il procedimento di questo Autore può essere impiegato per pervenire alla dimostrazione di un teorema che, contrariamente a quello di TOUPIN, è di rilevante interesse pratico e costituisce una soddisfacente formulazione matematica del principio di SAINT-VENANT.

TOUPIN stesso [22] e, successivamente, ROSEMAN [24], avevano dedotto dalla maggiorazione *globale* (11) di TOUPIN maggiorazioni *puntuali*: TOUPIN per ogni x interno a C , ROSEMAN per ogni punto di C , ma supponendo la frontiera di A assai regolare, precisamente di classe C^4 .

Ho potuto [53], seguendo tecniche diverse da quelle di TOUPIN e ROSEMAN, dedurre analoghi risultati dalla (12). Precisamente, ho dimostrato che se $2d$ è la distanza del punto x di C dalla frontiera ∂C di C , si ha:

$$(13) \quad |e(x)| \leq \frac{1,915}{[\min(\mu, \frac{3}{2}\lambda + \mu)]^{1/2}} d^{3/2} [E(L)]^{1/2} \exp \frac{\rho-d}{2\gamma(\rho)}.$$

In un certo senso tale maggiorazione non può essere migliorata, dato che se ∂A presenta dei punti singolari (in particolare angoli rientranti) non ci si può attendere, come sopra fu detto, che $|e(x)|$ rimanga piccolo quando x tende ad un punto singolare di $\partial_1 C$, anche se tale punto è lontano da S_L e da S_{-L} ⁽⁴⁾.

⁽⁴⁾ È opportuno ricordare che in prossimità dei punti singolari di un solido elastico, dove il tensore degli sforzi può diventare infinito, il problema fisico non è schematizzabile con la classica teoria lineare dell'elasticità.

$$t_{i3} = p_i \text{ su } S_L, \quad -t_{i3} = q_i \text{ su } S_{-L},$$

$$t_{i1} n_1 + t_{i2} n_2 = 0 \text{ su } \partial_1 C,$$

$$\int_0 W(e) dx \equiv \int_0 (\mu e_{ij} e_{ij} + \frac{1}{2} \lambda e_{ii} e_{jj}) dx < +\infty$$

$$(i, j = 1, 2, 3).$$

Si è posto:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (w_{,ij} + w_{,ji}), \quad t_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda \delta_{ij} e_{hh}.$$

Si ha poi:

$$\iint_A p dx_1 dx_2 = 0, \quad \iint_A (x \wedge p) dx_1 dx_2 = 0,$$

$$\iint_A q dx_1 dx_2 = 0, \quad \iint_A (x \wedge q) dx_1 dx_2 = 0.$$

Indicherò, brevemente, con C_z il cilindro $C(-z, z)$, cioè

$$C_z: (x_1, x_2) \in A, \quad -z < x_3 < z.$$

In un lavoro in corso di pubblicazione [33] ho dimostrato il seguente teorema:

TEOREMA DEL PRINCIPIO DI SAINT-VENANT. Posto:

$$E(z) = \int_{\sigma_z} (\mu e_{ij} e_{ij} + \frac{1}{2} \lambda e_{ii} e_{jj}) dx$$

e fissato ρ ($0 < \rho < L$), si ha per $0 < z < L - \rho$

$$(12) \quad E(z) \leq E(L) \exp \frac{z + \rho - L}{\gamma(\rho)},$$

ove

$$\gamma(\rho) = \left(\frac{6\lambda + 8\mu}{\omega(\rho)} \right)^{1/2};$$

$\omega(\rho)$ è la più piccola frequenza propria non nulla delle vibrazioni libere di $C_{\rho/2}$.

Per la dimostrazione di questo teorema rimando al lavoro [33].

Rimane solo da vedere cosa accade in prossimità dei punti regolari di $\partial_1 C$. Se $x^0 \equiv \{x_1^0, x_2^0, x_3^0\}$ è un siffatto punto e se ∂A è di classe C^3 in un intorno del punto $\{x_1^0, x_2^0\}$, ho dimostrato [53] la seguente maggiorazione:

$$(14) \quad |e(x)| \leq c_0 [E(L)]^{1/2} \exp \frac{\rho - d}{2\gamma(\rho)},$$

valida per ogni x in un conveniente intorno I di x^0 (su C) e denotando con d la distanza di I dall'insieme $S_L \cup S_{-L}$. La costante c_0 dipende, oltre che da $\{x_1^0, x_2^0\}$, dalla geometria di C e dalle costanti elastiche λ e μ .

La (13) e la (14) dimostrano che all'interno di C o, anche, in prossimità dei punti regolari di $\partial_1 C$, $|e(x)|$, misurato rapportandolo a $[E(L)]^{1/2}$ diviene, a causa del fattore $\exp[-d/2\gamma(\rho)]$, trascurabile per d anche abbastanza piccolo, cioè, anche se x è non molto lontano dalle basi di C . A questo punto non può non venire in mente quanto SAINT-VENANT aveva intuito, e cioè che forze staticamente equivalenti « ... donneront les mêmes extensions, flexions et torsions ... tout le long de la tige, qu'elles sollicitent, en exceptant toutefois des portions très petites de sa longueur, comptées à partir des points où elles agissent ... ».

Sembra così concluso il lungo periodo di ricerche aperto dalla grande Memoria di SAINT-VENANT.

Volendo esprimere un parere sull'affascinante tematica iniziata dal grande ingegnere e matematico francese, riteniamo che nulla sia più efficace che ripetere qui il giudizio con il quale CAUCHY, PONCELET, PIOBERT e LAMÉ concludevano la loro relazione alla Memoria di SAINT-VENANT. Tale giudizio può estendersi a tutte le ricerche valide cui quella Memoria ha dato luogo, in particolare alle felici intuizioni di ZANABONI, alle acute critiche di von MISES, alla ingegnosa tecnica di TOUPIN:

« ... il offre un nouvel exemple de ce que peut faire la science du géomètre, unie a celle de l'ingénieur ... ».

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. J. C. BARRÉ SAINT-VENANT: *De la torsion des prismes*, Mém. Divers Savants, Acad. Sci. Paris, **14**, 255-560, 1855. Pubbl. anche a parte da Imprimerie Impériale, Paris, 1855.
- [2] C. TRUESDELL: *History of Classical Mechanics*, Die Naturwissenschaften **63**, Part. I: to 1800, 53-62; Part. II: *the 19th and 20th Centuries*, 119-130. Stringer Verlag, 1976.
- [3] G. FICHERA: *Existence Theorems in Elasticity*, Handbuch der Physik, VI a/2, 547-589, Springer Verlag, 1972.
- [4] G. FICHERA: *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno, relativi all'equilibrio di un corpo elastico*, Ann. Sc. Norm. Pisa, (3), **4**, 35-99, 1950.
- [5] R. MARCOLONGO: *Teoria matematica dello equilibrio dei corpi elastici*, Manuali Hoepli, serie scientifica, 348-349, Milano, 1904.
- [6] A. CLEBSCH: *Théorie de l'élasticité des corps solides*, traduite par M. M. SAINT-VENANT et FLAMANT, avec des Notes étendues de M. SAINT-VENANT, Dunod, Paris, 1883.
- [7] J. V. BOUSSINESQ: *Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1885.
- [8] M. LÉVY: *Mémoires sur la théorie des plaques élastiques planes*, Jour. Math. pur. et appli. (3), **3**, 1877.
- [9] LORD KELVIN (W. THOMSON) - P. G. TAIT: *Treatise on natural Philosophy*, Cambridge, 1903.
- [10] R. SOUTHWELL: *On Castigliano's theorem of least work and the principle of Saint-Venant*, Phil. Mag. (6), **45**, 193-212, 1923.
- [11] G. SUPINO: *Sopra alcune limitazioni per la sollecitazione elastica e sopra la dimostrazione del principio del De Saint-Venant*, Ann. Mat. (4), **9**, 91-119, 1931.
- [12] J. N. GOODIER: *A general proof of Saint-Venant principle*, Phil. Mag. (7), **23**, 607-609, 1937.
- [13] O. ZANABONI: *Dimostrazione generale del principio del De Saint-Venant*, Rend. Accad. Lincei, **25**, 117-121, 1937.
- [14] O. ZANABONI: *Sull'approssimazione dovuta al principio del De Saint-Venant nei solidi prismatici isotropi*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **26**, 340-345, 1937.
- [15] P. LOCATELLI: *Estensione del principio di St. Venant a corpi non perfettamente elastici*, Atti Accad. Sci. Torino, **75**, 502-510, 1940.
- [16] R. von MISES: *On Saint-Venant's principle*, Bull. Amer. Math. Soc., **51**, 552-562, 1945.

- [17] P. TIMOSHENKO - J. N. GOODIER: *Theory of Elasticity*, 2nd. ed. Mc Graw Hill New York, 1951.
- [18] C. B. BIEZENO - R. GRAMMEL: *Technische Dynamik*, Springer Verlag, 1953.
- [19] E. STERNBERG: *On Saint-Venant principle*, Q. Appl. Math. 11, 393-402, 1954.
- [20] Z. KLEBOWSKI: *Sul principio di Saint-Venant. Sua corretta formulazione* (in polacco), Zeszyty Naukowe Polit. Warsz. 27, 1957.
- [21] H. B. KELLER: *Saint-Venant procedure and Saint-Venant principle*, Q. Appl. Math., 22, 293-304, 1965.
- [22] R. TOUPIN: *Saint-Venant's principle*, Arch. Rat. Mech. & Anal., 18, 83-96, 1965.
- [23] A. ROBINSON: *Non-Standard Analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1966.
- [24] J. J. ROSEMAN: *A point-wise estimate for the stresses in a cylinder and its application to Saint-Venant's principle*, Arch. Rat. Mech. & Anal., 21, 23-48, 1966.
- [25] G. Y. DJANELIDZE: *Il principio di Saint-Venant (nel suo centenario)* (in russo), Trudy Leningrad Polit., 192, 1958.
- [26] L. SOLOMON: *Elasticité linéaire*, Masson et C. ie, Paris, 1968.
- [27] M. E. GURTIN: *The linear Theory of Elasticity*, Handbuch der Physik, VI a/2, Springer Verlag, 1972.
- [28] G. ALBENGA: *Meccanica applicata alle costruzioni. Parte 1^a: Teoria dell'Elasticità*, Ed. lit. Viretto, Torino, 1922-1923.
- [29] G. COLONNETTI: *La statica delle costruzioni*, U. T. E. T., Torino, 1922-23.
- [30] L. SOBRERO: *Elasticidade*, Livraria Boffoni, Rio de Janeiro, 1942.
- [31] M. M. FROCHT: *Photoelasticity*, 2, J. Wiley, New York, 1948.
- [32] A. E. H. LOVE: *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th. Edition, Cambridge Univ. Press, 1927.
- [33] G. FICHERA: *Remarks on Saint-Venant's Principle*, in corso di pubblic. in U. R. S. S. nel volume dedicato a I. N. Vekua per il suo 70° compleanno.

Pervenuto in Redazione il 15 dicembre 1976.

Accettato per la pubblicazione il 5 gennaio 1977.